

【学位論文審査の要旨】

1 研究の目的

結び目理論とは、3次元球面に埋め込まれた円周の分類を目標とする位相幾何学（トポロジー）の一分野であり、とくに3次元多様体の理論と密接な関係がある。

1970年代前半までの、いわゆる古典的な結び目理論は、結び目の補空間の基本群、或いは補空間の被覆空間のホモロジー群に由来する、アレキサンダー多項式等の代数的不変量が主な研究対象であったが、1970年代後半のサーストンによる双曲幾何学の導入や、1980年代のジョーンズ等による結び目の量子多項式の発見等、画期的な発見が相次ぎ、現在まで活発な研究が行われている。とくに、2000年代以降は、結び目の量子不変量の漸近挙動に、双曲体積やチャーン・サイモンズ不変量等の、双曲幾何学に由来する不変量が現れるという、いわゆる結び目の体積予想が注目を集めている。

結び目のねじれアレキサンダー多項式とは、リン・和田によって1990年代に導入された不変量で、結び目の補空間の基本群とその表現に対して定義され、アレキサンダー多項式の自然な一般化として、結び目のファイバー性、半順序、可逆性、周期性等、様々な応用が知られている。2010年代になると、ダンフィールド・フリーデル・ジャクソンは、補空間が完備双曲構造を許容する、いわゆる双曲結び目に対し、そのホロノミー表現に対応するねじれアレキサンダー多項式を組織的に計算し、結び目のファイバー性がねじれアレキサンダー多項式で決定されると予想したが、双曲結び目のホロノミー表現に対応するねじれアレキサンダー多項式の計算は非常に困難であり、ツイスト結び目等、ごく一部の結び目族でしか確認されていない。一方、最近、ねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動に、双曲体積が現れることが合田によって示されたが、これを複素化するパークの予想とともに注目されている。

本論文の目的は、双曲結び目のホロノミー表現に対応するねじれアレキサンダー多項式を効率的に計算する方法を開発し、実際に幅広いクラス的双曲結び目に適用することで、ダンフィールド・フリーデル・ジャクソンの予想の解決に寄与すること、及び6交点までの結び目に対して、ねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動を具体的に計算し、合田・パークの予想の解決に寄与することである。

2 研究の方法と結果

本論文の第3章で扱うプレッツェル結び目の無限族は、結び目の例外型デーネ手術に関する研究において重要な実例を提供する有名な結び目族である。トンネル数が1である性質を利用して、基本群の2生成元表示を導出することで、ねじれアレキサンダー多項式の計算の複雑さを最小にしていること、補空間からある円周を取り除いた3次元多様体の理想四面体分割を構成し、双曲構造方程式の解から、基本群のホロノミー表現を導出してい

ることが特徴である。結果として、ねじれアレキサンダー多項式の次数と各係数を完全に書き下すことに成功しており、ダンフィールド・フリーデル・ジャクソンの予想が成立することが直接確認できる。

本論文の第4章で扱うモンテシーノス結び目は、ザイフェルト空間を2重被覆空間にもつ結び目として特徴づけられる結び目族であり、有限個の有理タングルを数珠つなぎにして得られる。トンネル数1のモンテシーノス結び目は、クリメンコ・作間によって完全に分類されており、有理タングルの数は3以下に限定されるものの、2橋結び目や重要なブレッツェル結び目を含む、非常に大きいクラスであることが知られている。第1節では、有理タングルの数が2、すなわち2橋結び目の場合を扱っているが、有理タングルの連分数表示に対応した生成元・関係子から得られるねじれアレキサンダー行列を、粘り強く簡約化していくことで、ねじれアレキサンダー多項式の次数と最高次の係数を書き下すことに成功している。第2節では、有理タングルの数が3で $1/2$ タングルを含む場合に、第1節と同じ手法ではあるものの倍以上の労力で、ねじれアレキサンダー多項式の次数と最高次の係数を書き下すことに成功している。第3節では、有理タングルの数が3で $1/3$ タングルを含む場合に、第3章と同じ手法で、ねじれアレキサンダー多項式の次数と各係数を完全に書き下すことに成功している。

本論文の第5章では、双曲結び目のねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動に、双曲体積とチャーン・サイモンズ不変量が現れるという、合田・パークの予想を扱う。具体的には、6交点までの結び目に対して、補空間の理想四面体分割から導出される、 \mathbb{C}^2 上のホロノミー表現をベースに、 \mathbb{C}^2 の対称積空間上の表現族を構成し、対応するねじれアレキサンダー多項式の1における特殊値の漸近挙動に関する数値実験を行っている。対称積の回数を上げると、ねじれアレキサンダー行列のサイズが増大し、ねじれアレキサンダー多項式の特殊値も指数関数的に発散するため、計算量と誤差を最小限に留める工夫と手数が必要があるが、最終的に合田・パークの予想の裏付けとなる初めての計算結果を導いていることは、注目に値する。

3 審査の結果

双曲結び目のホロノミー表現に対応するねじれアレキサンダー多項式を効率的に計算する方法を開発し、トンネル数1のモンテシーノス結び目のねじれアレキサンダー多項式を具体的に書き下したことで、ダンフィールド・フリーデル・ジャクソンの予想に新たな裏付けを与えたのみならず、今後さらなる応用が期待できる。

また、合田・パークの予想に対して、実験ベースではあるものの、初めて裏付けとなる計算結果を提示したことで、ねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動に関する研究に拍車がかかることが期待される。また、結び目の体積予想、すなわち結び目のジョーンズ多項式の漸近挙動との関連も興味深い。

以上のことから、本論文は博士（理学）の学位に十分値するものと判断する。

4 最終試験の結果

本専攻の学位規定に従って、公開の席上で学位論文を発表し、それに関する数理科学専攻教員等の質疑応答をもって試験とした。また、申請論文および関連分野について、学位論文審査委員による試問を行った。

これら試験および試問を総合し、専門科目および外国語についても十分な学力を有するものと認め、合格と判定する。