

修士学位論文

題 名

バミューダンスワップションのプライシングについて

頁 1 ～ 80

指導教員 竹原 浩太

2021年 1月 12日提出

東京都立大学大学院

経営学研究科（博士前期課程） 経営学専攻

学修番号 19838301

ふ り が な
氏 名 藤澤 かずたか
一貴

2020 年度 修士論文

バミューダンスワップシヨンのプライシングにつ
いて

東京都立大学 経営学研究科
ファイナンスプログラム

藤澤 一貴
学修番号 19838301

2021 年 1 月 12 日

目次

第 1 章	研究の背景	1
第 2 章	アメリカンモンテカルロ法について	5
2.1	Lower Price	5
2.2	Upper Price	9
第 3 章	金利モデルについて	16
3.1	Black Model, Normal Model	17
3.2	LIBOR Market Model	21
3.3	SABR モデル	24
3.4	LMM-SABR	27
第 4 章	数値実験結果	28
4.1	プライシング手順	28
4.2	既存研究との比較	36
4.3	異なる市場環境における適切な説明変数の選択	39
第 5 章	結論および今後の研究課題	52
	謝辞	54
付録 A	Belomestny et al. [6] の手法における計算手順に関する補足	55
付録 B	shifted-LMM-SABR におけるヨーロッパンスワップシヨンの解析近似解 の導出	61
付録 C	shifted-LMM-SABR におけるヨーロッパンスワップシヨンの解析近似解	

の精度検証	71
参考文献	78

第 1 章

研究の背景

バミューダンスワップションは、権利行使可能な時点がオプション満期に限られるヨーロッパンスワップションとは異なり、複数の権利行使時点の中から任意の 1 時点に開始されるスワップを原資産とするオプションである。そのため、ヨーロッパンスワップションに比べて高いプレミアムを得ることができることから、数多くの仕組債に組み込まれ、そのプライシングは仕組債の評価において重要な問題である。また、市場標準のプライシングモデルから乖離したモデルやプライシング手法を使うと、市場実勢と乖離したプライスを算出し、予期せぬ損失を出してしまう可能性もあることから、リスク管理上もモデルおよびプライシング手法の選択は重要な問題である [29]。そこで、本研究ではバミューダンスワップションの適正なプライシング手法について検討する。バミューダンスワップションのプライシングについては、(a) バミューダンオプションのプライシング手法の観点 (b) スワップションを計算するにあたっての金利モデルの観点の 2 点があることから、まずは (a) の観点について述べる。

バミューダンオプションは、アメリカンオプションの場合と同様に、ある時点での権利行使を判断するにはその時点で権利行使した場合の価値（権利行使価値）と権利行使せず継続した場合の価値（継続価値）を比較する必要があるため、最もシンプルな Black-Scholes モデルの下でも（ヨーロッパンオプションとは異なり）解析解は知られていない。そのため、なんらかの数値計算法を用いる必要がある。バミューダンオプションに類似した形態として、連続的な任意の時点で権利行使可能なアメリカンオプションがあり、両者は離散的に近似して解く場合、本質的に同一であるため、まずアメリカンオプションの数値計算法の概略について述べる。

アメリカンオプションのプライシングではいくつかの数値計算法が知られているが、

代表的なものがツリー法とモンテカルロ法である。前述のように、アメリカンオプションは権利行使価値と継続価値を比較しながらプライスを計算するため、満期時点から後進的に計算するツリー法が適しており、前進的にパスを発生させるモンテカルロ法による評価は 20 世紀中は研究が進んでいなかった [32]。しかし、ツリー法には次元数が高くなるにつれて計算量が大幅に増加するという欠点があり、原資産が多次元のモデルでは現実的には解くことができなくなる。特にスワップションのような金利モデルを前提とする場合は次元が高くなりやすいため、ツリー法で解くのは困難である。一方、本来は適しているはずのモンテカルロ法では、アメリカンオプションを評価する手法（アメリカンモンテカルロ法と呼ばれる）が 20 世紀末に開発され、近年では様々な研究が進み、今では高次元のアメリカンオプションのプライシングではアメリカンモンテカルロ法を用いるのが一般的になっている。そこで、本研究でもアメリカンモンテカルロ法を用いたプライシングを検討する。

アメリカンモンテカルロ法には種々の方法が存在するが [16]、その代表的な手法が最小二乗モンテカルロ（Least Square Monte Carlo, LSM）法である。これは Longstaff and Schwartz [24] らにより導入された手法で、継続価値を回帰により推定することで評価するが、ロジックの簡明さなどから実務家の間で広く用いられている。LSM 法では、用いる回帰式の精度が重要な要素であるが、一般的にどのような回帰式が望ましいのかは理論的に明らかになっておらず、個別の問題に依存する。また、LSM 法によるプライスは回帰の次数（詳細は 2.1 節参照）を高める等により、理論的に真値に近付くことが知られているが、その期待値は必ず真値よりも低い値を取り（これを、下方バイアスと呼ぶ）、真値にどの程度近い値が得られているのかを把握することは難しい。そこで、真値よりも大きな期待値を取る（これを、上方バイアスと呼ぶ）推定値を計算できれば、LSM 法による推定値とで挟むことで、真値の範囲を把握できる。そして、上方バイアスを持つ推定値と下方バイアスを持つ推定値の精度を上げればより精緻なプライシングが可能となる。上方バイアスを持つアメリカンモンテカルロ法の代表的な手法が Rogers [28] が導入した双対法（duality method）の概念である。双対法ではある性質を持ったマルチンゲールを導入することで、上方バイアスを持つ推定値を計算するが、一般にどのようなマルチンゲールを用いればよいのかは明らかになっておらず、個別の問題により異なると考えられている。

次に (b) の、金利モデルの観点について述べる。金利モデルには種々のものがあるが [10]、実務で好んで多用されるのはショートレートモデルとマーケットモデルであろう。ショートレートモデルは瞬間的スポットレートをモデリングしたもので、その代表的なモデルがハル・ホワイトモデルであるが、それらは瞬間的スポットレートという市

場では直接観測し難い指標をモデリングしていることから、実務上はやや用いづらいという欠点があった。一方、マーケットモデルは市場で直接観測される金利をモデリングしたものであり、その代表的なものがフォワードレート (フォワード LIBOR) を直接モデリングした LIBOR Market Model(LMM) である。なお、円 LIBOR においては 2021 年末に LIBOR の公表停止が見込まれており、それ以降は金利スワップの主要な市場は無担保コール O/N レートをベースとした複利後決め金利を変動金利とする OIS になると考えられているが、LMM は LIBOR という名称ではあるものの、同様のモデルを用いた OIS スワップションのプライシングは可能である [25]。

また、ヨーロッパスワップションのプライシングにおいて市場参加者の間で広く用いられている Normal model や shifted-log Normal model もマーケットモデルであることから、キャリブレーション等の際相性が良い。加えて、LMM を shift させた shifted-LMM も LMM のフレームワークを活かしながらマイナス金利にも対応できることから、実務上広く用いられている。

さらに、精緻なプライシングのためには、市場で観測されるボラティリティスマイルのダイナミクスを表現可能であることが求められる。ボラティリティスマイルのモデルについても種々のモデルが存在するが [33]、現在実務上広く用いられているのが、SABR モデルである。SABR モデルは、確率局所ボラティリティモデルの一種で、4 つのパラメーターで各フォワードレートのボラティリティスマイルのダイナミクスを表現する。この SABR モデルを先述した shifted-LMM と組み合わせた shifted-LMM-SABR を用いることで、マイナス金利に対応可能でかつボラティリティスマイルを考慮したイールドカーブ全体のダイナミクスを表現することができる。

以上のことから、本稿では shifted-LMM-SABR を用いたアメリカンモンテカルロ法によるバミューダンスワップションのプライシングについて議論する。LMM の下で、LSM 法や双対法を用いたバミューダンスワップションに関する種々の先行研究はある ([1], [22]) が、一方で shifted-LMM-SABR を前提とした分析は、筆者の知る限り行われていない。このうち LSM 法においては回帰での説明変数の選択が、双対法においてはマルチンゲールの選択が重要であると考えるが、本稿ではその中でも特に前者について数値実験を通して比較・検討し、バミューダンスワップションのプライシングの精緻化に役立てたい。

特に現在の円金利市場で主要なモデルと考えられる shifted-LMM-SABR において、説明変数の選択に着目した研究は広く知られておらず、プライシングにおけるリスクが相応に存在している状況である。そこで、本研究においてはいくつかの市場環境を仮定し、そ

れらの下で異なる説明変数を選択した場合の結果を比較することで、どのような説明変数の選択が適切なのか分析を行うこととする。この分析をすることで、仕組債等の評価の精緻化に繋げることができる。特に本稿では、まずアメリカンオプションのプライシングの枠組みおよび金利モデルの理論的背景について述べた後、数値実験結果を示すことで論じていきたい。

最後に、本稿の構成を以下の通り示す。

2 章では、アメリカンモンテカルロ法について、特に LSM 法および双対法に焦点を当てて説明する。3 章では、金利モデルについて段階的に説明する。4 章では、バミューダンスワップションを対象に具体的な数値例を通じた分析を行い、5 章で結論および今後の研究課題を述べる。なお、双対法、ヨーロピアンスワップションの解析近似解についての補足事項は、付録 A,B,C にまとめる。

第 2 章

アメリカンモンテカルロ法について

アメリカンオプションとは連続時間において、満期までの任意の時点の中から 1 つ選んで権利行使できるオプションである。一方、バミューダンオプションはあらかじめ離散的に定められた複数の時点の中から 1 つを選んで権利行使できるオプションである。そのため、離散時間の枠組みの中で考えればアメリカンオプションはバミューダンオプションの一種と捉えることができる。

モンテカルロ法を用いる場合、基本的に時間を離散化して考えるため、本稿ではアメリカンオプションとバミューダンオプションを同一視し、本章ではアメリカンオプションをモンテカルロ法を用いて評価する枠組み (以下、アメリカンモンテカルロ法と呼ぶ) について述べる。アメリカンモンテカルロ法は、主にアメリカンオプションの真の価格より必ず低い期待値を持つ推定値 (Lower Price と呼ぶ) を得る手法と必ず高い期待値を持つ推定値 (Upper Price と呼ぶ) を得る手法の 2 つの観点があるため、これらの代表的な手法について述べる。

2.1 Lower Price

まず、初めに stopping time の概念が必要になることから、それについて述べる。フィルター付き確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{Q})$ とする。このとき、stopping time τ とは $(0, \infty)$ に値をとり、任意の t について $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ である確率変数のことである [36]。

この、 τ を用いて各権利行使時点 $\{T_k^{ex}\}_{k=0,1,\dots,M^{ex}}$ におけるアメリカンオプションの真の価格 (以下、真値と呼ぶ) $V_{T_k^{ex}}$ は時点 t での割引ペイオフを Y_t として以下で定義され

る [30]。

$$V_{T_k^{ex}} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_k} E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_\tau] = E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_{\tau_{T_k^{ex}}^*}] \quad (2.1)$$

なお、 $E_t^{\mathbb{Q}}[\cdot] := E^{\mathbb{Q}}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ であり、 $\mathcal{T}_k := \{\tau : \Omega \rightarrow \{T_k^{ex}, \dots, T_{M^{ex}}^{ex}\}; \text{stopping time}\}$ 、 $\tau_{T_k^{ex}}^* := \min\{T_{k'}^{ex}; T_k^{ex} \leq T_{k'}^{ex} \leq T_{M^{ex}}^{ex}, Y_{T_{k'}^{ex}} > E_{T_{k'}^{ex}}^{\mathbb{Q}}[V_{T_{k'+1}^{ex}}] =: C_{T_{k'}^{ex}}\}$ である。また、 $C_{T_{k'}^{ex}}$ は $T_{k'}^{ex}$ における継続価値と呼ばれる。

この $\tau_{T_k^{ex}}^*$ は T_k^{ex} における最適停止時刻とよばれ、経済学的には T_k^{ex} 以降において、権利行使価値 $Y_{T_{k'}^{ex}}$ が継続価値 $C_{T_{k'}^{ex}}$ を上回る最小の時刻 $T_{k'}^{ex}$ と考えられる。

ここで、任意の $\hat{\tau} \in \mathcal{T}_k$ に対して

$$V_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}} := E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_{\hat{\tau}}] \quad (2.2)$$

とすると、(2.1) 式と \sup の定義から、

$$V_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}} = E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_{\hat{\tau}}] \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_k} E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_\tau] = V_{T_k^{ex}} \quad (2.3)$$

となり、 $V_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}}$ は真値 $V_{T_k^{ex}}$ 以下となることがわかる。また、 $V_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}}$ のモンテカルロシミュレーションによる推定値を

$$\hat{V}_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_{\hat{\tau}_{T_k^{ex}}^{(i)}} \quad (2.4)$$

で定義する。なお、 i, N はそれぞれパスのインデックスおよびパスの総数を表し、 $\hat{\tau}_{T_k^{ex}}^{(i)}$ はパス毎に計算される $\hat{\tau}_{T_k^{ex}}$ の実現値を表す。

このとき、

$$E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}}] = V_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}} \quad (2.5)$$

が成り立つため、(2.3) 式とあわせて

$$E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}}] \leq V_{T_k^{ex}} \quad (2.6)$$

を得る。すなわち、 $\hat{V}_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}}$ は真値 $V_{T_k^{ex}}$ より必ず低い期待値を持つため、これを (下方バイアスを持つ) Lower Price と呼ぶこととする。

また、仮に最適な $\tau_{T_k^{ex}}^*$ を得ることができればバイアスを持つことなく真値の推定が行える

が、これを得るには継続価値 $C_{T_k^{ex}}$ が必要である。しかし、継続価値 $C_{T_k^{ex}}$ は条件付き期待値 $E_{T_k^{ex}}^Q[V_{T_{k+1}^{ex}}]$ であったから、これを得るのは容易ではない。そこで、 $C_{T_k^{ex}}$ を何らかの方法で推定したものを $\hat{C}_{T_k^{ex}}$ とし、これを用いて $\tau_{T_k^{ex}}^*$ の推定値 $\hat{\tau}_{T_k^{ex}}$ を、

$$\hat{\tau}_{T_k^{ex}} := \begin{cases} \min\{T_{k'}; T_k^{ex} \leq T_{k'}^{ex} \leq T_{M^{ex}}^{ex}, Y_{T_{k'}^{ex}} > \hat{C}_{T_k^{ex}}\} & (k = 0, 1, \dots, M^{ex} - 1) \\ T_M^{ex} & (k = M^{ex}) \end{cases} \quad (2.7)$$

として定める。

(2.7) 式にある $\hat{C}_{T_k^{ex}}$ を得る方法は種々のものが知られているが ([16] [35])、代表的なものが Longstaff and Schwartz [24] による最小二乗モンテカルロ (Least Square Monte Carlo, LSM) 法であり、ロジックが簡明であることなどから広く実務面でも用いられている方法である。LSM 法は、 $E[(Y - g(X))^2]$ を最小にする関数は $g(X) = E[Y|X]$ で与えられることを利用し、まさに条件付き期待値で表されるアメリカンオプションの継続価値を求める試みであり、各パスにおける継続価値関数を基底関数と呼ばれるある関数の線形和を用いて表し、その係数を最小二乗法により求める方法である。

なお、Glasserman [16] によれば、回帰係数を決定するためのパスとその係数をもとにオプション価格を求めるためのパスを同一のパスで行うと (2.6) 式が成立せず、Lower Price を得ることができないことから、本稿では回帰係数を決定するパスとその係数をもとにオプション価格を求めるパスを独立なパスで行うこととする。

LSM 法の計算手順を簡単に示すと、

(1) 回帰係数を決定するプロセス

原資産のパスを生成後 (2.1) 式に基づき後ろ向きに解いていく。その際、継続価値 $\hat{C}_{T_k^{ex}}$ を同一パス上における一つ先のオプション価値を被説明変数とし、(後述する) 基底関数を説明変数とする回帰を用いて推定する。これを T_0^{ex} 時点まで繰り返すことで、回帰係数を推定することができる。

(2) オプション価格を求めるプロセス

(1) で用いたものとは独立な原資産の別のパスを生成し、(1) で推定した回帰係数を用いることで $\hat{C}_{T_k^{ex}}$ を得る。この $\hat{C}_{T_k^{ex}}$ を用いて (2.1) 式に基づき前向きに解いていくことで、各パスにおける $\hat{\tau}_{T_0^{ex}}^{(i)}$ を得ることができる。これを (2.4) 式に代入することで、 $\hat{V}_{T_0^{ex}}^{\hat{\tau}}$ を得る。

さらに、これらの具体的な計算手順を示す。

1. 回帰係数を決定するためのプロセス

- (a) $t \in [T_0^{ex}, T_{M^{ex}}^{ex}]$ である連続時間モデルを $T_0^{ex} = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_n = T_{M^{ex}}^{ex}$ に離散化し、 N^R 本の原資産のパス $\{S_{t_j}^{(i)}\}_{j=0,1,\dots,n}^{i=1,2,\dots,N^R}$ を生成する。

- (b) $k = M^{ex}$ 時点から後ろ向きに解いていく。 $k = M^{ex}$ において、パス i 毎に以下を定める。

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{T_{M^{ex}}}^{(i)} &= T_{M^{ex}}^{ex}, \\ \hat{V}_{T_{M^{ex}}}^{(i)} &= Y_{\hat{\tau}_{T_{M^{ex}}}^{(i)}}^{(i)} = Y_{T_{M^{ex}}}^{(i)}\end{aligned}$$

なお、 $\hat{V}_{T_{M^{ex}}}^{(i)}$ はパス i における $T_{M^{ex}}^{ex}$ 時点でのオプション価格である。これを $i = 1, 2, \dots, N^R$ について行うことで、 $\{\hat{\tau}_{T_{M^{ex}}}^{(i)}\}_{i=1,2,\dots,N^R}$ 、 $\{\hat{V}_{T_{M^{ex}}}^{(i)}\}_{i=1,2,\dots,N^R}$ を得る。

- (c) $k = M^{ex} - 1$ 時点において、 $D \in \mathbb{N}$ を固定し、

$$\gamma_{T_{M^{ex}-1}}^{ex} = \begin{pmatrix} \gamma_{T_{M^{ex}-1}}^{(0)} \\ \gamma_{T_{M^{ex}-1}}^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{T_{M^{ex}-1}}^{(D)} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^D$$

なるベクトルと S に関する関数 $\psi^{(q)}(S) (q = 0, 1, \dots, D)$ 、これを基底関数と呼ぶ) を考え、

$$\hat{\gamma}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex} = \arg \min_{\gamma_{T_{M^{ex}-1}}^{ex}} \left(\sum_{i=1}^{N^R} \left(\hat{V}_{T_{M^{ex}}}^{(i)} - \sum_{q=0}^D \gamma_{T_{M^{ex}-1}}^{(q)} \psi^{(q)}(S_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)}) \right)^2 \right)$$

より、 $\hat{\gamma}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex}$ を求める。これにより、継続価値の推定値 $\hat{C}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex}$ を、

$$\hat{C}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex} = \hat{c}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex} (S_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)})$$

但し、

$$\hat{c}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex} (S) := \sum_{q=1}^D \hat{\gamma}_{T_{M^{ex}-1}}^{(q)} \psi^q(S)$$

とし、さらに $\hat{\tau}_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)}$ を

$$\hat{\tau}_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)} := \begin{cases} T_{M^{ex}-1}^{ex} & \left(Y_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)} > \hat{c}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex} (S_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)}) \right) \\ \hat{\tau}_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)} & \left(Y_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)} \leq \hat{c}_{T_{M^{ex}-1}}^{ex} (S_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)}) \right) \end{cases} \quad \text{for } i = 1, \dots, N^R$$

と定義すると、これを用いて

$$\hat{V}_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)} = Y_{\hat{\tau}_{T_{M^{ex}-1}}^{(i)}}^{(i)}$$

を $i = 1, 2, \dots, N^R$ について順次計算することで、パス i における $T_{M^{ex}}^{ex}$ 時点でのオプション価値 $\{\hat{V}_{T_{M^{ex}-1}^{ex}}^{(i)}\}_{i=1,2,\dots,N^R}$ を得ることができる。

(d) これを、 $k = M^{ex} - 2, M^{ex} - 3, \dots, 0$ まで同様に計算することで、継続価値を表す関数 $\{\hat{c}_{T_k^{ex}}(S)\}_{k=0,\dots,M^{ex}}$ を決定できる。

2. オプション価格を求めるプロセス

(a) N^V 本の原資産のパス $\{S_{t_j}^{(i')}\}_{j=0,1,\dots,n}^{i'=1,2,\dots,N^V}$ を 1-(a) で用いたものとは独立な乱数を用いて生成する。

(b)

$$\hat{\tau}_{T_0^{ex}}^{(i')} = \min\{T_{k'}^{ex}; T_0^{ex} \leq T_{k'}^{ex} \leq T_{M^{ex}}^{ex}, Y_{T_{k'}^{ex}}^{(i')} > \hat{c}_{T_{k'}^{ex}}(S_{T_{k'}^{ex}}^{(i')})\}$$

を $i' = 1, 2, \dots, N^V$ について計算することで、 $\{\hat{\tau}_{T_0^{ex}}^{(i')}\}_{i'=1,2,\dots,N^V}$ が得られる。

(c) (2.4) 式より、 T_0^{ex} 時点での真値 $V_{T_0^{ex}}$ に対する Lower Price $\hat{V}_{T_0^{ex}}^L$ を、

$$\hat{V}_{T_0^{ex}}^L = \frac{1}{N^V} \sum_{i'=1}^{N^V} Y_{\hat{\tau}_{T_0^{ex}}^{(i')}}^{(i')}$$

で定める。このとき、(2.6) 式より、

$$E^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_0^{ex}}^L] \leq V_{T_0^{ex}} \quad (2.8)$$

であることに注意しておく。すなわち、 $\hat{V}_{T_0^{ex}}^L$ は Lower Price である。以上のように LSM は、簡明なロジックではあるが、以下のような事実も知られている。

1. LSM によるアメリカンオプションの推定値は、基底関数の数を増やせば真値に収束することが知られているが [24]、一方で (2.6) 式より真値よりも下方バイアスを持つものの、真値とどの程度乖離しているのか推定することは難しい。一方、仮に上方バイアス (2.2 節参照) を持つ推定値を得ることができれば、上下のバイアスを持つ推定値の間に真値があると推定することが可能になる。
2. 一般的に基底関数としてどのような関数を選択すれば良いかは明らかになっておらず [32]、対象とするアメリカンオプションのペイオフ構造や原資産のモデルにより、適切な基底関数は異なると考えられる。

2.2 Upper Price

(2.6) 式とは反対に、

$$V_{T_k^{ex}} \leq E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_k^{ex}}^{\hat{\tau}}] \quad (2.9)$$

が成立するような真値より高い期待値を持つ推定値 $\hat{V}_{T_k^{ex}}^{\uparrow}$ (以下、上方バイアスを持つ Upper Price と呼ぶ) を得る方法を考えたい。その代表的な方法の 1 つが双対法 (Duality method) である。これは、ある性質を満たすマルチンゲールを用いることで Upper Price を構成する方法である。双対法としては、Rogers [28] による加法的なマルチンゲールを用いる方法 (Additive Duality Method) と Jamshidian [21] による乗法的なマルチンゲールを用いる方法 (Multiplicative Duality Method) の 2 つがよく知られているが、本稿では Additive Duality Method を用いることとし、[28] に倣い解説を行う。

まず、 $M_{T_0^{ex}} = 0$ なるマルチンゲール M を考える。すると、任意の $k = 0, 1, \dots, M^{ex}$ について、 $E_{T_0^{ex}}[M_{T_k^{ex}}] = M_{T_0^{ex}} = 0$ なので、(2.1) 式より、

$$\begin{aligned} V_{T_0^{ex}} - M_{T_0^{ex}} &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_{\tau}] - M_{T_0^{ex}}, \\ V_{T_0^{ex}} &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_{\tau}] - E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[M_{T_k^{ex}}] + M_{T_0^{ex}} \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_{\tau} - M_{T_k^{ex}}] \end{aligned}$$

となる。ここで、Jensen の不等式より、

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[Y_{\tau} - M_{T_k^{ex}}] &\leq E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\max_{0 \leq k \leq M^{ex}} (Y_{T_k^{ex}} - M_{T_k^{ex}})] \\ &\leq \inf_{M \in \mathcal{M}} E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\max_{0 \leq k \leq M^{ex}} (Y_{T_k^{ex}} - M_{T_k^{ex}})] \\ &\quad (\mathcal{M} := \{M; M \text{ はマルチンゲール}, M_{T_0^{ex}} = 0\}) \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$V_{T_0^{ex}} \leq \inf_{M \in \mathcal{M}} E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\max_{0 \leq k \leq M^{ex}} (Y_{T_k^{ex}} - M_{T_k^{ex}})]$$

または同値な表現として、任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して、

$$V_{T_0^{ex}} \leq E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\max_{0 \leq k \leq M^{ex}} (Y_{T_k^{ex}} - M_{T_k^{ex}})] \quad (2.10)$$

となるので、 $M_{T_0^{ex}} = 0$ を満たすマルチンゲール M を任意にとり、

$$V_{T_0^{ex}}^M = E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\max_{0 \leq k \leq M^{ex}} (Y_{T_k^{ex}} - M_{T_k^{ex}})] \quad (2.11)$$

とすれば、(2.10) 式は T_k^{ex} 時点でも成立するので、

$$V_{T_k^{ex}} \leq V_{T_k^{ex}}^M \quad (2.12)$$

となる。さらに、 $V_{T_k^{ex}}^M$ のモンテカルロシミュレーションによる推定値 $\hat{V}_{T_k^{ex}}^M$ を、

$$\hat{V}_{T_k^{ex}}^M := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_{k \leq k' \leq M^{ex}} (Y_{T_{k'}^{ex}}^{(i)} - \hat{M}_{T_{k'}^{ex}}^{(i)}) \quad (2.13)$$

で定義する。なお、 i, N はそれぞれパスのインデックスおよびパスの総数、 $\hat{M}_{T_k^{ex}}^{(i)}$ はパス i における $M_{T_k^{ex}}$ の推定値である。(2.12),(2.13) 式より、

$$V_{T_k^{ex}} \leq E_{T_k^{ex}}^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_k^{ex}}^M] = V_{T_k^{ex}}^M \quad (2.14)$$

が成立するので、上方バイアスを持つ Upper Price を得ることができる。

なお、マルチンゲール M として 真値 $V_{T_k^{ex}}$ に対する Doob-Meyer 分解^{*1}のマルチンゲール M^* を用いるとき、(2.10) 式は等式で成立することが知られている ([7])。そのため、(2.11) 式におけるマルチンゲール M としては、この M^* に近いものをとることが望ましい。マルチンゲール M^* は、真値 $V_{T_k^{ex}}$ に対する Doob-Meyer 分解を適用すれば、

$$\begin{aligned} V_{T_k^{ex}} &= V_{T_0^{ex}} + M_{T_k^{ex}}^* - A_{T_k^{ex}}^* \\ \iff M_{T_k^{ex}}^* &= V_{T_k^{ex}} - V_{T_0^{ex}} + A_{T_k^{ex}}^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

により得ることができるが、これには結局真値 $V_{T_k^{ex}}$ が必要であるため容易ではない。そのため、なんらかの手法を用いて M を推定する必要がある、それについて種々の研究がなされている [7]。その代表的なものに Andersen and Broadie [3] による primal-dual method と呼ばれるものがある。primal-dual method は Lower Price を求める際に用いた行使境界 (継続価値関数) を用いて、Upper Price を求める方法である。しかし、この手法に必要な条件付き期待値を計算する際に、各パスの各時点でモンテカルロシミュレーションを再度実行する必要がある nested シミュレーションを行うため、計算負荷が高く、実務面では本手法を用いるのは困難である。

nested シミュレーション以外の方法には種々のものが知られているが、その 1 つに Belomestny et al. [6] による回帰を用いた手法がある。これは以下の手順により Additive Duality Method に必要なマルチンゲール M を構築する方法である。まず、具体的な計算

^{*1} Doob-Meyer 分解とは、任意の優マルチンゲール $X_{T_k^{ex}}$ に関して、

$$X_{T_k^{ex}} = X_{T_0^{ex}} + M_{T_k^{ex}}^* - A_{T_k^{ex}}^* \quad (2.15)$$

と分解できることである。なお $M_{T_k^{ex}}^*$ は $M_{T_0^{ex}}^* = 0$ なるマルチンゲール、 $A_{T_k^{ex}}^*$ は $A_{T_0^{ex}}^* = 0$ なる可予測非減少過程である。

手順の前に、理論的背景を説明する。

2.2.1 理論的背景

以下では、フィルトレーション $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ を $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W := \sigma(\{W_s; s \leq t\})$ とする。

まず、任意の $k = 0, 1, \dots, M^{\text{ex}} - 1$ について $T_k^{\text{ex}}, T_{k+1}^{\text{ex}}$ におけるオプション価値の真値 $V_{T_k^{\text{ex}}}, V_{T_{k+1}^{\text{ex}}}$ に対して Doob-Meyer 分解を適用すると、

$$\begin{cases} V_{T_k^{\text{ex}}} = V_{T_0^{\text{ex}}} + M_{T_k^{\text{ex}}}^* - A_{T_k^{\text{ex}}}^* \\ V_{T_{k+1}^{\text{ex}}} = V_{T_0^{\text{ex}}} + M_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* - A_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* \end{cases}$$

と表現できる。なお、 M^* 、 A^* はそれぞれ、Doob-Meyer 分解におけるマルチンゲール、可予測過程である。両辺の差分を取って、

$$\begin{aligned} V_{T_{k+1}^{\text{ex}}} - V_{T_k^{\text{ex}}} &= M_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* - A_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* - M_{T_k^{\text{ex}}}^* + A_{T_k^{\text{ex}}}^* \\ &= M_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* - M_{T_k^{\text{ex}}}^* - (A_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* - A_{T_k^{\text{ex}}}^*) \end{aligned}$$

を得るが、ここで、マルチンゲール表現定理からある $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$ を用いて、

$$M_{T_k^{\text{ex}}}^* = \int_0^{T_k^{\text{ex}}} Z_t dW_t \quad (2.17)$$

と書くことができるので、

$$\begin{aligned} M_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* - M_{T_k^{\text{ex}}}^* &= \int_{T_k^{\text{ex}}}^{T_{k+1}^{\text{ex}}} Z_t dW_t \\ &\approx \sum_{T_k^{\text{ex}} \leq t_j < T_{k+1}^{\text{ex}}} Z_{t_j} \Delta W_{t_j} \end{aligned} \quad (2.18)$$

と近似すると、

$$V_{T_{k+1}^{\text{ex}}} - V_{T_k^{\text{ex}}} \approx \sum_{T_k^{\text{ex}} \leq t_j < T_{k+1}^{\text{ex}}} Z_{t_j} \Delta W_{t_j} - (A_{T_{k+1}^{\text{ex}}}^* - A_{T_k^{\text{ex}}}^*)$$

を得る。ここで、両辺に ΔW_{t_j} を乗じて、 t_j 時点における条件付き期待値をとると可測性や可予測性より、

$$\begin{aligned} E_{t_j}^{\mathbb{Q}}[V_{T_{k+1}^{\text{ex}}} \Delta W_{t_j}] &\approx Z_{t_j} (t_{j+1} - t_j) \\ \Longleftrightarrow Z_{t_j} &\approx \frac{1}{(t_{j+1} - t_j)} E_{t_j}^{\mathbb{Q}}[V_{T_{k+1}^{\text{ex}}} \Delta W_{t_j}] \end{aligned} \quad (2.19)$$

とかける。

ここで、何らかの方法（例えば LSM 法）で推定した $\hat{\tau}_{T_k^{ex}} \in \mathcal{T}_k$ に対して、(2.2) 式より、

$$\hat{V}_{T_{k+1}^{ex}} = E_{T_{k+1}^{ex}}^{\mathbb{Q}} [Y_{\hat{\tau}_{T_{k+1}^{ex}}}]$$

とし、これを (2.19) 式の $V_{T_{k+1}^{ex}}$ に代入して、

$$\begin{aligned} Z_{t_j} &\approx \hat{Z}_{t_j} = \frac{1}{(t_{j+1} - t_j)} E_{t_j}^{\mathbb{Q}} [E_{T_{k+1}^{ex}}^{\mathbb{Q}} [Y_{\hat{\tau}_{T_{k+1}^{ex}}}]] \Delta W_{t_j} \\ &= \frac{1}{\Delta t_j} E_{t_j}^{\mathbb{Q}} [Y_{\hat{\tau}_{T_{k+1}^{ex}}} \Delta W_{t_j}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

と近似できる（但し、 $\Delta t_j := t_{j+1} - t_j$ ）。

(2.20) 式の \hat{Z}_{t_j} を求めたいが、右辺の条件付き期待値を求めるのは困難である。そこで、これを LSM 法と同様、回帰を使って推定することを考えるのが本手法である。なお、本来シミュレーションにおける各時点 t_j において回帰が必要となるが、[6] では、権利行使時点のみでの回帰を行う手法を提案していることから、ここではそれに基づいた説明を行う。また、[6] では W_t が 1 次元での場合および多次元で各 W が独立な場合について述べられている。各 W が独立でない場合については相関係数を加味した適切な変換を施すことで計算できるが、その点については明示的には述べられていないことから、 W が独立でない場合については付録 A に詳述する。

2.2.2 具体的な計算手順

1. N^{BR} 本のパス $\{\Delta W_{t_j}^{(i)}\}_{j=1,2,\dots,n}^{i=1,2,\dots,N^{BR}}$ を作成し、これを用いて原資産のパス $\{S_{t_j}^{BR,(i)}\}_{j=1,2,\dots,n}^{i=1,2,\dots,N^{BR}}$ を作成する。また、 $\{\hat{\tau}_{T_k^{ex}}^{BR,(i)}\}_{k=0,1,\dots,M^{ex}}^{i=1,2,\dots,N^{BR}}$ は LSM 法の（回帰係数を決定するためのプロセス (d)）で推定した継続価値関数 $\{\hat{c}_{T_k^{ex}}(S)\}_{k=1,\dots,M}$ を用いて、

$$\hat{\tau}_{T_k^{ex}}^{(i),BR} = \min\{T_{k'}^{ex}; T_k^{ex} \leq T_{k'}^{ex} \leq T_{M^{ex}}^{ex}, Y_{T_{k'}^{ex}}^{(i)} > \hat{c}_{T_{k'}^{ex}}(S_{T_{k'}^{ex}}^{(i)})\}$$

から、各 i, k について定めることができる。

2. $t_j = T_0^{ex}$ 時点（なお $t_0 = T_0^{ex}$ ）においては、

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{t_0}^{BR} &= \frac{1}{\Delta t_0} E_{T_0^{ex}}^{\mathbb{Q}} [Y_{\hat{\tau}_{T_1^{ex}}}^{BR,(i)} (\Delta W_{t_0}^{BR,(i)})] \\ &\approx \frac{1}{N^{BR}} \sum_{i=1}^{N^{BR}} Y_{\hat{\tau}_{T_1^{ex}}}^{BR,(i)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

により、 $\hat{Z}_{t_j}^{BR}$ を得る。また、 $t_j \in (T_0^{ex}, T_1^{ex})$ に対する $\hat{Z}_{t_j}^{BR,(i)}$ は、 $\hat{Z}_{t_j}^{BR,(i)} = \hat{Z}_{T_0^{ex}}^{BR}$ とする。

3. $t_j = T_k^{ex}$ である時点 t_j においては、各パス $i = 1, 2, \dots, N^{BR}$ において、被説明変数として $\frac{\Delta W_{t_j}^{BR,(i)}}{\Delta t_j} Y_{\hat{T}_{k+1}^{ex}}^{BR,(i)}$ をとり、説明変数として (LSM とは異なってもよい) 基底関数 $\{\psi^{(q)}(S)\}_{q=0,1,\dots,D}$ をとる回帰を行う。すなわち、

$$\gamma_{t_j} = \begin{pmatrix} \gamma_{t_j}^{(0)} \\ \gamma_{t_j}^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{t_j}^{(D)} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^D$$

なるベクトルと S に関する関数 $\psi^q(S) (q = 0, 1, \dots, D)$ を考え、

$$\hat{\gamma}_{t_j} = \arg \min_{\gamma_{t_j}} \left(\sum_{i=1}^{N^{BR}} \left(\frac{\Delta W_{t_j}^{BR,(i)}}{\Delta t_j} Y_{\hat{T}_{k+1}^{ex}}^{BR,(i)} - \sum_{q=0}^D \gamma_{t_j}^{(q)} \psi^q(S_{t_j}^{BR,(i)}) \right)^2 \right) \quad (2.22)$$

とする。また、 $t_j \in (T_k^{ex}, T_{k+1}^{ex})$ に対する $\hat{\gamma}_{t_j}$ は、 $\hat{\gamma}_{t_j} = \hat{\gamma}_{T_k^{ex}}$ とする。以上を各 t_j でも同様に計算すれば、 $\{\hat{\gamma}_{t_j}\} (t_j \in [T_1^{ex}, T_{M^{ex}}^{ex}))$ を得る。

4. 1 で用いたものと独立な N^B 個の $\{\Delta W_{t_j}^{B,(i)}\}_{j=1,2,\dots,n}^{i=1,2,\dots,N^B}$ を作成し、これを用いて原資産のパス $\{S_{t_j}^{B,(i)}\}_{j=1,2,\dots,n}^{i=1,2,\dots,N^B}$ を新たに作成する。

5. 2,3 で得た $\hat{Z}_{t_j}^{BR,(i)}$ および $\hat{\gamma}_{t_j}$ を用いて、

$$\hat{Z}_{t_j}^{B,(i)} = \begin{cases} \hat{Z}_{t_j}^{BR,(i)} & (t_j \in [T_0^{ex}, T_1^{ex})) \\ \sum_{q=1}^D \hat{\gamma}_{t_j}^{(q)} \psi^q(S_{t_j}^{B,(i)}) & (t_j \in [T_1^{ex}, T_M^{ex})) \end{cases}$$

とし、これと (2.18) 式より、 $M_{T_k^{ex}}$ の推定値 $\hat{M}_{T_k^{ex}}^{(i)}$ を、

$$\hat{M}_{T_k^{ex}}^{(i)} := \sum_{0 \leq t_j < T_k^{ex}} \hat{Z}_{t_j}^{B,(i)} \Delta W_{t_j}^{B,(i)} \quad (2.23)$$

として構成する。

6. (2.13) 式において、 $M_{T_k^{ex}}$ の推定値として $\hat{M}_{T_k^{ex}}^{(i)}$ を用いれば、

$$\hat{V}_{T_0^{ex}}^M = \frac{1}{N^B} \sum_{i=1}^{N^B} \max_{0 \leq k \leq M} [Y_{T_k^{ex}}^{(i)} - \hat{M}_{T_k^{ex}}^{(i)}] \quad (2.24)$$

とすると、真のオプション価値 V_{T_0} との関係は (2.14) 式より、

$$V_{T_0^{ex}} \leq E^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_0^{ex}}^M] \quad (2.25)$$

7. この $\hat{V}_{T_0^{ex}}^M$ を上方バイアスを持つという意味合いで $\hat{V}_{T_0^{ex}}^U$ と表すと、(2.8) 式と合わせて考えると真値 $V_{T_0^{ex}}$ に対して、

$$E^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_0^{ex}}^L] \leq V_{T_0} \leq E^{\mathbb{Q}}[\hat{V}_{T_0^{ex}}^U] \quad (2.26)$$

との関係が見いだせる。

以上のように、[6] による Additive Duality Method は nested シミュレーションを用いない手法であるため、計算負荷の観点から望ましい手法である。一方、Andersen and Piterbarg [2] によれば回帰係数が安定しないという欠点があるとの報告もある。

第 3 章

金利モデルについて

まず、各モデルの説明に先立って必要となる基本的事項について述べておく。

各利払い日を $\{T_l\}_{l=0,1,\dots,M}$ とし、利息計算日 T_l と T_{l+1} との利払い間隔 δ_l を、

$$\delta_l := \frac{T_{l+1} - T_l}{DC}$$

で表す。なお、DC は day count convention である。

開始日が T_l 、満期が T_{l+1} の割引債価格を $P(t, T_{l+1})$ とすると、 t 時点における期間 $[T_l, T_{l+1}]$ のフォワードレートは

$$L(t; T_l, T_{l+1}) = \left(\frac{P(t, T_l)}{P(t, T_{l+1})} - 1 \right) \frac{1}{\delta_l} \quad (3.1)$$

で表現できる。以下、簡単のため $L_l(t) := L(t; T_l, T_{l+1})$ と記述し、 $L_l(t)$ の金利更改日は T_l とする。

次に、フォワード測度について簡単に触れる。なお、以下の議論は木島ら [37] を参考にした。今、あるデリバティブの t 時点におけるペイオフを X_t とすると、リスク中立測度 \mathbb{Q} のもとで、

$$\begin{aligned} \frac{X_t}{B(t)} &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{X_{T_{l+1}}}{B(T_{l+1})} \right] \\ \iff X_t &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{B(t)}{B(T_{l+1})} X_{T_{l+1}} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

なお、 $B(t)$ はマネーマーケットアカウント

$$B(t) := e^{\int_0^t r_s ds}$$

であり、 r_s はショートレートである。

ここで、(3.2) 式の条件付き期待値を新しいニューメレールとして $P(t, T_{l+1})$ のもとで考えたい。(3.2) 式にベイズの定理を適用すると、

$$\begin{aligned} X_t &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{P(T_{l+1}, T_{l+1})}{P(t, T_{l+1})} \frac{B(t)}{B(T_{l+1})} X_{T_{l+1}} P(t, T_{l+1}) \right] \\ &= P(t, T_{l+1}) E_t^{\mathbb{T}_{l+1}} [X_{T_{l+1}}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

と表すことができる。(3.2) 式は、 X_t のフォワード価格 $\frac{X_t}{P(t, T_{l+1})}$ がマルチンゲールであることを示しているため、 \mathbb{T}_{l+1} はフォワード測度と呼ばれる。

(3.3) 式は (3.2) 式のように $B(T_{l+1})$ と $X_{T_{l+1}}$ との同時分布を考えなくとも $X_{T_{l+1}}$ の期待値計算のみで X_t を求めることができるため、フォワード測度のもとでは解析解の導出が容易になる可能性があるなどの利点がある。

例えば、(3.1) 式から、 $L_l(t)$ はフォワード価格として表現可能であり、 \mathbb{T}_{l+1} フォワード測度の下でマルチンゲールであることがわかるため、プレーンな金利スワップはこの性質を用いて容易に解析解を得ることができる。

3.1 Black Model, Normal Model

まず、金利モデルにおいて最も簡素な Black model [8] について述べる。なお、以下の議論は Brigo and Mercurio [10] を参考にした。

$L_l(t)$ に関する Black model とは、

$$dL_l(t) = \sigma_l^{BS} L_l(t) dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} \quad (3.4)$$

であり、 $L_l(t)$ が対数正規分布に従うよう定義されている。なお、 $W_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}}$ はフォワード測度 \mathbb{T}_{l+1} の下でのブラウン運動であり、 σ_l^{BS} は定数である。

ここで、具体的なデリバティブとして、Caplet/Floorlet を考える。Caplet/Floorlet とは、1 つのフォワードレート $L_l(t)$ を原資産とする金利デリバティブであり、その価格 $V_t^{caplet}, V_t^{floorlet}$ は、

$$V_t^{caplet} = P(t, T_{l+1}) \delta_l E_t^{\mathbb{T}_{l+1}} [(L_{T_l}(T_k^{ex}) - K)^+] \quad (3.5)$$

$$V_t^{floorlet} = P(t, T_{l+1}) \delta_l E_t^{\mathbb{T}_{l+1}} [(K - L_{T_l}(T_k^{ex}))^+] \quad (3.6)$$

とかける。Black model の下での、Caplet/Floorlet の価格解は解析的に与えられて、

$$\begin{aligned}
V_t^{caplet} &= P(t, T_{l+1})\delta_l \left(L_l(t)N(d_1) - KN \left(d_1 - \sigma_l^{BS} \sqrt{T_k^{ex} - t} \right) \right) \\
&=: P(t, T_{l+1})\delta_l \mathbf{CorePayBS}(L_l(t), K, \sigma_l^{BS}, t, T_k^{ex}) \\
d_1 &= \frac{\ln \frac{L_l(t)}{K} + \frac{1}{2} \sigma_l^{BS^2} (T_k^{ex} - t)}{\sigma_l^{BS} \sqrt{T_k^{ex} - t}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
V_t^{floorlet} &= P(t, T_{l+1})\delta_l \left(KN \left(-d_1 + \sigma_l^{BS} \sqrt{T_k^{ex} - t} \right) - L_l(t)N(-d_1) \right) \\
&=: P(t, T_{l+1})\delta_l \mathbf{CoreRecBS}(L_l(t), K, \sigma_l^{BS}, t, T_k^{ex})
\end{aligned} \tag{3.8}$$

と書ける。

一方、Black model では先述のように、 $L_l(t)$ は対数正規分布に従うよう定義されていることから、現行のマイナス金利には適用できない。そこで、 $L_l(t)$ は正規分布に従うとする Normal model が実務上用いられることも多い。Normal model は、

$$dL_l(t) = \sigma_l^{normal} dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} \tag{3.9}$$

であり、 $L_l(t)$ は正規分布に従うよう定義されている。なお、 σ_l^{normal} は定数である。Normal model の下での Caplet/Floorlet の価格解は、

$$\begin{aligned}
V_t^{caplet} &= P(t, T_l)\delta_l \left((L_l(t) - K)N(d) + \frac{\sigma_l^{normal} \sqrt{T_k^{ex} - t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2} \right) \\
&=: P(t, T_l)\delta_l \mathbf{CorePayNormal}(L_l(t), K, \sigma_l^{normal}, t, T_k^{ex}) \\
d &= \frac{L_l(t) - K}{\sigma_l^{normal} \sqrt{T_k^{ex} - t}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
V_t^{floorl} &= P(t, T_l)\delta_l \left((K - L_l(t))N(-d) + \frac{\sigma_l^{normal} \sqrt{T_k^{ex} - t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2} \right) \\
&=: P(t, T_l)\delta_l \mathbf{CoreRecNormal}(L_l(t), K, \sigma_l^{normal}, t, T_k^{ex})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

と書ける。

以上のように、Black model, Normal model においては Caplet/Floorlet 価格に対する解析解が知られているが、これを計算するためには定数 σ_l^{BS} , σ_l^{normal} が必要となる。これら

の値を定める方法としては、 $L_l(t)$ のヒストリカルデータから、収益率・変動幅の標準偏差を求めそれを用いるという方法もあるが、実務上は一般的な方法ではない。

実務上は、 V_t^{caplet} を得ることを目的とせず、反対に $\sigma_l^{BS}, \sigma_l^{normal}$ を得るために各解析解が用いられることが多い。つまり、モデル価格 V_t^{caplet} が市場価格 $V_t^{mkt, caplet}$ と等しくなるような $\sigma_l^{BS}, \sigma_l^{normal}$ を (3.7), (3.8), (3.10), (3.11) 式をもとに逆算する。これは、デリバティブの価格付けにおいては、 V_t^{caplet} を求めることそれ自体ではなく、逆算された σ_l^{BS} や σ_l^{normal} を用いてエキゾチックデリバティブ等の価格付けを行うことに主眼が置かれることが多いためである。

具体的には、市場価格 $V_t^{mkt, caplet}$ が観測されるとき

$$\hat{\sigma}_l^{BS} = \arg \min_{\sigma_l^{BS}} \left(V_t^{mkt, caplet} - P(t, T_{l+1}) \delta_l \text{CorePayBS}(L_l(t), K, \sigma_l^{BS}, t, T_k^{ex}) \right)^2 \quad (3.12)$$

から、 σ_l^{BS} の推定値 $\hat{\sigma}_l^{BS}$ を得ることができる。このようにして得た $\hat{\sigma}_l^{BS}$ は、市場では $L_l(t)$ に関してどの程度の対数収益率の変動を見込んでいるのかという度合いを計測でき、インプライドボラティリティと呼ばれる。なお、 $\hat{\sigma}_l^{BS}$ は Black model におけるボラティリティであるため、Black vol. や log vol. と呼ばれる。一方、 $\hat{\sigma}_l^{normal}$ は Normal model におけるボラティリティであるため、Normal vol. と呼ばれる。

また、このように市場価格と整合的になるようにモデルパラメーターを算出することを一般的にキャリブレーションと呼ぶ。

次に、Caplet/Floorlet と並んで代表的な金利デリバティブであるスワップションについて述べる。スワップションとは、スワップレートを原資産とするオプションのことである。固定金利払い/変動金利受けのスワップションはペイヤーズスワップションと呼ばれ、固定金利受け/変動金利払いのスワップションはレシーバーズスワップションと呼ばれる。

まず、利息計算開始日が T_m 、利息計算終了日が T_n の t 時点におけるスワップレート $SR_{m,n}(t)$ 、アニュイティ $AN_{m,n}(t)$ を以下で定義する。

$$SR_{m,n}(t) := \sum_{l=m}^n \omega_l^{m,n}(t) L_l(t) \quad (3.13)$$

$$AN_{m,n}(t) := \sum_{l=m}^n \delta_l P(t, T_l) \quad (3.14)$$

また、 $AN_{m,n}(t)$ に対する各割引債 $\delta_k P(t, T_k)$ の割合 $\omega_k^{m,n}(t)$ を

$$\omega_l^{m,n}(t) := \frac{\delta_l P(t, T_l)}{AN_{m,n}(t)} \quad (3.15)$$

で定義する。

ヨーロッパ・ペイヤーズスワップションの価格を $V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay}$ 、ヨーロッパ・レシーバーズスワップションの価格を $V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec}$ とすると、それらはリスク中立測度のもとで

$$\frac{V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay}}{B_t} = E_t^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{l=n}^m \frac{1}{B_{T_l}} \delta_l (SR_{m,n}(T_k^{ex}) - K)^+ \right] \quad (3.16)$$

$$\frac{V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec}}{B_t} = E_t^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{l=n}^m \frac{1}{B_{T_l}} \delta_l (K - SR_{m,n}(T_k^{ex}))^+ \right] \quad (3.17)$$

と書ける。ここで、簡略化のため

$$CF(T_k^{ex}, T_m, T_n) := (SR_{m,n}(T_k^{ex}) - K)^+ \quad (3.18)$$

とすると、

$$V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay} = E_t^{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{B_t}{B_{T_{m+1}}} \delta_m + \frac{B_t}{B_{T_{m+2}}} \delta_{m+1} + \cdots + \frac{B_t}{B_{T_{n+1}}} \delta_n \right) CF(T_k^{ex}, T_m, T_n) \right] \quad (3.19)$$

とかける。(3.19) 式をヨーロッパスワップションの最終満期に対応する割引債 $P(t, T_{n+1})$ をニューメレールとするフォワード測度 \mathbb{T}_{n+1} に測度変換すると、

$$\begin{aligned} V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay} &= P(t, T_{n+1}) E_t^{\mathbb{T}_{n+1}} \left[\left(\frac{\delta_m}{P(T_{m+1}, T_{n+1})} + \frac{\delta_{m+1}}{P(T_{m+2}, T_{n+1})} + \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\delta_n}{P(T_{n+1}, T_{n+1})} \right) CF(T_k^{ex}, T_m, T_n) \right] \\ &= P(t, T_{n+1}) E_t^{\mathbb{T}_{n+1}} \left[\left(\frac{\delta_m P(T_k^{ex}, T_{m+1})}{P(T_k^{ex}, T_{n+1})} + \frac{\delta_{m+1} P(T_k^{ex}, T_{m+2})}{P(T_k^{ex}, T_{n+1})} + \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\delta_n P(T_k^{ex}, T_{n+1})}{P(T_k^{ex}, T_{n+1})} \right) CF(T_k^{ex}, T_m, T_n) \right] \\ &= P(t, T_{n+1}) E_t^{\mathbb{T}_{n+1}} \left[\frac{1}{P(T_k^{ex}, T_{n+1})} AN_{m,n}(T_k^{ex}) CF(T_k^{ex}, T_m, T_n) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

と表現できる。なお、このように対象とするデリバティブの最終満期の割引債をニューメレールとすることをターミナル測度と呼ばれる。

また、(3.19) 式は $AN_{m,n}(t)$ をニューメレールとするアヌイティ測度でも表すと、

$$V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay} = AN_{m,n}(t) E_t^{AN_{m,n}} [(SR_{m,n}(T_k^{ex}) - K)^+] \quad (3.21)$$

となる。ここで、 $SR_{m,n}(t)$ に関する Black model を

$$dSR_{m,n}(t) = \sigma_{swap}^{BS} SR_{m,n}(t) dW_t^{AN_{m,n}} \quad (3.22)$$

とすれば、(3.21) について解くと (ただし、 σ_{swap}^{BS} は定数)、(3.7) 式と同様 $V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay}$ が得られ、

$$V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay} = AN_{m,n}(t) \mathbf{CorePayBS}(SR_{m,n}(t), K, \sigma_{swap}^{BS}, t, T_k^{ex}) \quad (3.23)$$

と表現できる。 $V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec}$ も同様に

$$V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec} = AN_{m,n}(t) \mathbf{CoreRecBS}(SR_{m,n}(t), K, \sigma_{swap}^{BS}, t, T_k^{ex}) \quad (3.24)$$

となる。

また、 $SR_{m,n}(t)$ に関する Normal model を

$$dSR_{m,n}(t) = \sigma_{swap}^{normal} dW_t^{AN_{m,n}} \quad (3.25)$$

とすれば、ヨーロピアン・ペイヤーズスワップションの価格を $V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay}$, $V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec}$ (ただし、 σ_{swap}^{normal} は定数) が得られ、

$$V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay} = AN_{m,n}(t) \mathbf{CorePayNormal}(SR_{m,n}(t), K, \sigma_{swap}^{normal}, t, T_k^{ex}) \quad (3.26)$$

$$V_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec} = AN_{m,n}(t) \mathbf{CoreRecNormal}(SR_{m,n}(t), K, \sigma_{swap}^{normal}, t, T_k^{ex}) \quad (3.27)$$

となる。

また、スワップションの解析解においても、(3.12) 式と同様の手法でインプライドボラティリティを得ることができる。

3.2 LIBOR Market Model

さて、Caplet/Floorlet のように 1 つのフォワードレート $L_l(t)$ を参照するようなデリバティブは、Black model の下では (3.7), (3.8) 式、normal model の下では (3.10), (3.11) 式で価格解を得ることができた。しかし、スワップションのような複数のフォワードレートが相互に依存するデリバティブの場合、同様のモデルの下では解析解を得ることは困難である。一方、スワップレートに関する Black model, Normal model を仮定する場合、それぞれ、(3.23) および (3.24), (3.26) および (3.27) 式で価格解を得られるが、例えば Caplet/Floorlet とスワップションが組み込まれたデリバティブであれば、フォワードレート $L_l(t)$ とスワップレート $SR_{m,n}(t)$ を一体的に表現する必要があるため、スワップレートに関する Black model, Normal model だけではそのようなデリバティブの解を得ることはできない。また、バミューダンスワップションのように複数のスワップレート $SR_{m,n}(t)$ が相互に依存するデリバティブについても価格解を得ることはできない。

そこで、多様な金利デリバティブを評価するには、金利デリバティブの源泉となるフォワードレート $L_l(t)$ について、各フォワードレート $L_l(t)$ 間の相互関係を含んだモデルが望ましい。そこで、それらの相互関係を含んだモデルが、Brace et al. [9] により導入された LIBOR Market Model(以下、LMM と呼ぶ)である。なお、以下の議論は [10]、Gatarek et al. [15] を参考にした。

LMM はフォワードレート $L_l(t)$ が

$$\begin{aligned} dL_l(t) &= \alpha_l(t)L_l(t)dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} \\ dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} dW_t^{h, \mathbb{T}_{h+1}} &= \rho_{l,h} dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

なる確率過程に従うとしたモデルであり、各フォワード測度 \mathbb{T}_{l+1} のもとで、Black model 同様 $L_l(t)$ が対数正規分布に従うよう定義されている。なお、 $\alpha_l(t)$ は確定的関数である。このことから、 $\alpha_l(t)$ が定数の場合は各 $L_l(t)$ について見れば Black model となることが分かる。

(3.28) 式より、各フォワード測度 \mathbb{T}_{l+1} のもとで、 $L_l(t)$ はマルチンゲールであることがわかるが、スワップションのような複数のフォワードレートが相互に依存するデリバティブの場合、各フォワードレート $L_l(t)$ が異なるフォワード測度のブラウン運動のもとでモデリングされているため、そのようなデリバティブの価格解を得ることは一般的には困難である。

そこで、どこか1つのフォワード測度 $\mathbb{T}_{l'}$ で固定し、そのもとで $\{L_l(t)\}_{l=0,1,\dots,M-1}$ を表現することを考えたい。あるフォワード測度 $\mathbb{T}_{l'} (T_{l'} \in [T_0, \dots, T_M])$ を固定し、その下で (3.28) 式を書き直すと、ギルザノフの定理等を用いることで以下の形で表現できることが知られている。

$$\begin{aligned} dL_l(t) &= \mu_{l,l'}(t)dt + \alpha_l(t)L_l(t)dW_t^{l, \mathbb{T}_{l'}} \\ dW_t^{l, \mathbb{T}_{l'}} dW_t^{h, \mathbb{T}_{l'}} &= \rho_{l,h} dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\mu_{l,l'}(t) = \begin{cases} -\alpha_l(t)L_l(t) \sum_{h=l+1}^{l'-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h\alpha_h(t)L_h(t)}{1+\delta_hL_h(t)} & l < l' \\ 0 & l = l' \\ \alpha_l(t)L_l(t) \sum_{h=l'+1}^{l-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h\alpha_h(t)L_h(t)}{1+\delta_hL_h(t)} & l > l' \end{cases}$$

(3.28) 式と比較すると、ドリフト項 $\mu_{l,l'}(t)$ が現れたことが特徴である。

LMM は、(3.28) 式にあるように $L_l(t)$ がフォワード測度 \mathbb{T}_{l+1} の下で対数正規分布に従うことから、 $L_l(t)$ が正の場合しか定義されない。しかし、円金利市場においては、マイナス金利政策導入以降マイナス金利が常態化していることから、マイナス金利に対応したモ

デルを仮定する必要がある。そこで、(3.28) 式に一定のシフト幅 $b(> 0)$ を加えたモデルである shifted-LMM が実務上よく用いられる。shifted-LMM は、 $L_l(t)$ に b を加えた $\tilde{L}_l(t)$ を

$$\tilde{L}_l(t) = L_l(t) + b \quad (3.30)$$

として、 $\tilde{L}_l(t)$ が

$$d\tilde{L}_l(t) = \alpha_l(t)\tilde{L}_l(t)dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} \quad (3.31)$$

に従うとしたモデルである。

これは、(3.28) 式の $L_l(t)$ が $\tilde{L}_l(t)$ に置き換わっただけのモデルであり、1 つのフォワード測度で固定した (3.2) 式も同様に援用することができる。つまり、シミュレーション等においては、 $\tilde{L}_l(t)$ についてパスを生成した後、 b を減じれば $L_l(t)$ そのものを得ることができるのである。

また、例えば Caplet の価格を考えた場合、(3.5) を変形すると、

$$\begin{aligned} V_t^{caplet} &= P(t, T_{l+1})\delta_l E_t^{\mathbb{T}_{l+1}} [(L_l(T_k^{ex}) - K)^+] \\ &= P(t, T_{l+1})\delta_l E_t^{\mathbb{T}_{l+1}} \left[(L_l(T_k^{ex}) + b) - (K + b) \right]^+ \\ &= P(t, T_{l+1})\delta_l E_t^{\mathbb{T}_{l+1}} \left[(\tilde{L}_l(t) - \tilde{K})^+ \right] \end{aligned}$$

と書ける。なお、 $\tilde{K} := K + b$ とした。

すると、(3.7) から、

$$V_t^{caplet} = P(t, T_{l+1})\delta_l \mathbf{CorePayBS}(L_l(t) + b, K + b, \sigma_l^{BS}, t, T_k^{ex}) \quad (3.32)$$

が容易に得られるなど、Black model で得た結果を援用することができる。

ただし、この場合 σ_l^{BS} と $\alpha_l(t)$ の間には、

$$\sigma_l^{BS} = \sqrt{\frac{1}{T_k^{ex} - t} \int_t^{T_k^{ex}} \alpha_l(s) ds} \quad (3.33)$$

なる関係性があることに注意しておく。

このように、LMM で得た知見を援用することができる点から実務的にもよく用いられているが、欠点としては竹原 [34] が指摘するように、シフト幅が実際のマイナス金利以上に大きくなった場合に、再度シフト幅を見直す必要があり、その場合センシティビティ等が不連続になってしまう等のリスクがある。

3.3 SABR モデル

これまでは、ボラティリティが確定的関数であるとしたモデルに基づいた議論を行った。そのため、市場で観測されるインプライドボラティリティはストライクレートによらず一定となるはずだが、現実にはこれが成立せずストライクレートによりインプライドボラティリティが異なること(これをボラティリティスマイルと呼ぶ)が知られており、円金利オプションをはじめ各種金融市場で観測される。したがって、金利デリバティブのモデリングにおいては、市場に存在するボラティリティスマイルを適切に表現できるモデルが要請される。このボラティリティスマイルを表現するモデルは大別して以下のように分類できる ([31])。

- (1) 局所ボラティリティ・モデル
 - (2) 確率ボラティリティ・モデル
 - (3) 確率局所ボラティリティ・モデル
- に分類できる。

(1) の局所ボラティリティ・モデル (Local Volatility モデル, LV モデル) とは、時刻と原資産価格の関数でボラティリティを表現するモデルであり、代表的なものとしては前述の shift モデルや Dupire [14] による CEV モデルが知られている。LV モデルでは、ボラティリティスマイルへのキャリブレーションが短時間でできるという利点がある一方、将来のボラティリティスマイルのダイナミクスは適切に表現できないという欠点があることが知られている。

(2) の確率ボラティリティ・モデル (Stochastic Volatility モデル, SV モデル) とは、ボラティリティが確率的に変化すると仮定したモデルであり、代表的なものとしては Heston モデル [20] がある。LV モデルとは異なり、ボラティリティが確率的に変動することを前提としているため、ボラティリティスマイルのダイナミクスを表現することが可能であり、Heston モデルではヨーロピアンオプションの準解析解が得られることから、実務的にも用いられてきた。ただし、近年 (3) の確率局所ボラティリティモデルが金利市場においては一般的となっており、実務では用いられることは少なくなっている。

(3) の確率局所ボラティリティ・モデルとは、LV モデルと SV モデルを組み合わせたモデルであり、多様なボラティリティスマイルを表現できるという利点がある。代表的なモデルは、Hagan et al. [17] による SABR モデルである。後述するように、SABR モデルは比較的精度の良い近似式が知られており、それを用いボラティリティスマイルを容易にキャリブレーションできることから実務的にもよく用いられている。

SABR モデルにおいては、各 $L_l(t)$ およびこれまで (確定的と仮定された) ボラティリティ $\alpha_l(t)$ が、

$$\begin{aligned} dL_l(t) &= \alpha_l(t)L_l(t)^{\beta_l} dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} \\ d\alpha_l(t) &= \nu_l \alpha_l(t) dZ_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} \\ dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} dZ_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} &= \phi_{l,l} dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

に従う確率過程で表現される。なお、 $Z_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}}$ はフォワード測度 \mathbb{T}_{l+1} のもとでのブラウン運動であり、 $W_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}}$ とは (3.34) 式にある相関関係を持つ。

本モデルは、 $\alpha_l(t)$, β_l , $\phi_{l,l}$, ν_l の 4 つのパラメーターをもとにボラティリティスマイルを表現したモデルであり、各パラメーターにより、ボラティリティの水準や曲率を表現できる。主に、 $\alpha_l(t)$ はボラティリティスマイルの上下方向のシフトを、 $\beta_l, \phi_{l,l}$ はスキューの傾きを、 ν_l は曲率をコントロールしている。なお、各パラメーターを変化させた場合のボラティリティスマイルの具体的な形状変化は [17] を参考されたい。

また、SABR モデルにおいては [17] によるインプライドボラティリティに対する解析近似解が知られている。オプション満期 T_k^{ex} の原資産 $L_l(t)$ に関するインプライド・ノーマルボラティリティ $^*1 \sigma_l^{normal}(T_k^{ex}, K)$ は、

$$\begin{aligned} \sigma_l^{normal}(T_k^{ex}, K) &\approx \frac{\alpha_l(t)(1-\beta_l)(L_l(t)-K)}{L_l(t)^{1-\beta_l} - K^{1-\beta_l}} \frac{\xi}{x(\xi)} \left\{ 1 + \left(g\alpha_l(t)^2 + 0.25\phi_l\nu_l\alpha_l(t) \frac{L_l(t)^{\beta_l} - K^{\beta_l}}{L_l(t) - K} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2-3\phi_l^2}{24} \nu_l^2 \right) (T_k^{ex} - t) \right\} \\ &=: \mathbf{Hagan}(T_k^{ex}, K; L_l(t), \alpha_l(t), \beta_l, \phi_{l,l}, \nu_l, t) \\ \xi &= \frac{\nu_l}{\alpha_l(t)} \frac{L_l(t)^{1-\beta_l} - K^{1-\beta_l}}{1-\beta_l} \\ x(\xi) &= \ln\left(\frac{\sqrt{1-2\phi_l\xi+\xi^2}-\phi_l+\xi}{1-\phi_l}\right) \\ g &= \frac{(1-\beta_l)^2}{(L_l(t)^{1-\beta_l} - K^{1-\beta_l})^2} \ln(L_l(t)^{\beta_l/2} K^{\beta_l/2} \frac{L_l(t)^{1-\beta_l} - K^{1-\beta_l}}{(1-\beta_l)(L_l(t)-K)}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

と表現できることが知られている。

^{*1} Black vol. の解析近似式も知られており、従来はそれが一般的であったが、マイナス金利以降、Black vol. を用いることが不可能となった。そのため、現在は Normal vol. が用いられることが実務上一般的になっているため、本稿でも Normal vol. の解析近似解を用いる。

実務上は (3.35) 式を用い以下のように Cap/Floolet やヨーロピアンスワップション価格の解析近似解を計算できる。

・計算手順

1. (3.35) 式を用い、市場で観測されるボラティリティスマイルにフィットするよう最小二乗法で $\hat{\alpha}_l(t), \hat{\beta}_l, \hat{\phi}_{l,l}, \hat{\nu}_l$ を求める
2. 原資産 $L_l(t)$ に関するインプライド・ノーマルボラティリティの近似値を、

$$\hat{\sigma}_l^{normal}(T_k^{ex}, K) = \mathbf{Hagan}(T_k^{ex}, K; L_l(t), \hat{\alpha}_l(t), \hat{\beta}_l, \hat{\phi}_{l,l}, \hat{\nu}_l, t) \quad (3.36)$$

で得る。なお、スワップションであれば $L_l(t)$ として、 $SR_{m,n}(t)$ を用いればよい。

3. Caplet/Floorlet であれば (3.10),(3.11) 式に、ヨーロピアンスワップションであれば (3.26),(3.27) 式のボラティリティに $\hat{\sigma}_l^{normal}(T_k^{ex}, K)$ を代入し、価格解を得る。

なお、 $\beta_l, \phi_{l,l}$ はそれぞれスキューの傾きに影響を与えるため、両者を同時にキャリブレーションすると、日々のそれぞれのパラメーターの値が不連続になる可能性がある。このため、一方を固定したうえでもう一方をキャリブレーションすることが望ましい。[17] では、ヒストリカルデータを用いて、 $\sigma_l^{normal}(T_k^{ex}, K)$ を $L_l(t)$ で回帰し $\hat{\beta}_l$ をあらかじめ推定しておくことを提案している。

また、 $\phi_l = 0$ の場合については、Antonov and Spector [4] により (近似ではない) 解析解が得られている。

一方、[17] では、SABR モデルおよび (3.35) 式の導出において、 $L_l(t)$ が正の値を取るように境界条件を置いており、マイナス金利環境下では適用できないという問題点がある。そこで、マイナス金利に対応できるよう SABR モデルを改良したモデルがいくつか知られている ([33]) が、ここでは、もっとも簡便なものである shifted-SABR モデルについて述べる。これは、Hagan et al. [18] により提案され、(3.30) 式の shifted-LMM と同様 $L_l(t)$ に b を加えたモデル

$$\tilde{L}_l(t) = L_l(t) + b \quad (3.37)$$

である。 $\tilde{L}_l(t)$ について、(3.35) 式が $L_l(t)$ と同様に使用でき ([18])、インプライド・ノーマルボラティリティ $\sigma_l^{normal}(T_k^{ex}, K)$ は

$$\begin{aligned} \sigma_l^{normal}(T_k^{ex}, K) &\approx \mathbf{Hagan}(T_k^{ex}, \tilde{K}; \tilde{L}_l(t), \alpha_l(t), \beta_l, \phi_{l,l}, \nu_l, t) \\ &= \mathbf{Hagan}(T_k^{ex}, K + b; L_l(t) + b, \alpha_l(t), \beta_l, \phi_{l,l}, \nu_l, t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

で近似できる。

3.4 LMM-SABR

LMM, SABR モデルはそれぞれ金利の期間構造およびボラティリティスマイルのダイナミクスを表現したモデルであった。そこで、LMM と SABR を組み合わせることで期間構造およびボラティリティスマイル双方のダイナミクスを表現できるモデルを得ることが期待される。それが、Rebonato et al. [26] による LMM-SABR であり、以下のように表現される。([13], [26])。

$$\begin{aligned}
dL_l(t) &= \mu_{l,l'}(t)dt + \alpha_l(t)L_l(t)^{\beta_l} dW_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} \\
d\alpha_l(t) &= \eta_{l,l'}(t)dt + \nu_l(t)\alpha_l(t)dZ_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} \\
dW_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} dW_t^{h,\mathbb{T}_{l'}} &= \rho_{l,h}dt, dZ_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} dZ_t^{h,\mathbb{T}_{l'}} = \theta_{l,h}dt, dW_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} dZ_t^{h,\mathbb{T}_{l'}} = \phi_{l,h}dt \\
\mu_{l,l'}(t) &= \begin{cases} -\alpha_l(t)L_l(t)^{\beta_l} \sum_{h=l+1}^{l'-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h\alpha_h(t)L_h(t)^{\beta_h}}{1+\delta_hL_h(t)} & l < l' \\ 0 & l = l' \\ \alpha_l(t)L_l(t)^{\beta_l} \sum_{h=l'+1}^{l-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h\alpha_h(t)L_h(t)^{\beta_h}}{1+\delta_hL_h(t)} & l > l' \end{cases} \\
\eta_{l,l'}(t) &= \begin{cases} -\phi_{l,l}\nu_l(t)s_l(t) \sum_{h=l+1}^{l'-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h\alpha_h(t)L_h(t)^{\beta_h}}{1+\delta_hL_h(t)} & l < l' \\ 0 & l = l' \\ \phi_{l,l}\nu_l(t)s_l(t) \sum_{h=l'+1}^{l-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h\alpha_h(t)L_h(t)^{\beta_h}}{1+\delta_hL_h(t)} & k > i \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

また、(3.39) 式についても (3.30),(3.31) 式と同様の事実が成立するため、shift することでマイナス金利に対応させることができる。したがって、これにより金利の期間構造・ボラティリティスマイル・マイナス金利という現在の円金利市場を表現するにあたって必要な要素を具備することができる。

なお、(3.39) 式のもとで実際の市場に整合的な $L_l(t)$ のモデルを得るには、そのモデルの下で計算した Cap/Floor, スワップションなどの基礎的なデリバティブ価格が市場での価格と整合的になるようにモデルパラメーターをキャリブレーションする必要がある。LMM-SABR のキャリブレーションに関する既存研究は [13], [26] により行われているが、本研究ではキャリブレーションまで行うことは目的とせず、各種パラメーターは所与として次章での計算を行うこととする。

第 4 章

数値実験結果

4.1 プライシング手順

本章では、shifted-LMM-SABR に基づきバミューダンスワップションの価格をシミュレーションを用いて計算・分析を行うが、それに先立ち 2,3 章では触れなかった点について詳細に述べる。

4.1.1 フォワードレートのパス生成方法

まず、shifted-LMM-SABR モデルについて、数値計算を行うためより具体化し、(3.30), (3.39) 式をもとに次のとおり定義する。

$$\begin{aligned} dL_l(t) &= \mu_{l,l'}(t)dt + \alpha_l(t)(L_l(t) - b)^{\beta_l} dW_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} \\ \alpha_l(t) &= g(T_l - t)s_l(t) \\ ds_l(t) &= \eta_{l,l'}(t)dt + \nu_l h(T_l - t)s_l(t)dZ_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} \\ dW_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} dW_t^{h,\mathbb{T}_{l'}} &= \rho_{l,h}dt, dZ_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} dZ_t^{h,\mathbb{T}_{l'}} = \theta_{l,h}dt, dW_t^{l,\mathbb{T}_{l'}} dZ_t^{h,\mathbb{T}_{l'}} = \phi_{l,h}dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mu_{l,l'}(t) = \begin{cases} -g(T_l - t)s_l(t)(L_l(t) - b)^{\beta_l} \sum_{h=l+1}^{l'-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h g(T_h - t)s_h(t)(L_h(t) - b)^{\beta_h}}{1 + \delta_h L_h(t)} & l < l' \\ 0 & l = l' \\ g(T_l - t)s_l(t)(L_l(t) - b)^{\beta_l} \sum_{h=l'+1}^{l-1} \frac{\rho_{l,h}\delta_h g(T_h - t)s_h(t)(L_h(t) - b)^{\beta_h}}{1 + \delta_h L_h(t)} & l > l' \end{cases}$$

$$\eta_{l,l'}(t) = \begin{cases} -\phi_{l,l} \nu_l h(T_l - t) s_l(t) \sum_{h=l+1}^{l'-1} \frac{\rho_{l,h} \delta_h g(T_h - t) s_h(t) (L_h(t) - b)^{\beta_h}}{1 + \delta_h L_h(t)} & l < l' \\ 0 & l = l' \\ \phi_{l,l} \nu_l h(T_l - t) s_l(t) \sum_{h=l+1}^{l'-1} \frac{\rho_{l,h} \delta_h g(T_h - t) s_h(t) (L_h(t) - b)^{\beta_h}}{1 + \delta_h L_h(t)} & k > i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(T_l - t) &= (a_g + b_g(T_l - t))e^{-c_g(T_l - t)} + d_g \\ h(T_l - t) &= \nu_l((a_h + b_h(T_l - t))e^{-c_h(T_l - t)} + d_h) \end{aligned} \quad (4.2)$$

とかける。なお、[26] が提案したように $\alpha_l(t)$ を確定的関数 $g(T_l - t)$ と確率過程 $s_l(t)$ に分解した。また、 $\nu_l(t)$ については、確定的関数 $h(T_l - t)$ と定数 ν_l に分解した。 $g(T_l - t), h(T_l - t)$ の具体的な形状は (4.2) 式で与えた。

また、各相関係数については、定数 $\chi_\rho, \lambda_\rho, \chi_\theta, \lambda_\theta, \lambda_{\phi 1}, \lambda_{\phi 2}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \rho_{l,h} &= \chi_\rho + (1 - \chi_\rho)e^{-\lambda_\rho |T_l - T_h|} \\ \theta_{l,h} &= \chi_\theta + (1 - \chi_\theta)e^{-\lambda_\theta |T_l - T_h|} \\ \phi_{l,h} &= \text{sign}(\phi_{l,l}) \sqrt{|\phi_{l,l} \phi_{h,h}|} e^{[-\lambda_{\phi 1}(T_l - T_h)^+ - \lambda_{\phi 2}(T_h - T_l)^+]} \end{aligned} \quad (4.3)$$

とした。

以上にに基づき、(4.1) 式をオイラー近似にて離散化して $L_l(t), s_l(t)$ のパスを生成した。なお、その際単に $L_l(t)$ をオイラー近似した場合、相応の数のパスにて $(L_l(t) - b)$ が負になる事象が発生した。同種の事象は、Chen et al. [12] による SABR モデルのシミュレーションにおいても報告され、通常の市場環境を前提としたモデルパラメーターにおいても相応の数の原資産価格が負になる結果が報告された。これを回避するための手段やシミュレーション誤差を改善させるための手法については、種々のものが知られているが ([11], [12], [23])、本研究では [12] で提案されたように $L_l(t)$ の自然対数をとった $\ln L_l(t), \ln s_l(t)$ についてオイラー近似する最も簡素な手法を採用した。

なお、1 の手順にて $L_l(t)$ のパスが (4.1) 式に基づき正しく生成されていないと適切な価格を得ることはできないため、この検証を行う必要がある。本研究では、[4] による SABR モデルにおける解析解（ただし、 $\phi_l = 0$ の場合）等との比較を行うことでパスの正確性を確認している。

シミュレーションにおいては python を用いて実装を行い、分散減少法として負の相関法を用いた。

4.1.2 本研究における LSM 法の計算方法

次に、LSM 法を用いた価格計算を 2.1 節で述べた手順に基づき行った。なお、 t 時点における $SR_{m,n}(T_k^{ex})$ を原資産とするペイヤーズスワップションの割引ペイオフ $Y_{T_k^{ex}}$ は、(3.20) 式で触れたようにターミナル測度のもとで、

$$Y_{T_k^{ex}} = \frac{P(t, T_{n+1})}{P(T_k^{ex}, T_{n+1})} An_{m,n}(T_k^{ex})(SR_{m,n}(T_k^{ex}) - K)^+ \quad (4.4)$$

と表現できる。また、レシーバーズスワップションでは、

$$Y_{T_k^{ex}} = \frac{P(t, T_{n+1})}{P(T_k^{ex}, T_{n+1})} An_{m,n}(T_k^{ex})(K - SR_{m,n}(T_k^{ex}))^+ \quad (4.5)$$

となる。

一般に、LSM 法において基底関数としてどのような関数を選択するかはオプション価格に大きく影響する重要な要素である ([32])。これに関する比較検証が本研究の主題であり、その数値計算結果は 4.3 節で述べるが、本研究では以下の 3 つの基底関数を定め計算を行った。なお、これまで 2.1, 2.2 節における説明変数は、各基底関数の線形結合である

$$\sum_{q=0}^D \gamma_{t_j}^{(q)} \psi^q(S_{t_j}^{(i)})$$

を用い、回帰を行うこととしていたが、1 種類の関数 $\psi^q(S_{t_j}^{(i)})$ ではなく、異なる複数の種類の基底関数をの線形結合したもので回帰を行うことも考えられる。そこで、以降では回帰に用いる説明変数を p 種類の基底関数の線形結合である

$$\sum_{p=0}^{D^p} \sum_{q=1}^{D^q} \gamma_{t_j}^{p,q} \psi^{p,q}(S_{t_j}^{(i)})$$

式を回帰における説明変数とする。

1. スワップレート $SR_{m,n}^{(i)}(t)$ を用い、基底関数を、

$$\begin{aligned} \psi^2(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= (SR_{m,n}^{(i)}(t))^2 \\ \psi^1(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= SR_{m,n}^{(i)}(t) \\ \psi^0(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

で定める。

2. スワップレート $SR_{m,n}^{(i)}(t)$ とヨーロッパンスワップションの解析近似解 $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,(i)}$ (後述) を用い、基底関数を、

$$\begin{aligned}\psi^{1,2}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= (SR_{m,n}^{(i)}(t))^2 \\ \psi^{1,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= SR_{m,n}^{(i)}(t) \\ \psi^{2,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= \hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,(i)} \\ \psi^0(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= 1\end{aligned}\tag{4.7}$$

で定める。

3. 以下で定める $\text{payoff}f_{t,(m,n)}^{(i)}(K)$ および implied Normal vol の解析近似解 $\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K)$ (後述) を用い基底関数を、

$$\begin{aligned}\psi^{1,2}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= (\text{payoff}f_{t,(m,n)}^{(i)}(K))^2 \\ \psi^{1,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= \text{payoff}f_{t,(m,n)}^{(i)}(K) \\ \psi^{2,2}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= (\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K))^2 \\ \psi^{2,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K) \\ \psi^0(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= 1\end{aligned}\tag{4.8}$$

で定める。なお、 $\text{payoff}f_{t,(m,n)}^{(i)}(K)$ は、ペイヤーズスワップションであればそのペイオフ $\text{payoff}f_{t,(m,n)}^{pay,(i)}(K)$ は

$$\text{payoff}f_{t,(m,n)}^{pay,(i)}(K) = AN_{m,n}^{(i)}(t)(SR_{m,n}^{(i)}(t) - K)\tag{4.9}$$

で定め、レシーバーズスワップションであればそのペイオフ $\text{payoff}f_{t,(m,n)}^{rec,(i)}(K)$ は

$$\text{payoff}f_{t,(m,n)}^{rec,(i)}(K) = AN_{m,n}^{(i)}(t)(K - SR_{m,n}^{(i)}(t))\tag{4.10}$$

で定めることとする。

まず、1 についてであるが、バミューダンスワップションの原資産はスワップレート $SR_{m,n}(t)$ であるから、その水準は継続価値 $C_{T_k^{ex}}$ に強く影響を与えられ、例えば LMM の下でのバミューダンスワップションの既存研究でも用いられている ([1], [22]) ことから、説明変数の候補の一つとした。

しかし、本研究のモデルである shifted-LMM-SABR では、ボラティリティ $s_l(t)$ も確率的に変動させているから、ボラティリティの情報を含む何らかの説明変数も加えることが望ましい。その代表的な 1 つは、ヨーロッパンスワップションの価格である。(3.26),(3.27)

式にあるようにインプライドボラティリティ σ_{swap}^{normal} を含んでいることからボラティリティの情報を含むと考えられ、LMM に関するバミューダンスワップションの既存研究 ([6]) でも用いられている。そこで、 t_j 時点におけるあるオプション満期 (権利行使日) T_k^{ex} に対するヨーロピアンスワップションの価格を用いたが、(3.19) 式で表される条件付き期待値を各パス・時点毎に得るために、nested シミュレーションが必要となり、計算負荷が相応に高くなると予想される。そのため本節では [27] を参考に、shifted-LMM-SABR の下でのヨーロピアンスワップションの解析近似解を導出し、それを用いヨーロピアンスワップションの価格することとした (なお、その計算・導出手順は付録 B を、その精度検証は付録 C を参照されたい)。各パス毎におけるヨーロピアン・ペイヤーズスワップション価格の近似解をそれぞれ $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}$, $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,rec,(i)}$ とすると、(B.35) 式から、

$$\begin{aligned}\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)} &= AN_{m,n}^{(i)}(t) \text{CorePayNormal}(SR_{m,n}^{(i)}(t), K, \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K), t, T_k^{ex}) \\ \hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,rec,(i)} &= AN_{m,n}^{(i)}(t) \text{CoreRecNormal}(SR_{m,n}^{(i)}(t), K, \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K), t, T_k^{ex})\end{aligned}\quad (4.11)$$

と定め、これを説明変数の 2 つ目の候補として考え、(4.7) 式を基底関数とした。

一方、ボラティリティ $s_l(t)$ を含む説明変数であれば単にインプライド・ノーマルボラティリティ $\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K)$ を候補とすることも考えられる。そこで、3 つ目の候補として $\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K)$ を用い、その基底関数は (4.8) 式で与えた。

なお、[24] では基底関数の関数形として直交多項式を用いていたが、Areal et al. [5] において、多項式の関数形は大きな影響を及ぼさないことが報告されたことから、本研究では (4.7), (4.8), (4.11) 式にあるように単純な多項式の形で考えた。

また、[24] では回帰の際に、行列計算の負荷軽減の観点から ITM のパスのみを対象に回帰を行っていたが、本研究では OTM を含むすべてのパスを対象に回帰を行っても計算負荷は大きく変わらないことから、OTM のパスも含めて回帰を行った。

4.1.3 本研究における Belomestny et al. [6] に関する計算方法

2.2.2 節で示したように、[6] の方法を実装するうえで回帰の基底関数を定める必要があり、これについても LSM と同様、説明変数の選択がオプション価格に強く影響することが予想される。ただし、本研究ではこの説明変数の選択については研究対象とせず、[6] における研究結果を用いることとした。それによれば、2 章の (具体的な計算手順 3) の各 t_j 時点 ($t_j \in [T_k^{ex}, T_{k+1}^{ex}]$) での回帰において、 t_j 時点から最も近い時点の権利行使日におけ

るヨーロッパオプションの各ブラウン運動に対するボラティリティ項を説明変数とすることを提案している。

本研究では (4.1) 式において、 $L_l(t), s_l(t)$ の確率過程を与えていたから、

$$\begin{aligned} X_t^{k+1,L,l,(i)} &:= \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial L_l^{(i)}(t)} (L_l^{(i)}(t) - b)^{\beta_l} s_l^{(i)}(t) \\ X_t^{M^{ex},L,l,(i)} &:= \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{M^{ex}}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial L_l^{(i)}(t)} (L_l^{(i)}(t) - b)^{\beta_l} s_l^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

および

$$\begin{aligned} X_t^{k+1,s,l,(i)} &:= \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial s_l^{(i)}(t)} s_l^{(i)}(t) v_l \\ X_t^{M^{ex},s,l,(i)} &:= \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{M^{ex}}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial s_l^{(i)}(t)} s_l^{(i)}(t) v_l \end{aligned} \quad (4.13)$$

が説明変数となる。なお、各パスごとのヨーロッパスワップション価格の解 $V_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{european,pay,(i)}$ として、(4.11) 式で求めた解析近似解 $\hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}$ を用いた。そして、(4.12), (4.13) 式を用い Additive Duality Method の基底関数を、

$$\begin{aligned} \psi^{1,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}) &= X_t^{k+1,L,l,(i)} \\ \psi^{2,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}) &= X_t^{M^{ex},L,l,(i)} \\ \psi^{3,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}) &= X_t^{k+1,L,l,(i)} \\ \psi^{4,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}) &= X_t^{M^{ex},s,l,(i)} \\ \psi^0(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1\dots,M}) &= 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

で与えることとする。なお、レシーバーズスワップションについても同様の形で書ける。

ところが、(4.12),(4.13) 式の偏微分の解析的表現を得る際、各解析近似解の各パラメータ $\Sigma_{m,n}(t_0), B_{m,n}, R_{m,n}, V_{m,n}$ の中にも $L_l(t), s_l(t)$ を含んでいるため、これを得ることは容易ではない。そこで、解析的表現に替えて数値微分により、偏微分の計算を行うことが考えられる。数値微分の場合は、 $L_l(t)$ を ΔL 上下にシフトしたものを、 $L_l^{(i),+}(t) := L_l^{(i)}(t) + \Delta L$, $L_l^{(i),-}(t) := L_l^{(i)}(t) - \Delta L$ とし、各々のときに対応するヨーロッパ・ペイヤーズスワップションの価格を $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay,+, (i)}$, $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay,-, (i)}$ とすれば、偏微分に対応する

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial L_l^{(i)}(t)} \text{ に関する数値微分 } \frac{\Delta \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\Delta L_l^{(i)}(t)} \text{ は、} \\
& \frac{\Delta \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\Delta L_l^{(i)}(t)} = \frac{\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,+, (i)}} - \hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{2\Delta L} \\
& \quad - \frac{\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,-, (i)}} - \hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{2\Delta L} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

で得ることができ、 $\frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial L_l^{(i)}(t)}$, $\frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial s_l^{(i)}(t)}$, $\frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial s_l^{(i)}(t)}$ およびレシーバースワップションについても同様である。

一方、(4.15) は各 $\{L_l(t)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l(t)\}_{l=1,\dots,M}$ 分の計算が必要であるため、相応に計算負荷が高く、より計算負荷の低い近似法が望ましい。そこで、(4.13),(4.14) に対して簡便な解析近似的表現を求めることを考える。まず、(4.13) の偏微分の項 $\frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial L_l^{(i)}(t)}$ について、(3.26) より、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial L_l^{(i)}(t)} = \frac{\partial AN_{m,n}^{(i)}(t)}{\partial L_l^{(i)}(t)} \text{CorePayNormal}(SR_{m,n}^{(i)}(t), K, \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{\text{normal},(i)}(T_k^{ex}, K), t, T_k^{ex}) \\
& + AN_{m,n}^{(i)}(t) \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial SR_{m,n}^{(i)}(t)} \frac{\partial SR_{m,n}^{(i)}(t)}{\partial L_l^{(i)}(t)} + AN_{m,n}^{(i)}(t) \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{\text{normal},(i)}(T_k^{ex}, K)} \frac{\partial \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{\text{normal},(i)}(T_k^{ex}, K)}{\partial L_l^{(i)}(t)} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

となるが、ここで、(4.16) において、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial SR_{m,n}^{(i)}(t)} = N(d^{(i)}) \\
& \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay,(i)}}}{\partial \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{\text{normal},(i)}(T_k^{ex}, K)} = N'(d^{(i)}) \quad (4.17) \\
& d^{(i)} = \frac{(SR_{m,n}^{(i)}(t) - K)}{\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{\text{normal},(i)}(T_k^{ex}, K) \sqrt{T_{k+1}^{ex} - t}}
\end{aligned}$$

と書けることに注意する。なお、 $N(\cdot), N'(\cdot)$ はそれぞれ標準正規分布の分布関数および密度関数である。

加えて、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial AN_{m,n(t)}^{(i)}}{\partial L_l^{(i)}(t)} \mathbf{CorePayNormal}(SR_{m,n}^{(i)}(t), K, \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K), t, T_k^{ex}) &\approx 0 \\
\frac{\partial SR_{m,n}^{(i)}(t)}{\partial L_l^{(i)}(t)} &\approx \omega_l^{m,n,(i)}(t) L_l^{(i)}(t) \\
\frac{\partial \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K)}{\partial L_l^{(i)}(t)} &\approx 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

と近似すれば、(4.16) は (4.17),(4.18) から、

$$\frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial L_l^{(i)}(t)} \approx AN_{m,n}^{(i)}(t) N(d^{(i)}) \omega_l^{m,n,(i)}(t) L_l^{(i)}(t) \tag{4.19}$$

と近似できる。同様に、

$$\frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial s_l^{(i)}(t)} = AN_{m,n}^{(i)}(t) \frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K)} \frac{\partial \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K)}{\partial \hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)} \frac{\partial \hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)}{\partial s_l^{(i)}(t)} \tag{4.20}$$

であるが、ここで、

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal,(i)}(T_k^{ex}, K)}{\partial \hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)} \approx \frac{\mathbf{Hagan}(T_k^{ex}, K + b; SR_{m,n}^{(i)}(t) + b, \hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t), \hat{B}_{m,n}^{(i)}, \hat{R}_{m,n}^{(i)}, \hat{V}_{m,n}^{(i)}, t)}{\hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)} \tag{4.21}$$

と近似する。これは、(3.35) における

$$\frac{\alpha_l(t)(1 - \beta_l)(L_l(t) - K)}{L_l(t)^{1-\beta_l} - K^{1-\beta_l}}$$

の項に対して $\alpha_l(t)$ に関する偏微分の計算のみ行ったことに相当する。

また、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)}{\partial s_l^{(i)}(t)} &\approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)}} 2 \sum_{l'=m}^n \left(\rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) \int_t^{T_{k+1}^{ex}} g(T_l - t) g(T_{l'} - t) dt \right) \\
&= \frac{\sum_{l'=m}^n \left(\rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) \int_t^{T_{k+1}^{ex}} g(T_l - t) g(T_{l'} - t) dt \right)}{\sqrt{\hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)}}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

と近似すると、(4.21),(4.21) 式より、(4.20) は、

$$\frac{\partial \hat{V}_{t,(m,n),T_{k+1}^{ex}}^{rebonato,european,pay,(i)}}{\partial s_l^{(i)}(t)} \approx AN_{m,n}^{(i)}(t)N'(d^{(i)}) \frac{\mathbf{Hagan}(T_k^{ex}, K + b; SR_{m,n}^{(i)}(t) + b, \hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t), \hat{B}_{m,n}^{(i)}, \hat{R}_{m,n}^{(i)}, \hat{V}_{m,n}^{(i)}, t)}{\hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)} \frac{\sum_{l'=m}^n \left(\rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) \int_t^{T_{k+1}^{ex}} g(T_l - t) g(T_{l'} - t) dt \right)}{\sqrt{\hat{\Sigma}_{m,n}^{(i)}(t)}} \quad (4.23)$$

と書ける。以上、(4.19),(4.23) 式を用いて、(4.13),(4.14) 式の偏微分の項を計算することとし、以下これを「簡便な近似」による計算と呼ぶことにする。

簡便な近似による計算の精度検証として、数値微分 (4.15) との比較を行った。比較の際のパラメーター等の条件は 4.2 節で行った [6] との比較と同条件である。

表 4.1 数値微分と簡便な近似を用いた場合の Upper Price(単位:bp)

	8%	12%
数値微分	1,115.77	126.43
簡便な近似	1,121.36	126.97

これより、両者の差は 1% 程度以内に収まっていることから、数値微分と簡便な近似には、それほど大きな差はないことが示唆される。

4.2 既存研究との比較

本格的な分析に先立ち、LMM の下でのバミューダンスワップション評価に関する以下の既存研究の結果が再現されることを確認した。

1. CEV 型の LMM を用いてバミューダンスワップションのプライシングを LSM 法により行った Amin [1] の結果
2. LMM を用いてバミューダンスワップションのプライシングを LSM 法と 2.2 節で述べた Additive Duality Method により行った [6] の結果

4.2.1 Amin [1] との比較

[1] での各取引条件は、 $\delta_l = 0.5, T_l = \{5, 5.5, \dots, 9.5\}$ の 0.5 刻み、 $T_k^{ex} = \{5, 5.5, \dots, 9.5\}$ の 0.5 刻み、 $\{L_l(0)\}_{l=1,2,\dots,10} = 6\%, K$ は 4%, 5%, 6%, 7%, 8% であった。

shifted-LMM-SABR において各パラメーターを、shift 幅 $b = 0\%$ 、 $s_l(0) = 0.15$ 、 β_l : 下表のとおり、 $v_l = 0, \phi_{l,l} = 0$ とすればこのモデルと同一となる。なお、すべての満期の LIBOR に関して同一の値を用いた。また、確定的関数は $g(T_l - t) = 0.06^{1-\beta}$ とし、相関は $\rho_{l,h} = 1$ とした。

シミュレーションにおいては回帰係数および価格の算出に用いるパスの数はいずれも 1,000,000 回とし、time step は 0.125 刻みとした。LSM 法における基底関数については、(4.7) を用いた。

各バミュダンスワップションの価格計算結果は以下のとおり (単位は bp) である。

表 4.2 Amin [1] との比較

Amin

取引種類	β	K=4%	K=5%	K=6%	K=7%	K=8%
Payer	0.5	685.9	456.0	283.9	167.0	93.3
Payer	0.0	672.2	444.7	282.3	175.6	107.8
Reciver	0.5	56.0	140.0	279.3	474.7	716.5
Reciver	0.0	43.2	130.3	279.4	484.4	731.2

今回の計算結果

取引種類	β	K=4%	K=5%	K=6%	K=7%	K=8%
Payer	0.5	686.9	456.3	281.9	164.6	91.9
Payer	0.0	672.9	445.1	282.5	173.9	107.4
Reciver	0.5	56.0	139.9	279.2	473.3	715.7
Reciver	0.0	42.2	128.5	278.4	483.9	731.1

差分(Amin-今回の計算結果)

取引種類	β	K=4%	K=5%	K=6%	K=7%	K=8%
Payer	0.5	-1.0	-0.3	2.0	2.4	1.4
Payer	0.0	-0.7	-0.4	-0.2	1.7	0.4
Reciver	0.5	0.0	0.1	0.1	1.4	0.8
Reciver	0.0	1.0	1.8	1.0	0.5	0.1

誤差率((Amin-今回の計算結果)/今回の計算結果)

取引種類	β	K=4%	K=5%	K=6%	K=7%	K=8%
Payer	0.5	-0.15%	-0.07%	0.72%	1.45%	1.48%
Payer	0.0	-0.10%	-0.08%	-0.07%	1.00%	0.41%
Reciver	0.5	0.05%	0.05%	0.02%	0.29%	0.12%
Reciver	0.0	2.44%	1.37%	0.38%	0.11%	0.01%

以上より、一部の OTM の取引を除いておおよそ両者の差は 1% 以内に収まっていることから、[1] の結果は概ね再現できたと思料される。1% 以内に収まっていないものに関して、[1] では基底関数の次数やシミュレーション回数に関する詳細や回帰の際に ITM のパスのみを使うのか等が記載されていなかったことから、それらの違いが差が生じているとも考えられる。

4.2.2 Belomestny et al. [6] との比較

次に、[6] の計算結果と比較を行った。[6] における各取引条件は、 $\delta_l = 0.25, T_l = \{0.25, 0.5, \dots, 10\}$ の 0.25 刻み、 $T_k^{ex} = \{1, 2, \dots, 10\}$ の 1 刻み、 $\{L_l(0)\}_{l=1,2,\dots,40} = 10\%$ 、 K は 8%, 12% で取引種類はペイヤーズスワップションである。

shifted-LMM-SABR において各パラメーターを、shift 幅 $b = 0\%$ 、 $s_l(0) = 0.2$ 、 $\beta_l = 1$ 、 $\nu_l = 0$ 、 $\phi_{l,l} = 0$ とすればこのモデルと同一となる。なお、すべての満期の LIBOR に関して同一の値を用いた。また、確定的関数については $g(T_l - t) = (0.5 + 1.5(T_l - t))e^{-3.5(T_l - t)} + 0.5$ とし相関については $\rho_{l,h} = 1$ とした。

シミュレーションにおいては LSM 法における回帰係数および Additive Duality Method における回帰係数算出に用いるパスの数は 150,000 回、価格算出は 1,000,000 回とし、time step は 0.125 刻みとした。LSM 法の基底関数は (4.7), (4.9) を用い、

$$\begin{aligned}\psi^{1,2}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= (\text{payoff}_{t,(m,n)}^{\text{pay},(i)}(K))^2 \\ \psi^{1,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= \text{payoff}_{t,(m,n)}^{\text{pay},(i)}(K) \\ \psi^{2,1}(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= \hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{\text{rebonato,european,pay},(i)} \\ \psi^0(\{L_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}, \{s_l^{(i)}(t_j)\}_{l=1,\dots,M}) &= 1\end{aligned}$$

とした。また、Additive Duality Method の基底関数は、(4.14) を用いた。

各バミューダンスワップションの価格計算結果は以下のとおり (単位は bp) である。

表 4.3 Belomestny et al. [6] との比較

		8%	12%
Belomestny et al. [6]	LSM 法	1,108.80	121.00
	Duality	1,109.60	122.40
	Duality gap(Duality-LSM 法)	0.80	1.40
今回の計算結果	LSM 法	1,101.22	117.73
	Duality	1,115.19	126.25
	Duality gap(Duality-LSM 法)	13.97	8.52

[6] の結果は、LSM 法と Additive Duality Method による推定値の差分 (以下、duality gap と呼ぶ) は非常にタイトになっているが、今回の計算では duality gap が [6] の結果と比して大きい結果となった。この原因としては、説明変数として用いられているヨーロッパアンスワップションの解析近似解が異なる点が挙げられ、[6] らの用いた解析近似解の精度が高い場合、duality gap が小さくなっていることが考えられる。

4.3 異なる市場環境における適切な説明変数の選択

本節ではバミューダンスワップション価格の推定値について、4.1 節で述べた LSM 法における説明変数および基底関数 (4.6),(4.6),(4.8) 式の違いが、

1. Lower Price そのものに与える影響
2. duality gap (Upper Price と Lower Price の差) の大きさに与える影響

という 2 つの観点から、複数の市場環境 (モデルパラメーター) 下で分析を行った。

4.3.1 各説明変数の違いが LSM の結果に与える影響

本節における各取引条件は、 $\delta_l=0.5$, $T_l=\{0.5,1.0,\dots,9.5\}$ の 0.5 刻み, $T_k^{ex}=\{0.5,1.0,\dots,9.5\}$ の 0.5 刻み, $\{L_l(0)\}_{l=1,2,\dots,19}=5\%$, K は 3%,5%,7% で取引種類はレシーバーズスワップションである。

shifted-LMM-SABR において各パラメーターを、shift 幅 $b = 5\%$ とし、各 SABR モデルに関係するパラメーターは表 4.4 のとおりとした。

表 4.4 SABR モデルに関するパラメーター (すべての l で共通の値とした)

	$s_l(0)$	ν_l	$\phi_{l,l}$	β_l
条件 1	0.02	0.3	0.2	0.5
条件 2	0.03	0.3	0.2	0.5
条件 3	0.01	0.3	0.2	0.5
条件 4	0.02	0.7	0.2	0.5
条件 5	0.02	0.1	0.2	0.5
条件 8	0.02	0.3	0.2	0.8
条件 9	0.02	0.3	0.2	0.1

確定的関数については $g(T_l - t), h(T_l - t)$ に関しては、 $a_g = 0, a_h = 0, b_g = 0, b_h = 0, c_g = 0, c_h = 0, d_g = 1, d_h = 1$ とした。

相関における各パラメーターは、 $\chi_\rho = 0, \lambda_\rho = 0.0413, \chi_\theta = 0, \lambda_\theta = 0.0413, \lambda_{\phi_1} = 0, \lambda_{\phi_2} = 0.2$ とした。

シミュレーションにおいては回帰係数算出および価格算出に用いるパスの数は 100,000 回とした。time step は 0.125 刻みとした。

各説明変数について再度簡単に述べると、説明変数 1 は (4.6) 式により定めた説明変数でありスワップレートを用いた説明変数である。説明変数 2 は (4.7) 式により定めた説明変数でありスワップレートおよびヨーロピアンスワップションの価格を用いた説明変数である。説明変数 3 は (4.8) 式により定めた説明変数であり ペイオフおよび implied Normal vol を用いたものである。

各条件におけるオプション価格は表 4.5 のとおりとなった。

表 4.5 各条件におけるオプション価格 (単位:bp)

K=3%

	説明変数1	説明変数2	説明変数3
条件1	19.61	28.99	25.97
条件2	68.48	90.03	67.35
条件3	1.40	2.00	2.37
条件4	29.61	60.02	41.93
条件5	18.28	21.58	22.35
条件6	1.24	1.89	2.17
条件7	271.62	293.91	286.39

K=5%

	説明変数1	説明変数2	説明変数3
条件1	266.08	287.66	287.09
条件2	403.29	436.13	426.91
条件3	135.84	146.99	147.84
条件4	240.67	305.67	294.92
条件5	281.51	278.05	284.44
条件6	134.45	146.68	132.71
条件7	679.06	713.09	660.35

K=7%

	説明変数1	説明変数2	説明変数3
条件1	1,439.37	1,439.96	1,439.62
条件2	1,473.16	1,480.42	1,475.94
条件3	1,461.32	1,461.32	1,461.32
条件4	1,440.77	1,446.12	1,444.11
条件5	1,461.27	1,461.44	1,461.23
条件6	1,461.19	1,461.19	1,461.19
条件7	1,573.74	1,604.24	1,571.55

まず、説明変数の違いによる価格の水準を見てみると、2.1 節で述べたように LSM は Lower Price を得る手法であるから、価格が大きいほど真値に近いことが期待されるが、

説明変数 2 の値がおおよそ高く次いで説明変数 3、1 の順に高いことがわかる。これは、今回の数値実験は金利とボラティリティが確率変動するというモデルの下で行っていることから、ボラティリティの情報が少ない説明変数 1 は相対的に説明力が小さいためであると考えられる。ただし、説明変数 3 についても、ボラティリティの情報を含んでいるため、説明変数 2 と同程度の説明力が期待されるが、必ずしも同程度の説明力があるわけではなく、特に条件 2、4 では差が顕著となった。

次に、 K に着目し、説明変数の違いによる価格差を見てみる。 K が大きくなるにつれて各条件の説明変数の違いによる価格差が価格の絶対水準のオーダーが異なることを考慮しても、小さくなっていることがわかる。特に、 $K = 7\%$ では説明変数の違いによる価格差は小さいことがわかる。これは、レシーバーズスワップションでは、 K が大きくなるにつれて行使確率が高まるため、行使領域の特定が容易であり、各パラメーターが異なっても、説明変数の違いが大きな影響を与えないためであると考えられる。一方、 $K = 3\%$ では、説明変数の違いによる価格差が相対的に大きくなっていることが分かる。これは、 $K = 7\%$ とは反対に、行使確率が低いため相対的に行使領域の特定が困難であるためであると考えられる。

そのなかでも特に、 $K = 3\%$ における条件 2 と 4 において説明変数の違いによる価格差が大きいことがわかる。これは、条件 2 は、 $s_l(0)$ が上昇した場合の条件であるため、 $L_l(t)$ および $s_l(t)$ の変動幅が他の条件に比して大きくなりやすく、行使領域の特定が困難になった結果、説明変数の違いによる価格差が大きくなったためであると考えられる。特に、説明変数 2 はヨーロピアンスワップションの価格そのものを用いていることから説明力が高くなったと考えられる。

同様に、条件 4 は v_l が上昇した場合の条件であるため、上記と同様の理由により価格差が大きくなったためであると考えられる。

各説明変数の違いによる価格差がシミュレーション誤差で説明できるのか確認を行うため、条件 1,2,4 の $K = 3\%, 5\%$ の場合について収束の様子を図 4.1,4.2,4.3 に示す。

図 4.1,4.2,4.3 より、いずれもシミュレーション誤差は説明変数の違いによる価格差よりも十分に小さく、各説明変数間の価格差は各説明変数が持つ説明力の違いに起因するものであると考えられる。

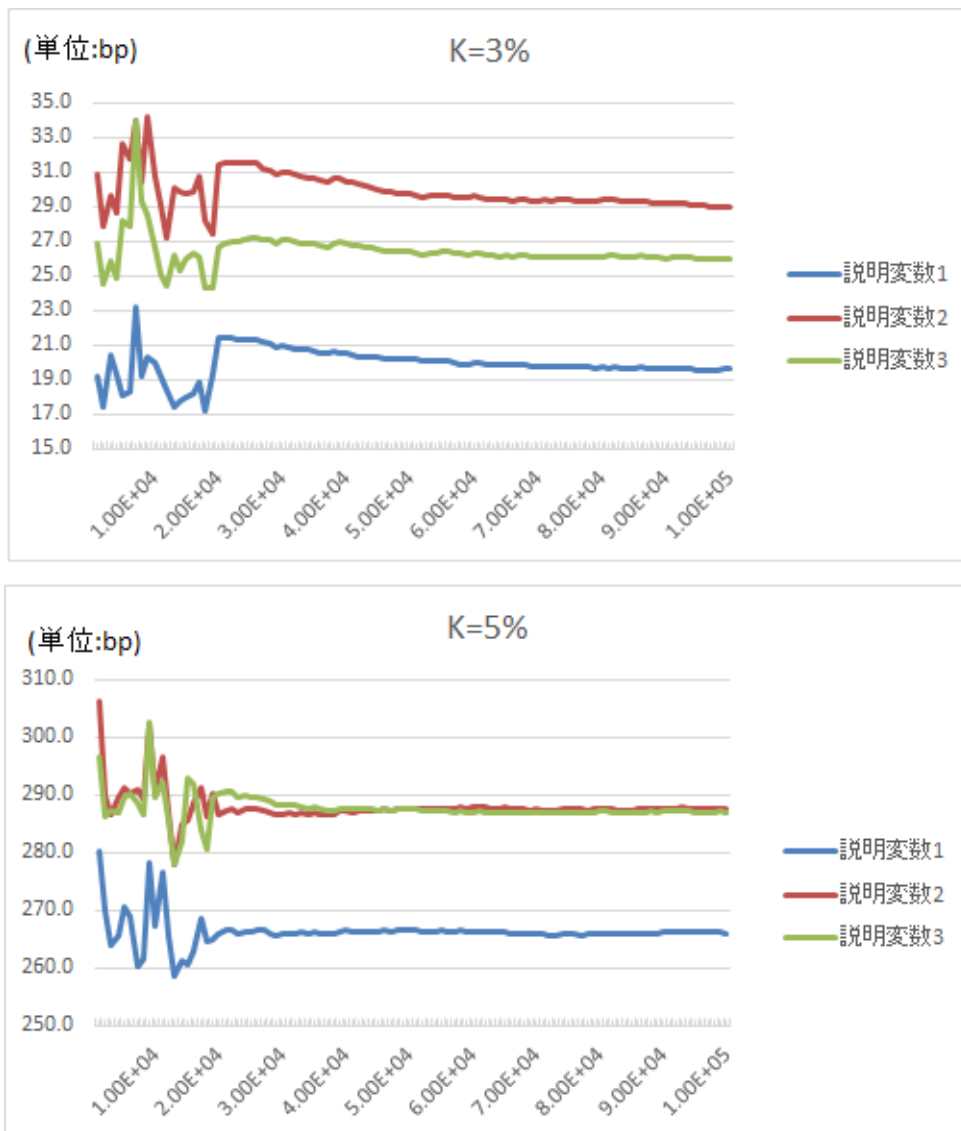


図 4.1 条件 1 における各説明変数毎の収束の様子 (縦軸は価格、横軸はバスの回数)

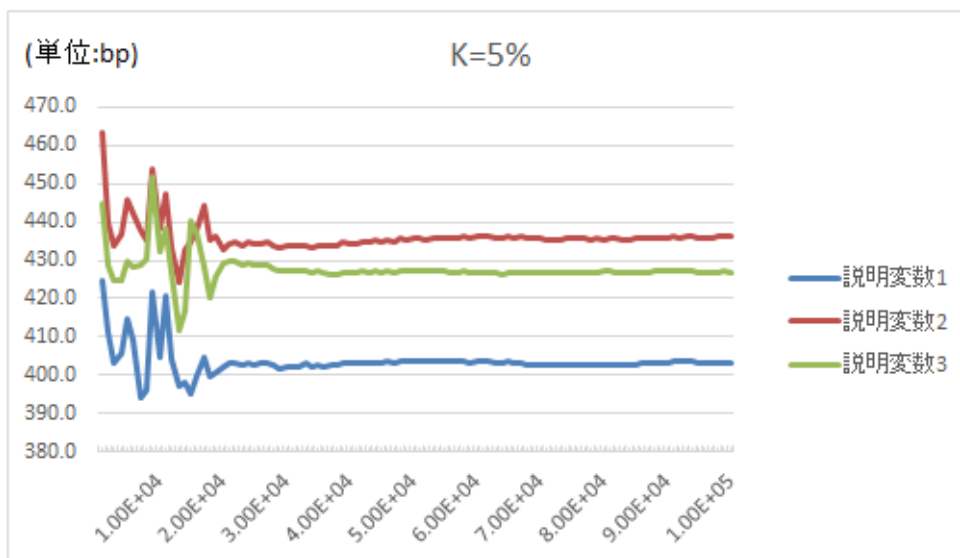
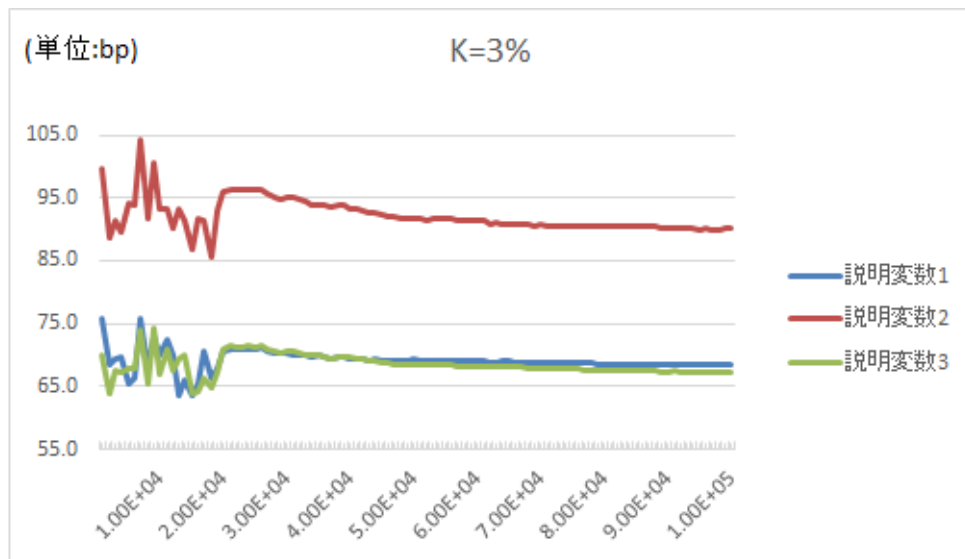


図 4.2 条件 2 における各説明変数毎の収束の様子 (縦軸は価格、横軸はパスの回数)

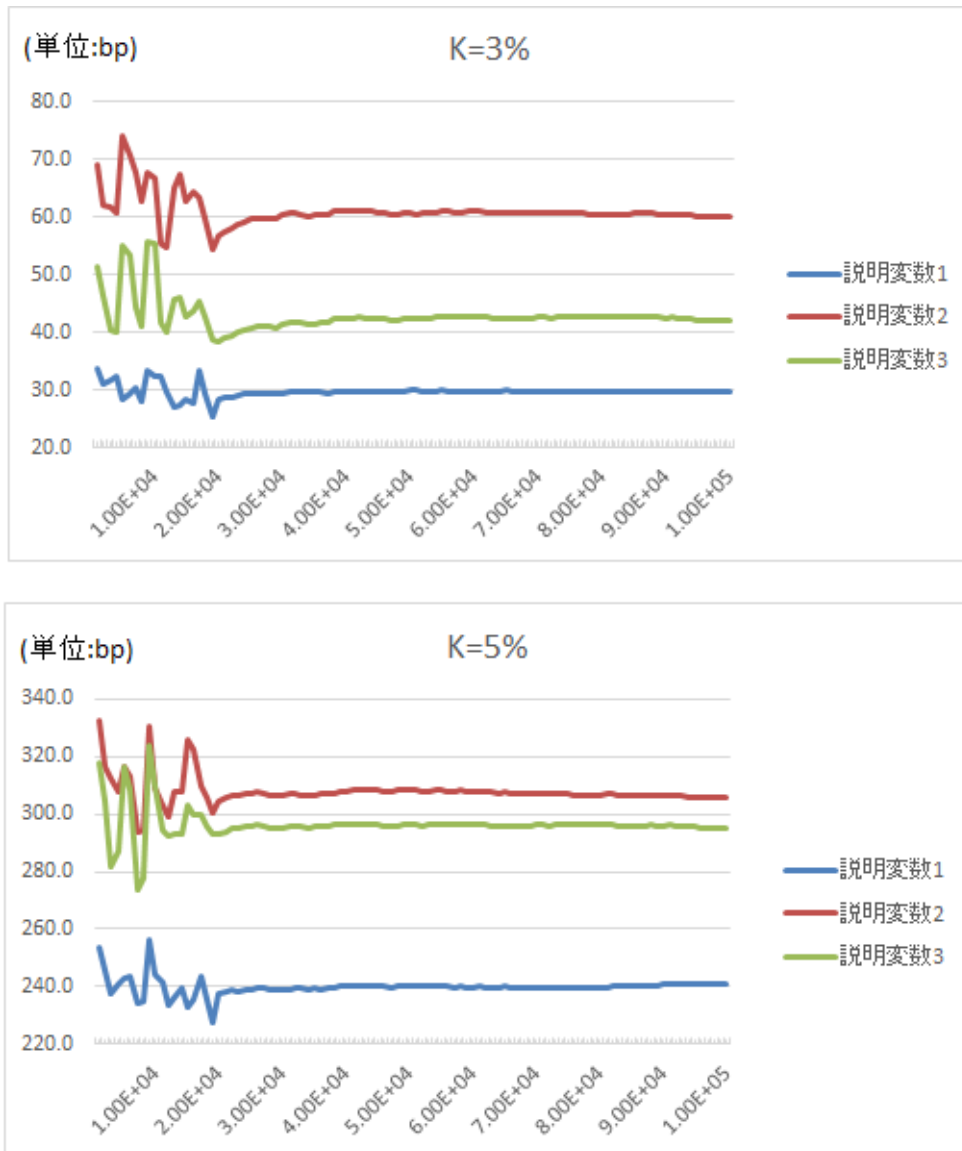


図 4.3 条件 4 における各説明変数毎の収束の様子 (縦軸は価格、横軸はバスの回数)

4.3.2 各説明変数の違いが duality gap に与える影響

次に、バミューダンスワップシヨンのより精緻な価格解を得るための適切な説明変数を把握するため、Lower Price と Upper Price のバンドについて比較を行った。

各取引条件は、 $\delta_l = 0.5, T_l = \{0.5, 1.0, \dots, 9.5\}$ の 0.5 刻み, $T_k^{ex} = \{0.5, 1.0, \dots, 9.5\}$ の 0.5 刻み, $\{L_l(0)\}_{l=1,2,\dots,19} = 5\%, K$ は 3%, 5%, 7% で取引種類はレシーバースワップシヨンである。

shifted-LMM-SABR において各パラメーターを、shift 幅 $b = 5\%$ とし、各 SABR モデルに
 関係するパラメーターは下表のとおりとした。

表 4.6 SABR モデルに關係するパラメーター (すべての l で共通の値とした)

	$s_l(0)$	v_l	$\phi_{l,l}$	β_l
条件 1	0.02	0.3	1	0.1
条件 2	0.03	0.3	1	0.1
条件 3	0.01	0.5	1	0.1

確定的関数については $g(T_l - t), h(T_l - t)$ に関しては、 $a_g = 0, a_h = 0, b_g = 0, b_h = 0, c_g = 0, c_h = 0, d_g = 1, d_h = 1$ とした。

相関における各パラメーターは、 $\rho_{l,h} = 1, \phi_{l,h} = 1, \theta_{l,h} = 1$ とした。

シミュレーションにおいては回帰係数算出に用いるパスの数は 100,000 回、価格算出は 100,00 回とし、time step は 0.125 刻みとした。

各説明変数について再度簡単に述べると、説明変数 1 は (4.6) 式により定めた説明変数でありスワップレートを用いた説明変数である。説明変数 2 は (4.7) 式により定めた説明変数でありスワップレートおよびヨーロッパアンスワップションの価格を用いた説明変数である。説明変数 3 は (4.8) 式により定めた説明変数であり ペイオフおよび implied Normal vol を用いたものである。

各条件におけるオプション価格は表 4.7 のとおりとなった。

表 4.7 各条件におけるオプション価格 (単位:bp)

K=3%

		説明変数1	説明変数2	説明変数3
条件1	LSM	189.3	202.1	192.7
	Dual	223.0	221.9	225.9
	duality gap	33.7	19.8	33.1
条件2	LSM	497.9	511.0	513.9
	Dual	511.0	534.5	535.1
	duality gap	13.1	23.5	21.2
条件3	LSM	120.6	124.6	124.4
	Dual	138.2	142.8	142.5
	duality gap	17.6	18.1	18.1

K=5%

		説明変数1	説明変数2	説明変数3
条件1	LSM	721.5	750.9	591.3
	Dual	767.8	768.1	1,188.8
	duality gap	46.4	17.2	597.5
条件2	LSM	1,086.3	1,123.4	1,113.4
	Dual	1,144.9	1,148.8	1,188.8
	duality gap	58.7	25.4	75.4
条件3	LSM	743.4	752.6	739.4
	Dual	777.5	776.5	939.4
	duality gap	34.1	23.9	200.0

K=7%

		説明変数1	説明変数2	説明変数3
条件1	LSM	1,675.0	1,693.8	1,684.0
	Dual	1,714.7	1,714.7	1,713.8
	duality gap	39.7	20.9	29.8
条件2	LSM	1,962.5	1,995.7	1,990.9
	Dual	2,024.7	2,025.5	2,024.8
	duality gap	62.1	29.7	34.0
条件3	LSM	1,746.7	1,754.7	1,744.9
	Dual	1,776.3	1,786.2	1,786.8
	duality gap	29.6	31.5	41.9

一部条件を除き、説明変数 2 による duality gap が最も小さいため、説明変数 2 が適切な説明変数であることがわかった。これは、shifted-LMM-SABR においては、ボラティ

リティも確率的に変動するモデルであるため、ボラティリティに関するなんらかの情報を含んでいる説明変数がより精緻な価格を得ることができるためであると考えられ、説明変数 3 もボラティリティの情報を含んでいるものの、ヨーロピアンオプションの価格自体を用いているという点が説明変数 2 の優位性につながったものと思料される。特に、4.3.1 節で見たように $s_l(0)$ や v_l を上昇させた場合には、説明変数間の価格差が大きくなったことや C でみたように解析近似解の精度が悪化するため、説明力が低下するものと思われたが、条件 2,3 においても説明変数 3 は条件 1 と同程度の説明力を持つことがわかった。この点は、今後、説明変数 2 に implied Normal vol を加えて価格がどの程度変化するのか確認することで、確認を行ってみたい。

なお、 $K = 5\%$ の説明変数 3 の duality gap が非常に大きくなっているおり、現段階では確証性のある原因を明らかにできなかったが、implied Normal vol を求める式である (3.35) 式において、スワップレートとストライクレートが等しい場合は、(3.35) 式で implied Normal vol を定めることができないため、スワップレートとストライクレートの差が極度に小さいパスにおいては、不正な implied Normal vol が定められるものと思料される。 $K = 5\%$ は、そのような状況下に陥るパスの数が他の K に比して多いと考えられることから、duality gap が非常に大きくなっている可能性がある。

各説明変数の違いによる duality gap の大きさの違いがシミュレーション誤差で説明できるのか確認を行うため、特に、duality gap の差が価格の絶対水準のオーダーに比して大きい $K = 3\%$ の場合について、収束の様子を図 4.4,4.5,4.6 に示す。いずれもシミュレーション誤差は説明変数の違いによる duality gap の差よりも十分に小さく、各説明変数間の duality gap の差は各説明変数が持つ説明力の違いに起因するものであると考えられものの、各シミュレーション誤差についてより詳細に確認することが今後必要である。

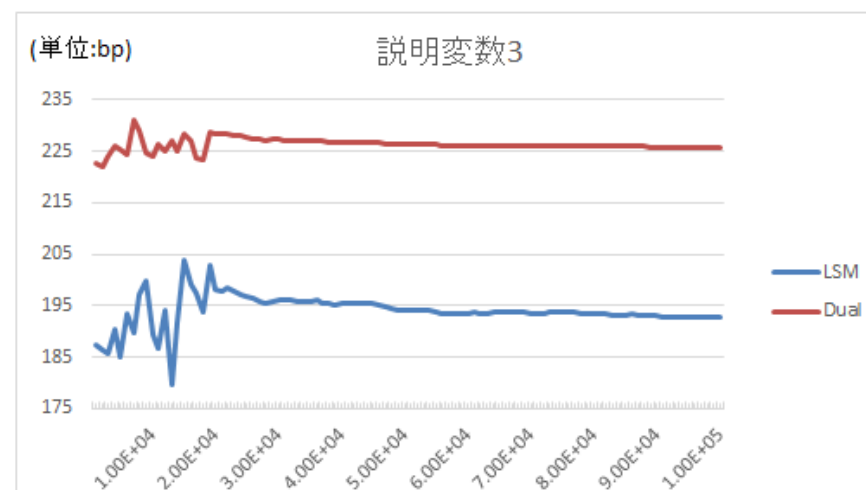
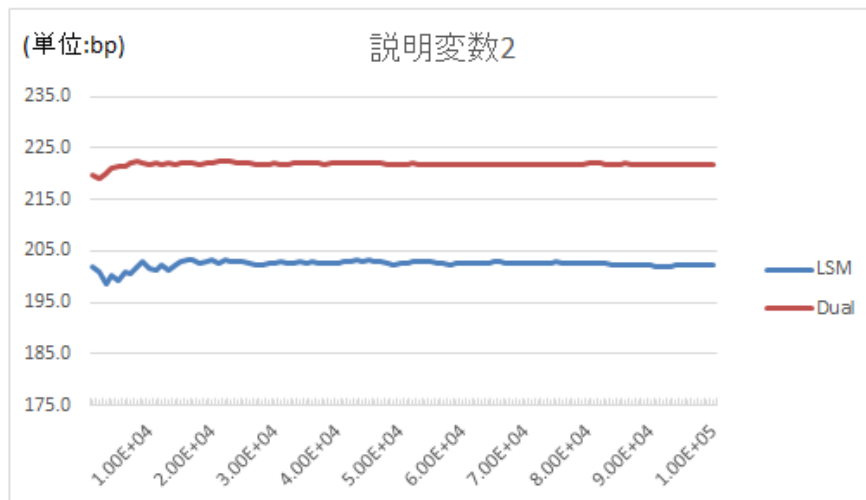
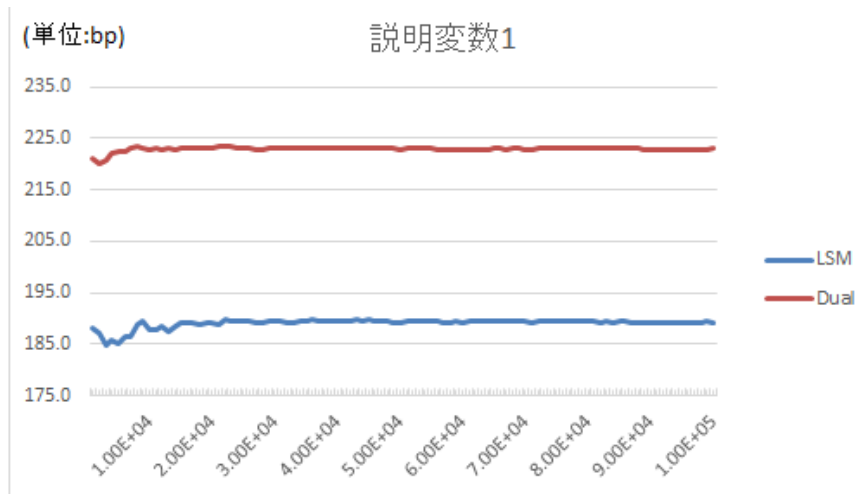


図 4.4 条件 1 の $K = 3\%$ において各説明変数を用いた場合の収束の様子 (縦軸は価格、横軸はパスの回数)

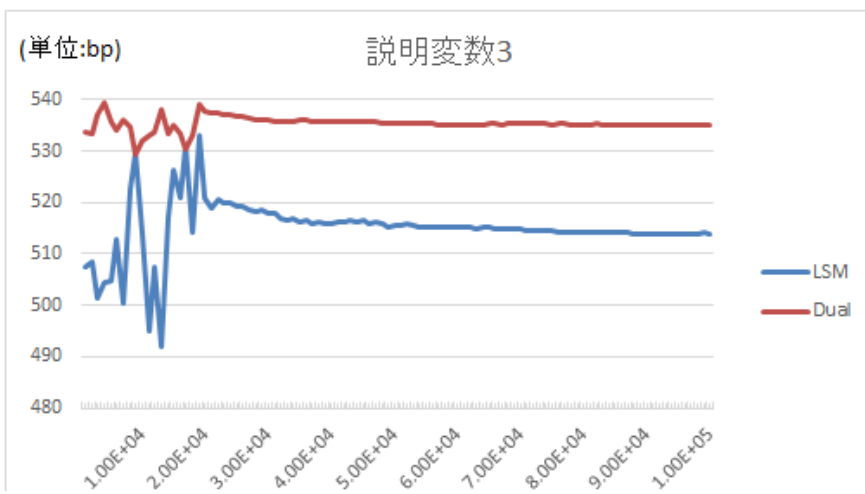
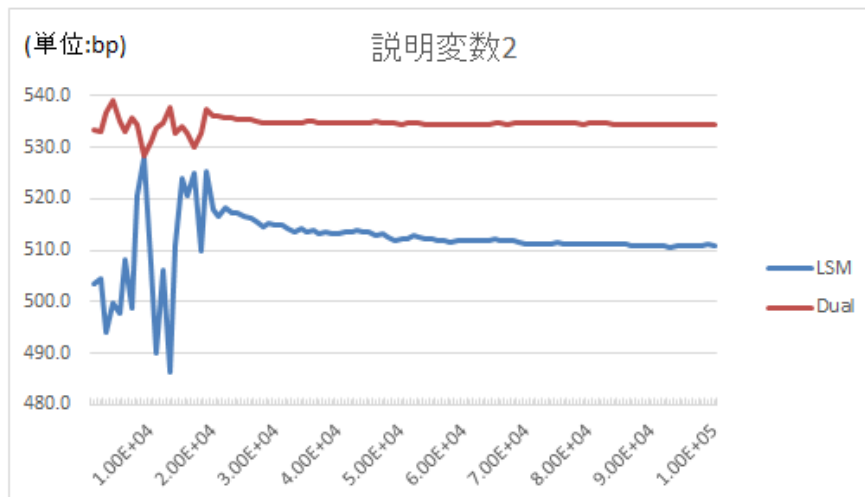
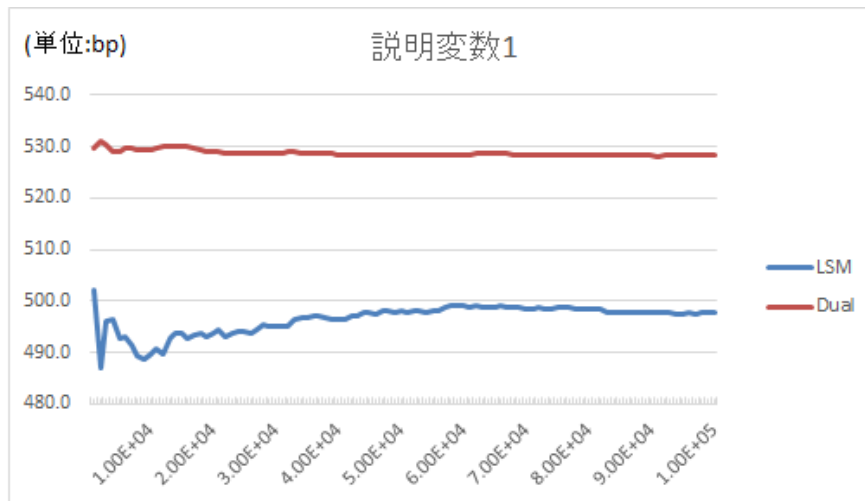


図 4.5 条件 2 の $K = 3\%$ において各説明変数を用いた場合の収束の様子 (縦軸は価格、横軸はパスの回数)

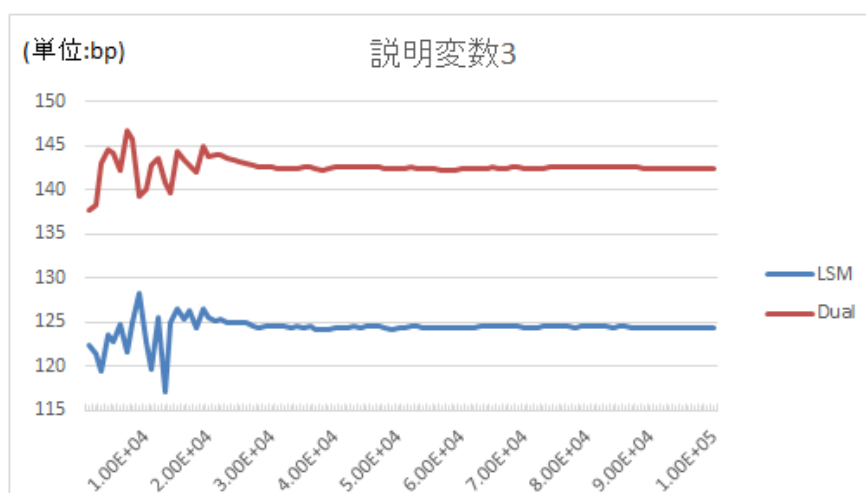
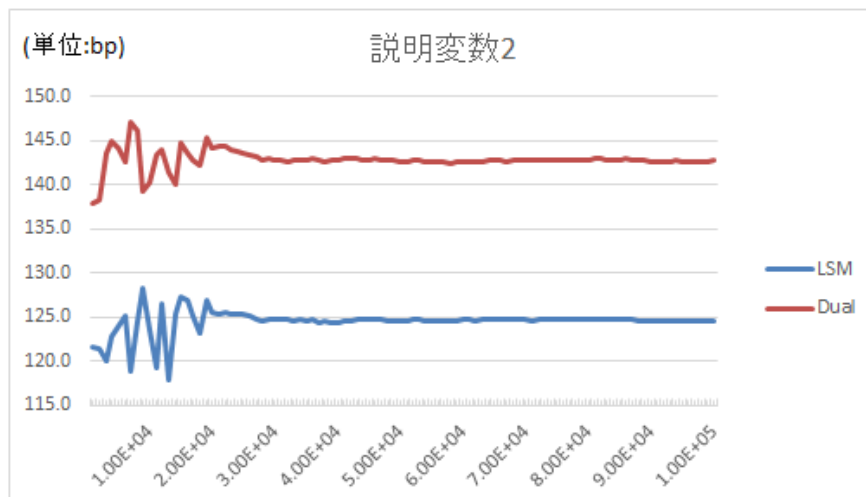
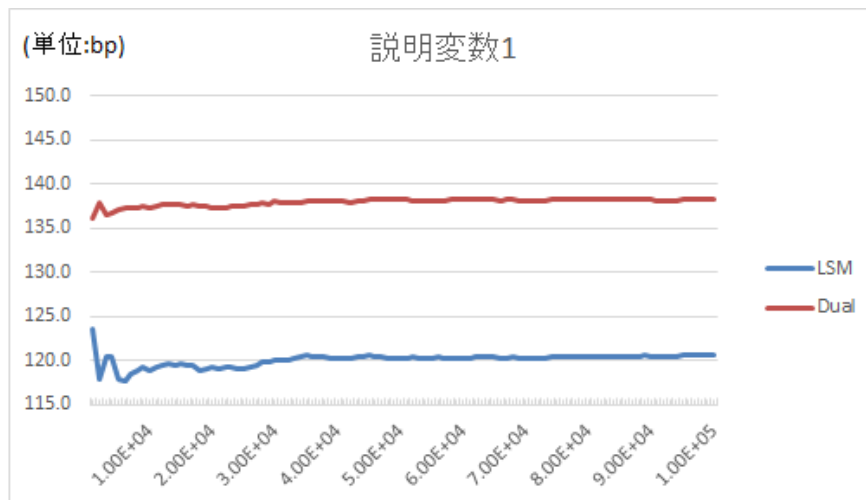


図 4.6 条件 3 の $K = 3\%$ において各説明変数を用いた場合の収束の様子 (縦軸は価格、横軸はバスの回数)

第 5 章

結論および今後の研究課題

本研究では、バミューダンオプションのより精緻なプライシングについて検討した。バミューダンオプションは数多くの仕組債に組み込まれている一般的な金融商品であるものの、適切なプライシングが難しく、もし不適切なモデルや評価手法を使ってプライシングすると、市場実勢から大きく乖離してしまい、思わぬ損失を発生する可能性を内包する商品である。本研究では、バミューダンオプションの真の価格に対して下方バイアスを持つ LSM (Least Square Monte Carlo) 法と、上方バイアスを持つ双対 (duality) 法によって与えられる真の価格の存在範囲 (上下限) を、どのようにすればより縮小できるか検討を進める予定であったが、実際には LSM 法における説明変数の選択や、限定されたモデル下での双対法の評価など、一部の数値実験を行うに留まった。

まず、下方バイアスを持つ LSM 法と上方バイアスを持つ双対法を併用して価格の真値を上下から挟み、それぞれの手法を精緻化することで精度の高い価格を推定するという方針を立て、それぞれの手法の理論をまとめた。次に、使用する金利モデルを検討したが、昨今のマイナス金利環境と、ボラティリティサーフェスを考慮する必要性を踏まえて、shifted-LMM-SABR を採用することに決め、その理論をまとめた。数値実験では、shifted-LMM-SABR によるプライシングシステムを構築し、既存の文献をもとに LSM 法と双対法によるプライシングの数値検証を行ってから、実際の問題に適用し、どの程度の幅でプライスの上下限が与えられるかを幾つかの設定の下で提示した。

残念ながら、本研究では LSM 法および双対法に関して、より高精度な推定値が得られる工夫を具体的に提案するには至らなかった。また、当初は Lower Price, Upper Price とともに多次元下での数値実験を予定していたが、Upper Price の算出については、プログラムに疑念があったことから、計算は一次元に留まった。しかし検討を進める中で、LSM 法については回帰に使用する説明変数の候補として、スワップレートおよびヨーロッパ

スワップションの価格を含むものが望ましいとの示唆が得られた一方で、インプライド・ボラティリティは説明変数として、十分な追加的情報を持たない可能性も示唆された。今後も研究方針に従い、得られた示唆をもとに LSM 法および双対法の精度向上の工夫を試みていきたい。

謝辞

本研究に際しては、東京都立大学経営学研究科教授室町先生・同特任教授吉羽先生・同准教授竹原先生より丁寧かつ熱心なご指導を賜り、深く感謝いたします。また、多くのご指導を賜りました当コースの先生方、多くのディスカッションをさせて頂いた学生の皆様に深く感謝の意を表します。最後に、平日夜間という忙しい中、通学について配慮をいただいた信金中央金庫に感謝いたします。みなさま、ありがとうございました。

付録 A

Belomestny et al. [6] の手法における計算手順に関する補足

フィルター付き確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^{W^{D'}}, Q)$ とする。ただし、フィルトレーション $\mathbb{F}^{W^{D'}} = \{\mathcal{F}_t^{W^{D'}}\}$ を、

$$\mathcal{F}_t^{W^{D'}} := \sigma(\{W_s^{D'}; s \leq t\})$$

$$W_s^{D'} := \begin{pmatrix} W_{s^1} \\ W_{s^2} \\ \vdots \\ W_{s^{D'}} \end{pmatrix}$$

とする。

2.2 節では、 $D' = 1$ の場合について、[6] による方法を述べた。一方、本稿では shifted-LMM-SABR のモデルを用いたバミューダンスワップションの価格付けが主題であるから、 $D' > 1$ となるモデルが前提となり、各 W_s^d が相関を持つことを前提とする必要があるが、[6] では各 W_s^d が独立であることを前提にした記述しかないことから、ここでは、各 W_s^d が相関を持つ場合の [6] による Additive Duality Method について述べる。

はじめに、 $V_{T_{k+1}}, V_{T_k}$ に関する Doob-Meyer 分解から

$$V_{T_{k+1}} - V_{T_k} = M_{T_{k+1}}^* - M_{T_k}^* - (A_{T_{k+1}}^* - A_{T_k}^*) \quad (\text{A.1})$$

と書ける。ただし、 $M_{T_k}^*$ は $M_0^* = 0$ なるマルチンゲールで、マルチンゲール表現定理より、

$$M_{T_k}^* = \sum_{d'=1}^{D'} \int_0^{T_k} Z_t^{d'} dW_t^{d'}$$

で表現できる。

まず、(A.1) 式を次のように近似する。

$$\begin{aligned} V_{T_{k+1}} - V_{T_k} &\approx \sum_{d=1}^{D'} \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^{d'} \Delta W_{t_j}^{d'} + A_{T_{k+1}} - A_{T_k} \\ &= \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^1 \Delta W_{t_j}^1 + \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^2 \Delta W_{t_j}^2 + \cdots + \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^{D'} \Delta W_{t_j}^{D'} + A_{T_{k+1}} - A_{T_k} \end{aligned}$$

今、 $d' = 1$ に対する $Z_{t_j}^1$ を求めることを考える。両辺に、 $\Delta W_{t_j}^1$ を乗じて $t_j (T_k \leq t_j < T_{k+1})$ 時点での条件付き期待値 $E_{t_j}^Q[\cdot]$ を取ると、

$$\begin{aligned} E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 (V_{T_{k+1}} - V_{T_k})] &= E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_j \leq t_j < T_{j+1}} Z_{t_j}^1 \Delta W_{t_j}^1] + E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_j \leq t_j < T_{j+1}} Z_{t_j}^2 \Delta W_{t_j}^2] \\ &\quad + \cdots + E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_j \leq t_j < T_{j+1}} Z_{t_j}^D \Delta W_{t_j}^D] + E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 (A_{T_{k+1}} - A_{T_k})] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

(A.2) 式について、各項を見ていく。

$$1. E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 (V_{T_{k+1}} - V_{T_k})]$$

$$E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 (V_{T_{k+1}} - V_{T_k})] = E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)(V_{T_{k+1}} - V_{T_k})]$$

であるが、これと V_{T_k} の可測性より、

$$\begin{aligned} E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)(V_{T_{k+1}} - V_{T_k})] &= E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)V_{T_{k+1}}] - V_{T_k} E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] \\ &= E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)V_{T_{k+1}}] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

を得る。

$$2. E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 (A_{T_{k+1}} - A_{T_k})]$$

A_{T_k} の可予測性を用いて

$$E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 (A_{T_{k+1}} - A_{T_k})] = (A_{T_{k+1}} - A_{T_k}) E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1] = 0 \quad (\text{A.4})$$

を得る。

$$3. E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_j \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^1 \Delta W_{t_j}^1]$$

今、 $[T_k \leq t_j < T_{k+1}]$ の区間を $T_k = t_{j-n+1}, t_{j-n}, \dots, t_j, \dots, t_{j+n-1}, t_{j+n} = T_{k+1}$ に分割

すると、

$$\begin{aligned}
E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^1 \Delta W_{t_j}^1] &= E_{t_j}^Q[Z_{t_{j-n}}^1 (W_{t_{j-n+1}}^1 - W_{t_{j-n}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \cdots \\
&\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^1 (W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \cdots \\
&\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+n-1}}^1 (W_{t_{j+n}}^1 - W_{t_{j+n-1}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

と書けるが、ここで、(A.5) 式の各項について、

(a) $E_{t_j}^Q[Z_{t_{j-n}}^1 (W_{t_{j-n+1}}^1 - W_{t_{j-n}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]$
 $Z_{t_{j-n}}^1$ の可測性から、

$$\begin{aligned}
&E_{t_j}^Q[Z_{t_{j-n}}^1 (W_{t_{j-n+1}}^1 - W_{t_{j-n}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] \\
&= Z_{t_{j-n}}^1 (W_{t_{j-n+1}}^1 - W_{t_{j-n}}^1) E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&E_{t_j}^Q[Z_{t_{j-n}}^1 (W_{t_{j-n+1}}^1 - W_{t_{j-n}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \cdots \\
&\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_{j-1}}^1 (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] = 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

を得る。

(b) $E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^1 (W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]$

$$\begin{aligned}
E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^1 (W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] &= Z_{t_j}^1 E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)^2] \\
&= Z_{t_j}^1 (t_{j+1} - t_j)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

となる。

(c) $E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+n-1}}^1 (W_{t_{j+n}}^1 - W_{t_{j+n-1}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]$

$$\begin{aligned}
&E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+n-1}}^1 (W_{t_{j+n}}^1 - W_{t_{j+n-1}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] \\
&= E_{t_j}^Q[E_{t_{j+n-1}}[Z_{t_{j+n-1}}^1 (W_{t_{j+n}}^1 - W_{t_{j+n-1}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]] \\
&= E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+n-1}}^1 (W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1) E_{t_{j+n-1}}[(W_{t_{j+n}}^1 - W_{t_{j+n-1}}^1)]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+1}}^1 (W_{t_{j+2}}^1 - W_{t_{j+1}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \cdots \\
&\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+n-1}}^1 (W_{t_{j+n}}^1 - W_{t_{j+n-1}}^1)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] = 0
\end{aligned} \tag{A.8}$$

となる。以上、(A.6), (A.7), (A.8) から、

$$E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^1 \Delta W_{t_j}^1] = Z_{t_j}^1(t_{j+1} - t_j) \quad (\text{A.9})$$

を得る。

$$4. E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^2 \Delta W_{t_j}^2]$$

$$\begin{aligned} E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_k \leq t_j < T_{k+1}} Z_{t_j}^2 \Delta W_{t_j}^2] &= E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^2 (W_{t_{j-n+1}}^2 - W_{t_{j-n}}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \dots \\ &\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^2 (W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \dots \\ &\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+n-1}}^2 (W_{t_{j+n}}^2 - W_{t_{j+n-1}}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

であるが、(A.10) 式の $E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^2 (W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]$ 以外の項については、(A.6), (A.8) 式と同様のことが成り立つので、

$$\begin{aligned} &E_{t_j}^Q[Z_{t_{j-n}}^2 (W_{t_{j-n+1}}^2 - W_{t_{j-n}}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \dots \\ &\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_{j-1}}^2 (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] \\ &\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+1}}^2 (W_{t_{j+2}}^2 - W_{t_{j+1}}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] + \dots \\ &\quad + E_{t_j}^Q[Z_{t_{j+n-1}}^2 (W_{t_{j+n}}^2 - W_{t_{j+n-1}}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

が成立する。

一方、 $E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^2 (W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]$ は、各 dW_t^d 間に

$$E_t^Q[dW_t^{d1} dW_t^{d2}] = \rho_{d1,d2} dt \quad (\text{A.12})$$

なる相関を持つとすると $E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^2 (W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)]$ は、

$$\begin{aligned} E_{t_j}^Q[Z_{t_j}^2 (W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] &= Z_{t_j}^2 E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)] \\ &= Z_{t_j}^2 \rho_{1,2} (t_{j+1} - t_j) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

これより、(A.10) 式は、(A.11), (A.13) 式から、

$$E_{t_j}^Q[\Delta W_{t_j}^1 \sum_{T_j \leq t_j < T_{j+1}} Z_{t_j}^2 \Delta W_{t_j}^2] = Z_{t_j}^2 \rho_{1,2} (t_{j+1} - t_j) \quad (\text{A.14})$$

となる。

以降、他の d' についても (A.14) 式と同様のことが成立するので、(A.2) 式は (A.3), (A.4), (A.9), (A.14) 式を踏まえ、

$$E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)V_{T_{j+1}}] = Z_{t_j}^1(t_{j+1} - t_j) + Z_{t_j}^2\rho_{1,2}(t_{j+1} - t_j) + \cdots + Z_{t_j}^{D'}\rho_{1,D'}(t_{j+1} - t_j) \quad (\text{A.15})$$

と書ける。

そもそも (A.2) 式は $d = 1$ に対する $Z_{t_j}^1$ を求めるためであったが、同様に他の $Z_{t_j}^d$ についても (A.15) 式が成立するので $d = 2, \dots, D'$ についても、

$$\begin{aligned} E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)V_{T_{j+1}}] &= Z_{t_j}^1(t_{j+1} - t_j) + Z_{t_j}^2\rho_{1,2}(t_{j+1} - t_j) + \cdots + Z_{t_j}^{D'}\rho_{1,D'}(t_{j+1} - t_j) \\ E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)V_{T_{j+1}}] &= Z_{t_j}^1\rho_{1,2}(t_{j+1} - t_j) + Z_{t_j}^2(t_{j+1} - t_j) + \cdots + Z_{t_j}^{D'}\rho_{2,D'}(t_{j+1} - t_j) \\ E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^3 - W_{t_j}^3)V_{T_{j+1}}] &= Z_{t_j}^1\rho_{1,3}(t_{j+1} - t_j) + Z_{t_j}^2\rho_{2,3}(t_{j+1} - t_j) + \cdots + Z_{t_j}^{D'}\rho_{3,D'}(t_{j+1} - t_j) \\ &\vdots \\ E_{t_j}^Q[(W_{t_{j+1}}^{D'} - W_{t_j}^{D'})V_{T_{j+1}}] &= Z_{t_j}^1\rho_{1,D'}(t_{j+1} - t_j) + Z_{t_j}^2\rho_{2,D'}(t_{j+1} - t_j) + \cdots + Z_{t_j}^{D'}(t_{j+1} - t_j) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となる。ここで以下のベクトルおよび行列を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \begin{pmatrix} E_{t_j}^Q\left[\frac{(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^1)V_{T_{k+1}}}{(t_{j+1} - t_j)}\right] \\ E_{t_j}^Q\left[\frac{(W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2)V_{T_{k+1}}}{(t_{j+1} - t_j)}\right] \\ \vdots \\ E_{t_j}^Q\left[\frac{(W_{t_{j+1}}^{D'} - W_{t_j}^{D'})V_{T_{k+1}}}{(t_{j+1} - t_j)}\right] \end{pmatrix} \\ \mathbf{R} &:= \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,D'} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,D'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,D'} & \rho_{2,D'} & \cdots & \rho_{D',D'} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z} &:= \begin{pmatrix} Z_{t_j}^1 \\ Z_{t_j}^2 \\ \vdots \\ Z_{t_j}^{D'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき、(A.16) 式は

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{X}$$

と書き換えられる。ここで、 V の各要素について、2.2 節の (具体的な計算手順 3) と同様に推定し、

$$E_{t_j}^Q \left[\frac{(W_{t_{j+1}}^1 - W_{t_j}^d) V_{T_{k+1}}}{(t_{j+1} - t_j)} \right] \quad (\text{A.17})$$

を近似したものを $\hat{V}_{t_j}^d$ とする。また、それらを要素とするベクトルを \hat{V} を

$$\hat{V} := \begin{pmatrix} \hat{V}_{t_j}^1 \\ \hat{V}_{t_j}^2 \\ \vdots \\ \hat{V}_{t_j}^{D'} \end{pmatrix}$$

で定義すれば、 Z の推定値 \hat{Z} を

$$\hat{Z} = R^{-1} \hat{V}$$

により、得ることができる。

付録 B

shifted-LMM-SABR におけるヨーロッパ ピアンスワップションの解析近似解 の導出

[27] では、LMM-SABR の下でヨーロッパピアンスワップション価格の解析近似解が導出されたが、shifted-LMM-SABR の下では解析近似解は筆者の知る限り明示されていないことから、[27] に倣いその導出を試みる。

[27] と同様にヨーロッパピアンスワップション価格に対する解析近似解は、以下の手順により得ることができる。

1. shifted-LMM-SABR の下で $SR_{m,n}(t)$ の従う確率過程を導出する
2. $SR_{m,n}(t)$ 自身が shifted-SABR モデルに従うと想定し、各パラメーターを定義する
3. 1,2 それぞれのモデルにおける $dSR_{m,n}(t)$ の瞬間的な 2 次モーメントが一致すると考え、このとき 2 で定めた shifted-SABR モデルの各パラメーターを 1 のモデルパラメーターにより表す
4. 3 で求めた各種パラメーターを (3.38) 式に代入して $SR_{m,n}(t)$ に関する Normal vol の近似式 $\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal}(T_k^{ex}, K)$ を得る
5. $\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal}(T_k^{ex}, K)$ を (3.26) もしくは (3.27) に代入し、その近似解 $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay}$ もしくは $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,rec}$ を得る

このとき、手順 3 に基づく、 $SR_{m,n}(t)$ に対する shifted-SABR モデルのパラメーターは、

$$\begin{aligned}
\Sigma_{m,n}(t_0) &= \sqrt{\frac{1}{(T_k^{ex} - t_0)} \sum_{l,l'=m}^n (\rho_{l,l'} w_l^{m,n} w_{l'}^{m,n} s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^{T_k^{ex}} g(T_l - t) g(T_{l'} - t) dt)} \\
w_l^{m,n} &= \omega_l^{m,n}(t_0) \frac{(L_l(t_0) - b)^{\beta_l}}{(SR_{m,n}(t_0) - b)^{B_{m,n}}} \\
B_{m,n} &= \sum_{l=m}^n \omega_l^{m,n}(t_0) \beta_l \\
R_{m,n} &= \sum_{l,l'=m}^n \Omega_{l,l'} \phi_{l,l'} \\
\Omega_{l,l'} &= \frac{2\rho_{l,l'} w_l^{m,n} w_{l'}^{m,n} s_l(t_0) s_{l'}(t_0)}{(V_{m,n} \Sigma_{m,n}(t_0) T_k^{ex})^2} \int_{t_0}^{T_k^{ex}} g(T_l - t) g(T_{l'} - t) \int_{t_0}^t h(T_l - s) h(T_{l'} - s) ds dt \\
V_{m,n} &= \frac{1}{\Sigma_{m,n}(t_0) (T_{m,ex} - t_0)} (2 \sum_{l,l'=m}^n (\rho_{l,l'} \theta_{l,l'} w_l^{m,n} w_{l'}^{m,n} s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \\
&\quad \int_{t_0}^{T_k^{ex}} g(T_l - t) g(T_{l'} - t) \int_{t_0}^t h(T_l - s) h(T_{l'} - s) ds dt))^{0.5} \\
g(T_l - t) &= (a_g + b_g(T_l - t)) e^{-c_g(T_l - t)} + d_g \\
h(T_l - t) &= v_l((a_h + b_h(T_{l-1} - t)) e^{-c_h(T_{l-1} - t)} + d_h)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

で近似できる。

これは、手順 2 で述べた通り、 $SR_{m,n}(t)$ 自身が以下の shifted-SABR モデルに従うと考えたときの各パラメーターである。

$$\begin{aligned}
dSR_{m,n}(t) &= (SR_{m,n}(t) - b)^{B_{m,n}} \Sigma_{m,n}(t) dW_t^{AN_{m,n}} \\
d\Sigma_{m,n}(t) &= \Sigma_{m,n}(t) V_{m,n} dZ_t^{AN_{m,n}} \\
dW_t^{AN_{m,n}} dZ_t^{AN_{m,n}} &= R_{m,n} dt
\end{aligned} \tag{B.2}$$

本章では、これらのパラメーター ($\Sigma_{m,n}(t_0), B_{m,n}, V_{m,n}$) の導出を行う。なお、簡単化のため $T := T_k^{ex}$ と表す。

(3.14), (3.15) を再掲する。

$$\begin{aligned}
SR_{m,n}(t) &:= \sum_{l=m}^n \omega_l^{m,n}(t) L_l(t) \\
AN_{m,n}(t) &:= \sum_{l=m}^n \delta_l P(t, T_l) \\
\omega_l^{m,n}(t) &:= \frac{\delta_l P(t, T_l)}{AN_{m,n}(t)}
\end{aligned}$$

まず、手順 1 における shifted-LMM-SABR の下での $SR_{m,n}(t)$ の確率過程を導出するた

めに、 $\omega_l^{m,n}(t)$ の従う確率過程を具体的に導出する。

$$\begin{aligned}
\omega_l^{m,n}(t) &= \frac{\delta_l P(t, T_l)}{\sum_{l'=m}^n \tau_{l'} P(t, T_{l'})} \\
&= \left(\sum_{l'=m}^n \frac{\delta_{l'} P(t, T_{l'})}{\delta_l P(t, T_l)} \right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{l'=m}^n X_{l,l'} \right)^{-1} \\
(X_{l,l'} &:= \frac{\delta_{l'} P(t, T_{l'})}{\delta_l P(t, T_l)})
\end{aligned} \tag{B.3}$$

また、割引債 $P(t, T_l), P(t, T_{l'})$ は $L_i(t)$ を使って、

$$\begin{aligned}
P(t, T_l) &= \prod_{i=1}^l (1 + L_i(t) \delta_i)^{-1} \\
P(t, T_{l'}) &= \prod_{i=1}^{l'} (1 + L_i(t) \delta_i)^{-1}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

と表現できるので、(B.3),(B.4) 式より $X_{l,l'}$ は、

$$X_{l,l'} = \frac{\delta_{l'} \prod_{i=1}^l (1 + L_i(t) \delta_i)}{\delta_l \prod_{i=1}^{l'} (1 + L_i(t) \delta_i)} \tag{B.5}$$

(B.5) 式は l, l' の大小関係により、

$$X_{l,l'} = \begin{cases} \frac{\delta_{l'}}{\delta_l} \prod_{i=l}^{l'} (1 + \delta_i L_i(t))^{-1} & (l < l') \\ \frac{\delta_{l'}}{\delta_l} \prod_{i=l'}^l (1 + \delta_i L_i(t)) & (l > l') \end{cases} \tag{B.6}$$

となり、(B.3),(B.6) 式から、 $\omega_l^{m,n}(t)$ は $L_i(t) (i \in [m, n])$ の関数であることがわかる。そこで、 $\omega_l^{m,n}(t)$ に Ito の補題を適用すると、

$$d\omega_l^{m,n}(t) = \sum_{i=m}^n \frac{\partial \omega_l^{m,n}(t)}{\partial L_i(t)} dL_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n \frac{\partial^2 \omega_l^{m,n}(t)}{\partial L_i(t) \partial L_j(t)} dL_i(t) dL_j(t) \tag{B.7}$$

となり、さらに (3.14) 式から $SR_{m,n}(t)$ に Ito の補題を適用すると、

$$dSR_{m,n}(t) = \sum_{l=m}^n (\omega_l^{m,n}(t) dL_l(t) + L_l(t) d\omega_l^{m,n}(t) + dL_l(t) d\omega_l^{m,n}(t)) \tag{B.8}$$

となる。ここで、 $\frac{\partial \omega_l^{m,n}(t)}{\partial L_i(t)} \approx 0, \forall i$ と近似すると、(B.7) 式より、 $d\omega_l^{m,n}(t) \approx 0$ 。

すると、(B.8) 式から、

$$dS R_{m,n}(t) \approx \sum_{l=m}^n \omega_l^{m,n}(t) dL_l(t) \quad (\text{B.9})$$

となり、さらに、 $L_l(t)$ が (4.1) 式の shifted-LMM-SABR に従うのであれば、フォワード測度 \mathbb{T}_{l+1} の下で、

$$dL_l(t) = \alpha_l(t)(L_l(t) - b)^{\beta_l} dW_t^{l, \mathbb{T}_{l+1}} \quad (\text{B.10})$$

となるから、(B.9) 式は、

$$dS R_{m,n}(t) \approx \sum_{l=m}^n \omega_l^{m,n}(t) \alpha_l(t) (L_l(t) - b)^{\beta_l} dW_t^{\mathbb{T}_{k+1}} \quad (\text{B.11})$$

と近似できる。この両辺を 2 乗すると、

$$(dS R_{m,n}(t))^2 \approx \sum_{l,l'=m}^n \omega_l^{m,n}(t) \alpha_l(t) (L_l(t) - b)^{\beta_l} \omega_{l'}^{m,n}(t) \alpha_{l'}(t) (L_{l'}(t) - b)^{\beta_{l'}} \rho_{l,l'} dt \quad (\text{B.12})$$

となる。

次に、手順 2 として $SR_{m,n}(t)$ が (B.2) 式に従うとした場合に、(B.2) 式の両辺を 2 乗すると、

$$(dS R_{m,n}(t))^2 = ((SR_{m,n}(t) - b)^{B_{m,n}} \Sigma_{m,n}(t))^2 dt \quad (\text{B.13})$$

を得る。ただし、 $B_{m,n}$ は以下で定めた。

$$B_{m,n} = \sum_{l=m}^n \omega_l^{m,n}(t_0) \beta_l \quad (\text{B.14})$$

ここで、手順 3 として (B.12), (B.13) 式が等しいとすると、

$$\begin{aligned} ((SR_{m,n}(t) - b)^{B_{m,n}} \Sigma_{m,n}(t))^2 &= \sum_{l,l'=m}^n \omega_l^{m,n}(t) \alpha_l(t) (L_l(t) - b)^{\beta_l} \omega_{l'}^{m,n}(t) \alpha_{l'}(t) (L_{l'}(t) - b)^{\beta_{l'}} \rho_{l,l'} \\ \iff \\ \Sigma_{m,n}(t)^2 &= \sum_{l,l'=m}^n \omega_l^{m,n}(t) \alpha_l(t) (L_l(t) - b)^{\beta_l} \omega_{l'}^{m,n}(t) \alpha_{l'}(t) (L_{l'}(t) - b)^{\beta_{l'}} \rho_{l,l'} / (SR_{m,n}(t) - b)^{2B_{m,n}} \\ \Sigma_{m,n}(t)^2 &= \sum_{l,l'=m}^n \omega_l^{m,n}(t) \alpha_l(t) \frac{(L_l(t) - b)^{\beta_l}}{(SR_{m,n}(t) - b)^{B_{m,n}}} \omega_{l'}^{m,n}(t) \alpha_{l'}(t) \frac{(L_{l'}(t) - b)^{\beta_{l'}}}{(SR_{m,n}(t) - b)^{B_{m,n}}} \rho_{l,l'} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

以降、(B.15) を用いて計算を行っていく。

まず、 $w_l^{m,n}(t)$ を以下で定義する。

$$w_l^{m,n}(t) := \omega_l^{m,n}(t) \frac{(L_l(t) - b)^{\beta_l}}{(SR_{m,n}(t) - b)^{B_{m,n}}} \quad (\text{B.16})$$

これを用いて、(B.15) 式を書き換えると、

$$\Sigma_{m,n}(t)^2 = \sum_{l,l'=m}^n w_l^{m,n}(t) \alpha_l(t) w_{l'}^{m,n}(t) \alpha_{l'}(t) \rho_{l,l'}$$

となり、また、 $\alpha_l(t) = s_l(t)g(T_l - t)$ より、

$$\Sigma_{m,n}(t)^2 = \sum_{l,l'=m}^n w_l^{m,n}(t) s_l(t) g(T_l - t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) g(T_{l'} - t) \rho_{l,l'}$$

を得る。ここで、両辺を積分してアニュイティ測度のもとでの期待値 $E^{AN_{m,n}}[\cdot]$ をとると、

$$E^{AN_{m,n}} \left[\int_{t_0}^T \Sigma_{m,n}(t)^2 dt \right] = E^{AN_{m,n}} \left[\int_{t_0}^T \sum_{l,l'=m}^n w_l^{m,n}(t) s_l(t) g(T_l - t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) g(T_{l'} - t) \rho_{l,l'} dt \right] \quad (\text{B.17})$$

となる。

まず、(B.17) の左辺について解く。期待値と積分の順序交換を行って、

$$E^{AN_{m,n}} \left[\int_{t_0}^T \Sigma_{m,n}(t)^2 dt \right] = \int_{t_0}^T E^{AN_{m,n}} [\Sigma_{m,n}(t)^2] dt \quad (\text{B.18})$$

となるが、 $\Sigma_{m,n}(t)$ について、(B.2) を Ito's lemma を使って解くと、

$$\Sigma_{m,n}(t) = \Sigma_{m,n}(t_0) e^{V(Z_t - Z_{t_0}) - \frac{1}{2} V^2(t - t_0)} \quad (\text{B.19})$$

を得る。なお、 $V := V_{m,n}$ 、 $Z_t := Z_t^{AN_{m,n}}$ と簡略化した。これを (B.18) 式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T E^{AN_{m,n}} [\Sigma_{m,n}(t)^2] dt &= \int_{t_0}^T E^{AN_{m,n}} [\Sigma_{m,n}(t_0)^2 e^{2V(Z_t - Z_{t_0}) - V^2(t - t_0)}] dt \\ &= \Sigma_{m,n}(t_0)^2 \int_{t_0}^T e^{-V^2 t} E^{AN_{m,n}} [e^{2V(Z_t - Z_{t_0})}] dt \\ &= \Sigma_{m,n}(t_0)^2 \frac{1}{V^2} (e^{V^2(T - t_0)} - 1) \end{aligned}$$

となる。なお、途中の期待値計算に正規分布のモーメント母関数の性質を用いた。

以上より、

$$E^{AN_{m,n}} \left[\int_{t_0}^T \Sigma_{m,n}(t)^2 dt \right] = \Sigma_{m,n}(t_0)^2 \frac{1}{V^2} (e^{V^2(T-t_0)} - 1) \quad (\text{B.20})$$

となる。

次に、(B.18) 式の右辺について考える。まず、積分と期待値計算の順序交換を行って、

$$\begin{aligned} & E^{AN_{m,n}} \left[\int_{t_0}^T \sum_{l,l'=m}^n w_l^{m,n}(t) s_l(t) g(T_l - t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) g(T_{l'} - t) \rho_{l,l'} dt \right] \\ &= \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} \int_{t_0}^T E^{AN_{m,n}} [w_l^{m,n}(t) s_l(t) g(T_l - t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) g(T_{l'} - t)] dt \\ &\approx \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l - t) g(T_{l'} - t) E^{AN_{m,n}} [s_l(t) s_{l'}(t)] dt \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

を得る。なお、途中の近似として $w_l^{m,n}(t) \approx w_l^{m,n}(t_0)$, $w_{l'}^{m,n}(t) \approx w_{l'}^{m,n}(t_0)$ の近似 (この近似は一般に Freezing と呼ばれる) を用いた。

これまでは、 $ds_l(t), ds_{l'}(t)$ は、各々のフォワード測度 $\mathbb{T}_{l+1}, \mathbb{T}_{l'+1}$ の下で、の確率過程を考えたが、これらをアニユイティ測度 $AN_{m,n}$ の下に測度変換した場合、 $ds_l(t), ds_{l'}(t)$ の確率過程はなんらかのドリフト項 $\eta_l, \eta_{l'}$ をもつ。しかし、Henry [19] によればこのドリフト項はアニユイティ測度のもとでも微小な数値であることから、 $\eta_l \approx 0, \eta_{l'} \approx 0$ との近似が提案され、ここでもこの近似を用いることとする。すると、 $s_l(t), s_{l'}(t)$ に対し Ito の補題を用いて、

$$\begin{aligned} s_l(t) &= s_l(t_0) e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_l - u) dW_u^{l, AN_{m,n}}} \\ s_{l'}(t) &= s_{l'}(t_0) e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u) dW_u^{l', AN_{m,n}}} \end{aligned}$$

となるが、これを (B.21) 式の $E^{AN_{m,n}} [s_l(t) s_{l'}(t)]$ に代入して

$$\begin{aligned} E^{AN_{m,n}} [s_l(t) s_{l'}(t)] &= s_l(t_0) s_{l'}(t_0) E^{AN_{m,n}} \left[e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_l - u) dW_u^{l, AN_{m,n}} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u) dW_u^{l', AN_{m,n}}} \right] \\ &= s_l(t_0) s_{l'}(t_0) e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du} E^{AN_{m,n}} \left[e^{\int_{t_0}^t h(T_l - u) dW_u^{l, AN_{m,n}} + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u) dW_u^{l', AN_{m,n}}} \right] \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

を得る。ここで、(B.22) 式右辺の期待値の中にある exp の右肩の部分

$$H := \int_{t_0}^t h(T_l - u) dW_u^{l, AN_{m,n}} + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u) dW_u^{l', AN_{m,n}} \quad (\text{B.23})$$

で定義する。すると、 H はブラウン運動の線形和なので正規分布に従い、その期待値は、

$$E^{AN_{m,n}}[H] = 0 \quad (\text{B.24})$$

H の分散は、分散と期待値の関係式を使うと、

$$\begin{aligned} V^{AN_{m,n}}[H] &= E^{AN_{m,n}}[H^2] - \{E^{AN_{m,n}}[H]\}^2 \\ &= E^{AN_{m,n}} \left[\left(\int_{t_0}^t h(T_l - u) dW_u^{l, AN_{m,n}} + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u) dW_u^{l', AN_{m,n}} \right)^2 \right] \\ &\quad - \left(E^{AN_{m,n}} \left[\int_{t_0}^t h(T_l - u) dW_u^{l, AN_{m,n}} + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u) dW_u^{l', AN_{m,n}} \right] \right)^2 \\ &= E^{AN_{m,n}} \left[\int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) dW_u^{l, AN_{m,n}} dW_u^{l', AN_{m,n}} + \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du \right] - 0 \\ &= \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du + E^{AN_{m,n}} \left[2 \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) dW_u^{l, AN_{m,n}} dW_u^{l', AN_{m,n}} \right] \\ &= \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du + 2 \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) E^{AN_{m,n}} [dW_u^{l, AN_{m,n}} dW_u^{l', AN_{m,n}}] \\ &= \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du + 2 \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) \theta_{l,l'} dt \end{aligned}$$

これと、(B.24) 式から、

$$H \sim N \left(0, \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du + 2 \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) \rho_{l,l'} dt \right)$$

であるので、(B.22) 式は、正規分布のモーメント母関数の性質を使って、

$$\begin{aligned} E^{AN_{m,n}}[s_l(t)s_{l'}(t)] &= s_l(t_0)s_{l'}(t_0)e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du} e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_l - u)^2 du + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(T_{l'} - u)^2 du + \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) \theta_{l,l'} dt} \\ &= s_l(t_0)s_{l'}(t_0)e^{\int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) \theta_{l,l'} dt} \end{aligned}$$

より、(B.21) 式の $E^{AN_{m,n}}[s_l(t)s_{l'}(t)]$ に上式を代入して、

$$\begin{aligned} E^{AN_{m,n}} &\left[\int_{t_0}^T \sum_{l,l'=m}^n w_l^{m,n}(t) s_l(t) g(T_l - t) w_{l'}^{m,n}(t) s_{l'}(t) g(T_{l'} - t) \rho_{l,l'} dt \right] \\ &\approx \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l - t) g(T_{l'} - t) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) e^{\theta_{l,l'} \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) du} dt \\ &= \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l - t) g(T_{l'} - t) e^{\theta_{l,l'} \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) du} dt \quad (\text{B.25}) \end{aligned}$$

以上より、(B.17),(B.20),(B.25) 式より、

$$\left(\frac{\Sigma_{m,n}(t_0)}{V}\right)^2 (e^{V^2(T-t_0)} - 1) = \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l - t) g(T_{l'} - t) e^{\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t} dt \quad (\text{B.26})$$

が成立する。なお、簡略化のため、

$$\hat{h}_{l,l'}(t) := \sqrt{\frac{1}{t} \int_{t_0}^t h(T_l - u) h(T_{l'} - u) du}$$

と定義した。

ここで、(B.26) 式の左辺について、 T に関するテーラー展開を行う。すると、

$$\left(\frac{\Sigma_{m,n}(t_0)}{V}\right)^2 (e^{V^2(T-t_0)} - 1) = \Sigma_{m,n}(t_0)^2 (T - t_0) + \frac{\Sigma_{m,n}(t_0)^2 V^2 (T - t_0)^2}{2} + \frac{\Sigma_{m,n}(t_0)^2 V^4 (T - t_0)^3}{6} + \dots \quad (\text{B.27})$$

とかける。

一方、右辺については、被積分関数 $g(T_l - t)g(T_{l'} - t)e^{\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t}$ に対して $\hat{h}_{l,l'}(t)t$ に関するテーラー展開を行うと、

$$g(T_l - t)g(T_{l'} - t)e^{\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t} = g(T_l - t)g(T_{l'} - t) + g(T_l - t)g(T_{l'} - t)\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t + \dots$$

であるから、(B.26) 式の右辺の積分部分は、

$$\int_{t_0}^T g(T_l - t)g(T_{l'} - t)e^{\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t} dt = \int_{t_0}^T g(T_l - t)g(T_{l'} - t) dt + \int_{t_0}^T g(T_l - t)g(T_{l'} - t)\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t dt + \dots \quad (\text{B.28})$$

とかけるので、(B.26) 式の右辺は、

$$\begin{aligned} & \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l - t)g(T_{l'} - t)e^{\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t} dt = \\ & \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \left(\int_{t_0}^T g(T_l - t)g(T_{l'} - t) dt + \int_{t_0}^T g(T_l - t)g(T_{l'} - t)\theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 t dt \right. \\ & \left. + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

となる。

以上より、(B.26),(B.27),(B.29) 式から、

$$\begin{aligned} & \Sigma_{m,n}(t_0)^2(T-t_0) + \frac{\Sigma_{m,n}(t_0)^2 V^2(T-t_0)^2}{2} + \frac{\Sigma_{m,n}(t_0)^2 V^4(T-t_0)^3}{6} + \dots \\ &= \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \left(\int_{t_0}^T g(T_l-t) g(T_{l'}-t) dt + \int_{t_0}^T g(T_l-t) g(T_{l'}-t) \theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 dt \right. \\ & \quad \left. + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

を得るが、(B.30) 式について、(左辺の第 1 項)=(右辺の第 1 項) および (左辺の第 2 項)=(右辺の第 2 項) であると仮定すると、まず、(左辺の第 1 項)=(右辺の第 1 項) は、

$$\begin{aligned} \Sigma_{m,n}(t_0)^2(T-t_0) &= \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l-t) g(T_{l'}-t) dt \\ \Sigma_{m,n}(t_0) &= \sqrt{\frac{1}{T-t_0} \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l-t) g(T_{l'}-t) dt} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

となる。次に、(左辺の第 2 項)=(右辺の第 2 項) を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_{m,n}(t_0)^2 V^2(T-t_0)^2}{2} &= \sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l-t) g(T_{l'}-t) \theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 dt \\ V &= \frac{\sqrt{2}}{\Sigma_{m,n}(t_0)(T-t_0)} \sqrt{\sum_{l,l'=m}^n \rho_{l,l'} w_l^{m,n}(t_0) w_{l'}^{m,n}(t_0) s_l(t_0) s_{l'}(t_0) \int_{t_0}^T g(T_l-t) g(T_{l'}-t) \theta_{l,l'} \hat{h}_{l,l'}(t)^2 dt} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

となる。(B.31), (B.32) 式より $\Sigma_{m,n}(t_0)$ と V が導出できた。

(B.1) における各パラメーター $\Sigma_{m,n}(t_0), B_{m,n}, R_{m,n}, V_{m,n}$ は、 $T_k^{ex}, L_l(t_0)$ と shifted-LMM-SABR のパラメーター $s_l(t_0), \beta_l, \nu_l, \rho_{l,l'}, \theta_{l,l'}, \phi_{l,l'}, a_g, b_g, c_g, d_g, a_h, b_h, c_h, d_h$ を定めれば決定できる。

そこで、shifted-LMM-SABR のパラメーターの推定値を $\hat{s}_l(t_0), \hat{\beta}_l, \hat{\nu}_l, \hat{\rho}_{l,l'}, \hat{\theta}_{l,l'}, \hat{\phi}_{l,l'}, \hat{a}_g, \hat{b}_g, \hat{c}_g, \hat{d}_g, \hat{a}_h, \hat{b}_h, \hat{c}_h, \hat{d}_h$ とし、それらによる近似式のパラメーターの推定値を $\hat{\Sigma}_{m,n}(t_0), \hat{B}_{m,n}, \hat{R}_{m,n}, \hat{V}_{m,n}$ とする。

次に、手順 4 として Normal vol. $\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal}(T_k^{ex}, K)$ を、(3.38) 式を用い、

$$\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal}(T_k^{ex}, K) = \mathbf{Hagan}(T_k^{ex}, K + b; SR_{m,n}(t) + b, \hat{\Sigma}_{m,n}(t_0), \hat{B}_{m,n}, \hat{R}_{m,n}, \hat{V}_{m,n}, t) \quad (\text{B.33})$$

から求める。

最後に、手順 5 として $\hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal}(T_k^{ex}, K)$ を (3.26),(3.27) 式のボラティリティに代入し、それぞれ、ヨーロピアン・ペイヤーズスワップション価格の近似解 $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay}$ 、ヨーロピアン・レシーバーズスワップション価格の近似解 $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,rec}$ 、

$$\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay} = AN_{m,n}(t) \mathbf{CorePayNormal}(SR_{m,n}(t), K, \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal}(T_k^{ex}, K), t, T_k^{ex}) \quad (\text{B.34})$$

$$\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,rec} = AN_{m,n}(t) \mathbf{CoreRecNormal}(SR_{m,n}(t), K, \hat{\sigma}_{SR_{m,n}}^{normal}(T_k^{ex}, K), t, T_k^{ex}) \quad (\text{B.35})$$

を得る。

付録 C

shifted-LMM-SABR におけるヨーロピアンスワップションの解析近似解の精度検証

主に、本稿では Appendix B で導出した近似解を LSM や Additive Duality Method における回帰の際の説明変数としてのインプライドボラティリティやヨーロピアンスワップションの価格を求める際に用いた。この解析近似解の精度が悪い場合、バミューダンスワップションの精緻な価格付けが困難になることが予想されるため、こういった条件下で解析近似解の精度が悪くなるのか把握しておく必要がある。そこで、各 shifted-LMM-SABR のパラメーター $s_l(t_0)$, β_l , ν_l , $\rho_{l,l'}$, $\theta_{l,l'}$, $\phi_{l,l'}$ について複数の条件下でシミュレーションとの誤差を把握することで、解析近似解の精度評価を行った。

解析近似解については (B.31) による $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay}$, $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,rec}$ を計算した。

シミュレーションについては、ヨーロピアン・ペイヤーズスワップションおよびヨーロピアン・レシーバーズスワップションの価格をシミュレーションにより求めたものを $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay}$, $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec}$ とし、

$$\begin{aligned}\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay} &= P(t, T_{n+1}) \sum_{i=1}^N \frac{1}{P^{(i)}(T_k^{ex}, T_{n+1})} An_{m,n}^{(i)}(T_k^{ex})(SR_{m,n}^{(i)}(T_k^{ex}) - K)^+ \\ \hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec} &= P(t, T_{n+1}) \sum_{i=1}^N \frac{1}{P^{(i)}(T_k^{ex}, T_{n+1})} An_{m,n}^{(i)}(T_k^{ex})(SR_{m,n}^{(i)}(T_k^{ex}) - K)^+\end{aligned}\tag{C.1}$$

で定義した。なお、 N はパスの数で $P^{(i)}(T_k^{ex}, T_{n+1})$, $An_{m,n}^{(i)}(T_k^{ex})$, $SR_{m,n}^{(i)}(T_k^{ex})$ は、(4.1) について、4.1 節と同様にシミュレーションすることで求めた。

まず、shifted-LMM-SABR における各パラメーターについては、shift 幅 $b = 2\%$ 、 $\alpha_l(0) = 0$ 、 $\beta_l = 0.5$ とし、 $\epsilon_l, \phi_{l,l}$ は表 C.1 の組み合わせとした。なお、すべての満期の LIBOR に関して同一の値を用いた。

表 C.1 $\epsilon_l, \phi_{l,l}$ の組み合わせ

		ϵ_l		
		0.1	0.3	0.5
$\phi_{l,l}$	0.4	条件 1	条件 2	条件 3
	0.8	条件 4	条件 5	条件 6
	-0.4	条件 7	条件 8	条件 9
	-0.8	条件 10	条件 11	条件 12

また比較にあたっての各条件は、 $t = 0$ 、 $\delta_l = 0.5$ 、 $T_l = \{0.5, 1.0, 1.5, \dots, 9.5\}$ 、 $T_k^{ex} = \{0.5, 1.0, 1.5, \dots, 9.5\}$ 、 $\{L_l(0)\}_{l=1,2,\dots,19} = 0.49\%$ 、 K は表 C.2 のとおり。また、取引種類は、 $SR_{m,n}(0) \leq K$ であればペイヤーズスワップション、 $SR_{m,n}(0) > K$ であればレシーバーズスワップションを用いた。

シミュレーションにおいては $N = 1,000,000$ で行った。また、シミュレーション自体の誤差を把握するため、 $N = 1,000,000$ をさらに 10 回繰り返し、その 10 回の中での 10% タイル値および 90% タイル値を計算し、その差分をシミュレーション自体の誤差とした。

各計算結果は表 C.3, C.4, C.5, (C.6) のとおり。

表 C.3 は、各条件における解析近似解 $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,pay}$, $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{rebonato,european,rec}$ の値である。表 C.4 はシミュレーションによる価格解 $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,pay}$, $\hat{V}_{t,(m,n),T_k^{ex}}^{european,rec}$ である。表 C.5 は各条件における解析近似解およびシミュレーションによる価格解の絶対誤差であり、赤く色づけた箇所は、シミュレーションの誤差よりも $|\hat{V}_t^{european,pay} - \hat{V}_t^{rebonato,european,pay}|$ および $|\hat{V}_t^{european,rec} - \hat{V}_t^{rebonato,european,rec}|$ が大きくなった箇所である。表 C.6 はシミュレーション自体の誤差である。

表 C.5 から、 ν_l が大きくなると解析近似式の精度が悪くなることが確認できる。これは、swaption の解析近似解の導出における (B.29) 式において、 ν_l を含んでいる $h_{l,l'}(t)t$ に関するテーラー展開について、1 階の偏微分までしか考慮していないことに起因すると考えられる。

表 C.2 ストライクレート K

条件1				条件2				条件3					
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%
6M×9.5Y	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%
1.0Y×9.0Y	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.27%	0.37%	0.49%
1.5Y×8.5Y	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.22%	0.34%	0.49%
2.0Y×8.0Y	0.19%	0.32%	0.49%	0.66%	0.79%	0.18%	0.32%	0.49%	0.66%	0.80%	0.18%	0.31%	0.49%
2.5Y×7.5Y	0.15%	0.30%	0.49%	0.68%	0.83%	0.15%	0.29%	0.49%	0.69%	0.83%	0.14%	0.29%	0.49%
3.0Y×7.0Y	0.12%	0.28%	0.49%	0.70%	0.86%	0.11%	0.27%	0.49%	0.71%	0.87%	0.10%	0.27%	0.49%
3.5Y×6.5Y	0.09%	0.26%	0.49%	0.72%	0.89%	0.08%	0.26%	0.49%	0.72%	0.90%	0.06%	0.25%	0.49%
4.0Y×6.0Y	0.06%	0.25%	0.49%	0.73%	0.92%	0.05%	0.24%	0.49%	0.74%	0.93%	0.03%	0.23%	0.49%
4.5Y×5.5Y	0.04%	0.23%	0.49%	0.75%	0.94%	0.02%	0.22%	0.49%	0.76%	0.96%	0.00%	0.21%	0.49%
5.0Y×5.0Y	0.01%	0.22%	0.49%	0.76%	0.97%	0.00%	0.21%	0.49%	0.77%	0.98%	-0.03%	0.19%	0.49%
5.5Y×4.5Y	-0.01%	0.20%	0.49%	0.78%	0.99%	-0.03%	0.19%	0.49%	0.79%	1.01%	-0.06%	0.17%	0.49%
6.0Y×4.0Y	-0.04%	0.19%	0.49%	0.79%	1.02%	-0.06%	0.18%	0.49%	0.80%	1.04%	-0.09%	0.16%	0.49%
6.5Y×3.5Y	-0.06%	0.18%	0.49%	0.80%	1.04%	-0.08%	0.16%	0.49%	0.82%	1.06%	-0.12%	0.14%	0.49%
7.0Y×3.0Y	-0.08%	0.17%	0.49%	0.81%	1.06%	-0.10%	0.15%	0.49%	0.83%	1.08%	-0.15%	0.13%	0.49%
7.5Y×2.5Y	-0.10%	0.15%	0.49%	0.83%	1.08%	-0.13%	0.14%	0.49%	0.84%	1.11%	-0.18%	0.11%	0.49%
8.0Y×2.0Y	-0.12%	0.14%	0.49%	0.84%	1.10%	-0.15%	0.12%	0.49%	0.86%	1.13%	-0.21%	0.09%	0.49%
8.5Y×1.5Y	-0.14%	0.13%	0.49%	0.85%	1.12%	-0.17%	0.11%	0.49%	0.87%	1.15%	-0.23%	0.08%	0.49%
9.0Y×1.0Y	-0.16%	0.12%	0.49%	0.86%	1.14%	-0.19%	0.10%	0.49%	0.88%	1.17%	-0.26%	0.06%	0.49%
9.5Y×0.5Y	-0.18%	0.11%	0.49%	0.87%	1.16%	-0.21%	0.09%	0.49%	0.89%	1.19%	-0.29%	0.05%	0.49%
条件4				条件5				条件6					
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%
6M×9.5Y	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%
1.0Y×9.0Y	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.28%	0.37%	0.49%
1.5Y×8.5Y	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.23%	0.34%	0.49%
2.0Y×8.0Y	0.19%	0.32%	0.49%	0.66%	0.79%	0.19%	0.32%	0.49%	0.66%	0.79%	0.18%	0.32%	0.49%
2.5Y×7.5Y	0.15%	0.30%	0.49%	0.68%	0.83%	0.15%	0.30%	0.49%	0.68%	0.83%	0.15%	0.29%	0.49%
3.0Y×7.0Y	0.12%	0.28%	0.49%	0.70%	0.86%	0.12%	0.28%	0.49%	0.70%	0.86%	0.11%	0.27%	0.49%
3.5Y×6.5Y	0.09%	0.26%	0.49%	0.72%	0.89%	0.09%	0.26%	0.49%	0.72%	0.89%	0.08%	0.26%	0.49%
4.0Y×6.0Y	0.06%	0.25%	0.49%	0.73%	0.92%	0.06%	0.24%	0.49%	0.74%	0.92%	0.05%	0.24%	0.49%
4.5Y×5.5Y	0.03%	0.23%	0.49%	0.75%	0.95%	0.03%	0.23%	0.49%	0.75%	0.95%	0.03%	0.22%	0.49%
5.0Y×5.0Y	0.01%	0.22%	0.49%	0.76%	0.97%	0.00%	0.21%	0.49%	0.77%	0.98%	0.00%	0.21%	0.49%
5.5Y×4.5Y	-0.01%	0.20%	0.49%	0.78%	0.99%	-0.02%	0.20%	0.49%	0.78%	1.00%	-0.03%	0.19%	0.49%
6.0Y×4.0Y	-0.04%	0.19%	0.49%	0.79%	1.02%	-0.04%	0.18%	0.49%	0.80%	1.02%	-0.05%	0.18%	0.49%
6.5Y×3.5Y	-0.06%	0.18%	0.49%	0.80%	1.04%	-0.07%	0.17%	0.49%	0.81%	1.05%	-0.08%	0.17%	0.49%
7.0Y×3.0Y	-0.08%	0.16%	0.49%	0.82%	1.06%	-0.09%	0.16%	0.49%	0.82%	1.07%	-0.10%	0.15%	0.49%
7.5Y×2.5Y	-0.10%	0.15%	0.49%	0.83%	1.08%	-0.11%	0.15%	0.49%	0.83%	1.09%	-0.12%	0.14%	0.49%
8.0Y×2.0Y	-0.12%	0.14%	0.49%	0.84%	1.10%	-0.13%	0.14%	0.49%	0.84%	1.11%	-0.15%	0.13%	0.49%
8.5Y×1.5Y	-0.14%	0.13%	0.49%	0.85%	1.12%	-0.15%	0.12%	0.49%	0.86%	1.13%	-0.17%	0.11%	0.49%
9.0Y×1.0Y	-0.16%	0.12%	0.49%	0.86%	1.14%	-0.17%	0.11%	0.49%	0.87%	1.15%	-0.19%	0.10%	0.49%
9.5Y×0.5Y	-0.17%	0.11%	0.49%	0.87%	1.15%	-0.19%	0.10%	0.49%	0.88%	1.17%	-0.21%	0.09%	0.49%
条件7				条件8				条件9					
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%
6M×9.5Y	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%
1.0Y×9.0Y	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.27%	0.37%	0.49%
1.5Y×8.5Y	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.22%	0.34%	0.49%
2.0Y×8.0Y	0.19%	0.32%	0.49%	0.66%	0.79%	0.19%	0.32%	0.49%	0.66%	0.79%	0.18%	0.31%	0.49%
2.5Y×7.5Y	0.15%	0.30%	0.49%	0.68%	0.83%	0.15%	0.30%	0.49%	0.68%	0.83%	0.14%	0.29%	0.49%
3.0Y×7.0Y	0.12%	0.28%	0.49%	0.70%	0.86%	0.12%	0.28%	0.49%	0.70%	0.86%	0.11%	0.27%	0.49%
3.5Y×6.5Y	0.09%	0.26%	0.49%	0.72%	0.89%	0.09%	0.26%	0.49%	0.72%	0.89%	0.07%	0.25%	0.49%
4.0Y×6.0Y	0.06%	0.25%	0.49%	0.73%	0.92%	0.06%	0.24%	0.49%	0.74%	0.92%	0.04%	0.23%	0.49%
4.5Y×5.5Y	0.04%	0.23%	0.49%	0.75%	0.94%	0.03%	0.23%	0.49%	0.75%	0.95%	0.01%	0.22%	0.49%
5.0Y×5.0Y	0.01%	0.22%	0.49%	0.76%	0.97%	0.00%	0.21%	0.49%	0.77%	0.98%	-0.02%	0.20%	0.49%
5.5Y×4.5Y	-0.01%	0.20%	0.49%	0.78%	0.99%	-0.02%	0.20%	0.49%	0.78%	1.00%	-0.04%	0.18%	0.49%
6.0Y×4.0Y	-0.03%	0.19%	0.49%	0.79%	1.01%	-0.04%	0.19%	0.49%	0.79%	1.02%	-0.07%	0.17%	0.49%
6.5Y×3.5Y	-0.05%	0.18%	0.49%	0.80%	1.03%	-0.07%	0.17%	0.49%	0.81%	1.05%	-0.10%	0.15%	0.49%
7.0Y×3.0Y	-0.07%	0.17%	0.49%	0.81%	1.05%	-0.09%	0.16%	0.49%	0.82%	1.07%	-0.12%	0.14%	0.49%
7.5Y×2.5Y	-0.09%	0.16%	0.49%	0.82%	1.07%	-0.11%	0.15%	0.49%	0.83%	1.09%	-0.15%	0.12%	0.49%
8.0Y×2.0Y	-0.11%	0.15%	0.49%	0.83%	1.09%	-0.13%	0.14%	0.49%	0.84%	1.11%	-0.18%	0.11%	0.49%
8.5Y×1.5Y	-0.13%	0.14%	0.49%	0.84%	1.11%	-0.15%	0.12%	0.49%	0.86%	1.13%	-0.20%	0.10%	0.49%
9.0Y×1.0Y	-0.15%	0.12%	0.49%	0.86%	1.13%	-0.17%	0.11%	0.49%	0.87%	1.15%	-0.22%	0.08%	0.49%
9.5Y×0.5Y	-0.17%	0.11%	0.49%	0.87%	1.15%	-0.19%	0.10%	0.49%	0.88%	1.17%	-0.25%	0.07%	0.49%
条件10				条件11				条件12					
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta25%	Delta25%
6M×9.5Y	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%	0.58%	0.64%	0.34%	0.40%	0.49%
1.0Y×9.0Y	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.28%	0.37%	0.49%	0.61%	0.70%	0.28%	0.37%	0.49%
1.5Y×8.5Y	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.23%	0.34%	0.49%	0.64%	0.75%	0.23%	0.34%	0.49%
2.0Y×8.0Y	0.19%	0.32%	0.49%	0.66%	0.79%	0.19%	0.32%	0.49%	0.66%	0.79%	0.19%	0.32%	0.49%
2.5Y×7.5Y	0.15%	0.30%	0.49%	0.68%	0.83%	0.16%	0.30%	0.49%	0.68%	0.82%	0.16%	0.30%	0.49%
3.0Y×7.0Y	0.12%	0.28%	0.49%	0.70%	0.86%	0.13%	0.28%	0.49%	0.70%	0.85%	0.13%	0.28%	0.49%
3.5Y×6.5Y	0.09%	0.26%	0.49%	0.72%	0.89%	0.10%	0.27%	0.49%	0.71%	0.88%	0.10%	0.27%	0.49%
4.0Y×6.0Y	0.07%	0.25%	0.49%	0.73%	0.91%	0.07%	0.25%	0.49%	0.73%	0.91%	0.08%	0.25%	0.49%
4.5Y×5.5Y	0.04%	0.23%	0.49%	0.75%	0.94%	0.04%	0.24%	0.49%	0.74%	0.94%	0.05%	0.24%	0.49%
5.0Y×5.0Y	0.02%	0.22%	0.49%	0.76%	0.96%	0.02%	0.22%	0.49%	0.76%	0.96%	0.03%	0.22%	0.49%
5.5Y×4.5Y	-0.01%	0.21%	0.49%	0.77%	0.99%	0.00%	0.21%	0.49%	0.77%	0.98%	0.01%	0.21%	0.49%
6.0Y×4.0Y	-0.03%	0.19%	0.49%	0.79%	1.01%	-0.02%	0.20%	0.49%	0.78%	1.00%	-0.02%	0.20%	0.49%
6.5Y×3.5Y	-0.05%	0.18%	0.49%	0.80%	1.03%	-0.04%	0.19%	0.49%	0.79%	1.02%	-0.03%	0.19%	0.49%
7.0Y×3.0Y	-0.07%	0.17%	0.49%	0.81%	1.05%	-0.06%	0.18%	0.49%	0.80%	1.04%	-0.05%	0.18%	0.49%
7.5Y×2.5Y	-0.09%	0.16%	0.49%	0.82%	1.07%	-0.08%	0.16%	0.49%	0.82%	1.06%	-0.07%	0.17%	0.49%
8.0Y×2.0Y	-0.11%	0.15%	0.49%	0.83%	1.09%	-0.10%	0.15%	0.49%	0.83%	1.08%	-0.09%	0.16%	0.49%
8.5Y×1.5Y	-0.12%	0.14%	0.49%	0.84%	1.10%	-0.11%	0.15%	0.49%	0.83%	1.09%	-0.10%	0.15%	0.49%
9.0Y×1.0Y	-0.14%	0.13%	0.49%	0.85%	1.12%	-0.13%	0.14%	0.49%	0.84%	1.11%	-0.12%	0.14%	0.49%
9.5Y×0.5Y	-0.16%	0.12%	0.49%	0.86%	1.14%	-0.14%	0.13%	0.49%	0.85%	1.12%	-0.13%	0.13%	0.49%

表 C.3 $\hat{V}_t^{rebonato,european,pay}$ および $\hat{V}_t^{rebonato,european,rec}$ (単位は bp)

条件1				条件2				条件3							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	
6M×9.5Y	15.567	30.372	62.851	33.916	19.037	14.808	29.795	62.955	34.789	20.241	14.023	29.360	63.163	35.802	21.403
1.0Y×9.0Y	20.798	41.117	85.294	46.112	26.343	19.315	40.170	85.617	47.912	28.590	18.233	38.982	86.221	49.571	31.195
1.5Y×8.5Y	24.313	48.257	100.013	54.577	31.771	22.337	46.685	100.610	56.975	35.136	21.016	45.459	101.708	59.849	39.091
2.0Y×8.0Y	26.816	53.216	110.072	60.703	35.987	24.285	51.326	110.977	63.857	40.244	23.322	49.707	112.626	67.568	45.943
2.5Y×7.5Y	28.432	57.025	116.884	65.494	39.132	25.859	54.450	118.118	68.969	44.610	24.716	53.192	120.356	74.020	51.409
3.0Y×7.0Y	29.653	58.990	121.042	68.333	41.658	27.132	56.505	122.613	72.695	48.252	25.954	55.691	125.449	79.020	56.128
3.5Y×6.5Y	30.336	60.234	122.916	70.246	43.424	27.466	57.917	124.821	75.392	50.596	26.949	56.544	128.254	82.154	60.016
4.0Y×6.0Y	30.587	60.450	122.905	70.976	44.526	27.711	58.350	125.131	76.823	52.403	27.640	57.037	129.136	84.359	63.007
4.5Y×5.5Y	30.443	59.903	121.105	70.751	44.984	27.644	57.603	123.632	76.844	53.455	28.078	56.837	128.171	85.385	65.120
5.0Y×5.0Y	29.858	58.510	117.673	69.510	44.750	27.216	56.428	120.463	75.946	53.672	28.186	55.919	125.471	85.166	66.227
5.5Y×4.5Y	28.918	56.374	112.626	67.297	43.875	26.486	54.369	115.637	73.968	53.093	27.994	54.282	121.039	83.729	66.347
6.0Y×4.0Y	27.569	53.450	106.085	64.109	42.300	25.400	51.658	109.257	70.881	51.636	27.431	51.945	114.948	81.002	65.343
6.5Y×3.5Y	25.842	49.770	98.064	59.957	40.046	23.982	48.239	101.330	66.695	49.307	26.444	48.904	107.188	76.973	63.157
7.0Y×3.0Y	23.649	45.252	88.559	54.748	36.990	22.125	44.028	91.823	61.280	45.935	24.889	45.004	97.678	71.436	59.539
7.5Y×2.5Y	21.007	39.922	77.542	48.478	33.130	19.836	38.970	80.695	54.609	41.497	22.943	40.249	86.351	64.325	54.549
8.0Y×2.0Y	17.837	33.636	64.816	40.988	28.334	17.020	32.984	67.716	46.480	35.801	20.091	34.436	72.923	55.344	47.632
8.5Y×1.5Y	14.248	26.662	50.950	32.593	22.784	13.764	26.282	53.455	37.219	29.053	16.770	27.766	57.956	44.821	39.247
9.0Y×1.0Y	10.113	18.795	35.589	23.042	16.276	9.924	18.641	37.512	26.507	20.972	12.374	19.956	40.970	32.305	28.710
9.5Y×0.5Y	5.449	10.015	18.723	12.301	8.800	5.450	10.015	19.846	14.269	11.463	6.977	10.888	21.866	17.625	15.928
条件4				条件5				条件6							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	15.065	29.992	62.835	34.263	19.520	13.183	28.533	62.810	35.708	21.561	11.358	27.056	62.761	37.128	23.608
1.0Y×9.0Y	19.813	40.398	85.271	46.767	27.229	16.329	37.691	85.288	49.552	31.175	13.011	34.943	85.244	52.272	35.102
1.5Y×8.5Y	22.867	47.487	99.984	55.736	33.002	17.982	43.250	100.070	59.389	38.722	13.212	39.374	100.051	63.309	44.192
2.0Y×8.0Y	24.933	51.863	110.040	61.823	37.499	18.853	47.116	110.211	66.955	44.825	12.995	41.760	110.236	71.606	51.764
2.5Y×7.5Y	26.341	55.121	116.850	66.538	41.062	19.255	49.587	117.122	72.657	49.833	12.477	43.232	117.207	78.161	58.019
3.0Y×7.0Y	27.221	57.171	121.007	69.804	43.783	19.038	51.002	121.390	76.775	53.563	11.886	43.411	121.551	82.804	63.080
3.5Y×6.5Y	27.694	58.207	122.881	71.810	45.773	18.802	51.116	123.383	79.213	56.541	11.468	43.730	123.635	86.376	67.173
4.0Y×6.0Y	27.776	58.384	122.871	72.714	47.043	18.232	50.886	123.495	80.654	58.492	10.940	43.085	123.852	88.364	70.064
4.5Y×5.5Y	27.522	57.768	121.074	72.566	47.633	17.785	50.016	121.821	80.899	59.764	10.658	41.689	122.294	88.904	72.032
5.0Y×5.0Y	26.800	56.395	117.646	71.366	47.386	17.048	48.224	118.511	79.768	59.982	10.044	40.364	119.105	88.375	72.555
5.5Y×4.5Y	25.834	54.227	112.603	69.157	46.507	16.260	46.280	113.579	77.728	59.317	9.612	38.290	114.299	86.328	72.046
6.0Y×4.0Y	24.522	51.356	106.067	65.931	44.876	15.318	43.762	107.139	74.495	57.639	9.165	36.193	107.980	83.121	70.305
6.5Y×3.5Y	23.012	47.779	98.051	61.706	42.605	14.000	40.687	99.198	70.077	54.784	8.714	33.690	100.152	78.555	67.326
7.0Y×3.0Y	21.229	43.416	88.551	56.378	39.572	12.680	36.955	89.742	64.349	50.910	8.159	30.253	90.783	72.336	62.895
7.5Y×2.5Y	18.661	38.212	77.539	49.917	35.340	11.202	32.546	78.731	57.271	45.869	7.490	26.631	79.824	64.684	56.963
8.0Y×2.0Y	15.789	32.137	64.817	42.200	30.220	9.499	27.407	65.954	48.670	39.450	6.639	22.469	67.044	55.249	49.263
8.5Y×1.5Y	12.563	25.431	50.954	33.553	24.288	7.613	21.735	51.972	38.904	31.907	5.584	17.891	52.989	44.405	40.078
9.0Y×1.0Y	8.865	17.900	35.595	23.717	17.328	5.462	15.351	36.405	27.650	22.948	4.223	12.722	37.249	31.752	29.008
9.5Y×0.5Y	4.827	9.535	18.728	12.664	9.407	3.009	8.232	19.222	14.848	12.483	2.475	6.901	19.762	17.172	15.898
条件7				条件8				条件9							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	16.525	31.091	62.852	33.183	18.024	17.677	31.950	62.957	32.588	17.211	18.990	32.951	63.167	32.133	16.575
1.0Y×9.0Y	22.534	42.440	85.255	44.692	24.337	24.838	44.140	85.498	43.650	22.932	27.303	45.876	86.025	42.592	21.737
1.5Y×8.5Y	26.928	49.948	99.917	52.362	29.039	30.123	52.468	100.325	50.976	26.951	33.872	55.217	101.236	49.748	25.542
2.0Y×8.0Y	30.144	55.623	109.912	58.188	32.545	34.191	58.855	110.499	56.526	29.936	39.254	62.065	111.833	54.653	28.560
2.5Y×7.5Y	32.379	59.519	116.654	62.217	35.050	37.426	63.100	117.430	60.008	32.255	43.542	67.457	119.213	58.392	30.833
3.0Y×7.0Y	34.026	61.867	120.740	64.680	36.943	39.706	66.474	121.707	62.798	33.785	47.061	71.455	123.945	61.021	32.721
3.5Y×6.5Y	35.120	63.411	122.541	66.312	38.255	41.605	68.145	123.697	63.958	35.119	49.798	74.130	126.387	62.589	34.193
4.0Y×6.0Y	35.661	64.029	122.459	66.990	38.978	42.829	68.776	123.797	64.198	35.941	51.767	75.662	126.920	63.276	35.252
4.5Y×5.5Y	35.717	63.586	120.594	66.579	39.179	43.170	68.764	122.101	63.955	36.026	53.002	76.097	125.629	63.138	35.931
5.0Y×5.0Y	35.232	62.277	117.105	65.243	38.783	42.980	67.757	118.760	62.830	35.751	53.410	75.479	122.643	62.163	36.132
5.5Y×4.5Y	34.274	60.055	112.010	63.005	37.866	42.176	65.765	113.791	60.847	35.019	53.023	73.679	117.972	60.403	35.896
6.0Y×4.0Y	32.803	57.013	105.434	59.879	36.371	40.701	62.807	107.307	58.006	33.767	51.762	70.826	111.707	57.811	35.129
6.5Y×3.5Y	30.844	53.145	97.393	55.880	34.321	38.575	58.620	99.320	54.012	32.014	49.624	66.872	103.849	54.406	33.830
7.0Y×3.0Y	28.304	48.371	87.889	50.914	31.606	35.674	53.639	89.816	49.322	29.637	46.425	61.637	94.344	50.037	31.825
7.5Y×2.5Y	25.194	42.686	76.896	44.993	28.233	31.997	47.529	78.761	43.699	26.632	42.129	55.163	83.138	44.685	29.082
8.0Y×2.0Y	21.422	35.976	64.224	37.969	24.090	27.413	40.254	65.944	36.992	22.879	36.454	47.152	69.979	38.160	25.350
8.5Y×1.5Y	17.136	28.519	50.441	30.137	19.336	22.095	32.072	51.933	29.469	18.504	29.772	37.934	55.426	30.695	20.908
9.0Y×1.0Y	12.180	20.100	35.201	21.268	13.793	15.844	22.726	36.352	20.887	13.327	21.643	27.160	39.042	21.994	15.372
9.5Y×0.5Y	6.554	10.699	18.500	11.337	7.449	8.606	12.170	19.176	11.200	7.288	11.907	14.719	20.753	11.952	8.576
条件10				条件11				条件12							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	16.956	31.429	62.836	32.796	17.469	18.892	32.840	62.813	31.311	15.478	20.832	34			

表 C.4 $\hat{v}_{i}^{european, pay}$ および $\hat{v}_{i}^{european, rec}$ (単位は bp)

条件1				条件2				条件3							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta35%	Delta25%	ATM	Delta35%	Delta25%	
6M×9.5Y	15.571	30.420	62.943	33.980	19.065	15.018	30.032	63.100	34.710	20.037	14.415	29.806	63.397	35.590	20.942
1.0Y×9.0Y	20.860	41.216	85.394	46.190	26.390	19.622	40.551	85.898	47.903	28.421	18.773	39.731	86.785	49.502	30.773
1.5Y×8.5Y	24.327	48.307	100.088	54.571	31.727	22.634	47.095	100.957	56.952	34.920	21.608	46.404	102.517	59.840	38.631
2.0Y×8.0Y	26.826	53.261	110.108	60.642	35.884	24.642	51.832	111.398	63.815	39.972	24.080	50.942	113.679	67.556	45.369
2.5Y×7.5Y	28.452	57.067	116.933	65.418	39.025	26.259	55.036	118.634	68.956	44.344	25.561	54.670	121.652	74.014	50.732
3.0Y×7.0Y	29.666	58.995	121.030	68.185	41.490	27.552	57.117	123.132	72.645	47.927	26.861	57.327	126.846	78.966	55.282
3.5Y×6.5Y	30.361	60.255	122.894	70.090	43.257	27.978	58.629	125.418	75.407	50.300	27.935	58.365	129.780	82.116	59.054
4.0Y×6.0Y	30.608	60.470	122.879	70.813	44.323	28.221	59.092	125.727	76.790	52.039	28.540	58.876	130.564	83.931	61.536
4.5Y×5.5Y	30.493	59.968	121.137	70.648	44.821	28.169	58.387	124.253	76.839	53.075	28.783	58.594	129.419	84.917	63.454
5.0Y×5.0Y	29.911	58.551	117.664	69.378	44.585	27.752	57.175	120.989	75.881	53.237	28.646	57.454	126.357	84.252	63.997
5.5Y×4.5Y	28.982	56.439	112.637	67.205	43.732	26.999	55.099	116.092	73.878	52.580	28.083	55.477	121.420	82.052	63.206
6.0Y×4.0Y	27.627	53.485	106.058	64.019	42.138	25.885	52.322	109.616	70.628	50.943	27.092	52.688	114.787	78.790	61.517
6.5Y×3.5Y	25.893	49.786	98.035	59.828	39.871	24.402	48.793	101.549	66.242	48.404	25.622	49.149	106.426	73.082	57.565
7.0Y×3.0Y	23.693	45.266	88.525	54.642	36.812	22.478	44.494	91.914	60.800	44.976	23.635	44.771	96.328	67.096	53.391
7.5Y×2.5Y	21.033	39.904	77.462	48.313	32.924	20.141	39.353	80.669	53.936	40.376	21.364	39.606	84.561	59.619	48.034
8.0Y×2.0Y	17.858	33.615	64.722	40.853	28.158	17.257	33.268	67.594	45.867	34.768	18.299	33.496	70.849	51.707	42.245
8.5Y×1.5Y	14.269	26.650	50.876	32.474	22.630	13.954	26.501	53.304	36.666	28.140	15.010	26.717	55.885	41.951	34.822
9.0Y×1.0Y	10.127	18.787	35.529	22.927	16.140	10.066	18.798	37.366	25.964	20.147	10.898	19.026	39.228	28.961	24.112
9.5Y×0.5Y	5.456	10.005	18.688	12.232	8.721	5.541	10.108	19.754	13.942	10.965	6.091	10.314	20.794	15.491	13.019
条件4				条件5				条件6							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	15.187	30.129	62.935	34.262	19.452	13.789	29.086	63.017	35.485	21.121	12.478	28.105	63.163	36.760	22.862
1.0Y×9.0Y	20.012	40.606	85.393	46.804	27.197	17.098	38.462	85.694	49.510	30.881	14.395	36.447	86.125	52.336	34.705
1.5Y×8.5Y	23.050	47.684	100.116	55.702	32.884	18.838	44.173	100.668	59.416	38.460	14.790	41.296	101.417	63.698	44.067
2.0Y×8.0Y	25.130	52.075	110.158	61.759	37.343	19.809	48.204	110.977	67.093	44.645	14.793	44.131	112.088	72.351	51.940
2.5Y×7.5Y	26.563	55.350	117.001	66.488	40.932	20.291	50.815	118.073	72.972	49.827	14.474	46.036	119.540	79.356	58.627
3.0Y×7.0Y	27.446	57.383	121.126	69.696	43.609	20.134	52.333	122.442	77.151	53.609	14.108	46.633	124.278	84.323	63.983
3.5Y×6.5Y	27.935	58.437	122.999	71.705	45.614	19.995	52.567	124.570	79.718	56.731	13.987	47.401	126.804	88.636	68.806
4.0Y×6.0Y	28.021	58.626	123.005	72.614	46.854	19.472	52.425	124.772	81.199	58.710	13.751	47.176	127.360	90.266	71.315
4.5Y×5.5Y	27.796	58.062	121.273	72.528	47.497	19.088	51.655	123.196	81.541	60.054	13.782	46.196	126.091	90.927	73.344
5.0Y×5.0Y	27.059	56.650	117.810	71.325	47.268	18.371	49.855	119.852	80.513	60.409	13.406	45.162	123.012	91.085	74.545
5.5Y×4.5Y	26.096	54.509	112.789	69.144	46.411	17.611	47.942	114.887	78.443	59.689	13.232	43.348	118.213	88.333	73.242
6.0Y×4.0Y	24.772	51.593	106.203	65.897	44.749	16.671	45.361	108.374	75.048	57.859	12.952	41.361	111.820	85.166	71.507
6.5Y×3.5Y	23.243	47.986	98.177	61.618	42.457	15.331	42.218	100.312	70.367	54.763	12.630	38.896	103.822	78.560	66.444
7.0Y×3.0Y	21.436	43.605	88.655	56.279	39.398	13.980	38.394	90.710	64.455	50.676	12.080	35.342	94.137	70.772	60.388
7.5Y×2.5Y	18.821	38.339	77.585	49.748	35.119	12.441	33.862	79.555	57.155	45.442	11.312	31.471	82.812	63.671	54.986
8.0Y×2.0Y	15.920	32.228	64.822	42.047	30.023	10.632	28.552	66.604	48.551	39.046	10.153	26.811	69.519	55.828	48.904
8.5Y×1.5Y	12.668	25.502	50.948	33.395	24.097	8.598	22.697	52.455	38.717	31.468	8.642	21.596	54.940	47.315	42.118
9.0Y×1.0Y	8.932	17.942	35.578	23.563	17.152	6.236	16.078	36.731	27.330	22.434	6.610	15.547	38.625	30.681	27.224
9.5Y×0.5Y	4.856	9.545	18.706	12.565	9.301	3.464	8.643	19.377	14.626	12.141	3.916	8.554	20.501	16.722	14.990
条件7				条件8				条件9							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	16.305	30.968	62.933	33.398	18.268	17.209	31.669	63.071	32.973	17.658	18.231	32.503	63.348	32.724	17.229
1.0Y×9.0Y	22.335	42.327	85.306	44.895	24.583	24.326	43.844	85.629	44.039	23.387	26.357	45.356	86.320	43.287	22.451
1.5Y×8.5Y	26.631	49.729	99.891	52.457	29.180	29.384	51.978	100.344	51.314	27.348	32.416	54.324	101.412	50.527	26.315
2.0Y×8.0Y	29.801	55.356	109.797	58.191	32.606	33.304	58.243	110.427	56.786	30.282	37.311	60.802	111.902	55.471	29.364
2.5Y×7.5Y	32.006	59.202	116.509	62.170	35.078	36.342	62.306	117.280	60.228	32.581	40.875	65.625	119.055	59.181	31.645
3.0Y×7.0Y	33.613	61.471	120.486	64.538	36.891	38.388	65.466	121.371	62.958	34.065	43.505	68.899	123.356	61.722	33.490
3.5Y×6.5Y	34.694	62.998	122.244	66.138	38.177	40.112	66.981	123.246	64.091	35.396	45.237	70.762	125.295	63.087	34.811
4.0Y×6.0Y	35.213	63.606	122.142	66.787	38.856	41.106	67.428	123.245	64.290	36.202	46.042	71.322	125.231	63.480	35.634
4.5Y×5.5Y	35.302	63.200	120.330	66.420	39.882	41.255	67.270	121.485	64.036	36.289	46.062	70.745	123.275	62.939	35.947
5.0Y×5.0Y	34.831	61.879	116.804	65.038	38.663	40.917	66.110	117.985	62.804	35.944	45.298	69.079	119.454	61.355	35.594
5.5Y×4.5Y	33.901	59.701	111.745	62.848	37.762	39.923	63.975	112.909	60.815	35.203	43.763	66.249	113.974	59.043	34.820
6.0Y×4.0Y	32.449	56.664	105.143	59.731	36.261	38.310	60.880	106.309	57.893	33.874	41.571	62.539	106.985	55.785	33.401
6.5Y×3.5Y	30.522	52.807	97.134	55.724	34.206	36.085	56.576	98.209	53.813	32.019	38.744	57.898	98.463	51.752	31.439
7.0Y×3.0Y	28.013	48.076	87.670	50.811	31.513	33.157	51.569	88.661	49.165	29.645	35.268	52.366	88.612	47.089	29.060
7.5Y×2.5Y	24.933	42.411	76.662	44.860	28.126	29.554	45.520	77.576	43.434	26.546	31.181	46.025	77.328	41.388	25.922
8.0Y×2.0Y	21.216	35.758	64.019	37.871	24.013	25.192	38.415	64.831	36.712	22.763	26.314	38.647	64.450	34.791	22.047
8.5Y×1.5Y	16.988	28.369	50.304	30.072	19.281	20.231	30.532	51.001	29.208	18.374	21.065	30.616	50.605	27.586	17.787
9.0Y×1.0Y	12.085	20.008	35.116	21.215	13.746	14.468	21.591	35.662	20.654	13.186	15.093	21.648	35.382	19.500	12.812
9.5Y×0.5Y	6.513	10.658	18.464	11.316	7.432	7.866	11.564	18.810	11.085	7.216	8.280	11.673	18.731	10.534	7.073
条件10				条件11				条件12							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	16.631	31.227	62.916	33.098	17.829	18.162</									

表 C.5 $|\hat{V}_t^{european,pay} - \hat{V}_t^{rebonato,european,pay}|$ および $|\hat{V}_t^{european,rec} - \hat{V}_t^{rebonato,european,rec}|$ (単位は bp)。

条件1				条件2				条件3							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	0.004	0.048	0.092	0.064	0.029	0.210	0.237	0.145	0.079	0.205	0.391	0.446	0.234	0.213	0.460
1.0Y×9.0Y	0.062	0.099	0.100	0.078	0.047	0.306	0.381	0.281	0.009	0.169	0.540	0.748	0.564	0.069	0.422
1.5Y×8.5Y	0.014	0.050	0.075	0.006	0.044	0.297	0.410	0.347	0.023	0.216	0.592	0.945	0.808	0.009	0.460
2.0Y×8.0Y	0.010	0.045	0.036	0.062	0.103	0.357	0.506	0.421	0.042	0.272	0.758	1.234	1.053	0.012	0.575
2.5Y×7.5Y	0.020	0.042	0.049	0.075	0.107	0.400	0.586	0.516	0.013	0.267	0.845	1.478	1.296	0.006	0.677
3.0Y×7.0Y	0.012	0.005	0.013	0.148	0.169	0.420	0.612	0.519	0.050	0.326	0.907	1.636	1.397	0.054	0.845
3.5Y×6.5Y	0.026	0.021	0.022	0.156	0.167	0.512	0.712	0.597	0.016	0.296	0.986	1.821	1.527	0.038	0.962
4.0Y×6.0Y	0.021	0.020	0.026	0.163	0.203	0.510	0.742	0.596	0.033	0.364	0.899	1.839	1.428	0.429	1.471
4.5Y×5.5Y	0.050	0.065	0.031	0.103	0.162	0.525	0.783	0.622	0.005	0.381	0.705	1.757	1.248	0.469	1.666
5.0Y×5.0Y	0.053	0.042	0.009	0.132	0.166	0.536	0.747	0.526	0.065	0.435	0.460	1.536	0.886	0.914	2.230
5.5Y×4.5Y	0.065	0.065	0.011	0.093	0.143	0.515	0.729	0.455	0.090	0.514	0.089	1.195	0.381	1.677	3.142
6.0Y×4.0Y	0.058	0.036	0.027	0.090	0.162	0.486	0.664	0.359	0.253	0.693	0.338	0.744	0.161	2.212	3.825
6.5Y×3.5Y	0.051	0.016	0.029	0.128	0.176	0.420	0.554	0.219	0.453	0.902	0.822	0.245	0.761	3.891	5.592
7.0Y×3.0Y	0.043	0.014	0.034	0.106	0.177	0.353	0.467	0.091	0.480	0.960	1.255	0.232	1.350	4.341	6.148
7.5Y×2.5Y	0.026	0.018	0.080	0.164	0.206	0.305	0.383	0.025	0.674	1.121	1.579	0.643	1.789	4.706	6.515
8.0Y×2.0Y	0.022	0.022	0.094	0.135	0.176	0.237	0.285	0.122	0.612	1.033	1.793	0.940	2.074	3.637	5.387
8.5Y×1.5Y	0.021	0.012	0.074	0.119	0.154	0.190	0.220	0.152	0.553	0.913	1.760	1.050	2.071	2.870	4.425
9.0Y×1.0Y	0.014	0.008	0.059	0.115	0.135	0.142	0.156	0.147	0.543	0.825	1.476	0.931	1.742	3.344	4.598
9.5Y×0.5Y	0.007	0.009	0.035	0.070	0.079	0.091	0.093	0.092	0.327	0.498	0.886	0.574	1.072	2.133	2.908
条件4				条件5				条件6							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	0.122	0.137	0.100	0.000	0.069	0.607	0.553	0.208	0.223	0.440	1.121	1.049	0.402	0.368	0.746
1.0Y×9.0Y	0.198	0.208	0.122	0.036	0.032	0.769	0.771	0.406	0.042	0.294	1.383	1.504	0.881	0.064	0.397
1.5Y×8.5Y	0.183	0.197	0.131	0.035	0.118	0.856	0.922	0.598	0.027	0.262	1.578	1.922	1.366	0.390	0.125
2.0Y×8.0Y	0.197	0.213	0.118	0.064	0.156	0.956	1.088	0.766	0.138	0.180	1.798	2.372	1.853	0.744	0.177
2.5Y×7.5Y	0.222	0.228	0.152	0.050	0.130	1.035	1.229	0.951	0.316	0.006	1.996	2.804	2.333	1.195	0.608
3.0Y×7.0Y	0.225	0.212	0.118	0.108	0.174	1.096	1.331	1.052	0.376	0.046	2.221	3.222	2.727	1.520	0.903
3.5Y×6.5Y	0.241	0.230	0.118	0.105	0.159	1.193	1.452	1.188	0.505	0.190	2.519	3.671	3.169	2.260	1.632
4.0Y×6.0Y	0.245	0.242	0.134	0.100	0.189	1.240	1.539	1.277	0.545	0.218	2.810	4.091	3.508	1.902	1.251
4.5Y×5.5Y	0.274	0.294	0.199	0.038	0.135	1.303	1.638	1.374	0.642	0.289	3.123	4.507	3.797	2.024	1.313
5.0Y×5.0Y	0.259	0.255	0.164	0.041	0.118	1.323	1.631	1.341	0.745	0.427	3.362	4.798	3.907	2.710	1.991
5.5Y×4.5Y	0.262	0.282	0.186	0.013	0.097	1.351	1.661	1.308	0.715	0.372	3.620	5.057	3.913	2.005	1.196
6.0Y×4.0Y	0.250	0.237	0.136	0.034	0.126	1.352	1.599	1.235	0.553	0.220	3.787	5.168	3.840	2.044	1.202
6.5Y×3.5Y	0.231	0.207	0.126	0.088	0.148	1.330	1.530	1.113	0.290	0.021	3.916	5.205	3.670	0.006	0.882
7.0Y×3.0Y	0.207	0.189	0.103	0.099	0.174	1.301	1.439	0.968	0.106	0.234	3.921	5.089	3.354	1.564	2.507
7.5Y×2.5Y	0.161	0.127	0.046	0.169	0.221	1.238	1.316	0.824	0.116	0.427	3.822	4.840	2.988	1.013	1.977
8.0Y×2.0Y	0.131	0.091	0.005	0.153	0.197	1.133	1.145	0.650	0.119	0.404	3.514	4.341	2.475	0.579	0.359
8.5Y×1.5Y	0.105	0.071	0.006	0.158	0.192	0.985	0.962	0.484	0.187	0.440	3.058	3.705	1.951	2.910	2.040
9.0Y×1.0Y	0.067	0.042	0.016	0.154	0.176	0.773	0.727	0.327	0.320	0.513	2.387	2.825	1.375	1.071	1.784
9.5Y×0.5Y	0.029	0.010	0.022	0.099	0.106	0.455	0.411	0.155	0.222	0.343	1.441	1.654	0.739	0.450	0.908
条件7				条件8				条件9							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	0.220	0.123	0.082	0.216	0.244	0.468	0.281	0.115	0.385	0.447	0.759	0.448	0.181	0.590	0.653
1.0Y×9.0Y	0.199	0.112	0.051	0.203	0.245	0.512	0.296	0.130	0.388	0.455	0.946	0.520	0.295	0.695	0.714
1.5Y×8.5Y	0.298	0.219	0.026	0.095	0.141	0.739	0.491	0.019	0.338	0.397	1.456	0.893	0.175	0.779	0.772
2.0Y×8.0Y	0.344	0.267	0.116	0.003	0.061	0.888	0.612	0.072	0.260	0.346	1.944	1.263	0.069	0.817	0.804
2.5Y×7.5Y	0.373	0.317	0.145	0.047	0.028	1.085	0.794	0.150	0.220	0.326	2.667	1.832	0.157	0.789	0.812
3.0Y×7.0Y	0.413	0.396	0.253	0.142	0.052	1.318	1.008	0.336	0.161	0.280	3.556	2.555	0.589	0.701	0.769
3.5Y×6.5Y	0.426	0.413	0.297	0.174	0.078	1.493	1.164	0.451	0.133	0.276	4.561	3.368	1.092	0.498	0.618
4.0Y×6.0Y	0.448	0.423	0.317	0.203	0.122	1.723	1.348	0.552	0.093	0.261	5.725	4.340	1.689	0.203	0.382
4.5Y×5.5Y	0.415	0.387	0.264	0.160	0.097	1.915	1.494	0.616	0.082	0.264	6.939	5.352	2.354	0.199	0.016
5.0Y×5.0Y	0.402	0.397	0.300	0.204	0.119	2.063	1.647	0.775	0.026	0.193	8.113	6.401	3.189	0.809	0.538
5.5Y×4.5Y	0.373	0.355	0.265	0.157	0.103	2.253	1.790	0.882	0.032	0.185	9.261	7.430	3.998	1.360	1.076
6.0Y×4.0Y	0.353	0.349	0.291	0.148	0.110	2.392	1.927	0.998	0.113	0.107	10.191	8.286	4.722	2.027	1.728
6.5Y×3.5Y	0.322	0.338	0.259	0.156	0.115	2.490	2.044	1.111	0.199	0.004	10.881	8.974	5.386	2.654	2.391
7.0Y×3.0Y	0.290	0.295	0.219	0.104	0.093	2.516	2.070	1.155	0.158	0.008	11.157	9.271	5.731	2.949	2.765
7.5Y×2.5Y	0.261	0.275	0.235	0.132	0.106	2.443	2.009	1.185	0.265	0.086	10.948	9.138	5.810	3.296	3.159
8.0Y×2.0Y	0.206	0.219	0.205	0.098	0.077	2.221	1.839	1.113	0.280	0.115	10.140	8.504	5.529	3.369	3.303
8.5Y×1.5Y	0.148	0.150	0.137	0.065	0.055	1.864	1.540	0.931	0.261	0.130	8.707	7.319	4.821	3.109	3.121
9.0Y×1.0Y	0.095	0.092	0.085	0.053	0.047	1.376	1.135	0.690	0.233	0.141	6.550	5.513	3.660	2.493	2.559
9.5Y×0.5Y	0.040	0.041	0.035	0.021	0.017	0.740	0.606	0.366	0.115	0.072	3.628	3.045	2.022	1.418	1.503
条件10				条件11				条件12							
期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
6M×9.5Y	0.325	0.202	0.080	0.302	0.361	0.731	0.468	0.148	0.690	0.844	1.093	0.665	0.304	1.176	1.386
1.0Y×9.0Y	0.319	0.211	0.026	0.284	0.362	0.781	0.504	0.117	0.700	0.873	1.193	0.691	0.383	1.316	1.500
1.5Y×8.5Y	0.433	0.333	0.067	0.159	0.247	1.008	0.712	0.021	0.618	0.799	1.577	0.988	0.261	1.396	1.548
2.0Y×8.0Y	0.497	0.404	0.179	0.058	0.160	1.179	0.862	0.162	0.514	0.744	1.965	1.280	0.145	1.438	1.637
2.5Y×7.5Y	0.543	0.475	0.233	0.003	0.122	1.401	1.080	0.290	0.467	0.720	2.575	1.762	0.114	1.482	1.700
3.0Y×7.0Y	0.598	0.567	0.352	0.116	0.034	1.621	1.302	0.500	0.356	0.657	3.226	2.305	0		

表 C.6 シミュレーションの誤差

条件1				条件2				条件3							
オプション期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
0.5	0.067	0.100	0.136	0.097	0.076	0.071	0.108	0.138	0.089	0.074	0.077	0.116	0.144	0.085	0.070
1.0	0.117	0.173	0.233	0.227	0.166	0.109	0.175	0.219	0.225	0.162	0.111	0.187	0.227	0.206	0.165
1.5	0.103	0.157	0.188	0.212	0.172	0.093	0.167	0.194	0.249	0.218	0.111	0.170	0.179	0.318	0.309
2.0	0.117	0.155	0.152	0.186	0.146	0.136	0.180	0.166	0.206	0.195	0.157	0.208	0.213	0.302	0.330
2.5	0.114	0.159	0.181	0.246	0.176	0.114	0.204	0.234	0.296	0.268	0.196	0.289	0.339	0.473	0.426
3.0	0.148	0.190	0.205	0.271	0.222	0.147	0.208	0.239	0.356	0.323	0.203	0.272	0.365	0.555	0.506
3.5	0.179	0.203	0.223	0.316	0.258	0.143	0.250	0.324	0.339	0.338	0.215	0.335	0.432	0.570	0.588
4.0	0.175	0.203	0.218	0.308	0.242	0.183	0.254	0.253	0.312	0.272	0.211	0.281	0.320	0.728	0.694
4.5	0.155	0.218	0.228	0.252	0.263	0.199	0.207	0.236	0.507	0.495	0.240	0.294	0.325	1.187	1.160
5.0	0.230	0.279	0.282	0.429	0.358	0.189	0.210	0.218	0.533	0.464	0.206	0.258	0.305	1.114	1.108
5.5	0.193	0.250	0.267	0.357	0.303	0.168	0.209	0.223	0.462	0.416	0.221	0.279	0.331	1.232	1.234
6.0	0.171	0.224	0.244	0.353	0.269	0.189	0.228	0.231	0.406	0.336	0.216	0.262	0.292	1.922	1.876
6.5	0.170	0.229	0.246	0.327	0.246	0.185	0.237	0.248	0.465	0.428	0.214	0.256	0.290	1.768	1.744
7.0	0.167	0.217	0.231	0.281	0.210	0.180	0.214	0.222	0.406	0.403	0.173	0.226	0.275	1.851	1.818
7.5	0.125	0.137	0.132	0.317	0.256	0.127	0.153	0.169	0.520	0.498	0.182	0.214	0.255	1.732	1.692
8.0	0.110	0.125	0.121	0.274	0.250	0.101	0.122	0.128	0.571	0.543	0.160	0.165	0.181	2.224	2.188
8.5	0.071	0.084	0.083	0.165	0.150	0.090	0.101	0.112	0.389	0.372	0.114	0.138	0.147	2.410	2.356
9.0	0.046	0.051	0.068	0.107	0.104	0.065	0.069	0.085	0.308	0.322	0.062	0.065	0.087	0.886	0.886
9.5	0.023	0.027	0.033	0.059	0.053	0.037	0.035	0.040	0.135	0.133	0.026	0.038	0.053	0.382	0.377
条件4				条件5				条件6							
オプション期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
0.5	0.062	0.095	0.133	0.102	0.080	0.057	0.095	0.129	0.099	0.087	0.056	0.093	0.124	0.096	0.094
1.0	0.112	0.172	0.229	0.227	0.172	0.097	0.160	0.209	0.257	0.206	0.083	0.149	0.183	0.290	0.254
1.5	0.085	0.136	0.171	0.196	0.163	0.071	0.134	0.168	0.244	0.191	0.064	0.122	0.166	0.310	0.216
2.0	0.096	0.131	0.132	0.179	0.148	0.080	0.119	0.141	0.222	0.209	0.069	0.129	0.165	0.354	0.281
2.5	0.115	0.143	0.180	0.296	0.221	0.080	0.148	0.150	0.353	0.290	0.084	0.162	0.186	0.453	0.410
3.0	0.140	0.179	0.191	0.292	0.254	0.111	0.146	0.162	0.409	0.348	0.088	0.146	0.203	0.735	0.703
3.5	0.153	0.184	0.220	0.341	0.308	0.097	0.164	0.196	0.525	0.507	0.091	0.162	0.209	0.946	0.967
4.0	0.149	0.175	0.189	0.333	0.285	0.101	0.161	0.164	0.479	0.458	0.087	0.160	0.193	1.026	1.050
4.5	0.125	0.183	0.189	0.328	0.333	0.105	0.140	0.141	0.689	0.701	0.081	0.113	0.139	1.962	1.951
5.0	0.200	0.252	0.266	0.477	0.408	0.098	0.170	0.179	0.779	0.753	0.064	0.139	0.154	3.601	3.501
5.5	0.175	0.242	0.255	0.401	0.335	0.109	0.162	0.151	0.853	0.861	0.098	0.150	0.173	3.648	3.617
6.0	0.160	0.217	0.223	0.373	0.299	0.118	0.172	0.132	0.687	0.704	0.114	0.174	0.170	3.564	3.529
6.5	0.154	0.202	0.214	0.339	0.291	0.102	0.152	0.135	0.633	0.551	0.111	0.151	0.184	2.603	2.553
7.0	0.142	0.193	0.201	0.295	0.256	0.081	0.118	0.114	0.685	0.678	0.101	0.136	0.136	2.767	2.755
7.5	0.128	0.122	0.100	0.340	0.306	0.066	0.096	0.095	0.771	0.754	0.093	0.140	0.157	2.615	2.599
8.0	0.102	0.123	0.107	0.284	0.259	0.055	0.081	0.085	0.672	0.615	0.089	0.120	0.132	1.751	1.699
8.5	0.051	0.053	0.055	0.181	0.176	0.042	0.065	0.083	0.434	0.421	0.068	0.096	0.131	2.550	2.545
9.0	0.029	0.040	0.039	0.135	0.134	0.024	0.033	0.053	0.448	0.446	0.046	0.053	0.083	1.324	1.316
9.5	0.016	0.020	0.024	0.062	0.061	0.018	0.022	0.027	0.208	0.213	0.022	0.030	0.046	1.123	1.122
条件7				条件8				条件9							
オプション期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
0.5	0.073	0.102	0.140	0.096	0.074	0.088	0.119	0.151	0.090	0.071	0.103	0.132	0.170	0.087	0.071
1.0	0.132	0.181	0.245	0.211	0.148	0.152	0.198	0.257	0.184	0.114	0.179	0.225	0.273	0.152	0.115
1.5	0.112	0.159	0.202	0.183	0.163	0.119	0.176	0.215	0.187	0.172	0.164	0.214	0.235	0.210	0.214
2.0	0.127	0.170	0.164	0.168	0.130	0.164	0.207	0.195	0.159	0.134	0.198	0.249	0.273	0.210	0.189
2.5	0.142	0.174	0.200	0.216	0.140	0.167	0.215	0.254	0.204	0.161	0.210	0.278	0.357	0.240	0.201
3.0	0.172	0.212	0.229	0.229	0.185	0.235	0.263	0.276	0.222	0.209	0.254	0.320	0.333	0.265	0.214
3.5	0.209	0.235	0.258	0.277	0.204	0.239	0.268	0.350	0.203	0.172	0.235	0.322	0.459	0.170	0.147
4.0	0.203	0.236	0.262	0.266	0.199	0.249	0.301	0.347	0.203	0.153	0.266	0.342	0.411	0.210	0.227
4.5	0.172	0.240	0.270	0.207	0.223	0.269	0.305	0.305	0.271	0.267	0.291	0.336	0.372	0.262	0.252
5.0	0.280	0.339	0.352	0.359	0.282	0.341	0.407	0.380	0.238	0.199	0.343	0.369	0.396	0.256	0.217
5.5	0.224	0.288	0.321	0.298	0.234	0.290	0.361	0.384	0.216	0.192	0.333	0.371	0.387	0.224	0.207
6.0	0.209	0.264	0.293	0.263	0.204	0.283	0.344	0.378	0.213	0.133	0.316	0.365	0.389	0.269	0.204
6.5	0.209	0.264	0.300	0.258	0.186	0.264	0.317	0.371	0.210	0.165	0.301	0.374	0.457	0.247	0.215
7.0	0.204	0.261	0.291	0.233	0.162	0.190	0.240	0.256	0.214	0.149	0.275	0.343	0.367	0.261	0.199
7.5	0.175	0.196	0.162	0.238	0.191	0.184	0.217	0.241	0.195	0.178	0.232	0.261	0.299	0.294	0.255
8.0	0.149	0.164	0.164	0.195	0.177	0.171	0.204	0.193	0.192	0.169	0.164	0.199	0.220	0.300	0.271
8.5	0.093	0.104	0.108	0.127	0.116	0.116	0.124	0.119	0.219	0.173	0.111	0.122	0.134	0.279	0.238
9.0	0.062	0.064	0.073	0.078	0.075	0.076	0.089	0.108	0.127	0.112	0.069	0.081	0.101	0.140	0.116
9.5	0.028	0.030	0.034	0.040	0.036	0.043	0.048	0.053	0.074	0.063	0.044	0.049	0.055	0.085	0.077
条件10				条件11				条件12							
オプション期間	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%	Delta25%	Delta35%	ATM	Delta35%	Delta25%
0.5	0.126	0.160	0.179	0.206	0.166	0.008	0.026	0.040	0.028	0.009	0.119	0.128	0.160	0.087	0.065
1.0	0.069	0.108	0.111	0.093	0.084	0.012	0.040	0.068	0.041	0.018	0.229	0.259	0.334	0.149	0.094
1.5	0.160	0.208	0.211	0.205	0.165	0.017	0.068	0.092	0.071	0.019	0.191	0.195	0.260	0.116	0.114
2.0	0.183	0.220	0.246	0.289	0.224	0.011	0.028	0.083	0.032	0.022	0.157	0.195	0.220	0.109	0.101
2.5	0.156	0.193	0.188	0.319	0.280	0.017	0.065	0.114	0.051	0.038	0.228	0.263	0.265	0.115	0.076
3.0	0.221	0.255	0.239	0.395	0.329	0.023	0.075	0.145	0.089	0.043	0.293	0.366	0.364	0.111	0.056
3.5	0.143	0.188	0.231	0.278	0.216	0.010	0.052	0.070	0.041	0.029	0.336	0.377	0.407	0.114	0.069
4.0	0.178	0.282	0.257	0.290	0.208	0.013	0.047	0.097	0.061	0.					

参考文献

- [1] Ahsan Amin. *Pricing Bermudan Fixed Income Derivatives in Multi-factor Extended LIBOR Market Model*. PhD thesis, Master Thesis, New York University, 2003.
- [2] Leif BG Andersen and Vladimir V Piterbarg. Interest Rate Modeling. volume iii: Products and Risk management, 2010.
- [3] Leif Andersen and Mark Broadie. Primal-dual simulation algorithm for pricing multi-dimensional American options. *Management Science*, Vol. 50, No. 9, pp. 1222–1234, 2004.
- [4] Alexandre Antonov and Michael Spector. Advanced analytics for the SABR model. *Available at SSRN 2026350*, 2012.
- [5] Nelson Areal, Artur Rodrigues, and Manuel R Armada. On improving the least squares Monte Carlo option valuation method. *Review of Derivatives Research*, Vol. 11, No. 1-2, p. 119, 2008.
- [6] Denis Belomestny, Christian Bender, and John Schoenmakers. True upper bounds for Bermudan products via non-nested Monte Carlo. *Mathematical Finance*, Vol. 19, No. 1, pp. 53–71, 2009.
- [7] Denis Belomestny and John Schoenmakers. *Advanced Simulation-Based Methods for Optimal Stopping and Control: With Applications in Finance*. Springer, 2018.
- [8] Fischer Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 167–179, 1976.
- [9] Alan Brace, Dariusz Gatarek, and Marek Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 2, pp. 127–155, 1997.
- [10] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models — Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [11] Ning Cai, Yingda Song, and Nan Chen. Exact simulation of the SABR model. *Opera-*

- tions Research, Vol. 65, No. 4, pp. 931–951, 2017.
- [12] Bin Chen, Cornelis W Oosterlee, and Hans Van Der Weide. Efficient unbiased simulation scheme for the SABR stochastic volatility model. *Preprint*, 2011.
 - [13] Christian Crispoldi, Gérald Wigger, and Peter Larkin. *SABR and SABR LIBOR Market Models in Practice: With Examples Implemented in Python*. Springer, 2016.
 - [14] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, Vol. 7, No. 1, pp. 18–20, 1994.
 - [15] Dariusz Gatarek, Przemyslaw Bachert, and Robert Maksymiuk. *The LIBOR Market Model in Practice*. John Wiley & Sons, 2007.
 - [16] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, New York, NY, USA, 2004.
 - [17] Patrick S Hagan, Deep Kumar, Andrew S Lesniewski, and Diana E Woodward. Managing smile risk. *The Best of Wilmott*, Vol. 1, pp. 249–296, 2002.
 - [18] Patrick S Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski, and Diana Woodward. Arbitrage-free SABR. *Wilmott*, Vol. 2014, No. 69, pp. 60–75, 2014.
 - [19] Pierre Henry-Labordere. Interest rates: Combining the SABR and LMM models. *Risk*, Vol. 20, No. 10, pp. 102–107, 2007.
 - [20] Steven L Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327–343, 1993.
 - [21] Farshid Jamshidian. The duality of optimal exercise and domineering claims: A Doob–Meyer decomposition approach to the Snell envelope. *Stochastics*, Vol. 79, No. 1-2, pp. 27–60, 2007.
 - [22] Patrik Karlsson, Shashi Jain, and Cornelis W Oosterlee. Fast and accurate exercise policies for Bermudan swaptions in the LIBOR market model. *International Journal of Financial Engineering*, Vol. 3, No. 1, p. 1650005, 2016.
 - [23] Alvaro Leita, Lech A Grzelak, and Cornelis W Oosterlee. On an efficient multiple time step Monte Carlo simulation of the SABR model. *Quantitative Finance*, Vol. 17, No. 10, pp. 1549–1565, 2017.
 - [24] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp. 113–147, 2001.
 - [25] Andrei Lyashenko and Fabio Mercurio. Looking forward to backward-looking rates: A modeling framework for term rates replacing LIBOR. *Available at SSRN 3330240*,

2019.

- [26] Riccardo Rebonato, Kenneth McKay, and Richard White. *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, calibration and hedging for complex interest-rate derivatives*. John Wiley & Sons, 2009.
- [27] Riccardo Rebonato and Richard White. Linking caplets and swaptions prices in the LMM-SABR model. *Journal of Computational Finance*, Vol. 13, No. 2, pp. 19–45, 2009.
- [28] L. C. G. Rogers. Monte Carlo valuation of American options. *Mathematical Finance*, Vol. 12, No. 3, pp. 271–286, 2002.
- [29] 加藤敏康, 吉羽要直. モデル・リスクとそれへの対応. 金融研究, Vol. 19, 別冊 2, pp. 77–107, 2000.
- [30] 関根順. 数理ファイナンス. 培風館, 2007.
- [31] 新原祐喜. 確率局所ボラティリティ・モデルのもとでのヘッジ戦略: 最尤経路を利用したバリア・オプションの静的ヘッジ. 金融研究, Vol. 30, No. 4, pp. 125–185, 2011.
- [32] 森本裕介. アメリカン・モンテカルロ法における継続価値評価の精緻化. 金融研究, Vol. 32, No. 1, pp. 21–99, 2013.
- [33] 菅沼健司, 山田哲也. マイナス金利を考慮したフォワードレート・モデルと市場の金利見通し. *IMES Discussion Paper Series*, No. 2017-J-18, 2017.
- [34] 竹原浩太. マイナス金利モデルについて: 金利デリバティブの視点から (特集金融工学の広がり). オペレーションズ・リサーチ= Communications of the Operations Research Society of Japan: 経営の科学, Vol. 65, No. 7, pp. 381–388, 2020.
- [35] 湯前祥二, 鈴木輝好. モンテカルロ法の金融工学への応用, 2000.
- [36] 藤田岳彦. ファイナンスの確率解析入門. 講談社, 2007.
- [37] 木島正明, 田中敬一. 資産の価格付けと測度変換. 朝倉書店, 2007.