

2019 年度 学位論文 (修士)

任意形状物体周りの流体解析における
有限体積的直接離散化手法の提案と検証

2020 年 1 月 24 日

首都大学東京大学院
システムデザイン研究科 システムデザイン専攻
航空宇宙システム工学域 博士前期課程

学修番号 18863624

氏名 櫻井 淳

指導教員 田川 俊夫 准教授

目次

第 1 章	緒言	6
1.1	研究背景	6
1.2	IB 法	6
1.3	本研究の目的	7
第 2 章	解析手法	8
2.1	計算格子	8
2.2	有次元支配方程式	9
2.3	無次元支配方程式	9
2.3.1	主流があるような系の解析	9
2.3.2	主流が存在しない閉空間における，熱対流解析	10
2.3.3	主流が存在しない閉空間における，共役熱伝達解析	10
2.4	離散化スキーム	11
2.5	Rhie-Chow 補間	11
2.6	距離関数	11
2.7	IB 法	12
2.7.1	多項式近似型 IB 法による壁面境界条件	13
2.7.2	本研究で提案する IB 法による速度に関する壁面境界条件	13
2.7.3	本研究で提案する IB 法による温度に関する壁面境界条件	15
2.7.4	本研究で提案する IB 法による共役熱伝達計算	16
2.8	圧力の境界条件	18
2.9	計算アルゴリズム	19
第 3 章	精度検証	20
3.1	球周りの流れ	20
3.1.1	計算モデル	20
3.1.2	計算結果	21
3.2	球殻熱対流（等温条件）	24
3.2.1	計算モデル	24
3.2.2	計算結果	26
3.3	同心円筒熱対流（共役熱伝達）	29
3.3.1	検証 A	30
3.3.2	検証 B	33
第 4 章	結言	35

Appendix A	支配方程式の無次元化	36
A.1	主流があるような系の解析	36
A.2	主流が存在しない閉空間における, 熱対流解析	37
A.3	主流が存在しない閉空間における, 共役熱伝達解析	38
Appendix B	界面速度の補間方法	39
Appendix C	物体にかかる流体力の計算	41
Appendix D	平均ヌセルト数の計算	43
	謝辞	45
	参考文献	46

記号表

Nomenclature

A	表面積	$[\text{m}^2]$
\bar{A}	無次元表面積	$[-]$
C, C_w, C_{IP1}, C_{IP2}	ラグランジュ補間の係数	$[-]$
C_p	定圧比熱	$[\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$
d_f	界面から流体セル中心までの無次元長さ	$[-]$
d_s	界面から物体セル中心までの無次元長さ	$[-]$
D	代表長さ	$[\text{m}]$
Err	相対誤差	$[-]$
$F_{i,IB}$	IB 法による無次元外力項	$[-]$
g	重力加速度	$[\text{m}/\text{s}^2]$
h	熱伝達率	$[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$
h_m	平均熱伝達率	$[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$
n	法線方向座標	$[\text{m}]$
N	無次元法線方向座標	$[-]$
n_i	単位法線方向ベクトル	$[-]$
Nu	ヌセルト数	$[-]$
Nu_{ave}	平均ヌセルト数	$[-]$
Pr	プラントル数	$[-]$
p	圧力	$[\text{Pa}]$
P	無次元圧力	$[-]$
q	熱流束	$[\text{W}/\text{m}^2]$
q_{int}	界面上の熱流束	$[\text{W}/\text{m}^2]$
q_w	壁面上の熱流束	$[\text{W}/\text{m}^2]$
\bar{q}	無次元熱流束	$[-]$
\bar{q}_{int}	界面上の無次元熱流束	$[-]$
\bar{q}_w	壁面上の無次元熱流束	$[-]$
Q	IB 法による無次元熱量	$[-]$
r	球半径	$[\text{m}]$
r_{in}	内球半径	$[\text{m}]$
r_{out}	外球半径	$[\text{m}]$
r_{sf}	熱伝導物体球半径	$[\text{m}]$
Ra	レイリー数	$[-]$
Re	レイノルズ数	$[-]$

S_i	格子の無次元面ベクトル	[-]
t	時間	[s]
u_0	主流の流速	[m/s]
u_i	流速ベクトル	[m/s]
U_i	無次元流速ベクトル	[-]
U_i^*	SMAC 法における無次元流速ベクトルの予測値	[-]
$U_{w,i}$	壁面における無次元流速ベクトル	[-]
$U_{T,i}$	壁面に対して、接線方向の無次元流速ベクトル	[-]
U_w	壁面における無次元流速	[-]
U_{IB}	IB 点における無次元流速	[-]
U_{IP}	IP 点における無次元流速	[-]
V_{cell}	注目格子の体積	[-]
x_i	計算領域内の位置ベクトル	[m]
X_i	計算領域内の無次元位置ベクトル	[-]
$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$	X, Y, Z 方向の格子幅	[-]

Greek letters

α	熱拡散率	[m ² /s]
β_0	基準温度の体積膨張率	[1/K]
γ_{ij}	無次元剪断応力	[-]
γ_w	無次元壁面剪断応力	[-]
δ_{ij}	クロネッカーのデルタ	[-]
δ_{IB}	IB 点までの距離	[-]
δ_{IP}	IP 点までの距離	[-]
κ	熱伝導率	[W/(m · K)]
κ_f	流体の熱伝導率	[W/(m · K)]
κ_s	固体の熱伝導率	[W/(m · K)]
κ_{int}	界面の熱伝導率	[W/(m · K)]
$\bar{\kappa}$	無次元熱伝導率	[-]
$\bar{\kappa}_f$	流体の無次元熱伝導率	[-]
$\bar{\kappa}_s$	物体の無次元熱伝導率	[-]
$\bar{\kappa}_r$	熱伝導率比	[-]
$\bar{\kappa}_{int}$	界面上の無次元熱伝導率	[-]
μ	粘性係数	[Pa · s]
ν	粘性係数	[m ² /s]
θ	温度	[K]
θ_0	基準温度	[K]

Θ	無次元温度	[-]
Θ_{hot}	無次元最大温度	[-]
Θ_{cold}	無次元最小温度	[-]
Θ_w	壁面における無次元温度	[-]
Θ_{int}	界面における無次元温度	[-]
Θ_f	流体の無次元温度	[-]
Θ_s	物体の無次元温度	[-]
ρ	密度	[kg/m ³]
σ	応力テンソル	[N/m ²]
τ	無次元時間	[-]
$\Delta\tau$	無次元時間刻み幅	[-]
ϕ	Level Set 関数	[m]

1.1 研究背景

計算機技術が発展し CFD は様々な工業分野へ活用されるようになった。現在の流体計算に用いられる格子は大きく分けて境界適合格子，非構造格子，デカルト直交格子の 3 種類に分類される。それぞれの特徴を Table1.1 に示す。CFD 汎用ソフトでは，任意形状の問題に対応するために，しばしば非構造格子が使用される。計算格子の品質が解析時間と精度に大きく依存するため，形状が複雑な物体になるほど格子生成は難しくなる。そのため，非構造格子の格子生成には，以下の 2 点が必要不可欠になってくる。

- 学術的な知識と経験則に基づく専門的な技術
- 格子の生成と計算を繰り返し，試行錯誤的に格子を決定するための時間

格子生成の短縮化・簡略化をすることができれば，CFD 計算に関わる全体経過時間を短縮できるだけでなく，技術的に CFD を使用していなかったエンジニア（例えば，設計初期段階におけるエンジニアまたはデザイナー）が CFD の活用しやすくなる。以上より，CFD の実用的な発展にとって，この格子生成の短縮化・簡略化は重要な課題である。

こうした背景を踏まえ，近年，デカルト直交格子を使用した流体計算が見直されつつある。デカルト直交格子は格子生成の容易さ，解適合格子が適用しやすい，計算時間・メモリ使用量が最小などの利点があり，流体計算におけるプリ処理の簡略化に大きく貢献できると考えている。

1.2 IB 法

デカルト直交格子では，物体の壁面が格子に沿っていない場合に，物体境界の精度が特別な扱いなしでは悪い。物体境界の再現精度を上げる手法として IB 法 (Immersed Boundary Method) ^{[2][3]} がある。IB 法の優位性として以下の 4 点が挙げられる。

- 格子生成にかかる手間が少ない
- 反復計算を必要としない
- 物体形状が複雑化しても計算時間，計算負荷の変化が小さい
- 移動物体境界問題への適応が比較的容易である
- 組み込みが容易である

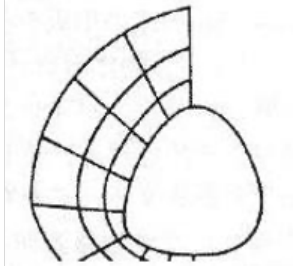
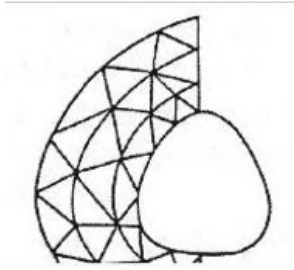
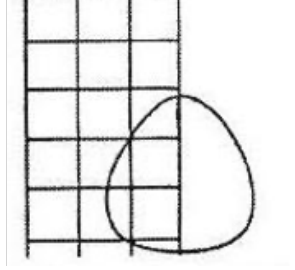
これらの利点から現在，盛んに研究・工学的応用が進められている。多くの IB 法による解法が提案されており，周囲の速度から補間して速度を与える手法 ^{[4][5][6][7][8]}，物体壁面付近で壁面の位置を考慮して離散する手法 ^{[9][10][11]} などがある。また，物体を考慮して圧力修正の反復を行うことで精度を向上させる手法も開発されている ^{[12][13]}。IB 法を用いたモデルとして乱流解析など多くのモデルが検証されているが熱伝達を含むモデルは少なく，定量的に評価する必要がある。移動物体まわりの

熱伝達を計算することができれば、自動車の塗装用乾燥炉の解析や食品加熱工程の解析といった加熱されながら物体が移動する生産ラインの最適化シミュレーションに応用することができ有益であるといえる。しかし、先行研究^{[5][6]}によれば、格子が流れに対して比較的沿っている条件でも、格子解像度が粗い場合に解の不安定性が報告されている。これは物体近傍の速度を Navier-Stokes 方程式から求めず、周囲の流体速度から補間をすることで求めるため、十分に格子解像度を用意できない条件では計算精度の大きな悪化が起因していると予想される。工業的に興味のある複雑な系での計算では、境界層内部に十分な格子解像度を用意できることは少ないと考えられるため、モデルの改良が必要だと考えられる。

1.3 本研究の目的

デカルト座標格子を用いて任意物体形状まわりの流れを精度良く計算するために、IB 法を応用し、物体壁面まで直接、有限体積法に従って離散化を行う手法の導入とその手法の妥当性の検証を本研究の目的とする。速度場の検証では、工学的にも想定される剥離やよどみ点を含むような流れで検証を行う。また、温度場は物体内部を等温とし、壁面で等温加熱条件を与えた計算と物体内部の熱伝導を考慮し、対流の影響によって壁面で熱流束が異なる計算を行った。

Table 1.1: Types of grid in computational fluid dynamics^[1]

格子の種類	境界適合格子	非構造型格子	デカルト座標格子
			
格子生成	<ul style="list-style-type: none"> • 簡単な形状は容易 • 3次元複雑形状には単一格子の形成が困難 	<ul style="list-style-type: none"> • 任意形状に対して自動形成可 • 計算負荷は、格子の質に強く依存 • 格子作成の計算量が大きい 	<ul style="list-style-type: none"> • 解適合格子が容易 • 特別な扱いなしには、任意形状の精度は悪い
計算精度及び計算時間	<ul style="list-style-type: none"> • 高効率、高精度な解法 • 物体表面近くの精度が必要な問題に適している 	<ul style="list-style-type: none"> • 計算時間は境界適合格子と遜色ないレベルに達した • メモリ要求が大きく、空間高次精度化も困難 	<ul style="list-style-type: none"> • 格子点当たりの計算時間およびメモリは最小 • 物体境界の精度が特別な扱いなしでは悪い

2.1 計算格子

本研究ではデカルト直交格子を用い、空間の離散化は Fig.2.1 に示すような等間隔のコロケート格子を用いた。圧力や温度などのスカラー量と、ベクトル量である速度をセルの中心 (i, j) に定義する。コロケート格子は、速度ベクトルと圧力の定義点と同じ位置にあるため、物理量の補間や離散化式などの記述が統一的にできるメリットがある。しかし、コロケート格子に一般的な圧力ベース解法 (MAC 系解法, Simple 系解法) を適用すると、特殊な圧力振動が発生し計算が破綻する恐れが報告されている。^[14] 本研究でも後述する特殊な処理を行なっている。

また、Fig.2.2 に本論文中での離散化式で使用するインデックスを示した。注目格子のインデックスを iC として、隣接する格子の相対的な位置関係を Fig.2.2 に従って表記する。

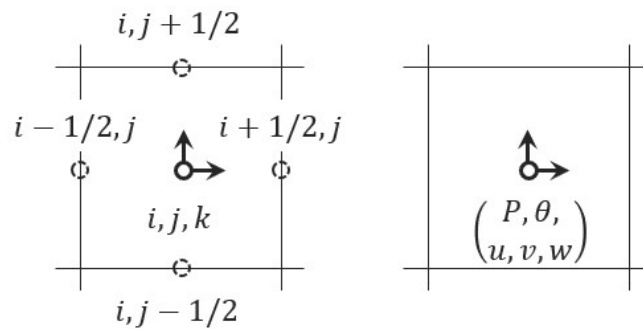


Fig. 2.1: collocation grid

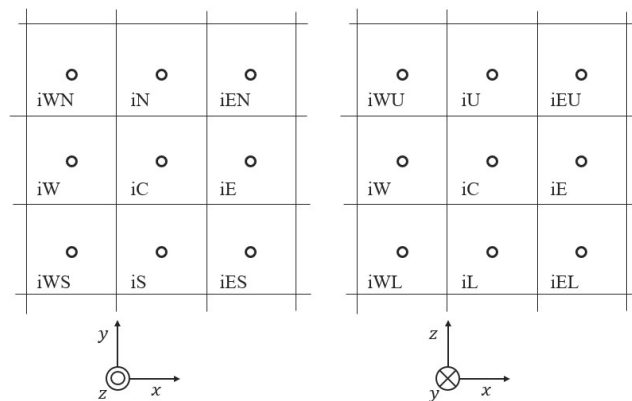


Fig. 2.2: Index for discretization

2.2 有次元支配方程式

支配方程式は以下に示す通りである.

- ・連続の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

- ・Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.2)$$

- ・エネルギー方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

式 (2.2) にブシネスク近似を適用した場合は以下の式を用いる.

- ・Navier-Stokes 方程式：ブシネスク近似適用

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g \beta_0 (\theta - \theta_{cold}) \delta_{i3} \quad (2.4)$$

2.3 無次元支配方程式

2.3.1 主流があるような系の解析

物性値を全て一定とし、無次元変数と無次元数を以下のように定義する.

- ・無次元変数

$$X_i = \frac{x_i}{D}, \quad U_i = \frac{u_i}{u_0}, \quad P = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad \tau = \frac{t}{D/u_0} \quad (2.5)$$

- ・無次元数

$$Re = \frac{u_0 D}{\nu} \quad (2.6)$$

無次元化した支配方程式は以下ようになる.

- ・連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (2.7)$$

- ・Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} \quad (2.8)$$

2.3.2 主流が存在しない閉空間における，熱対流解析

主流が存在しない閉空間における熱対流解析において，物性値を全て一定とした場合に，無次元変数と無次元数を以下のように定義する．

- ・無次元変数

$$X_i = \frac{x_i}{D}, \quad U_i = \frac{u_i}{v/D}, \quad P = \frac{p}{\rho(v/D)^2}, \quad \tau = \frac{t}{D^2/\nu}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_{hot} - \theta_{cold}} \quad (2.9)$$

- ・無次元数

$$Ra = \frac{g\beta_0(\theta_{hot} - \theta_{cold})D^3}{\alpha\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.10)$$

無次元化した支配方程式は以下ようになる．なお，Navier-Stokes 方程式にはブシネスク近似を使用している式 (2.4) を使用した．

- ・連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (2.11)$$

- ・Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{Ra}{Pr} \Theta \delta_{i3} \quad (2.12)$$

- ・エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Theta U_j}{\partial X_j} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X_j \partial X_j} \quad (2.13)$$

2.3.3 主流が存在しない閉空間における，共役熱伝達解析

主流が存在しない閉空間における共役熱伝達解析において，熱伝導率以外の物性値を全て一定とした場合に，無次元変数と無次元数を以下のように定義する．下付き添え字の f は流体の値を意味し， s は物体の値を意味する．

- ・無次元変数

$$X_i = \frac{x_i}{r_i}, \quad U_i = \frac{u_i}{\alpha/r_i}, \quad P = \frac{p}{\rho(\alpha/r_i)^2}, \quad \tau = \frac{t}{r_i^2/\alpha}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_{hot} - \theta_{cold}}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_f} \quad (2.14)$$

- ・無次元数

$$Ra = \frac{g\beta_0(\theta_{hot} - \theta_{cold})(2r_{in})^3}{\alpha\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \bar{\kappa}_r = \frac{\kappa_f}{\kappa_s} \quad (2.15)$$

無次元化した支配方程式は以下ようになる．なお，Navier-Stokes 方程式にはブシネスク近似を使用している式 (2.4) を使用した．

- ・連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (2.16)$$

・ Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + Pr \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{1}{8} Ra Pr \Theta \delta_{i3} \quad (2.17)$$

・ エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Theta U_j}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right) \quad (2.18)$$

2.4 離散化スキーム

本研究では時間項に式 (2.19) に示すようなオイラー陽解法を用いた。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)^n = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta \tau} \quad (2.19)$$

移流項には式 (2.20) に示すような 2 次精度の風上差分に相当する QUICK^[15] を用いた。QUICK は、界面上の界面速度の正負によって風上を決定し、風上側に 2 点 ($i-1$) と (i)、風下側に 1 点 ($i+1$) の計 3 点から界面上の物理量 g_{face} を式 (2.20) によって補間する。なお、計算領域の端と物体の近傍では 1 次風上差分法を用いた。

$$f_{face} = \frac{3}{8} f_{i+1} + \frac{6}{8} f_i - \frac{1}{8} f_{i-1} \quad (2.20)$$

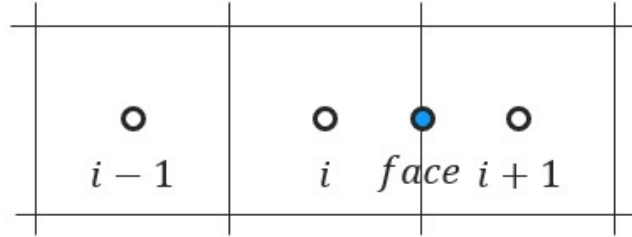


Fig. 2.3: QUICK scheme

2.5 Rhie-Chow 補間

コロケート格子系において、圧力ベース解法である MAC 系や Simple 系解法を用いて解析した際に、“チェッカーボード解”と呼ばれる圧力振動が発生することが報告されている。Rhie-Chow 補間^[14] はこうしたコロケート格子系で発生する圧力振動を防ぐために使用される手法の一つであり、本研究でも用いている。詳細は AppendixB に示す。

2.6 距離関数

距離関数とは壁面境界からの無次元符号付き距離であり、ここでは ϕ とおく。本研究では物体外部を正、物体内部を負とし、格子の中心で定義した。例として、座標を中心とする半径 0.5 の円柱を計算した。任意の点における距離関数 ϕ は式 (2.21) のように表すことができる。

$$\phi = \sqrt{(X-1)^2 + (Y-1)^2} - 0.5 \quad (2.21)$$

この円まわりの距離関数を可視化したものを Fig.2.4 に示す。図中の白線は $\phi = 0$ の等高線であり、円柱の壁面を示す。円柱の中心で最も値が小さく、計算領域の外側にいくに連れて値が大きくなっていくことがわかる。本研究では距離関数を IB 法の適用範囲の判定、IB 法の補間に用いる係数の計算、そして物体に向かう法線ベクトルの計算に使用する。距離関数 ϕ の X 方向微分と Y 方向微分をそれぞれ ϕ_X , ϕ_Y とすると壁面における無次元の単位法線方向ベクトル n_i は式 (2.22) のように表すことができる。

$$n_i = \left(\frac{\phi_X}{\sqrt{\phi_X^2 + \phi_Y^2}}, \frac{\phi_Y}{\sqrt{\phi_X^2 + \phi_Y^2}} \right) \quad (2.22)$$

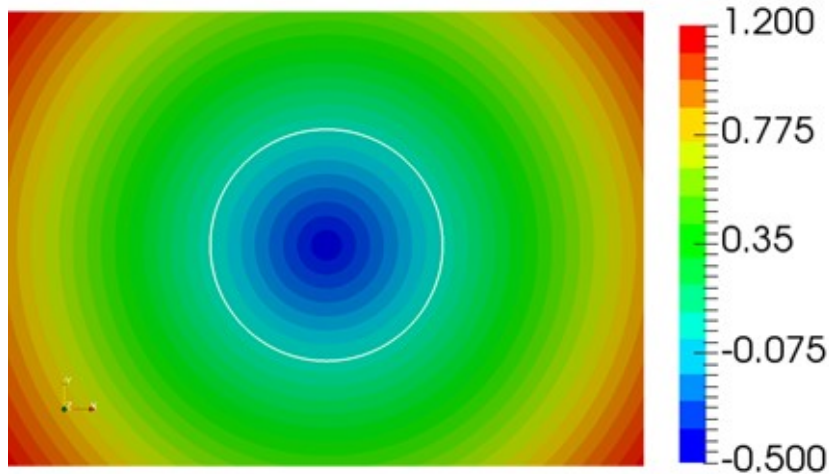


Fig. 2.4: Levelset function around the circle

2.7 IB 法

本研究では計算の安定性が良く、補間が簡略である Direct Forcing IB 法 (直接強制法) ^{[3][4][6]} によって速度と温度を埋め込む。Direct Forcing IB 法 (以下、IB 法) では式 (2.23) のように Navier-Stokes 方程式に外力項 $F_{i,IB}$ を、エネルギー方程式に熱量 $Q_{i,IB}$ を加える。 $F_{i,IB}$, $Q_{i,IB}$ は式 (2.24) と式 (2.25) のように流体領域、物体領域によって異なる式で表される。 $U_{i,B}$ は物体速度で、移動物体では物体の移動速度であり、 $\theta_{i,B}$ は物体壁面上の温度である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial \tau} &= -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + F_{i,IB} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= -\frac{\partial \theta U_j}{\partial X_j} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_j \partial X_j} + Q_{i,IB} \end{aligned} \quad (2.23)$$

・ 流体領域

$$\begin{aligned} F_{i,IB} &= 0 \\ Q_{i,IB} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

・物体領域

$$\begin{aligned}
 F_{i,IB} &= \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{U_{i,B}^{n+1} - U_i^n}{\Delta \tau} \\
 Q_{i,IB} &= \frac{\partial \theta U_j}{\partial X_j} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{\theta_{i,B}^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta \tau}
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

2.7.1 多項式近似型 IB 法による壁面境界条件

物体境界に隣接する格子の速度をどのように決定するかは様々な方法が考案されている。ここでは先行研究^{[5][6]}などで用いられている手法として、多点近似型の手法を挙げる。まず、この手法では計算領域を物体領域 ($\phi < 0$) と、流体領域 ($\phi > \delta_{IB}$)、物体近傍領域 ($0 < \phi < \delta_{IB}$) と設定しており、その速度を多項式近似で埋め込む。

・物体近傍： $0 < \phi < \delta_{IB}$

$$F_{i,IB} = \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{U_{i,IB}^{n+1} - U_i^n}{\Delta \tau}
 \tag{2.26}$$

本研究では $U_{i,IB}$ を以下のように与えた。

$$U_{i,IB} = \frac{(\delta_{IB} - \phi) U_{i,w} + \phi U_{i,IP}}{\delta_{IP}}
 \tag{2.27}$$

式 (2.27) は Fig.2.5 示すような IB 法によって速度を与えている。これは物体壁面上の速度と物体壁面から離れた IP1 点の速度から計 2 点の速度を用いた線形補間によって物体近傍の IB 点に速度を与えることを意味する。 $U_{i,IP}$ は IP1 点の近傍 4 点の速度を用いて線形補間し求める。この補間方法に関しては、中谷の手法^[6]を参考にした。本研究では、 $\delta_{IB} = 1.8\Delta X$, $\delta_{IP} = 3.6\Delta X$ と設定している。

温度 θ に関しても同様の手順によって等温条件を計算することができる。

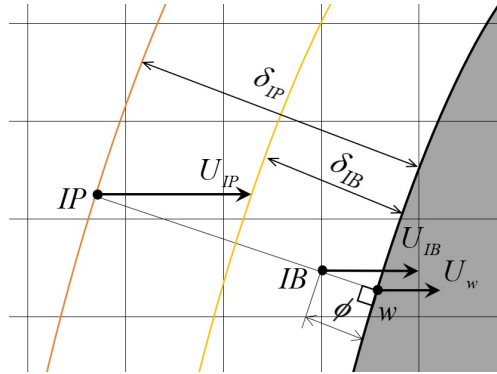


Fig. 2.5: Interpolation near the object for no slip condition

2.7.2 本研究で提案する IB 法による速度に関する壁面境界条件

前述の手法では物体の近傍領域の速度は Navier-Stokes 方程式を解かずに、補間によって計算される。境界層の内部に十分な格子を用意できない場合に計算が破綻する恐れがある。他の先行研究^{[16][6]}では、密度や熱伝導率などの物性値に遷移領域を設ける手法も提案されている。遷移領域は不

連続界面がなまされ計算が安定し、また、物体領域と流体領域を同時に計算できるメリットがある。一方で、格子が粗い場合は遷移領域が過大になり、本来の不連続面の効果と不整合になる可能性がある。

以上より、本研究では物体壁面に隣接した格子まで有限体積にしたがって離散化を行う手法を提案する。その時、計算領域は物体領域と流体領域のみで区別され、注目している格子の中心における ϕ の正負によって、格子の内部全体が物体領域か流体領域かを決定する。格子はすべて物体領域か流体領域のどちらかに属しており、両者が混在する物体近傍領域や、遷移領域を特別に設定しない。

物体格子と流体格子の界面における拡散項の離散化時に壁面境界条件の処理を行う。通常、式 (2.23) の Navier-Stokes 方程式を有限体積法に従って離散化すると式 (2.28) になる。 V_{cell} は注目している格子の体積、 S_j は格子から見て外向きを正の方向とした各界面の面積ベクトルをそれぞれ意味する。また、総和記号 \sum_{face} はガウスの発散定理によって現れる面積分の近似計算である。本研究ではデカルト直交格子を用いているため、二次元なら四面の和、三次元なら六面の和を示す。

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = \frac{1}{V_{cell}} \sum_{face} (S_j U_i U_j) + \frac{1}{V_{cell}} \sum_{face} (S_i P) + \frac{1}{V_{cell}} \sum_{face} (S_j \gamma_{ij}) + F_{i,IB} \quad (2.28)$$

以降では、簡単のため二次元の X 方向の Navier-Stokes 方程式における粘性項の離散化にのみ着目する。総和記号を書き下すと、式 (2.29) と計算できる。括弧の外側にある下付き添え字のアルファベットは、それぞれの界面が接している相手格子のインデックスを示しており、例えば、 $(S_j \gamma_{xj})_N$ は、iC セルと iW セルの界面における計算を意味している。

$$\sum_{face} (S_j \gamma_{xj}) = (S_j \gamma_{xj})_N + (S_j \gamma_{xj})_W + (S_j \gamma_{xj})_E + (S_j \gamma_{xj})_S \quad (2.29)$$

Fig.2.6 の様に iC セルで離散化を行った際に、iE セルと iS セルとの各界面が物体-流体界面の場合を想定する。この時、式 (2.29) を式 (2.30) の様に近似を行うことで、物体表面の摩擦力を近似する。

$$\begin{aligned} \sum_{face} (S_j \gamma_{xj}) &= (S_j \gamma_{xj})_N + (S_j \gamma_{xj})_W + (S_j \gamma_{xj})_E + (S_j \gamma_{xj})_S \\ &= (S_j \gamma_{xj})_N + (S_j \gamma_{xj})_W + (S_E^* \gamma_{w,x}) + (S_S^* \gamma_{w,x}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

ここで、 S^* 接触界面の近似面積、 γ_w は摩擦応力のうち接触界面に働く三成分であり、 $\gamma_{w,x}$ はそのうちの X 成分を示す。以下でその計算方法を示す。 S_E^* は界面 E における面積ベクトル S_i と、壁面上から格子中心に向かう単位法線ベクトル n_i の内積によって近似計算される。 S_S^* についても同様に計算を行う。

$$\begin{aligned} S_E^* &= (S_i)_E n_i \\ S_S^* &= (S_i)_S n_i \end{aligned} \quad (2.31)$$

γ_w は Fig.2.6b の図からも明快で、格子の中心に存在する壁面に対する接線方向の速度ベクトル $U_{T,i}$ 、壁面上の接線方向速度ベクトル $U_{w,i}$ 、壁面上から格子中心までの距離 ϕ を使って、式 (2.32) で計算する。

$$\gamma_{w,i} = \frac{U_{T,i} - U_{w,i}}{\phi} \quad (2.32)$$

$U_{T,i}$ は、格子中心の速度ベクトル U_i と、壁面上から格子中心に向かう単位法線ベクトル n_i から式 (2.33) で計算する。

$$U_{T,i} = U_i - (n_j U_j) n_i \quad (2.33)$$

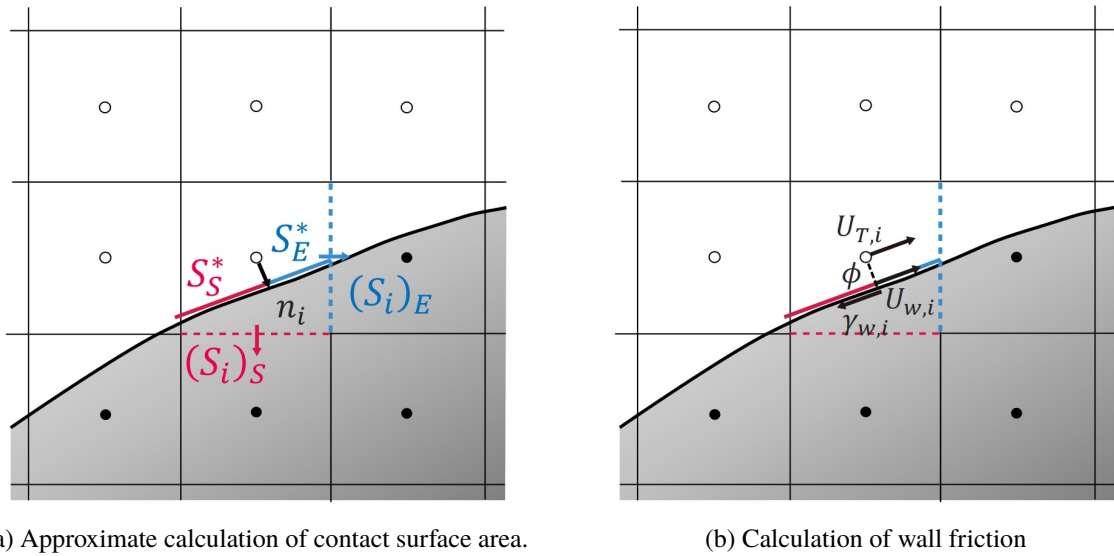


Fig. 2.6: Present IB Method

2.7.3 本研究で提案する IB 法による温度に関する壁面境界条件

等温条件に関しても、式 (2.28) ~ 式 (2.33) と同様の手順によって計算を行う。 (2.23) のエネルギー方程式を有限体積法に従って離散化すると式 (2.34) になる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{V_{cell}} \sum_{face} (S_j \theta U_j) + \frac{1}{V_{cell}} \sum_{face} \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right) + Q_{i,IB} \quad (2.34)$$

前節と同様に、二次元で離散化を進める。

$$\sum_{face} \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right) = \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_N + \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_W + \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_E + \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_S \quad (2.35)$$

Fig.2.6 の様に iC セルで離散化を行った際に、iE セルと iS セルとの各界面が物体-流体界面の場合を想定する。この時、式 (2.35) を式 (2.36) の様に近似を行うことで、物体表面を通過する熱流束を近似する。

$$\begin{aligned} \sum_{face} \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right) &= \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_N + \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_W + \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_E + \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_S \\ &= \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_N + \left(S_j \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right)_W + \left(S_E^* \frac{\partial \theta}{\partial N} \Big|_{wall} \right) + \left(S_S^* \frac{\partial \theta}{\partial N} \Big|_{wall} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$\frac{\partial \theta}{\partial N} \Big|_{wall}$ は、格子の中心に存在する温度 θ 、壁面上の温度 θ_w 、壁面上から格子中心までの距離 ϕ を使って、式 (2.37) で計算する。

$$\frac{\partial \theta}{\partial N} \Big|_{wall} = \frac{\theta - \theta_w}{\phi} \quad (2.37)$$

2.7.4 本研究で提案する IB 法による共役熱伝達計算

本項では、IB 法を用いた共役熱伝達の解析手法を提案する。本研究における共役熱伝達とは、流体領域と物体領域の熱連成を考慮した計算を意味する。まず、Fig.2.7 のように格子界面と物体壁面が完全に一致した、一次元の伝熱問題を考える。ここで、下付き添え字 int は、流体領域と物体領域の界面を表す。界面上の熱流束 \bar{q}_{int} は、二次精度の中心差分によって式 (2.38) で計算を行う。

$$\bar{q}_{int} = -\bar{\kappa}_{int} \frac{\Theta_s - \Theta_f}{d_s + d_f} \quad (2.38)$$

上式において、界面上の熱伝導率 κ_{int} を正しく補間することで、式 (2.38) より q_{int} を計算することができる。 κ_{int} の補間式は、以下の式 (2.39) ~ (2.42) によって導出される^[17]。

界面上の温度 Θ_{int} と、界面上の熱流束 q_{int} が連続であると仮定した場合、 q_{int} に関して式 (2.39) と、式 (2.40) を得る。

$$\bar{q}_{int} = -\bar{\kappa}_f \frac{\Theta_{int} - \Theta_f}{d_f} \quad \therefore \Theta_f - \Theta_{int} = \frac{d_f \bar{q}_{int}}{\bar{\kappa}_f} \quad (2.39)$$

$$\bar{q}_{int} = -\bar{\kappa}_s \frac{\Theta_s - \Theta_{int}}{d_s} \quad \therefore \Theta_{int} - \Theta_s = \frac{d_s \bar{q}_{int}}{\bar{\kappa}_s} \quad (2.40)$$

式 (2.39) と式 (2.40) を足し合わせることで、 q_{int} は式 (2.41) で記述される。

$$\bar{q}_{int} = -\frac{\Theta_s - \Theta_f}{\left(\frac{d_f}{\bar{\kappa}_f} + \frac{d_s}{\bar{\kappa}_s}\right)} \quad (2.41)$$

式 (2.41) と、式 (2.38) より $\bar{\kappa}_{int}$ は、調和平均である式 (2.42) で補間をすればよいことが導出される。

$$\bar{\kappa}_{int} = \frac{d_s + d_f}{\left(\frac{d_f}{\bar{\kappa}_f} + \frac{d_s}{\bar{\kappa}_s}\right)} \quad (2.42)$$

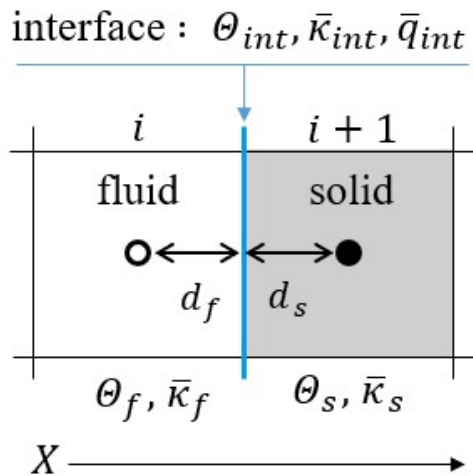


Fig. 2.7: Conjugate heat conduction problem when the object wall position is along the cell interface

次に本研究で提案する、IB法による共役熱伝達の計算方法について説明する。任意壁面の条件として、ここでは Fig.2.8 のような、iCセルとiEセルの間に、任意形状の物体壁面が存在する場合について説明する。iCセルでエネルギー方程式の拡散項を離散化する際に、物体セルとの接触界面Eでは以下のように近似を行う。

$$\begin{aligned} \sum_{face} \left(S_j \bar{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right) &= \left(S_j \bar{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right)_N + \left(S_j \bar{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right)_W + \left(S_j \bar{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right)_E + \left(S_j \bar{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right)_S \\ &= \dots + \dots + \left(S_{int}^* \bar{\kappa}_{int} \frac{\partial \Theta}{\partial N} \Big|_{int} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.7.3節と異なり物体内部でもエネルギー方程式を計算するため、流体側で算出した熱流束と物体側で算出した熱流束は一致しなければならないことに注意する。接触面積 S_{int}^* は、iCセルで計算された接触面積 $S_{C \rightarrow E}^*$ と、iEセルで計算された接触面積 $S_{E \rightarrow C}^*$ の距離補間より式(2.44)で計算される。 ϕ_{iC} が0なら $S_{C \rightarrow E}^*$ に、 ϕ_{iE} が0なら $S_{E \rightarrow C}^*$ になることがわかる。

$$S_{int}^* = \frac{(-\phi_{iE})}{\phi_{iC} + (-\phi_{iE})} S_{C \rightarrow E}^* + \left(1 - \frac{(-\phi_{iE})}{\phi_{iC} + (-\phi_{iE})} \right) S_{E \rightarrow C}^* \quad (2.44)$$

接触界面上の熱伝導率と温度勾配は、 S_{int}^* に直交するiCセルとiEセル線分の距離を、 $\phi_{iC} + (-\phi_{iE})$ で近似することで、計算する。 $\bar{\kappa}_{int}$ を式(2.45)で、接触界面上での温度勾配は式(2.46)でそれぞれ計算される。

$$\bar{\kappa}_{int} = \frac{\phi_{iC} + (-\phi_{iE})}{\left\{ \frac{\phi_{iC}}{\bar{\kappa}_f} + \frac{(-\phi_{iE})}{\bar{\kappa}_s} \right\}} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial N} \Big|_{int} = \frac{\Theta_f - \Theta_s}{\{\phi_{iC} + (-\phi_{iE})\}} \quad (2.46)$$

上記の計算手法は、流体側で算出した熱流束と物体側で算出した熱流束が一致し、かつ接触面積の近似を行いながら、直接離散化を行える手法であるが、以下の二点に注意しなければならない。

- 接触界面上で温度が一様を仮定している。
- 格子の大きさに対する物体の曲率がかなり大きい形状では、 $S_{C \rightarrow E}^*$ と $S_{E \rightarrow C}^*$ の間に大きな乖離が発生するため、式(2.45)と(2.46)の近似の精度の悪化により、計算精度が悪化する可能性がある。

前者は通常の有限体積法でも用いている仮定であるが、特に後者に関しては今後、モデルの改良の余地があるといえる。

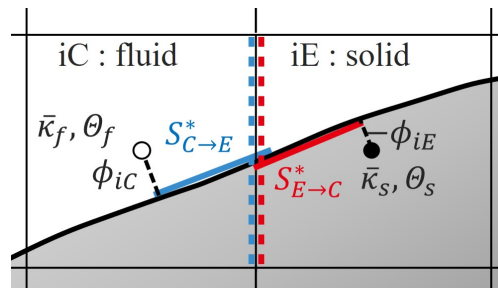


Fig. 2.8: Conjugate heat transfer problem with arbitrary shape of object wall

2.8 圧力の境界条件

本研究では，全ての離散式において，物体壁面上の圧力の境界条件として式 (2.47) を用いた．式中 $\partial/\partial N$ は壁面に対する法線方向微分を示す．

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial N} \right|_{wall} &= 0 \\ P_{iE} &= P_{iC} \end{aligned} \quad (2.47)$$

上式の境界条件を仮想格子法ではなく，離散化した方程式に直接反映させている．以下でその離散化を説明するために，Fig.2.9 のような X 方向に物体境界が存在する場合を例にとる． X 方向の Navier-Stokes 方程式中の圧力項は，式 (2.48) のように離散化する．ここで，式中 $conv$ は移流項， $diff$ は拡散項を示す．

$$\begin{aligned} \frac{U_{iC}^* - U_{iC}^n}{\Delta\tau} &= -conv - \frac{P_{iE} - P_{iW}}{\Delta X} + diff \\ &= -conv - \frac{P_{iC} - P_{iW}}{\Delta X} + diff \quad (\because P_{iE} = P_{iC}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

圧力修正量のポアソン方程式は式 (2.49) のように離散化される．ここで，式中 Div は速度の発散値を示す．

$$\begin{aligned} \Delta\tau \frac{P_{iE} - 2P_{iC} + P_{iW}}{(\Delta X)^2} + \Delta\tau \frac{P_{iN} - 2P_{iC} + P_{iS}}{(\Delta Y)^2} &= Div^* \\ \Delta\tau \frac{P_{iC} - 2P_{iC} + P_{iW}}{(\Delta X)^2} + \Delta\tau \frac{P_{iN} - 2P_{iC} + P_{iS}}{(\Delta Y)^2} &= Div^* \\ \therefore \Delta\tau \frac{-P_{iC} + P_{iW}}{(\Delta X)^2} + \Delta\tau \frac{P_{iN} - 2P_{iC} + P_{iS}}{(\Delta Y)^2} &= Div^* \end{aligned} \quad (2.49)$$

界面速度を求める Rhie-Chow 補間，圧力修正などの圧力勾配値が必要な計算では全て，式 (2.47) の条件を上記のように離散化後の式に直接反映させている．実際に計算した際の可視化結果は 3.1 節で，説明する．

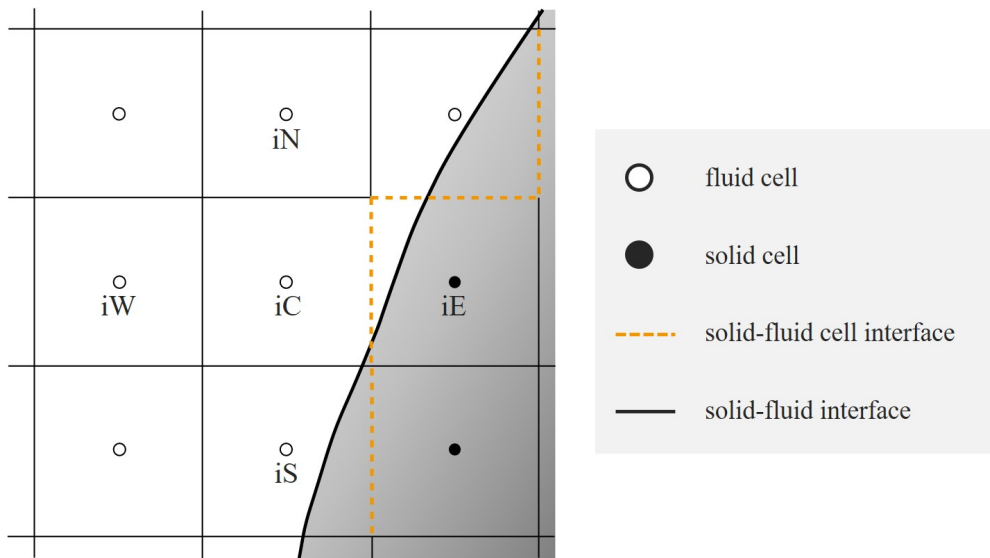


Fig. 2.9: Interface between fluid cell and solid cell

2.9 計算アルゴリズム

計算フローを Fig.2.10 に示す. 本研究では GPU による並列計算を行った. 速度場・圧力場の計算には SMAC 法を用いた. 圧力修正の反復法は並列計算を行う際に隣接点の値のステップが混同することを避けるために Red & Black SOR 法^[18]を用いた.

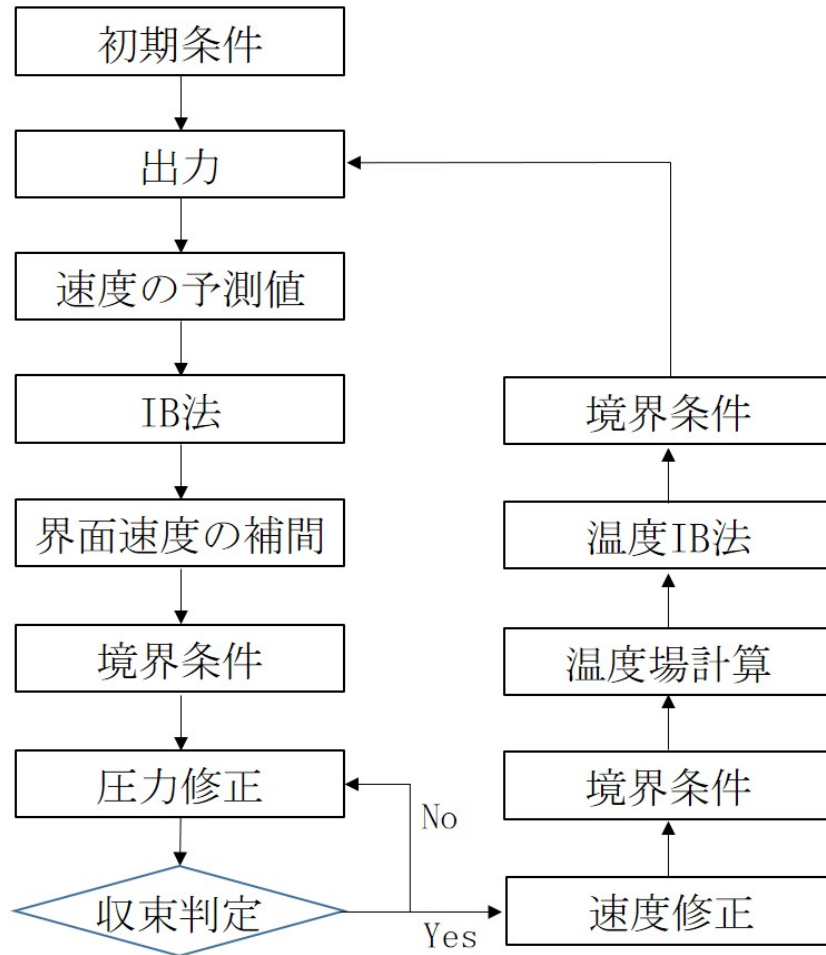


Fig. 2.10: Computational flow

3.1 球周りの流れ

3.1.1 計算モデル

本項では、2.7.2 節で述べた、速度場の壁面境界条件の妥当性検証として、一様流中に置かれた球周りの流れ解析を行い、妥当性の検証を行った。本項では抵抗係数と渦構造を先行研究と比較する。抵抗係数は野々村ら^[19]による流体力算出と式 (3.1) から求める。

$$C_D = \frac{2F_x}{\rho u_{in}^2 A} \quad (3.1)$$

また、渦の可視化として、速度勾配テンソルの第二不変量による可視化を行った。速度勾配テンソルの第二不変量は以下の式で与えられる。

$$Q_{value} = \frac{1}{2} (-S_{ij}S_{ij} + \Omega_{ij}\Omega_{ij}) \quad (3.2)$$

ここで、速度勾配テンソルの対称成分からなるひずみ速度テンソル S_{ij} 、と非対称成分からなる渦度テンソル Ω_{ij} はそれぞれ

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4)$$

である。計算モデルと計算条件をそれぞれ Fig.3.1, Table3.1 に示す。球を (3D,3D,4D) の位置に配置し、初期条件として流体領域全域に速度 $u_i = (u_{in}, 0, 0)$ を与えた。境界条件は $x = 0$ の面で $u_i = (u_{in}, 0, 0)$ の一様流入、 $x = 16D$ の位置では流出境界条件、他の面は滑り条件を用いて与えた。また、球面上の滑りなし条件には、2.7.1 節と 2.7.2 節で提案した各手法を用いた。境界層の内部には 2~3 格子程度であり、格子解像度は粗い条件だといえる。

Table 3.1: Calculation parameter

球体中心座標	(4D, 3D, 3D)
直径当たりの格子数	20
全体格子数	(360, 120, 120)
時間刻み	2.0×10^{-3}
Reynolds 数	300, 500, 750, 1000, 2000

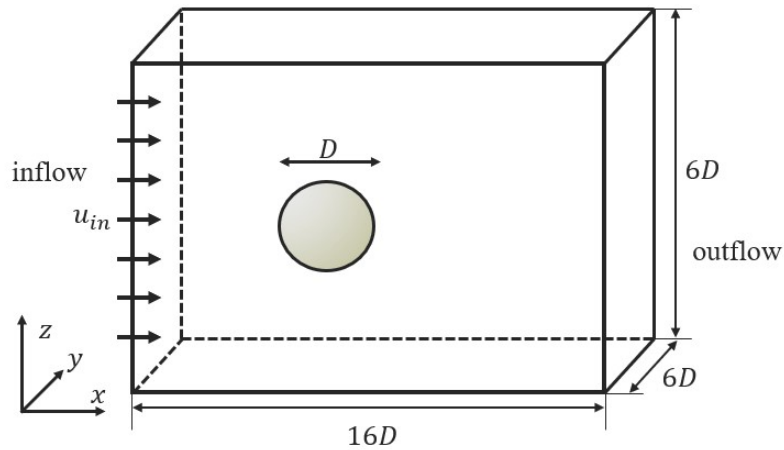


Fig. 3.1: Numerical domain and coordinate system

3.1.2 計算結果

Re 数は 270 以上では非定常な渦が発生することが知られており、 $300 < Re < 420$ では周期的渦を放出し、かつ $300 < Re < 800$ ではヘアピン上の渦構造が見られることが知られている。本研究では $Re = 300, 500, 750, 1000, 2000$ の計算を行った。まず、線形補間による IB 法では、全ての Re 数で非定常渦を確認できなかった。Fig.3.2 には、線形補間による IB 法を使用した際の計算結果の代表として $Re = 300$ における可視化結果を示す。次に、直接離散化手法を用いた際の計算結果について述べる。各 Re 数における C_D 値の時間変化を Sato^[7] と比較したグラフを Fig.3.3 に示す。先行研究と比較して、 C_D 値及び振動数は近い値を算出している。まず、渦構造の定性的な評価として Sakamoto らによる実験^[20] の画像、及びスケッチと比較を行う。Fig.3.4 は $Re = 300$ における計算であり、周期的かつ対称なヘアピン状の渦を計算できていることがわかる。Fig.3.5 の $Re = 750$ における計算では左右非対称な渦かつ、実験画像に近い渦を計算できているが、明確なヘアピン渦は確認されなかったが、これは先行研究^[7] でも同様の傾向が報告されている。最後に、Fig.3.5 の $Re = 750$ における計算では左右非対称な渦かつ、実験画像に近い渦を計算できている。スケッチのような明確な渦構造をとらえることはできないが、後流に行くに従い、渦が拡散していく様子などを確認できた。

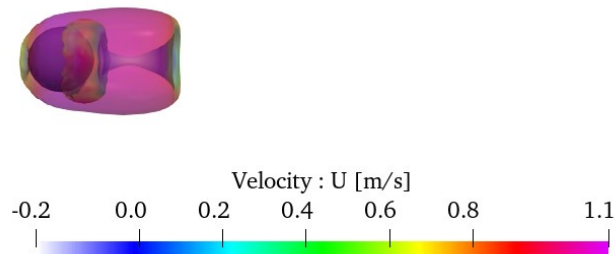


Fig. 3.2: Vortical structure at $Re = 300$ when a linear interpolated IB scheme was employed

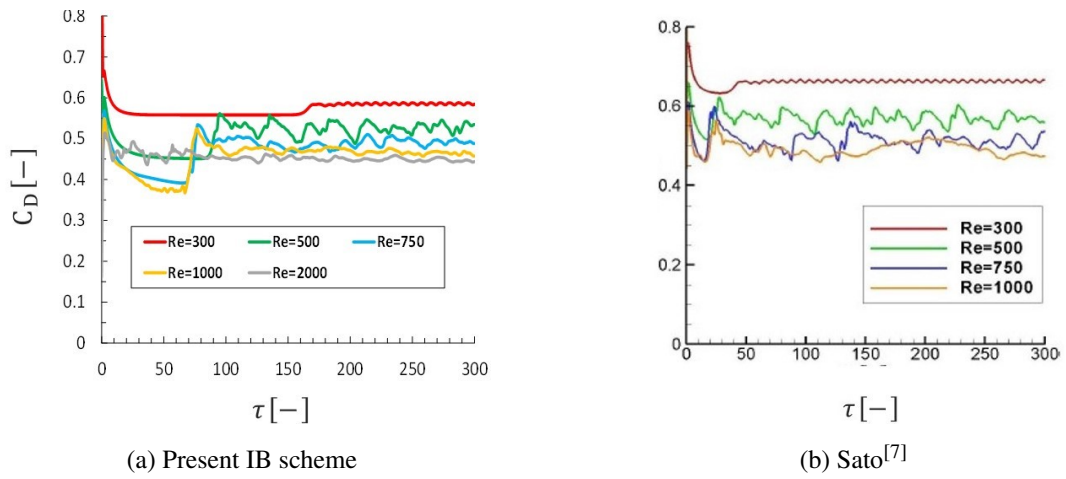
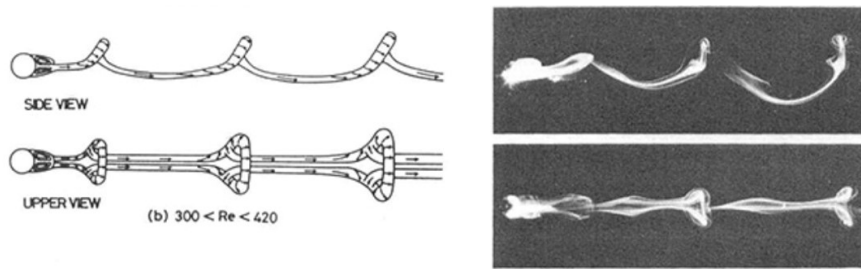
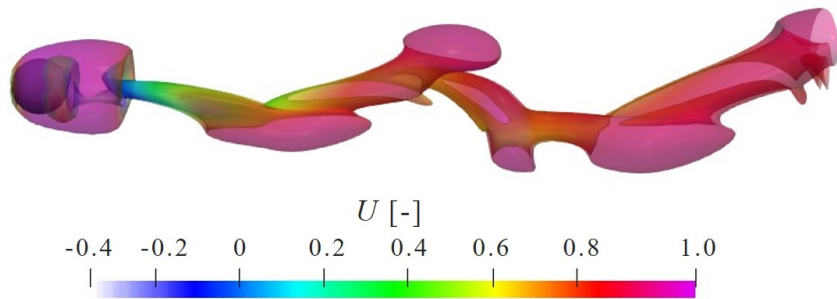


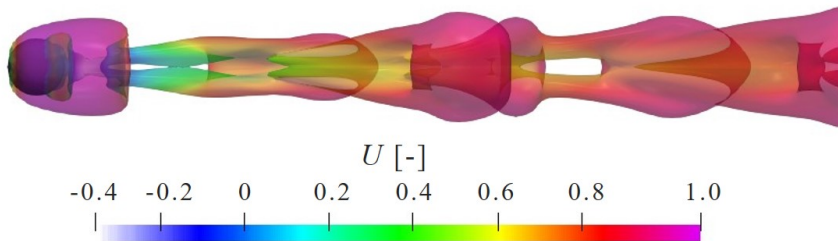
Fig. 3.3: Transient response of C_D



(a) Patterns of vortex shedding in wake by Sakamoto *et al*^[20].

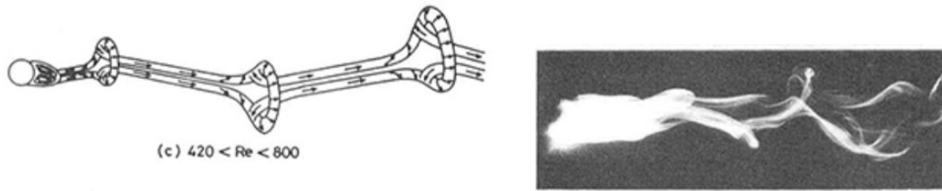


(b) Side view calculated with the present IB scheme colored by the velocity of X-direction

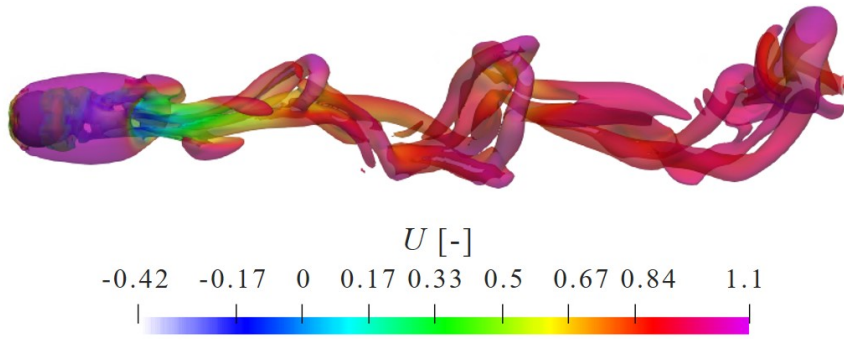


(c) Top view calculated with the present IB scheme colored by the velocity of X-direction

Fig. 3.4: Vortical structure at $Re = 300$

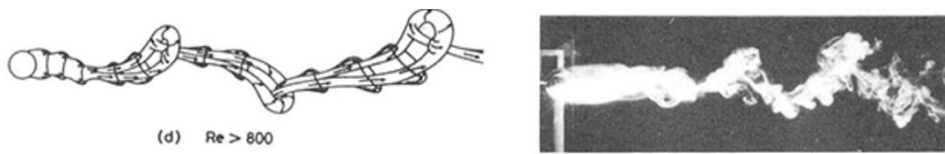


(a) Patterns of vortex shedding in wake by Sakamoto *et al*^[20].

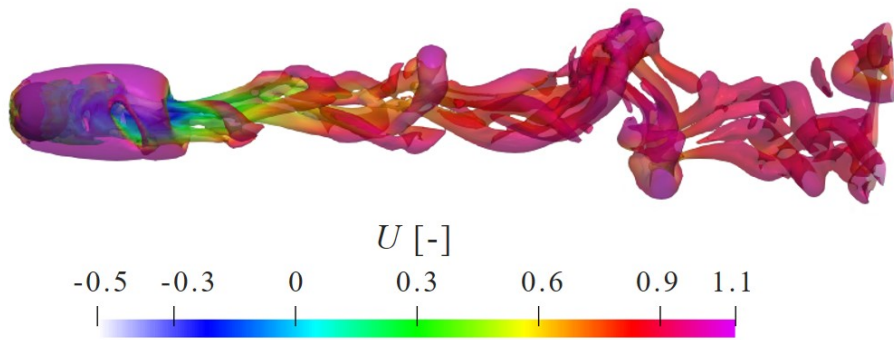


(b) Present IB scheme colored by the velocity of X-direction

Fig. 3.5: Vortical structure at $Re = 750$



(a) Patterns of vortex shedding in wake by Sakamoto *et al*^[20].



(b) Present IB scheme colored by the velocity of X-direction

Fig. 3.6: Vortical structure at $Re = 1000$

最後に、 $Re = 300$ の、 $X - Z$ 断面における球付近の圧力を Fig.(3.7) に示す。Fig.3.7a には、2.7.1 節で述べた線形補間による IB 法によって得られた圧力分布を、Fig.3.7b には、2.7.3 節で述べた直接離散化手法を用いた IB 法によって得られた圧力分布それぞれ示す。

線形補間による IB 法では物体内部も流体とみなして計算するため、物体内部の速度は 0 としているが、圧力は内部に浸透する。佐藤^[7]の論文では、物体内まで浸透する圧力場を「IB 法を用いるための、物理的な意味のないダミー計算結果」と述べている。Fig.3.7a の圧力分布は、Fig.3.7b の圧力の最大・最小値の値と合わせて可視化処理を行っている。そのため、線形補間による IB 法を用いた解析では、物体内部の圧力値は最大で 4.8、最小で -2.4 となり、直接離散化手法を用いた IB 法と比較して 10 倍ほどの値をもっている。線形補間による IB 法を用いた場合は、フラクショナルステップ法を用いることで、圧力場は物体内外で境界条件などを用いることなく、全計算領域で一様に計算している。移動物体問題の計算などを行う際は、物体の運動方程式中で周囲流体から受ける応力を計算するため、圧力場の正しい算出は必要であると考えられる。本検証では、Fig.3.7b で示す物体表面付近の圧力分布の正確性までは議論できていないため、今後検討する必要があると考える。

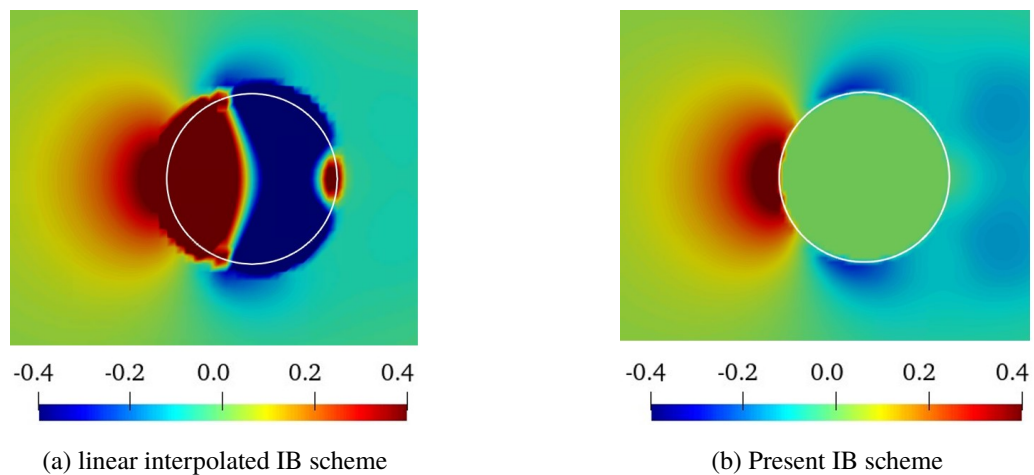


Fig. 3.7: Pressure distribution around the sphere at the section of the $Y = 1/2$ plane when $Re = 1.0 \times 10^3$

3.2 球殻熱対流（等温条件）

3.2.1 計算モデル

本項では、2.7.3 節で述べた温度場の壁面境界条件の妥当性検証として、同心球殻内における熱対流解析を行い、妥当性の検証を行った。本項では 2.7.1 節、2.7.3 節のそれぞれの手法で温度に関する壁面境界条件を組み込み、加熱壁面における平均ヌセルト数 Nu_{ave} を Ra 数を変更した計算と、格子数を変更した計算を行うことで、その精度を定量的に検証する。なお、 Nu_{ave} の計算手法は AppendixD に記載する。計算モデルを Fig.3.8 に示す。半径 r_{in} の球と、半径 r_{out} の球の間を粘性流体が流れる。代表長さは $2r_{in}$ と設定した。本研究ではデカルト直交格子を用いているため、計算領域は半径 r_{out} の球を覆う様に立方体で設定されており、それぞれの球は IB 法による壁面境界条件で表現される。半径 r_{in} の内球は一定温度 θ_{hot} で一様に加熱され、半径 r_{out} の外球の壁面は一定温度 θ_{cold} で一様に冷却される。内部の作動流体では加熱された流体が加熱面に沿って上昇し、冷却面を沿って下降する。本計算では非圧縮性流体を仮定しているため、温度変化による浮力効果にはブシネスク近似を用いた。計算条件は Table3.2 に示す。内球と外球の半径比は 2 で固定される。 Ra 数は

$1.0 \times 10^2 \sim 1.0 \times 10^6$ の範囲で 9 つの条件で計算を行い, Pr 数は空気を想定して 0.71 とした.

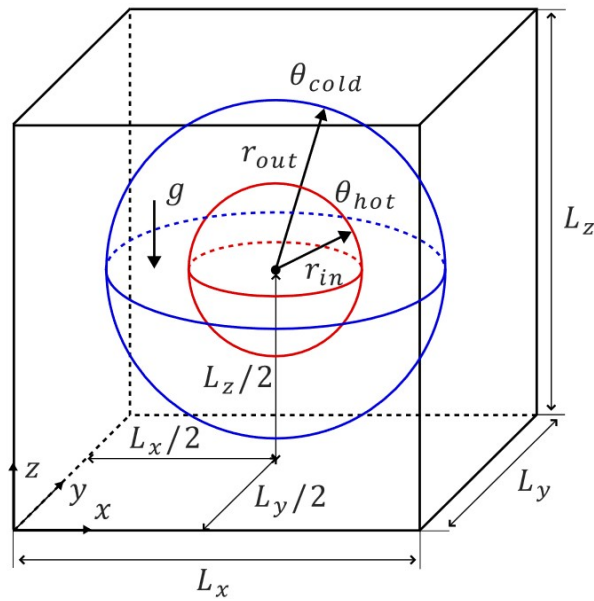


Fig. 3.8: Computational domain and its definition of coordinate system

Table 3.2: Calculation parameter

半径比 (r_{out}/r_{in})	2
Rayleigh数	$1.0 \times 10^2, 5.0 \times 10^2, 1.0 \times 10^3, 5.0 \times 10^3, 1.0 \times 10^4, 5.0 \times 10^4, 8.0 \times 10^4, 1.0 \times 10^5, 5.0 \times 10^5, 1.0 \times 10^6$
Prandtl数	0.71

格子数を変更した際のパラメーターを Table3.2 に示す. Case1 は加熱球直径に対して 20 格子, Case2 は 40 格子, Case3 は 60 格子設定されており, 最も格子数が細かい Case3 の計算結果が, 最も精度が高いことが期待される.

Table 3.3: Calculation case

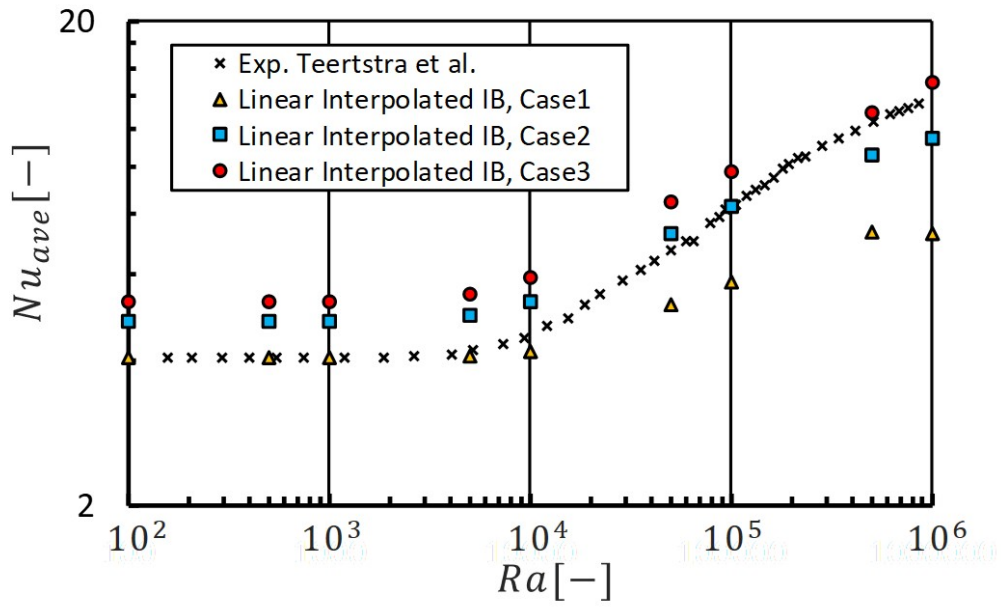
	Case1 ▲	Case2 ■	Case3 ●
時間刻み	1.0×10^{-5}	2.5×10^{-6}	1.0×10^{-6}
格子幅	5.0×10^{-2}	2.5×10^{-2}	1.67×10^{-2}

3.2.2 計算結果

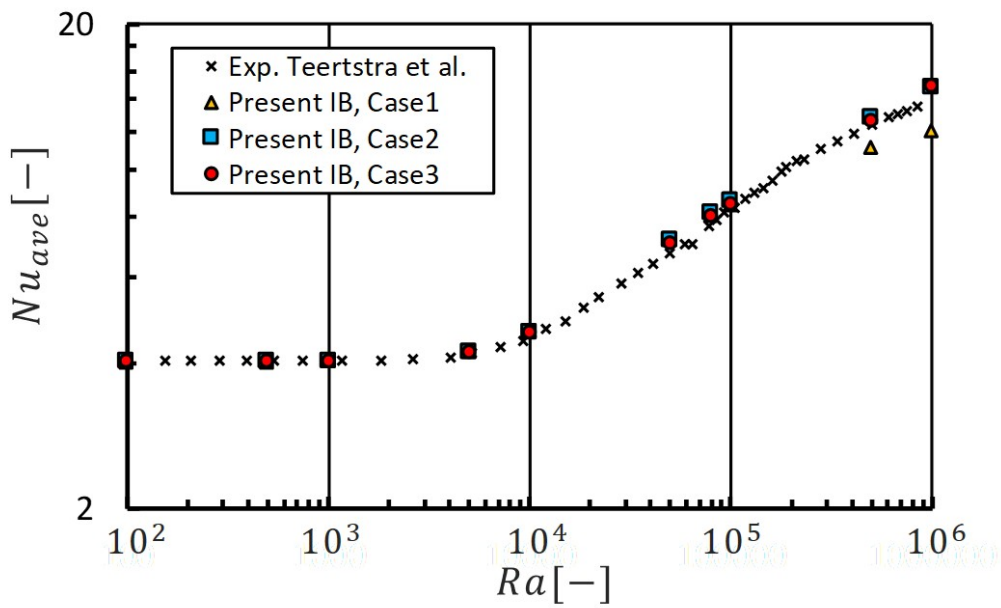
Fig.3.9 は横軸に Ra 数, 縦軸に加熱球周りの Nu_{ave} 数をプロットしたグラフになっている. 等温壁の条件について, 線形補間による IB 法を用いた解析結果を Fig.3.9a に, 直接離散化手法による IB 法を用いた解析結果を Fig.3.9b に, それぞれ示す. それぞれの条件は, Nu_{ave} 数が定常解になるまで計算を行ったが, 線形補間による IB 法を用いた際の $Ra = 1.0 \times 10^6$ の計算では, Case1 と Case2 の計算格子では振動解が得られたため, Nu_{ave} を時間平均した. この点に関しては後述する.

グラフ中の参考値として, Teertstra らによる実験値^[21]を用いた. Teertstra らは熱放射による抜熱と, 計測機器によって生じる熱損失を考慮して Nu_{ave} を計算しているため, 本項で計算される Nu_{ave} と比較を行うことができる. $Ra = 1.0 \times 10^2 \sim 5.0 \times 10^3$ の範囲では, 熱伝導の影響が支配的であるため Nu_{ave} は一定値を取り続け, Ra 数が 5.0×10^3 より大きい値では対流の影響により Nu_{ave} が上昇していく傾向が確認されている.

Fig.3.9a より, 線形補間による IB 法では, 全体的な傾向の一致を確認することができるが, 全ての Ra 数において不安定な計算結果になっている. 格子解像度を変えた Case 間で, 格子依存性を確認できず解析結果の精度は不安定だといえる. 次に, Fig.3.9b より, 直接離散化による IB 法では全体的な傾向の一致を確認することができた. いずれの Ra 数でも, Fig.3.9a の同条件よりも値の誤差は小さいことが確認できる. $Ra = 1.0 \times 10^2 \sim 1.0 \times 10^4$ の範囲では, 格子解像度によらず精度よく計算することができている. $Ra = 5.0 \times 10^4 \sim 1.0 \times 10^6$ の範囲では, 格子が粗い場合にわずかに Nu_{ave} を過大評価している. また, $Ra = 5.0 \times 10^5 \sim 1.0 \times 10^6$ の範囲では, 最も粗い条件で Nu_{ave} を過小評価している. case1 は格子解像度がかなり粗いため, $Ra = 5.0 \times 10^5 \sim 1.0 \times 10^6$ の範囲では速度境界層の内部に格子がかなり少ない計算になっている. そのため, 剪断力を過大評価してしまい, 加熱球周りの速度が低下し, Nu_{ave} を過小評価したと考えられる. 格子解像度が十分な $Ra = 5.0 \times 10^4 \sim 1.0 \times 10^6$ の範囲では, 面積の近似が熱流束の精度に作用し, 粗いほど伝熱量が上昇するため, Nu_{ave} を過大評価すると考えられる. 次に, $Ra = 8.0 \times 10^4$ における $Y = 1/2$ 上の温度分布を Fig.3.10 に示す. 比較として, Gulberg らによる数値計算結果^[2]を Fig.3.10a に載せる. Gulberg らは IB 法を用いて計算しており格子幅は Caes3 よりも倍以上細かい値になっている. Case1 の計算結果で非対称・振動して見えるのは可視化ソフトの都合上, 格子が粗いと発生してしまうものである. 全ての格子解像度で定性的に良好な結果を得ていることがわかる.



(a) Linear Interpolated IB scheme



(b) Present IB scheme

Fig. 3.9: Average Nusselt number on heated sphere surface

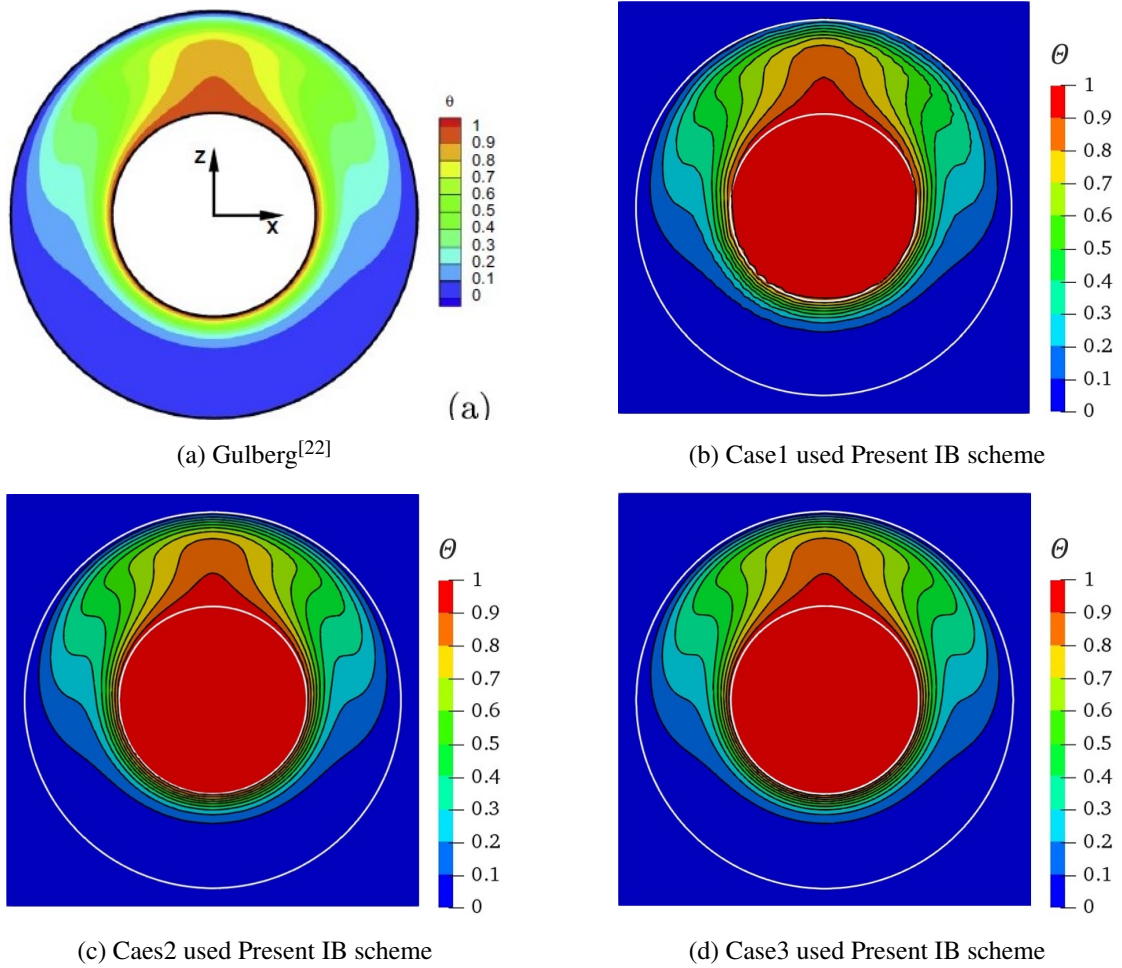


Fig. 3.10: Temperature distribution at the cross-section of $Y=1/2$ plane for $Ra = 8.0 \times 10^4$ and $Pr = 0.71$.

次に $Ra = 1.0 \times 10^6$, Case2 の条件下における計算結果に関して説明する。Fig.3.11 は、この条件における Nu_{ave} の時間履歴を示しており、線形補間による IB 法では振動解が得られていることがわかる。Case1 の計算格子でも、線形補間による IB 法でのみ同様の振動解を確認した。 $Y = 1/2$ の断面での温度分布を Fig.3.12 に、速度分布を Fig.3.13 に示す。図中の白線は距離関数の等値面であり、IB 法によって表現された物体壁面である。Fig.3.12 を見比べると、Fig.3.12a の温度境界層がわずかに厚いことがわかる。線形補間された IB 法は、この厚みに伴い浮力効果による上昇流も厚くなり、下降流との相互関係による剪断力が強く働くことで全体の流れが振動したと考えられる。

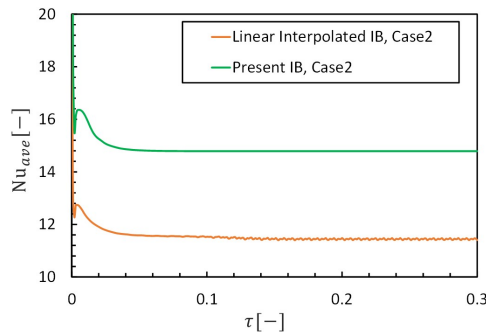


Fig. 3.11: Average Nusselt number as a function of dimensionless time at $Ra = 1.0 \times 10^6$ and $Pr = 0.71$

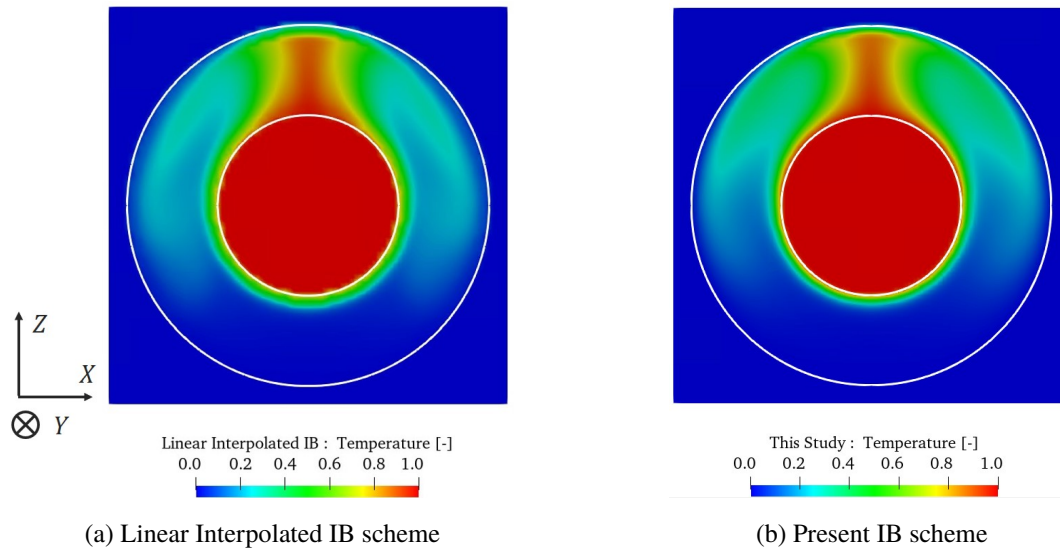


Fig. 3.12: Temperature distribution at the cross-section of $Y = 1/2$ plane for $Ra = 1.0 \times 10^6$ and $Pr = 0.71$, (Case2)

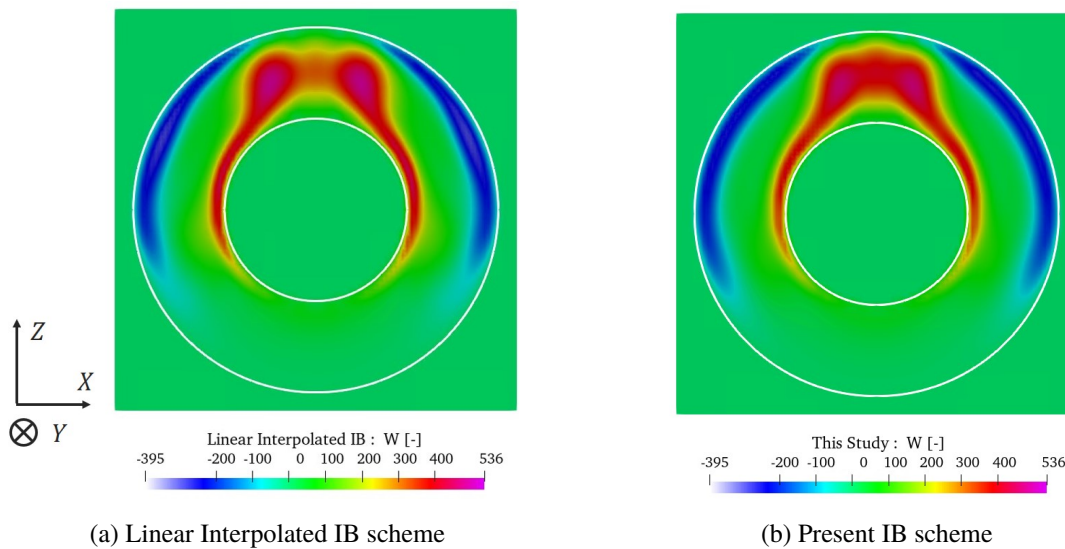


Fig. 3.13: Z-directional velocity W distribution at the cross-section of $Y = 1/2$ plane for $Ra = 1.0 \times 10^6$ and $Pr = 0.71$, (Case2)

3.3 同心円筒熱対流（共役熱伝達）

2.7.4 節で述べた IB 法による共役熱伝達の妥当性検証として、二次元の同心円筒内における熱対流解析を行い、妥当性の検証を行った。計算モデルを Fig.3.14 に示す。半径 r_{in} の円筒は一定温度 θ_{hot} で加熱され、半径 r_{out} の円筒面上は一定温度 θ_{cold} で冷却される。さらに、半径 r_{in} の円筒の周りには厚さ $r_{sf} - r_{in}$ で一様な固体が接しており、固体内部の熱伝導率 k_{solid} に従って加熱される。本計算では、節で示した無次元方程式を用いる際に、代表長さを $2r_{in}$ と設定した。本計算では非圧縮性を仮定しているため、温度変化による浮力効果にはブシネスク近似を用いた。固体壁面と外側円筒壁面の速度境界条件には 2.7.2 節で提案した直接離散化手法を、内側円筒壁面と外側円筒壁面の等温

壁面境界条件には 2.7.3 節で提案した直接離散化手法を用いる。また、2.7.4 節の手法を用いて物体一流体間の熱連成を考慮する。なお、 Nu_{ave} の計算手法は AppendixD に記載する。

3.3.1 節では格子数のみを変化させ、流れ関数と温度等値面の可視化結果を先行研究と定性的に比較し、3 種類の壁面における平均ヌセルト数 Nu_{ave} の時間変化を計測し先行研究と定量的な比較を行うことで、格子依存性や収束性に関する検証を行う。

3.3.2 節では半径比 r_{out}/r_{in} 、 Ra 数、熱伝導率比 $\bar{\kappa}_r$ を変化させ、加熱壁面における平均ヌセルト数 Nu_{ave} を、先行研究と定量的な比較を行うことで、精度の検証を行う。また、格子を粗くした計算を行うことで、格子依存性についても評価を行った。本項では、先行研究として Imtiaz ら^[23] による、円筒座標系で計算された結果を用いた。

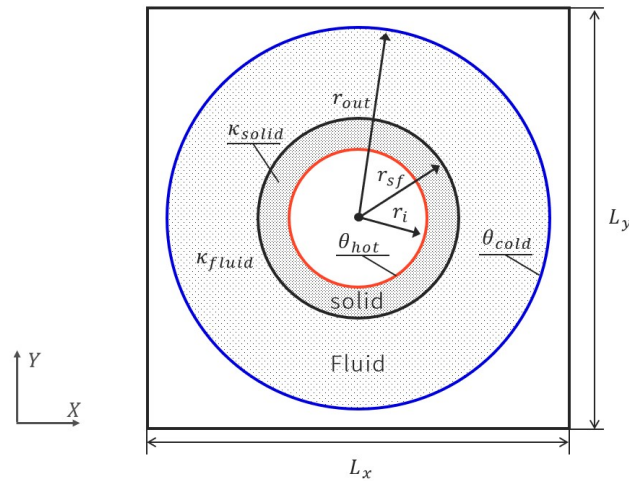


Fig. 3.14: Computational domain and coordinate system

3.3.1 検証 A

半径比及び無次元数を Table3.4 に示す。また、本項では Table3.5 に示す通りに、内球半径 r_{in} あたりの格子数を Grid A-1 では 10 格子、Grid A-2 では 20 格子、Grid A-3 では 40 格子として計算を行う。Grid A-1 は物体の熱伝導範囲内 $r_{sf} - r_{in}$ に 1-2 格子程度、Grid A-2 は 3-4 格子程度、Grid A-3 は 6-8 格子程度となる。

Table 3.4: Calculation parameter

半径比 (r_{out}/r_{in})	2.6
物体半径比 (r_{sf}/r_{in})	1.2
Rayleigh数	1.0×10^5
Prandtl数	0.7
熱伝導率比 $\bar{\kappa}_r$	1.5

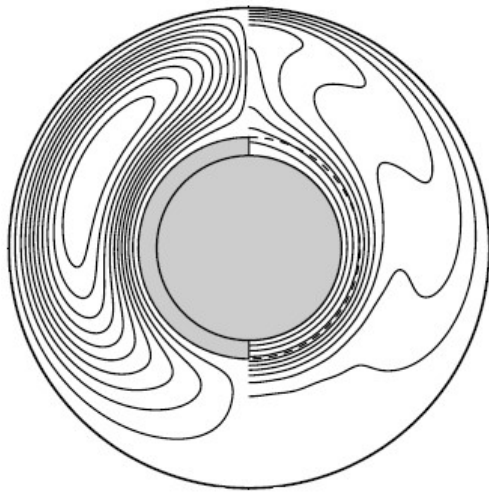
Table 3.5: Calculation case

	Grid A-1	Grid A-2	GridA-3
r_{in} あたりの格子数 n	10	20	40

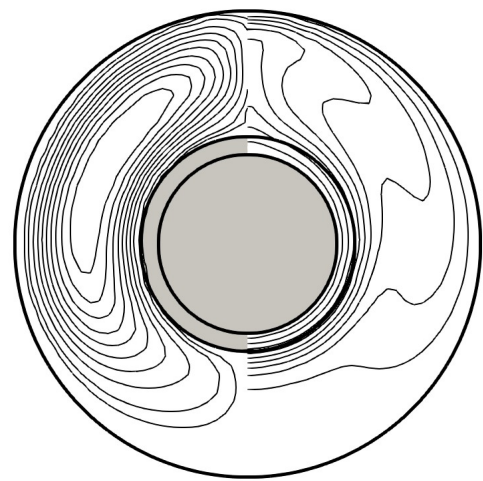
Fig.3.15 に可視化結果をまとめる．図中左側は流線，右側は温度 θ の等値面を示す．空間における分布の定性的な傾向は，全 Grid にて良好な一致を得ることができている．Grid A-1 は，よどみ点近傍における速度場と温度場の結果は先行研究とは一致していないまた，Grid A-2 と Grid A-3 を比較すると，壁近傍の速度分布の粗密が，Grid A-3 が先行研究とよく一致していることがわかる．温度場に関する計算は定性的な一致が見られるが，速度場に関して圧力勾配が大きくなるようなよどみ点近傍，また速度境界層内に関して定性的な格子の依存性を確認することができ，内側円筒半径当たり 40 格子配置した Grid A-3 が最も先行研究との定性的な値の位置を示した．

次に，Fig.3.15 に各壁面における Nu_{ave} の時間変化に関してグラフにまとめる．図中 Inner wall(fluid side) は $r = r_{sf}$ の壁面を示す．全格子条件において $\tau = 0.1$ で冷却面に流れが達し，外球の Nu_{ave} の値が上昇しており，非定常的な傾向は良好だといえる．先行研究^[23]によれば，定常状態ではすべての Nu_{ave} 数の値が一致することが報告されている．最も格子が粗い Grid A-1 では Nu_{ave} 数の収束値値がそれぞれの壁面で一致していない．本研究では Nu_{ave} 数の計算する際に壁上の一点と，領域内部の二点から，片側差分で計算を行っている．Grid A-1 は熱伝導範囲内 $r_{sf} - r_{in}$ に 1-2 格子しか存在していないために， Nu_{ave} 数の計算する際に，それぞれ異なる相まで参照点を伸ばさなければならぬため，算出精度が低下しているものと考えられる．格子が極端に粗い場合に関しては， Nu_{ave} 数の評価方法を検討する必要があるといえる．Grid A-2 はそれぞれの収束値はおおよそ近い値を示しており，特に最も格子が細かい Grid A-3 ではそれぞれの壁面における Nu_{ave} 数がほぼ同値である結果を得られた．

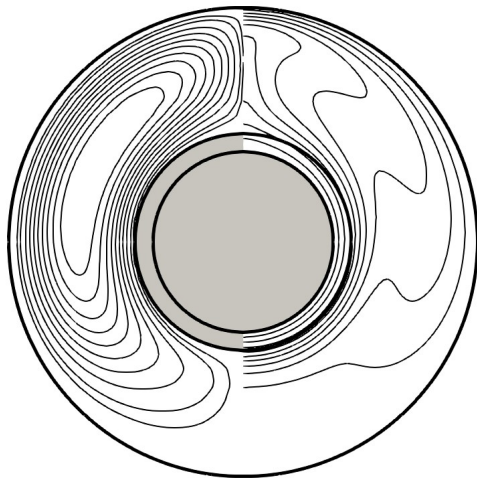
以上の総括を行う．本手法は定性的・定量的な評価により格子依存性を確認することができた．熱伝導範囲内 $r_{sf} - r_{in}$ に 1-2 格子しか存在しないような，特別粗い計算では Nu_{ave} 数の評価方法に関して検討する必要がある．特に，Grid A-3 では速度場に関しても十分に計算格子を配置できているため，良好な計算結果を得られた．



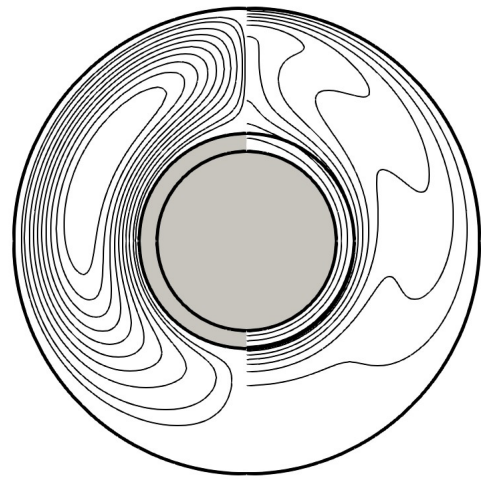
(a) Imtiaz^[23]



(b) Present IB scheme, Grid A-1

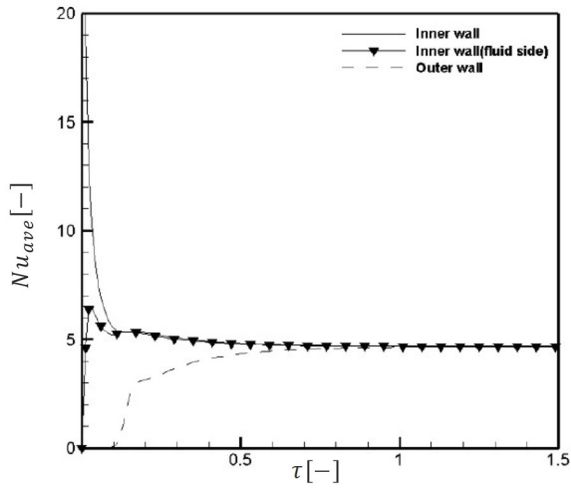


(c) Present IB scheme, Grid A-2

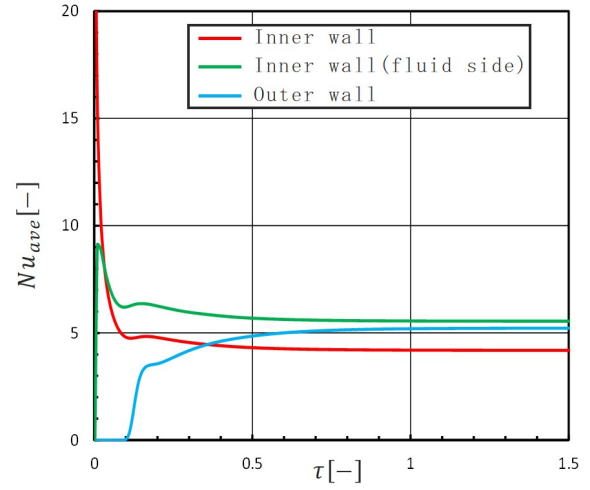


(d) Present IB scheme, Grid A-3

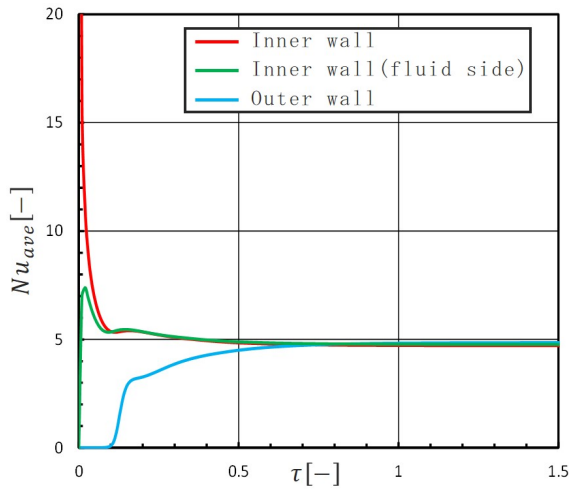
Fig. 3.15: Streamlines(left) and isotherms(right) in the three different cases of grid number at $Ra = 1 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, $r_{out}/r_{in} = 2.6$, $r_{sf}/r_{in} = 1.2$ and $\bar{\kappa}_r = 1.5$



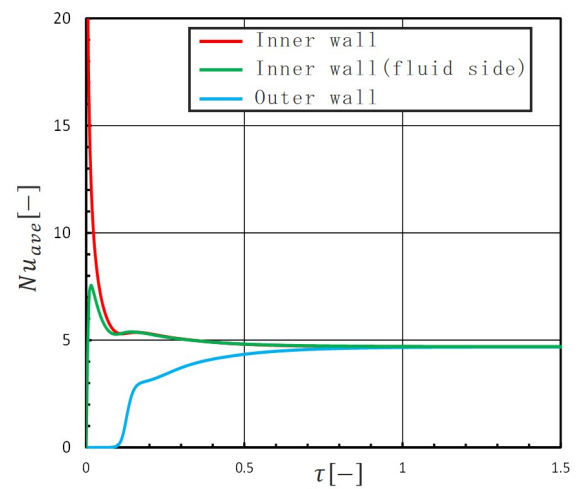
(a) Imtiaz^[23]



(b) Present IB scheme, Grid A-1



(c) Present IB scheme, Grid A-2



(d) Present IB scheme, Grid A-3

Fig. 3.16: Average Nusselt number variation with time along inner wall, inner wall (fluid side) and outer wall in the three different cases of grid number at $Ra = 1 \times 10^5$, $Pr = 0.7$, $r_{out}/r_{in} = 2.6$, $r_{sf}/r_{in} = 1.2$ and $\bar{\kappa}_r = 1.5$

3.3.2 検証 B

本項では、半径比 r_{out}/r_{in} 、 Ra 数、熱伝導率比 $\bar{\kappa}_r$ を変化させ、加熱壁面における平均ヌセルト数 Nu_{ave} を、先行研究と定量的な比較を行うことで、精度の検証を行う。半径比及び無次元数を Table 3.6 に示す。特に $Ra = 0$ の条件は対流が発生しない、熱伝導のみを計算する条件になっている。また、本項では Table 3.7 に示す通りに、内球半径 r_{in} あたりの格子数を Grid A-1 では 20 格子、Grid A-2 では 40 格子として計算を行う。半径比 r_{out}/r_{in} 、及び無次元数 Ra と、 $\bar{\kappa}$ の値は表に従って変更される。

Table 3.6: Calculation parameter

半径比 (r_{out}/r_{in})	2, 2.6
物体半径比 (r_{sf}/r_{in})	1.5
Rayleigh 数	0, 5.0×10^5
Prandtl 数	0.7
熱伝導率比 $\bar{\kappa}_r$	0.5, 2, 10

Table 3.7: Calculation case

	Grid B-1	Grid B-2
r_{in} あたりの格子数 n	20	40

計算結果を Table 3.8 に示す。表中三列目の値は、Imtiaz らの解析結果^[23]を示す。また、表中三列目、四列目はそれぞれの計算条件で式 (3.5) のように算出した相対誤差 Err を、パーセント表示したものになる。

$$Err = \frac{Nu_{ave}|_{PresentIB} - Nu_{ave}|_{Imtiaz}}{Nu_{ave}|_{Imtiaz}} \quad (3.5)$$

格子依存性を確認でき、特に格子が細かい Grid B-2 では計算誤差を 1% 以下に抑えることができた。また、 $\bar{\kappa}_r$ の値による計算精度の悪化は見られず、本手法は異なった熱伝導率の共役熱伝達計算に有効だと分かる。

Table 3.8: The average Nusselt number Nu_{ave} at $Pr = 0.7$ and $r_{sf}/r_{in} = 1.5$ (a) $r_{out}/r_{in} = 2.0$

Rayleigh数	$\bar{\kappa}_r$	Imtiaz et al.	Grid B-1 (coarse)	Grid B-2 (fine)
0	0.5	1.82025	+1.021 %	+0.475 %
	2	4.07767	+1.000 %	+0.471 %
	10	6.09265	+0.981 %	+0.465 %
5.0×10^5	0.5	1.82071	+1.022 %	+0.475 %
	2	4.08666	+1.005 %	+0.469 %
	10	6.12516	+0.992 %	+0.457 %

(b) $r_{out}/r_{in} = 2.6$

Rayleigh数	$\bar{\kappa}_r$	Imtiaz et al.	Grid B-1 (coarse)	Grid B-2 (fine)
0	0.5	1.46915	+1.033 %	+0.544 %
	2	2.65624	+0.999 %	+0.536 %
	10	3.38577	+0.987 %	+0.532 %
5.0×10^5	0.5	1.63376	+1.005 %	+0.545 %
	2	3.58872	+0.843 %	+0.408 %
	10	5.29923	+0.702 %	+0.254 %

デカルト座標格子上で IB 法を用いた任意物体形状まわりの流体解析において、工学的に想定されるような格子解像度が粗い条件でも、安定して精度良く計算するために、IB 法を応用して物体壁面まで直接、有限体積法に従って離散化を行う手法の導入と、妥当性の検証を行った。速度に関する壁面境界条件の検証問題として、一様流中に置かれた球周りの流れの数値計算を行った。次に、温度に関する壁面境界条件の検証問題として、同心円環内における熱対流の数値計算を行った。最後に、IB 法を用いた共役熱伝達計算の検証問題として、二次元の同心円環内における熱対流の数値計算を行った。この計算は、内壁の加熱球は、流体と異なる熱伝導率の物体で覆われており、物体と流体の熱連成問題である。これらの数値計算の結果として、本手法による熱流体解析について、以下の知見を得た。

- 滑りなし壁面と等温壁面を持った 3 次元の流体解析に関して、本研究で提案した直接離散化手法は、従来手法である線形補間による Direct Forcing IB 法と比較し、格子解像度が粗い条件でも安定して高精度で計算が行える。
- 熱伝導率が異なった、物体と流体の熱連成である共役熱伝達に関しても、定量的に評価を行い有効であることが確認できた。自動車の塗装用乾燥炉の解析では、ピラーの内部のような、円筒内部・孔部のような外部流が行き届かない複雑な形状に対する熱流体解析において有効である。

今後の課題として以下の点が挙げられる。

- 移動物体問題への適用
IB 法は移動物体への適用が非常に容易であるが、先行研究によれば物体界面近傍では圧力振動が発生することが報告されている。移動物体問題へ本手法を適用し、その妥当性の検証が必要である。
- 乱流モデルの適用
LES などの乱流モデルを適用することで、自動車の塗装用乾燥炉をはじめとするような中～高 Re 数の解析が可能になる。

支配方程式の無次元化

本研究における支配方程式は以下の3式である.

・連続の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.1})$$

・Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (\text{A.2})$$

・エネルギー方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.3})$$

以下で支配方程式の無次元化を示す.

A.1 主流があるような系の解析

物性値を全て一定とし, 以下のように無次元変数を定義する.

$$X_i = \frac{x_i}{x_0}, \quad U_i = \frac{u_i}{u_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \quad (\text{A.4})$$

式 (A.4) を式 (A.1), (A.2) に代入し整理すると次のようになる.

・連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (\text{A.5})$$

・Navier-Stokes 方程式

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{p_0}{\rho u_0^2} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\nu}{u_0 x_0} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} \quad (\text{A.6})$$

代表長さ D は計算モデルによって球の直径, 代表速度 u_0 は一様流の流入速度とする. その他の代表値は式 (A.7) のように定義した.

$$x_0 = D, \quad \frac{p_0}{\rho u_0^2} = 1, \quad \frac{x_0}{u_0 t_0} = 1 \quad (\text{A.7})$$

この時, 未定参照量は次のように決まる.

$$p_0 = \rho u_0^2, \quad t_0 = \frac{D}{u_0} \quad (\text{A.8})$$

無次元数 $Re = \frac{u_0 D}{\nu}$ を用いて無次元化した支配方程式は以下のようになる.

・連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (\text{A.9})$$

・Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} \quad (\text{A.10})$$

A.2 主流が存在しない閉空間における，熱対流解析

運動方程式には，式 (A.2) にブシネスク近似を適用した以下の式を用いる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g\beta_{cold} (\theta - \theta_{cold}) \delta_{i3} \quad (\text{A.11})$$

物性値を全て一定とし，以下のように無次元変数を定義する．

$$X_i = \frac{x_i}{x_0}, \quad U_i = \frac{u_i}{u_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_0} \quad (\text{A.12})$$

式 (A.12) を式 (A.1), (A.11), (A.3) に代入し整理すると次のようになる．

・連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (\text{A.13})$$

・Navier-Stokes 方程式

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{p_0}{\rho u_0^2} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\nu}{u_0 x_0} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{x_0}{u_0^2} g\beta_{cold} \theta_0 \Theta \delta_{i3} \quad (\text{A.14})$$

・エネルギー方程式

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Theta U_j}{\partial X_j} + \frac{\alpha}{u_0 x_0} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X_j \partial X_j} \quad (\text{A.15})$$

代表長さ D は計算モデルによって内球の直径とする．その他の代表値は式 (A.16) のように定義した．

$$x_0 = D, \quad \theta_0 = \theta_{hot} - \theta_{cold}, \quad \frac{p_0}{\rho u_0^2} = 1, \quad \frac{x_0}{u_0 t_0} = 1, \quad \frac{\nu}{u_0 x_0} = 1 \quad (\text{A.16})$$

この時，未定参照量は次のように決まる．

$$p_0 = \rho u_0^2, \quad t_0 = \frac{D}{u_0}, \quad u_0 = \frac{\nu}{D} \quad (\text{A.17})$$

無次元数 $Ra = g\beta_0 (\theta_{hot} - \theta_{cold}) D^3 / (\alpha\nu)$, $Pr = \nu/\alpha$ を用いて無次元化した支配方程式は以下のようになる．

・連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (\text{A.18})$$

・ Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{Ra}{Pr} \Theta \delta_{i3} \quad (\text{A.19})$$

・ エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Theta U_j}{\partial X_j} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X_j \partial X_j} \quad (\text{A.20})$$

A.3 主流が存在しない閉空間における，共役熱伝達解析

運動方程式には，式 (A.2) にブシネスク近似を適用した式 (A.11) 以下の式を用いる．物性値を全て一定とし，以下のように無次元変数を定義する．

$$X_i = \frac{x_i}{x_0}, \quad U_i = \frac{u_i}{u_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_0}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_0} \quad (\text{A.21})$$

式 (A.21) を式 (A.1), (A.11), (A.3) に代入し整理すると次のようになる．

・ 連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (\text{A.22})$$

・ Navier-Stokes 方程式

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{p_0}{\rho u_0^2} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\nu}{u_0 x_0} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{x_0}{u_0^2} g \beta_{cold} \theta_0 \Theta \delta_{i3} \quad (\text{A.23})$$

・ エネルギー方程式

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Theta U_j}{\partial X_j} + \frac{\alpha_f}{u_0 x_0} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\bar{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right) \quad (\text{A.24})$$

下付き添え字の f は流体の物性を意味し， s は物体の物性を意味する．また代表長さ r_{in} は計算モデルによって内側円筒の半径とする．その他の代表値は式 (A.25) のように定義した．

$$x_0 = r_{in}, \quad \theta_0 = \theta_{hot} - \theta_{cold}, \quad \frac{p_0}{\rho u_0^2} = 1, \quad \frac{x_0}{u_0 t_0} = 1, \quad \frac{\alpha_f}{u_0 x_0} = 1 \quad (\text{A.25})$$

この時，未定参照量は次のように決まる．

$$p_0 = \rho u_0^2, \quad t_0 = \frac{r_{in}}{u_0}, \quad u_0 = \frac{\alpha_f}{r_{in}} \quad (\text{A.26})$$

無次元数 $Ra = g \beta_0 (\theta_{hot} - \theta_{cold}) (2r_{in})^3 / (\alpha \nu)$ ， $Pr = \nu / \alpha_f$ を用いて無次元化した支配方程式は以下のようなになる．

・ 連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (\text{A.27})$$

・ Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + Pr \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{1}{8} Ra Pr \Theta \delta_{i3} \quad (\text{A.28})$$

・ エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Theta U_j}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\bar{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right) \quad (\text{A.29})$$

界面速度の補間方法

本研究で提案した壁面上の直接離散化手法は、格子中心に速度の全成分が必要になるため、コロケート格子を使用している。以下では、コロケート格子上で圧力ベース解法を用いる際に使用される、特殊な界面速度の補間方法について説明する。Fig.B.1 に示すような、 X 方向に一次元の、振動した圧力場を考える。

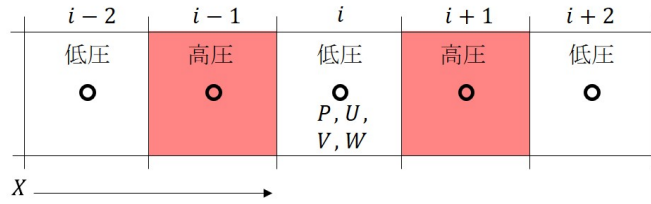


Fig. B.1: Pressure oscillation

Navier-Stokes 方程式は格子中心で計算されるため、 $(i-1)$, (i) , $(i+1)$ で離散化した式は以下のようになる。ここで、拡散項と移流項はまとめて CD_i と示す。

$$\frac{U_i^* - U_i^n}{\Delta X} = -\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2\Delta X} - CD_i \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{U_{i+1}^* - U_{i+1}^n}{\Delta X} = -\frac{P_{i+2} - P_i}{2\Delta X} - CD_{i+1} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{U_{i-1}^* - U_{i-1}^n}{\Delta X} = -\frac{P_i - P_{i-2}}{2\Delta X} - CD_{i-1} \quad (\text{B.3})$$

式 (B.1) (B.3) で計算された速度場は、左右のセルの圧力差しか参照しないため、Fig.B.1 の条件では圧力が駆動力にならない。また、ポアソン方程式の右辺に現れる速度の発散値も、式 (B.4) のように計算されるため、Fig.B.1 のような振動した圧力場が数値上では連続の式を満たしたように計算されてしまう。

$$\begin{aligned} Div_i^* &= \frac{U_{i+\frac{1}{2}}^* - U_{i-\frac{1}{2}}^*}{\Delta X} \\ &= \frac{1}{\Delta X} \left(\frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{2} - \frac{U_i^* - U_{i-1}^*}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

以上のように、コロケート格子上で圧力ベース解法を用いると、ある方向に対してチェックボードのように振動した圧力場が、離散化式上ではあたかも一様な圧力場であるようにふるまう。これは明らかに物理的ではない。Rhie-Chow 補間はこうした圧力振動を防ぐ手法の一つで、界面速度を補間す

る際に式 (B.5), (B.6) のように計算することで, 界面を挟む格子の圧力差を考慮する計算手法である^[14]. 式 (B.5), (B.6) では第 2 項で各格子で計算された圧力項を打ち消し, 第 3 項で界面における圧力勾配を両隣のセルから計算している. これにより, Fig.B.1 のような条件は連続の式を満足しないことが確認できる.

$$U_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{U_i^* + U_{i+1}^*}{2} + \Delta\tau \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2\Delta X} + \frac{P_{i+2} - P_i}{2\Delta X} \right) - \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta X} \right\} \quad (\text{B.5})$$

$$U_{i-\frac{1}{2}}^* = \frac{U_i^* + U_{i-1}^*}{2} + \Delta\tau \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2\Delta X} + \frac{P_i - P_{i-2}}{2\Delta X} \right) - \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta X} \right\} \quad (\text{B.6})$$

以上が界面速度の計算手法であり式 (B.5), (B.6) を Rhie-Chow 補間と呼ぶ. 本研究では Rhie-Chow 補間によって求められた界面速度は, 通常の格子中心速度と同様にメモリを確保しており, 毎ステップで圧力修正が施され, Navier-Stokes 方程式とエネルギー方程式中の移流項の計算に使用する.

物体にかかる流体力の計算

本研究では 3.1 節で抵抗係数の計算を行っている．一般に物体にかかる流体力の計算は以下のように行われる．^{[7][19]} ここで， σ_{ij} は応力テンソル， n_j は物体表面に垂直な単位ベクトルを示す．

$$F_j = \int_{\Gamma_S} \sigma_{ij} n_i dS \quad (\text{C.1})$$

応力テンソル σ_{ij} は以下のように定義される．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{C.2})$$

3.1 節では野々村らの手法^[19]を用いて流体力（抗力） F_j を算出しており，その方法について示す．式 (C.1) の面積分を各方向に分解し，それらに対応する格子面を用いて近似する． $face,x$ は格子の x 方向の面， $face,y$ は格子の y 方向の面， $face,z$ は格子の z 方向の面を示す．

$$\begin{aligned} F_x &= \int \sigma_{xx} n_x dS + \int \sigma_{yx} n_y dS + \int \sigma_{zx} n_z dS \\ &= \sum_{face,x} (\sigma_{xx} n_x dS)_{face,x} + \sum_{face,y} (\sigma_{yx} n_y dS)_{face,y} + \sum_{face,z} (\sigma_{zx} n_z dS)_{face,z} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

次に，圧力と応力の計算方法を示す．ここでは，簡易的に二次元の場合を説明する．また，以降は下付き添え字 (i,j) は Fig.C.1 に示すインデックスを表現する． σ_{xx} は式 (C.4) で，Fig.C.1 で中の $face,x$ 上で計算する．圧力は近傍の格子中心の圧力を用い，速度の微分は直接計算する．

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -p_{i,j} + 2\mu \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

この際，物体内部の速度 $u_{i-1,j}$ は式 (C.5) のような補間から計算をする．この手法はゴーストセル法などと同じ発想で，物体内部の格子を仮想格子として扱う手法である．物体表面上で滑りなし条件になるように，周囲流体と物体表面の速度から，物体内部の格子に 3 次精度補間を行う．参照点までの長さ δ_{IP} は格子が最低 1 つ入るように，二次元計算なら $\delta_{IP1} = 1.5\Delta x$ ， $\delta_{IP2} = 3.0\Delta x$ と設定する．また， ϕ は符号付の距離関数なので，物体内部なら負の値を取ることに注意する．

$$u_{i-1,j} = \frac{C_{IP1} u_{IP1} + C_{IP2} u_{IP2} + C_w u_w}{A} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} C_{IP1} &= \delta_{IP2} \phi(\delta_{IP2} - \phi), C_{IP2} = \delta_{IP1} \phi(\delta_{IP1} - \phi), C_w = (\phi - \delta_{IP1})(\delta_{IP2} - \delta_{IP2})(\delta_{IP2} - \phi) \\ C &= \delta_{IP1} \delta_{IP2} (\delta_{IP2} - \delta_{IP1}) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

σ_{yx} は式 (C.7) で，Fig.C.1 で中の $face,y$ 上で計算する．

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \mu \left\{ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

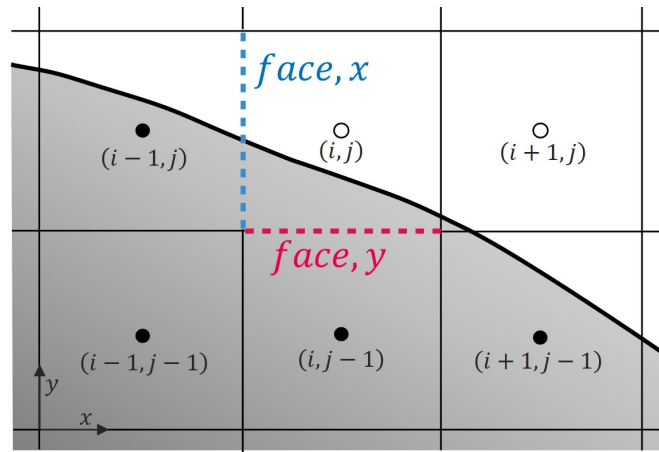


Fig. C.1: Reference point for discretization

平均ヌセルト数の計算

本研究における平均ヌセルト数の算出方法を記載する．面積 $A[\text{m}^2]$ の壁面を通る熱流束を $q_w[\text{W}/\text{m}^2]$ としたとき，平均ヌセルト数 Nu_{ave} を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} Nu_{ave} &= \frac{h_m D}{\kappa} \\ &= \frac{D}{\kappa} \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{q_w}{\Delta\theta} \right) dA \\ &= \frac{D}{\kappa} \frac{1}{A} \int_A \left\{ \frac{1}{\Delta\theta} \left(-\kappa \frac{\partial\theta}{\partial n_w} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

これらを，本論の式 (2.9) に従って無次元化を行うと，無次元変数による Nu_{ave} の計算式 (D.2) を得ることができる．

$$Nu_{ave} = \frac{1}{A} \int_{\bar{A}} \left. \frac{\partial\theta}{\partial N} \right|_w d\bar{A} \quad (\text{D.2})$$

壁面の法線方向勾配は，Fig.D.1 のように参照点を取り，式 (D.3) に示したように 2 次精度の前進差分法によって計算することができる．

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial N} \right|_w = \frac{3\theta_w - 4\theta_{IP1} + 3\theta_{IP2}}{2\Delta N} \quad (\text{D.3})$$

ΔN は，格子幅に ΔX 対して三次元計算で $1.75\Delta X$ ，二次元計算で $1.5\Delta X$ と設定した．なお，各 IP 点の補間方法は中谷の手法^[6]を参考にした．

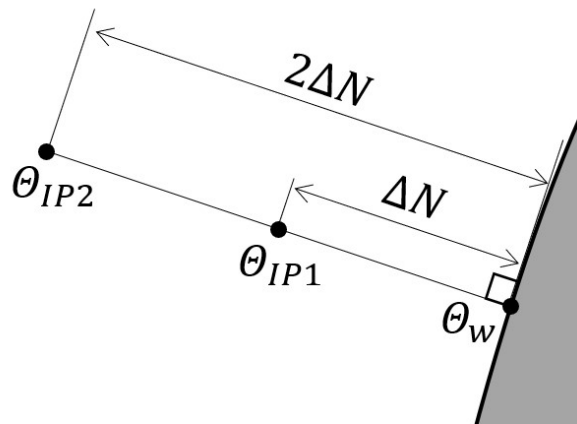


Fig. D.1: Reference point for discretization

壁面上の温度 θ_w は，3.2 節では等温壁面の温度を代入する．3.3 節のような共役熱伝達の問題における，物体と流体の接触壁面では θ_w を以下のように導出を行う．接触界面で温度，温度の一階微

分が連続と仮定すると、以下の式 (D.4) が成り立つ。

$$\bar{\kappa}_s \frac{\partial \theta_s}{\partial N} \Big|_w = \bar{\kappa}_f \frac{\partial \theta_f}{\partial N} \Big|_w \quad (\text{D.4})$$

Fig.D.2 のように参照点を取り、式 (D.5) を 2 次精度の片側差分によって計算すると、

$$\bar{\kappa}_s \frac{3\theta_w - 4\theta_{IP3} + \theta_{IP4}}{2\Delta N} = -\bar{\kappa}_f \frac{3\theta_w - 4\theta_{IP1} + \theta_{IP2}}{2\Delta N} \quad (\text{D.5})$$

定式を整理することで最終的な補間式 (D.6) を得る。

$$\theta_w = \frac{\bar{\kappa}_s (4\theta_{IP3} - \theta_{IP4}) + \bar{\kappa}_f (4\theta_{IP1} - \theta_{IP2})}{3(\bar{\kappa}_s + \bar{\kappa}_f)} \quad (\text{D.6})$$

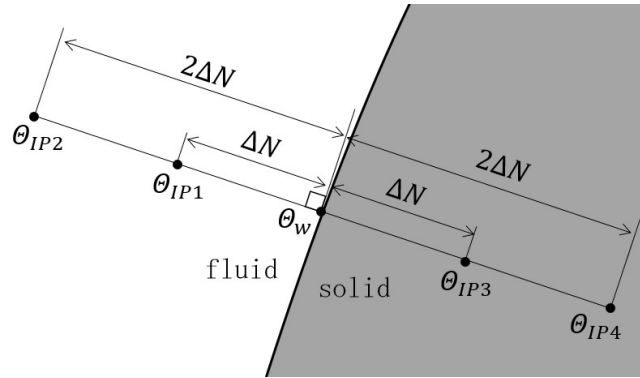


Fig. D.2: Reference points for interpolation

謝辞

本研究に際しまして、田川俊夫准教授には、数値流体に関する知識や研究の方向性をはじめとする多大なるご指導、ご助言を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

また、長期のインターンでお世話になっている株式会社ディライト 毛利昌康氏、高谷浩二氏、棚橋隆彦氏にも研究を行うにあたって多くご指導をいただきました。この場を借りて感謝を述べさせていただきます。

同期の古市侑太郎氏、望月芳尚氏には、研究を進めていくにあたって互いに学び合い、教え合うことでより充実した研究生活・私生活を送ることができました。また、益田卓哉氏、秋山和摩氏、椿本晃平氏、源川真之輔氏、小島岬氏、山内光一氏、牧晴也氏、坂田歩美氏にも多くのことを学ばせていただきました。研究室の皆さまの助力により、研究に限らずこの1年をとても有意義に過ごせたことに改めて感謝を述べさせていただきます。

最後に、6年間の大学・大学院での学生生活を支えてくれた両親および兄弟に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 小林敏雄, 他, 数値流体力学ハンドブック, 丸善株式会社, (2003), pp.512-516.
- [2] C.S. Peskin, Flow patterns around heart valves: A numerical method, *J. Comp. Phys.* vol.10, pp.252-271, (1972).
- [3] C.S. Peskin, Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart, *J. Comp. Phys.* vol.25, pp.220- 252, (1977).
- [4] J. Mohd-Yusof, Combined immersed-boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries, CTR Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ, pp. 317-327, (1997).
- [5] 原田基至, 玉木義治, 高橋悠一, 今村太郎, 直交格子法における埋め込み境界法と Cut-Cell 法の比較-壁関数を用いた乱流解析-, 第 29 回数値流体力学シンポジウム, B07-1, (2015).
- [6] 中谷優浩, 距離関数を用いた任意形状周りの対流熱伝達計算, 首都大学東京大学院 修士論文 (2019).
- [7] 佐藤智光, Level Set 法を用いた IB 法による非圧縮性流れの数値解析, 首都大学東京大学院 修士論文 (2011).
- [8] J. Yang, F. Stern, A non-interactive direct forcing immersed boundary method for strongly-coupled fluid-solid interactions, *J. Comput. Phys.* vol.295, pp.779-804, (2015).
- [9] N. Sato, S. Takeuchi, T. Kajishima, M. Inagaki, N. Horinouchi, A consistent direct discretization scheme on Cartesian grids for convective and conjugate heat transfer, *J. Comp. Phys.* vol.321, pp.76-104, (2016).
- [10] J. C. Song, J. Ahn, J. S. Lee, An immersed-boundary method for conjugate heat transfer analysis, *J. Mech. Sci. and Technol.* vol.31, issue 5, pp.2287-2294, (2017).
- [11] T. L. Hong, P. W. Hsieh, S. Y. Yang, C. S. You, A simple direct-forcing immersed boundary projection method with prediction-correction for fluid-solid interaction problem, *Computers & Fluids* vol.176, pp.135-152, (2018).
- [12] T. Kajishima, S. Takiguti, H. Hamasaki, Y. Miyake, Turbulence Structure of Particle-Laden Flow in a Vertical Plane Channel Due to Vortex Shedding, *JSME Int. J. Ser. B* vol.44, Issue 4, pp.526-535, (2001).
- [13] D. Z. Noor, M. J. Chern, T. L. Horng, An immersed boundary method to solve fluid-solid interaction problem, *Comp. Mech.* vol. 44, pp.447-453, (2009).
- [14] H. K. Versteeg (著), W. Malalasekera (著), 松下洋介 (訳), 齋藤泰洋 (訳), 青木秀之 (訳), 三浦隆利 (訳), 数値流体力学 第 2 版, 森北出版, pp.364-369, (2011) .
- [15] H. K. Versteeg (著), W. Malalasekera (著), 松下洋介 (訳), 齋藤泰洋 (訳), 青木秀之 (訳), 三浦隆利 (訳), 数値流体力学 第 2 版, 森北出版, pp.167-176, (2011) .

- [16] 伊藤和憲, 密度埋め込み型 IB 法を用いた流体・物体連星問題の解析手法の開発, 首都大学東京卒業論文 (2016)
- [17] S. Patankar (著), 水谷幸夫 (訳), 香月正司 (訳), コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版 (1985).
- [18] 關輝彦, A- ϕ 法による電磁浮遊技術を利用した表面張力測定法の数値解析, 首都大学東京大学院修士論文 (2017).
- [19] 野々村拓, 大西順也, 藤井孝藏, Immersed boundary 法における簡便な流体力算出方法について, 第 27 回数値流体力学シンポジウム, C02-3, (2013).
- [20] H. Sakamoto, H. Haniu, M. M. Yovanovich., J. R. Culham, A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow, *Trans. ASME: J. Fluid Engng.* vol. 112, pp. 386-392, (1990).
- [21] P. M. Teertstra, M. M. Yovanovich, J. R. Culham, Natural Convection Measurements for a Concentric Spherical Enclosure, *Trans. ASME, J. Heat Transfer.* vol.128, Issue 6, pp.580-587, (2006).
- [22] Y. Gulberg, Y. Feldman, On laminar natural convection inside multi-layered spherical shells, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 91 (2015), pp. 908-921
- [23] H. Imtiaz, F. M. Mahfouz, Conjugate conduction-free convection heat transfer between two concentric cylinders, Proceedings of 2014 11th International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology (IBCAST) Islamabad, (2014).