命題と証明の概念の哲学的基礎

—多様な論理体系とその様相埋め込みを手がかりに

山﨑紗紀子

序

本論の主題は，哲学の歴史を通じて長い間論じられてきた主題のうちの代表的な一つ，命題（proposition, Satz）である．命題の概念が，哲学的主題とされてきた理由は，ほとんど明らかと言って良いだろう．というのも，命題とは，私たちが信じたり，疑ったり，知ったりする対象そのもの，つまり，そうした私たちの心的態度にとっての内容（content）そのものであると考えられるからである．例えば，私たちは一般に，私たちを取り巻く環境について最初は不確かで曖昧なことしか知らない（つまり，その段階で私たちが持ち合わせている命題のうち，真だと知られているものはごくわずかであり，大半の命題たちは信じて良いか否か未決定のままに置かれている）が，様々に経験を重ね，また，推論などを行っていくことで，徐々に信頼に足る命題を増やしていき，ある程度成熟した段階に至ると，そうした命題が体系化されて，知識（学知）というものにまで発展する．こうした私たちの，知識の発展が哲学にとって最も基軸的な考察だと考えてよいとすれば，そのような体系を作り上げている構成要素（building block）としての命題そのものが哲学的省察の対象となることは非常に自然なことであると言えるだろう．

とはいえ，命題とはそもそも何なのかと改めて問うと，実はその答えは明らかでなく，私たちが命題について持っている理解が，きわめて頼りないものであることはすぐにわかる．実際，命題を表現するために用いられる言語記号（文字や式）から存在論的に区別されるような⟨命題そのもの⟩＝⟨文や式の内容⟩といったものをそれ自体として認めてよいのだろうか．哲学史的に言うと，19 世紀中盤から 20 世紀初頭くらいまで，ボルツァーノ（Bernhard Bolzano 1781-1848） (Bolzano 1837)，フレーゲ（Gottlob Frege 1848-1925） (Frege 1892)，ムーア（George E. Moore 1873-1958） (Moore 1899)，ラッセル（Bertrand Russell 1872-1970） (Russell 1903)，ウィトゲンシュタイン（Ludwig Wittgenstein 1889-1951） (Wittgenstein 1933) といった哲学者たちは命題についての実在論的立場を持ち出し，それぞれに重要な命題についての哲学的見解を展開した．しかしながら，命題というものの最も決定的特質や，機能，存在様式といったものが十分に解明

されたとは言いがたく，むしろ 20 世紀中盤以降，（文や式から区別された）命題そのものの存在ということについて懐疑的・批判的な考えを取る哲学者が増え—その代表はクワイン（Willard V. O. Quine 1908-2000） (Quine 1953) である—，一般に命題概念そのものへの哲学的関心は低下するようになったと言える．

以上のようにして，⟨ 私たちの心的態度の対象・内容 ⟩ としての命題という考えが哲学の流れの中で徐々に衰えていったのに対し，実は，もう少し異なった観点に立つ命題についての捉え方・取り扱い方というものが，他の重要な学問領域—いわゆる数理論理学，あるいは，記号論理学の分野—のうちで，おおよそ，20 世紀初頭以来，着実に形成されていき，加えて，ここ 30〜40 年の間には，新たに急速に発展するようになった情報科学，特に，理論コンピューター科学と結びつき，コンピューター科学が提供する刷新的なアイデアと一体化することによって，極めて大きな働きを担うようになり，現在では，哲学者であっても，無視できないような意義と興味を備えた考察主題として改めて，登場するようになったと言える．一言で言えば，本論が取り組むのはこうした数理論理学・コンピューター科学にインスパイアされた命題についての捉え方が，精確にはどのようなものであるのかを明らかにし，さらに，そこに含まれる哲学的な帰結を可能な範囲で引き出してみることである．

では，そうした ⟨ 数理論理学・コンピューター科学にインスパイアされた命題についての捉え方 ⟩ とは，どのようなものだろうか．もちろん，こうした捉え方に立ったときでも，命題が私たちの心的態度にとっての内容としての働きを持つことは認められている．しかし，この新しい考え方においては，命題は何よりも私たちが行う論証活動（より一般に情報処理活動 information processing）の基本的な構成要素として捉えられるものであり，もう少し詳しくいうと，私たちの論証活動の出発点（仮定・前提）となり，さらにまた，到達点（証明された定理）ともなり，その結果，より具体的な私たちの活動・行為の中でさまざまに応用（適用）可能なある種の道具や資源として機能するものとして捉えられている．

この点について，もう少し詳しく述べてみる．改めて指摘するまでもないが，一般に論理学やコンピューター科学においては，命題は推論（inference）という脈絡のうちで（つまり，推論の構成要素として）登場する*1．推論というと，「$P \supset Q$ であり，かつ P である，それゆえ Q である」といった個々に独立した命題たちが互いの間でたまたま形作る結びつきといったものに見えるかもしれないが，現代の論理学・コンピューター科学が教

*1 本論で扱う推論としては，演繹のみを対象とする．

えているのは，本来，命題は一定のまとまり（構造）をなしながら，一つのまとまりがもう一つのまとまりに対して一定の仕方で関係する（具体的には，前者のまとまりが，後者のまとまりを $\langle$ 論理的に帰結させる $\rangle$）という仕方で，機能するものと考えなければならない，ということである．このことは図式化してみると，

$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$$

という仕方で捉えられるべきものである．このとき，各 A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$，並びに，$B_j$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$ は，もちろん命題であり，さらに，$A_1, \ldots, A_n$ という先行するまとまり（構造）は，前件（antecedent），$B_1, \ldots, B_m$ という後続するまとまり（構造）は，後件（succedent）と呼ばれ，両者をつなぐ記号 $\Rightarrow$ は，大まかに言って「前件は後件を論理的に帰結させる」という関係を示唆する．そして，この図式全体が一つの「式列，シークエント（sequent）」と呼ばれる[*2]．

シークエントという概念のポイントは次にある．一般に，現在では，古典論理（classical logic）を頂点として，それより弱い直観主義論理（intuitionistic logic），さらに弱い様々な論理，特に最も弱いと言ってよい線形論理（linear logic）に至るまで，極めて多様な論理体系[*3]が存在する．このとき，ある論理体系 L_1 が別の論理体系 L_2 より強いとは，L_2 で証明可能な論理式たちが，全て L_1 でも証明可能であるが，その逆は成り立たない，ということである．ここで，「最も強い」と言うのは，その論理にこれ以上公理図式を加えることができない，あるいは，無理に加えると矛盾してしまう，ということである．また，現在取り扱われている論理体系の間に，常に強弱関係が成り立つわけではなく，比較不可能な場合もあるが，おおよそ，最強の論理＝古典論理であり，それより少し弱いが，それでもかなり強力で重要性も高い直観主義論理，最も弱い線形論理[*4]—線形論理については第 5 章でくわしく見るが，実は線形論理では，通常の連言 & が $\otimes$ と & という二つに，また，選言 $\vee$ が $\mathcal{P}$ と $\oplus$ という二つに分かれてしまうため，比較は複雑になるが，$\otimes$ と & を & に書き換え，$\mathcal{P}$ と $\oplus$ を $\vee$ に書き換えれば，線形論理（詳しくは直観主義線形論理であるが，ここでは，その点についてはこだわらない）の定理は全て直観主義論理（以上の強さを持つ諸論理）において証明可能である—という，階層構造が存在すると考えて良い．

[*2] シークエントについては，第 2 章でも詳しく見る．

[*3] 一般に，論理体系とは別に，「形式体系」「計算体系」という言葉が用いられることがあるが，これらの用語は，のちに見る形式言語の体系の形式化のされ方の違いを表現する．例えば，形式体系の例としては，「ヒルベルト流の形式体系」，「シークエント計算の体系」，「自然演繹の体系」などがある．

[*4] 弱いということで，線形論理の他に，本論では，後ほど見るような含意についての特徴によって考察される一連の非様相論理のことを指す場合もある．

さて，このように，多様な論理体系たちがある種の階層構造をなしていると考えられるわけであるが，実はこうした多様性・階層性をシークエントの概念を用いることで系統的に捉え直すことができる[*5]．というのも，どの論理体系においてもそこでの中心主題となるのは，どのような論理式（すでに述べた通り，本来論理式や文と命題そのものとは区別される—前者は後者を自らの「内容」として表現する言語表現である—が，ここではこの区別はあまり問題にはならないため，論理式，すなはち命題と考えても特に混乱に陥る恐れはない）のまとまりから，どのような論理式のまとまりが論理的に帰結するかを決定する（証明する）ことにあり，要するに，およそいかなる論理体系も，シークエントを証明すること（どのシークエントがどのような仕方で証明されるのかを明示化すること）をその基本主題としているからである．そのため，以下のような見方を取ることが可能となる．多様な論理体系の各々は，その体系内で設定される推論規則たちによって特徴づけられ，互いの間で区別されるが，これらの規則は普通，どのような形のシークエントたちから，どのような形のシークエントを導き出して良いかを定めるものであり，この意味で基本的に ⟨ シークエントの可能な論理的振る舞い ⟩ を決定するものとなっている．例えば，古典論理の推論規則の一つ（古典的 $R\supset$）は，

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\supset B}\ (R\supset)$$

となっているのに対し，直観主義論理においてこれに対応する規則（直観主義的 $R\supset$）は，

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\supset B}\ (R\supset)$$

となっている．この両者の相違については本文でも改めてみるが，この論理体系の相違はこれら対応し合う二つの推論規則の違いに帰着すると言って良いと考えられる．つまり，古典論理と直観主義論理においては，それぞれに登場するシークエントはただ一点，以上の相違によって特徴付けられており[*6]，逆に言えば，まさに，古典的 $(R\supset)$ と直観主義的 $(R\supset)$ とが異なっているというまさにその点において，それぞれに登場するシークエントは異なった論理的性格を与えられることになっている，ということである．これらの点に基づいて，本論では次のような観点を取る．古典論理と直観主義論理において，それぞれ

[*5] この見方は，G. サンビンら (Sambin et al. 2000) によってその考察が行われている．この点についての詳しい説明は，第 5 章で行う．

[*6] もちろん，古典論理のシークエントの後件は複数の論理式の出現を認めるのに対し，直観主義論理では，シークエントの後件に出現する論理式がたかだか一つに制限されるという違いもある．

のシークエント自体の論理的性格が相違していることに対応して，まさにそれぞれのシークエントに登場する命題もまた，異なった性格を持つということであり，より一般的に言い直せば，一口に「命題」と言っても，実はそれらの中にも（当の命題が登場する論理体系に応じた）多様性・階層性があり，その命題が，より詳細に見てどのようなものであるかは，その命題がどの論理体系（に属するシークエント）のうちに登場するかによって規定される，ということである．

以上では，古典的 $(R\supset)$ と直観主義的 $(R\supset)$ がそれぞれの体系におけるシークエント（に登場する命題）の特性を規定しているという事情を見たが，こうした論理結合子に関わる推論規則以外にも，それぞれの論理体系（におけるシークエント，さらには，そのシークエントに登場する命題）の性質を大きく左右する推論規則が存在する．それは，弱化・縮約などの，いわゆる，構造規則である：

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LC) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (RC)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LW) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (RW).$$

例えば，古典論理でも直観主義論理でも，これらの構造規則は全て（直観主義論理の場合には注意が必要ではあるが）基本的には適用可能となっているが，線形論理では，これらの構造規則は適用が禁じられている．このことは，非常に根本的（drastic）と言って良いような影響を線形論理のシークエント（そこに登場する命題）に対して及ぼす．というのも，この結果（先に述べたが，また本文でもより詳しく見るが），古典論理・直観主義論理では，一つずつしかない連言・選言が線形論理では，それぞれ二つずつに区別されるからである．このことの意味は次のように考え直すとよりわかりやすい．まず，弱化規則も縮約規則も禁じられている論理体系から出発する．実はこの体系は，何か特別なことが禁じられている体系ではなく，むしろ，未だ，弱化や縮約といったより強い（より高い階層にある）論理体系では自由に適用することのできる規則が導入されないままに止まっている，いわば，“原始状態”に近い論理体系である．従ってまた，そこでのシークエント（そこに含まれる命題たち）もまた弱化や縮約が与えてくれるような強い論理的特性（この点については，第 5 章以降で詳しくみる）を未だに付与されておらず，最も“原始状態”に近いものとなっていると考えることができる．言い換えれば，命題の階層構造の世界は，この線形論理に登場するような最も“原始的”で弱い（推論において一度使用されるごと

に消費され，失われてしまう）ものから始まって[*7]，徐々に構造規則やその他のより強い推論規則を付け加えられた論理体系へと上昇していくことにより，それ自身の性格をも変化させていき，ついには直観主義論理（のシークエント）に登場するような命題—大まかに言うと，ひとたびその妥当性が確立されると，その後，いかなる“未来”の時点においてもその妥当性が保たれ，好きなだけ繰り返し適用することのできるような，いわゆる構成的操作の可能的結果—や，さらに進んで，古典論理（のシークエント）に登場するような命題—いわゆる二値原理を満たす仕方で，いかなる可能な状況変化のもとでも，真か偽のいずれか一方に定まるようなもの—にまで至る，ということである．

本論では上記の点についての考察を進めていくのであるが，構造規則を部分的に導入するような様相演算子（線形論理の!や?演算子）や，シークエントの証明可能性を表現するような様相演算子を導入することによっても，シークエント（そこに登場する命題）の性質は変化すると考えられる．では，ここで，シークエントに登場する命題が持つ性質はより具体的にどのように変化するのかを簡単に見ていこう．これまで見てきた，直観主義論理や古典論理が扱う命題概念が関係する演算子は連言（&）・選言（$\vee$）・条件法/含意（$\supset$）・否定（$\neg$）といった命題結合子（propositional connective）である．このとき，（先ほど古典論理と直観主義論理の場合で見たように）同じ種類の演算子を扱う体系でも，各結合子について採用する公理や推論規則が異なるため，各論理体系ごとに扱うことのできる，つまり，証明することのできる命題（あるいは，帰結関係）の範囲（集合）には違いが生じてくる．そのため，命題の集合たちは，その大きさを基準とした，一定の階層構造を形成するのである．例えば，直観主義論理と古典論理では，その証明できる命題の集合が異なっており，古典論理の方が直観主義論理より大きな集合を持つことになる．

ところで，このように様々に研究が進められてきた論理体系（これらの論理体系は非様相論理（non-modal logic）と呼ばれる[*8]）について，様相論理（modal logic）を用いて分析することも，本論の眼目の一つでもある．では，様相論理とは一体どんな論理なのだろうか．そこのことについて，以下で簡単に見ていこう．

様相論理は，基本的には，先の命題結合子からなる古典論理に，双対となる文演算子 $\Box$

[*7] 第 5 章では，シークエントの条件付けに関して，線形論理よりもより原始的と考えられる **B** も見る．

[*8] のちに見る，G. コルシの弱論理に対する研究は，C. I. ルイスの厳密含意論理の研究 (Lewis 1912,Lewis 1913)（その後，ルイスはラングフォードとともに **S1** から **S5** までの五つの体系を定めている (Lewis and Langford 1932)）を踏まえた上で生じているため，これらの体系をまとめて非様相論理と呼ぶのには注意が必要である．厳密含意論理に関する歴史的な考察は， (Blackburn et al. 2001, 吉満 2004, 佐野 2016) に詳しい．

と ◇ についての規則を加えた体系と考えてよい．これらの演算子，□ と ◇ は，一般的には，「必然性」，「可能性」と解釈されるのであるが，しかし，日常言語にその目を向けたとき，「〜は必然である」（可能性演算子の意味は必然性演算子と双対的に決まるのでここではひとまず措く）と似た概念は様々に存在する．それは例えば，「（認識主体によって）知られている」，「信じられている」などといった概念である．また，時間様相的な読みも行うことができる．このように，必然性演算子は様々な読みを行うことができるのであるが，その読み方の間には少なくとも一定の共通性があると考えられる．それは，K 公理:$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ に当たるものである．この公理が何を表現しているのかについては，第 1 章の中で詳しく説明する．このように，様相演算子が加わる論理的言語の領域は多様にあり，その特徴に合わせた様々な公理を加えることによって，様々な様相論理の体系が研究されている．

本論では，このように様々な読み方をされる，様相概念を，証明可能性や論証可能性といった概念と結びつけて考察を行う．このような読み方をすることが，命題概念の分析とどのように関係づけられるのかについては，1933 年に K. ゲーデルによって，「様相埋め込み」という形で，その手がかりとなる結果が与えられている．その詳しい概念の分析については，本文に譲り，ここではゲーデルによって与えられた議論の簡単なアウトラインを説明するに止める．

1933 年にゲーデルは，直観主義論理がある種の翻訳の下で，様相論理 **S4**（様相論理 **K** に 4 公理と T 公理を加えた論理体系）に埋め込み可能であることを示した (Gödel 1933f)．この結果は後の，マッキンゼイとタルスキの結果 (McKinsey and Tarski 1948) と合わせて，「ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理」と呼ばれる．この結果によって，非様相論理の体系と様相論理の体系との間に，概念的関連があることが示された[*9]．これは，直観主義論理の論理式を様相論理 **S4** を用いて解釈することが可能であることを表しており，直観主義論理が扱う命題をどのようなものと見なすべきかということについての一つの重要な回答を与えた．直観主義論理を様相論理 **S4** を用いて解釈することができる一方で，この結果，つまり，ある非様相論理の体系が，対応する様相論理へと，何か翻訳を用いて埋め込み可能であることは，古典論理をはじめとする他の非様相論理の体系

[*9] 注の 8 でも述べたが，（**S4** と **S5** を中心とする）様相論理の研究は，ルイスらによって行われた厳密含意論理の研究がその発端であると考えられる．このとき，**S4** と **S5** への追加公理は，O. ベッカー (Becker 1930) によって提案されたものである（cf. (吉満 2004, 佐野 2016)）．ゲーデルは，厳密含意論理をめぐるこれらの研究を踏まえ，ルイスらとは異なる仕方で現在の様相論理 **S4** にあたる論理体系 **B** を与え，直観主義論理の埋め込みを示した．これらの点については，(Blackburn et al. 2001, 吉満 2004, 佐野 2016) に詳しい．また，本論でも後ほど簡単に見る．

にも拡張できることが次第に明らかにされてきた．現在では，古典論理，そして，直観主義論理と古典論理の間にある中間論理（intermediate logics）と呼ばれる諸体系が，それぞれ対応する様相論理の体系に埋め込み可能であることが知られている．一般には，直観主義論理から古典論理までの非様相論理とそれぞれに対応する様相論理との間の関係を，様相同伴関係と呼ぶ．しかし，本論では，直観主義論理よりも弱い非様相論理の様相論理への埋め込み関係 (Visser 1981, Corsi 1987, Yamasaki and Sano 2016) のことも含めて，様相同伴と呼び，直観主義論理以外の埋め込み関係について示した結果のことを「様相同伴関係」と呼ぶ．

ゲーデルが与えた直観主義論理の埋め込み定理の証明は，様々な論文の中で与えられている (Maehara 1954, Troelstra and Schwichtenberg 2000, Mints 2012, Dyckhoff and Negri 2012, Kurokawa 2014, Yamasaki and Sano 2016)*10．その中でも，本論では，ラベル付きシークエント計算を用いた結果に着目する．というのも，ラベル付きシークエント計算を用いることにより，広い範囲の非様相論理の埋め込み定理の証明を一様な仕方で与えることができるからであり*11，加えて，ラベル付きシークエント計算自体が計算体系として非常に興味深いものであり，その考察が，命題・証明概念についての考察に有効であると考えられるからである．ラベル付きシークエント計算については第 4 章で詳しく検討するが，ラベル付きシークエント計算では，推論規則の中に自由変項と関係記号が明示的に出現する．このことは，ラベル付きシークエント計算の一番の特徴であるが，この出現をどのような概念の体現と理解すべきかについて，直観主義論理に着目し，G. ミンツによって与えられた直観主義論理のシークエント計算体系 **LJpm** (Mints 2000) を参考として，その考察を進める．

様相論理を比較の基準として，非様相論理の間の関係を考察する一方で，冒頭で述べてきたように，シークエント，つまり，構造という概念にも着目することによって，様々な非様相論理の間の関係について考察が可能であることについて見る．この点については，G. サンビンら (Sambin et al. 2000) のベーシックロジック（basic logic）を用いても，様々な非様相論理の間の関係について考察が可能であることについて見る．このことによって，必然性演算子とは異なる，「構造」という概念によっても命題を特徴付けること

*10 これらの結果は，全て証明論的手法を用いた証明である．ここでいう証明論的手法とは，一方の論理体系での導出を対応するもう一方の導出へと書き換える実効的な手続きを与えるような証明方法のこと．これとは別に，完全性を経由する証明は，意味論的証明と呼ばれる．ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理の意味論的証明は第 6 章で見る．

*11 本論では，埋め込み定理を一様な仕方で与えることのできる体系としてラベル付きシークエント計算を採用したが，他にもハイパーシークエントを用いた証明が与えられている (Kurokawa 2014).

が可能であるということを見る．

このようにして，本論では，シークエントの観点，つまり，構造の観点と，様相の観点から，様々な論理体系についての考察を行い，構造と様相との間の関係を明らかにすることから，特に直観主義論理における固有の特性をできる限り詳しく明らかにすることを目指す．このことによって，命題概念が，改めてどのような哲学的重要性を持つかを明らかにすることが可能であると考えられる．

本論の構成は以下のようになる．まず，第 1 章で論理体系の多様性とその関係についての説明を行い，各論理体系の違いがどのように表現されうるのかについて説明する．また，様相同伴関係について見る．第 2 章で，本論を進める上で，最も基本的な形式体系と考えられる，G. ゲンツェンによって与えられた，直観主義論理と古典論理のシークエント計算の体系 **LJ** と **LK** を与え，シークエント計算というものがどのような形式体系であるのかについてその説明を行う．このとき，様相論理のシークエント計算についても簡単に見る．また，直観主義論理の後件複数な **G3** 型（**G3**-style）のシークエント計算の体系と，ミンツの直観主義論理のシークエント計算体系 **LJpm** を導入する．続く第 3 章で， (Yamasaki and Sano 2017) に基づき，**BPL** のラベルなしのシークエント計算の体系を与え，**BPL** が対応する様相論理 **K4** に埋め込み可能であることを証明論的な仕方で示す．第 4 章では， (Yamasaki and Sano 2016) による非様相論理のラベル付きシークエント計算を見る．そして，その体系を用いて，埋め込み定理の一様な証明論的証明を与える．第 5 章では，サンビンらによって与えられた，ベーシックロジックの体系を見る．このことによって，構造に着目することによっても，論理体系の分析を行うことが可能であることを見る．また，直観主義論理が線形論理に埋め込み可能であるということについて，既存の翻訳とは異なる翻訳を定義し，証明論的証明を与える．最後に，第 6 章では，直観主義論理クリプキモデルとゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理との間の関係について説明し，意味論の観点からの直観主義論理と **S4** との間の関係も明らかにする．そして，様相と構造に基づく考察が，命題概念とは何かということを考察する上で重要な手がかりとなるということについて説明をし，論文を終える．

初出

本論の第 1 章は，(山﨑 2016) に加筆修正を加えたものである．また，**LJpm** についての記述は (山﨑 2013) を一部抜粋し，大幅に加筆修正を加えたものである．また，第 3 章は，(Yamasaki and Sano 2017) に，第 4 章は，(Yamasaki and Sano 2016) にそれぞれ加筆修正を加えたものである．(Yamasaki and Sano 2017, Yamasaki and Sano 2016) からの内容は，原論文を邦訳した上で，論文の一部とした．ただし，邦訳に際しての，誤りはすべて著者に帰される．

目次

第 1 章

多様な論理体系と相互関係

本章では，古典論理や直観主義論理を中心とする非様相命題論理と様相論理のヒルベルト流の公理系を与え，非様相論理が対応する様相論理へと埋め込み可能であることについての説明を行う．

1.1　各論理体系が扱う命題

命題概念は，その本性からして推論の対象となるという性質を有しているが，その性質の中にも実は，多様性や階層性があることが，近年の論理学における様々な研究から次第に明らかになってきた．

論証・証明とは，簡単には，まず，それ自体すでに確立済みのものとして認められている命題（公理 (axiom) や定理 (theorem)）たちから出発し，次に，必要であれば，様々な語句の用法に関する取り決め（定義 (definition)）を併用しながら，さらに，妥当な命題から，妥当な命題を引き出すことを可能にしてくれる原理（推論規則 (inference rule)，論理法則 (logical law)）たちを用いて，そして最後に，ある命題の正しさを疑いようのない仕方で確立することである．こうした，公理・定理，定義，推論規則・論理法則とは何か，どのようなものをそうした，公理・定理，定義，推論規則・論理法則として認めて良いか，それがなぜかといった問題は，伝統的にも，様々に研究されてきたが，現代（フレーゲ以降）では，とりわけ次のような特徴的な方法が用いられる[*1]．その方法とは，一つの言語

[*1] ここで伝統的な哲学における命題の用法を確認しておきたい．本論では，命題概念についての哲学的考察を十分に行うことはできないが，以下に述べることは基本的に正しいと考えて良いと思われる．哲学史における命題概念の登場はソクラテスの頃にまで遡ると言えるだろう．ソクラテスは，「魂のあり方」ということを常に問題にし，人々にそれを気遣うよう説得した．ソクラテスは，そうした説得のために，ア

（論理的言語・形式言語）を設定することである．一つの論理的言語を定めるとは，（1）まず第一に，どのような性質を持った，どのような範囲の諸命題を取り扱い対象とするのかを定めることであり，（2）それに基づいて，これらの命題の間で，どのような推論を行うことが許されるのかを可能な限り正確に特定することである．この（1），（2）についてもう少し詳しく見てみよう．まずは（1）についてであるが，どのような範囲の命題が取り扱い対象となるかは，原子命題や原子述語が持つ性質として，どのようなものが認められているかと，ふつう以下の三種類の演算子に依存して定まる．もう少し詳しく言えば，それら三種類のすべてを用いるか，一部だけを用いるのか，また，一つの種類の中でもすべてを採用するのか，あるいはその内のいくつかは用いないことにするのか，等々によって変わってくるということである．三種類の演算子とは，次のものである．（i）文結合子．これは与えられた（一つまたは二つの）命題に適用されて，一つの命題を与える演算子であり，その表記は，よく使われる記法に従えば，「&」（連言演算子，「かつ」），「$\vee$」（選言演算子，「または」），「$\rightarrow, \supset$」（含意演算子，「ならば」），「$\neg$」（否定演算子，「でない」）である．（ii）量化子．（「x は人間である」，「y は学生である」といった）変項を含む文によって表現される命題—より精確には，対象から命題への関数—に適用されることで，一つの命題を形成する演算子[*2]．（iii）様相演算子．代表的なものは「$\Box$」（ボックス演算子），「$\Diamond$」（ダイヤ演算子）であり，形式的に言えば，これらは文結合子の一種と見なして良いが，推論上での役割—この後に述べる論理的公理，および推論規則によって規定されるもの—は，（i）の文結合子とは異なり，例えば，「$\Box A$」の場合で言えば「A は必然である/A

テナイの人々に「対話」を求めたが，対話を行うためには，(中畑 2011) での表現を用いれば，その前提として，対話に参与する人々が「吟味される命題を信じそれに関与していること」(中畑 2011, p.208) が要求される．このことから，対話をしようとするとき，ソクラテスは「命題」概念が存在すること，また，それが「信念の内容」を担うものであると考えていたと言える．プラトンに関して言えば，以上のようなソクラテスの考えを受け継いでいることは明らかであるが，彼のイデア論で展開されるイデア概念の一例に，命題というもの（特に，数学の命題のようなもの）が相当するのではないかと考えることは，そうおかしなことではないように思われる．そして，アリストテレスに関しては，よく知られている通りである．また，アリストテレスから少し時代は進むが，ライプニッツは，命題を真偽の基体と考え，すでに思惟された範囲だけでなく，それらを超えて，思惟されうる事柄のすべて，と命題を特徴付けている（この点については (岡本 1995) を参照のこと）．その後，ヴォルフ，ヘーゲルらによって様々な考察が行われ，その中でも，論理的意味合いを強く持った命題の捉え方はフレーゲらに引き継がれ，現代的な命題概念の把握に繋がっていくことはよく知られている通りである（本論では詳述することができなかったライプニッツ以降の命題概念についての考察は (岡本 1992, 岡本 1993, 岡本 1995, 岡本 2007) に詳しい）．ライプニッツやヘーゲル以後の哲学史の中で，命題概念がどのようなものと考えられてきたのかについて考察することは非常に重要であるが，本論ではその詳細には立ち入らず，他の機会により詳しく論じたい．

[*2] より具体的には，「$\forall x \ldots x \ldots$」，「$\exists y \ldots y \ldots$」などであり，それぞれ「あらゆる x について ...」，「ある y について ...」といった事柄を表す．

は知られている/A を行うことは義務である」などのように，命題 A に対して一定の様相的性格を付与することである．次に，(2) についてであるが，これは具体的には，(1) でみた文結合子の推論上での役割（基本的な性質）を定める論理的公理と，どのような命題を前提として，どのような結論を導き出して良いかをはっきりと定める推論規則とを定義するということである．この点については後ほどみるが，例えば，(iii) の場合で考えれば，$\Box$ の性質を規定する様々な公理が存在しており，それらのうちからどれを選び，どう組み合わせるかによって，実際に $\Box$ の性質が変わってくるということである．また，推論規則は，一つ一つの演算子について定められるものであるため，言語内に導入される演算子が増えれば，それに応じてその数も増えていく．つまり，(i) の範囲の命題を扱う場合は，命題間の関係について説明する最も基本的な規則だけがあれば良い．典型的には，モーダス・ポネンス (Modus Ponens, MP) を考えれば良い．したがって，(ii) の場合には，量化子を含む命題に適用できる規則が，(iii) の場合には，様相命題に適用できる規則が必要になるということである．

さて，ここまで見たような仕方で定めた言語を用いて，論証・証明を構成していくのが現代論理学の方法である．そのため，論理的公理の定め方によって演算子が持つ性格が決まり，その性格の違いが，その演算子を用いて扱うことができる命題の範囲を決め，結果として，論理体系の間に強弱関係が生まれることとなるのである[*3]．本論では，考察対象を命題論理に限るため，(ii) は考慮に入れず，(i) と (iii) のみを考察する[*4]．また，(i) だけからできている論理のことを純粋な命題（様相を持たない命題）だけを扱う論理ということで，一般に**非様相命題論理**（*non-modal propositional logic*）と呼び[*5]．非様相論理に (iii) を加えたものが，よく知られている**様相論理**（*modal logic*）である．

先にも述べたように，現代論理学では，言語の体系としての論理という捉え方が中心的なものとなった．こうした言語体系としての論理という見方は，そもそもどのような言語を設定するのが論理として適切であるのかという問いを生じさせ，またさらに，新しい様々な論理体系を考える余地をも与えていると考えてよい．現実の歴史の展開は実際にはもう少し複雑ではあるが，いずれにせよ，現代論理学はまさにこのような方向での論理的言語（論理体系）の一般化・多様化を推し進めてきたのである．そうした様々に異なる論

[*3] 本論では詳しく扱わないが，自然数論や集合論などを論理的言語として扱おうとする場合には，(1) で見たような結合子や量化子などに，そのような各理論を扱うことができるような固有の語彙を加え，それらを公理的に定義する必要がある．

[*4] (ii) は命題論理よりもより一般性の高い**述語論理**（*predicate logic*）の考察対象となる．

[*5] このとき，非様相命題論理のことを，単に命題論理，あるいは，非様相論理と呼ぶこともある．

理体系の中でもよく知られているのは，「**古典論理**（*classical logic*）」の体系と「**直観主義論理**（*intuitionistic logic*）」の体系である．古典論理は直観主義論理に公理「A または A でない $(A \vee \neg A)$」を付け加えることで得られる体系である．これは，言い換えると，直観主義論理の定理（その論理体系内で証明可能なもの）はすべて古典論理の定理でもあるということである．（序論でも述べたが，）一般に，このように二つの論理体系（$\mathbf{L}_1$ と $\mathbf{L}_2$）を比較した結果，$\mathbf{L}_1$ の定理はすべて $\mathbf{L}_2$ の定理でもあるが，その逆は成り立たないとしたとき，「$\mathbf{L}_2$ は $\mathbf{L}_1$ より強い」，「$\mathbf{L}_1$ は $\mathbf{L}_2$ より弱い」と言う．したがって，古典論理と直観主義論理の場合で考えると，「古典論理は直観主義論理より強い」ということになる．それではこれら二つの体系以外に一体どのような論理体系を考えることができるだろうか．そしてまた，それらの間にはどのような強弱関係があるのだろうか．この点については，後で詳しく見るが，命題論理の世界にはその強弱関係に基づいた様々な論理体系が存在する．このとき，命題論理の各体系間では，語彙と推論規則は同じであるが，各体系で採用されている公理が異なっている[*6]．採用されている公理が変われば，当然，ある論理体系の中で導くことができる定理の種類が変わってくる．このことから，各論理体系がどの公理を採用しているのかを見ることで，体系を区別し，整理することができるということがわかる．では以下で，非様相論理の各体系がどのような公理を採用しているのか見てみよう．

1.2　非様相論理の形式化された推論の体系

一般に公理系・形式体系というものは，先にも触れたように，語彙を定義し，論理式を定義し，論理的公理（以下，公理）と推論規則を設定することから始まる（実際の形式体系としては，公理と推論規則とを分けず，すべて推論規則の形で定式化するような体系も存在するが，ここでは，わかり易さのため，ここまで述べてきたように，公理と推論規則を分けて設定する形式体系に即して問題を考察していくこととする．こうした $\langle$ 公理と推論規則を分けたタイプの体系 $\rangle$ はふつう「ヒルベルト系」と総称されるため，以下でも「ヒルベルト系」という用語を用いることがある[*7]．本章で扱う範囲の非様相論理の各体系を通じて，語彙と論理式はすべて共通である．そこでまず，この二つを先に確認しておく．

[*6] ただし，直観主義論理よりも弱い論理（例えば，のちに見るコルシの $\mathbf{F}$）の場合は規則も変わることがある．

[*7] ヒルベルト系以外の体系としては，$\langle$ 公理と推論規則を分けないタイプの体系 $\rangle$ に分類される，G. ゲンツェンによって与えられた**自然演繹**（*natural deduction*）・**シークエント計算**（*sequent calculus*）の形式体系などがある (Gentzen 1935)．シークエント計算については第 2 章で見る．

定義 1 (語彙)**.**

命題変数　$P, Q, R, \ldots$

論理記号　$\perp$（矛盾），&（連言），$\vee$（選言），$\supset$（含意）

補助記号　(，)

このとき，命題変数の可算無限集合を Prop と書き，以下用いる．語彙を定めたら，次は論理式を定義する．

定義 2 (非様相論理の論理式)**.**

(i) 命題変数と $\perp$ は論理式.

(ii) A，B が論理式なら，$(A\&B)$,$(A \vee B)$,$(A \supset B)$ も論理式.

(iii) 以上のみが論理式.

ただし，「$\neg A$」は「$A\supset\perp$」の省略形とみなす．このとき，論理記号の結合の強さは，「$\neg$」が最も強く，次に「&」と「$\vee$」，最も弱いのが「$\supset$」とし，これに従ってカッコは適宜省略する．

このとき，論理式の複雑度の定義を与える．定義を見ればわかるように，論理式の複雑度は，その論理式に含まれている結合子の数によって決まる．

定義 3 (論理式の複雑度)**.** 論理式 C の複雑度を $\deg(C)$ とする．

- $\deg(P)=0$
- $\deg(A\&B)=\deg(A \vee B)=\deg(A \supset B)=\deg(A)+\deg(B)+1$

ここで，部分論理式の定義を与える．

論理式 A の部分論理式の集合 $Sub\ (A)$ は次のように定義される．$\star$ は結合子 &, $\vee$, $\supset$ のうちの一つ．

定義 4 (部分論理式)**.**

(1) $Sub\ (A) = \{A\}$, A が原子式の場合

(2) $Sub\ (A_1 \star A_2) = Sub\ (A_1) \bigcup Sub\ (A_2) \bigcup \{A_1 \star A_2\}$

このとき，$B \in Sub\ (A)$ であるとき，B を A の部分論理式と呼ぶ.

次に公理と推論規則について見てみよう．話を分かりやすくするため，まず，直観主義

論理の場合について考える．この論理のヒルベルト系は以下の通りであるが[*8]，ただし，各公理は正確には一個の式ではなく，命題変項を含んだ図式（無数の可能な代入事例を代理する一般的表現）である．このため**公理図式**（*axiom schema*）とも呼ばれる[*9]．このとき，各公理図式に，任意の論理式を代入した結果は，それ自身，一個の定理であると見なしてよい[*10]．

定義 5 (直観主義論理のヒルベルト系：**HJ**)**.**

Ax1 $A \supset (B \supset A)$

Ax2 $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

Ax3 $A \supset (A \vee B)$

Ax4 $B \supset (A \vee B)$

Ax5 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

Ax6 $(A \& B) \supset A$

Ax7 $(A \& B) \supset B$

Ax8 $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$

Ax9 $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

Ax10 $A \supset (\neg A \supset B)$

$$\frac{A \supset B \quad A}{B}\ (MP)$$

さて，以上の公理図式は，幾つかのグループに分かれて各結合子を特徴付ける．Ax1 と Ax2 は「⊃」，Ax3 から Ax5 は「∨」，Ax6 から Ax8 は「&」，Ax9 は「¬」の働きを，また，Ax10 は矛盾から任意の論理式が導けること[*11]をそれぞれ表している．また，「含意」の性質について述べた Ax2 は，さらに次のような三つの公理に含意の性質を分けることができるが，このように分解することで，より詳細に「含意」の性質を検討することができるようになる[*12]．

[*8] 直観主義論理のヒルベルト系の公理のとり方にも様々なものがあるが，ここでの公理のとり方は (小野 1994) による．

[*9] 例えば，以下で見る Ax1 は $(P \& Q) \supset (R \supset (P \& Q))$ や $P \supset (\neg R \supset P)$ などの形をした論理式を代表しているということである．また，これ以降も公理は公理図式とみなし議論する．

[*10] このように，公理の代入事例を定理と考えることを MP とは別に推論規則とすることもあるが，ここではこの点については措く．

[*11] Ax10 は $(A \& (A \supset \bot)) \supset B$ と同値であり，$\bot \supset B$ と考えてよい．

[*12] この分解はコンビネータ論理やラムダ計算の分野との関連で考察されることが多い．ここでの分解は (古森・小野 2010) による．

Ax2.1 $(B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

Ax2.2 $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$

Ax2.3 $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$

先ほども述べたように，第 1 章で取り上げる非様相論理の体系すべてを通じて，推論規則は同じであり，基本的にはただ一つである．それはよく知られたモーダス・ポネンス（*Modus Ponens*）（以下，MP）である．

$$\frac{A \supset B \quad A}{B}\ (MP)$$

MP は，分離規則 (Rule of Detachment) とも呼ばれ，$A \supset B$ と A がすでに証明されているとき，B もまた証明されている（B を結論して良い），ということを述べている．

定義 6 (直観主義論理のヒルベルト流の公理系における定理)**.** 直観主義論理 **HJ** における**証明**（*proof*）とは以下のいずれかの条件を満たす論理式の列 $B_1, \ldots, B_n$ のこと：

(i) B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ は **HJ** の公理である．

(ii) B_i $(1 < i \leqslant n)$ は B_l，B_m $(1 \leqslant l < i, 1 \leqslant m < i)$ から (MP) によって導出された論理式である．

証明の長さは n．$B_1, \ldots, B_n$ における B_n が B であるような，**HJ** での $B_1, \ldots, B_n$ の証明が存在するときに，B を **HJ** の**定理**（*Theorem*）と呼び，$\vdash_{\mathbf{HJ}} B$ と書く．

この定理の定義は，古典論理などの他の非様相論理のヒルベルト流の公理系の場合にも用いることができる．

定義 7 (古典論理のヒルベルト系：**HK**)**.**

Ax1 $A \supset (B \supset A)$

Ax2 $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

Ax3 $A \supset (A \vee B)$

Ax4 $B \supset (A \vee B)$

Ax5 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

Ax6 $(A \& B) \supset A$

Ax7 $(A \& B) \supset B$

Ax8 $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$

Ax9 $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

Ax10 $A \supset (\neg A \supset B)$

Ax11 $A \vee \neg A$

$$\frac{A \supset B \quad A}{B}\ (MP)$$

先ほども述べたように，古典論理のヒルベルト系 **HK** は排中律にあたる「Ax11 $A \vee \neg A$」を **HJ** に加えれば手にすることができる．つまり，**HK** = **HJ**+Ax11 となる．そのため，直観主義論理と古典論理の違いは排中律を認めるか認めないかの違いであると簡単に説明されることもある．

では，直観主義論理より弱い論理の公理系はどのように設定すればよいだろうか．実は，上記のように Ax2 を分解し，分解したものの中から適当な一部だけを公理として認め直すことで，直観主義論理よりも弱い論理体系のヒルベルト系を手にすることができるのである．

定義 8 (**BPL** のヒルベルト系)**.**

Ax1 $A \supset (B \supset A)$

Ax2 $(B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

Ax3 $A \supset (A \vee B)$

Ax4 $B \supset (A \vee B)$

Ax5 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

Ax6 $(A \& B) \supset A$

Ax7 $(A \& B) \supset B$

Ax8 $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$

Ax9 $\bot \supset A$

Ax10 $(A \& (B \vee C)) \supset ((A \& B) \vee (A \& C))$

Ax11 $A \supset A$

Ax12 $A \supset (B \supset (A \& B))$

$$\frac{A \supset B \quad A}{B}\ (MP)$$

例えば，直観主義論理よりも弱い Basic Propositional Logic (**BPL**) (Visser 1981) と

いう論理体系について考えるときには，定義 5 で与えられた，Ax2 を分解したのちの，Ax2.1 だけを残し（定義 8 で与える Ax2），Ax2.2 と Ax2.3 は落とす．そして，$\vee$ と & の公理を付け加える（定義 8 で与える Ax3〜8）．さらにこのとき，Ax2 を分解して弱めてしまったことによって公理として付け加える必要が生じたと概ね考えて良いもの（定義 8 で与える Ax10〜12）を加える．このようにして，**BPL** のヒルベルト系は与えることができる[*13]．

ここで注目したいのは，「含意」を特徴付ける公理として採用されているものが，直観主義論理と **BPL** とでどう違っているのかということについてである．**BPL** では Ax2 を分解した三つの公理のうち，Ax2.1 だけが「含意」の性質を定める公理として残っている．これは，**BPL** では，直観主義論理より「含意」の性質が弱くなっていることを表していると考えられる．このとき，**BPL** の「含意」を特徴づけるのは Ax1，Ax2，Ax11 と考えられる．また，**BPL** よりも弱い **F** という論理体系もある (Corsi 1987)[*14]．

定義 9 (F のヒルベルト系)**.**

Ax1 $(B\supset C)\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$

Ax2 $A\supset(A\vee B)$

Ax3 $B\supset(A\vee B)$

Ax4 $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$

Ax5 $(A\&B)\supset A$

Ax6 $(A\&B)\supset B$

Ax7 $(C\supset A)\supset((C\supset B)\supset(C\supset(A\&B)))$

Ax8 $\bot\supset A$

Ax9 $(A\&(B\vee C))\supset((A\&B)\vee(A\&C))$

Ax10 $A\supset A$

[*13] **BPL** は，(Visser 1981) において与えられた論理であるが，そのときの形式体系は自然演繹であった．ここでのヒルベルト流の形式体系は (Suzuki and Ono 1997) による．ただし，(Suzuki and Ono 1997) では Ax2 にあたるものは Ax2 と互いに導き出すことが可能であるという意味で，同値な $((A\supset B)\&(B\supset C))\supset(A\supset C)$ で，同様に，Ax5 にあたるものは $((A\supset C)\&(B\supset C))\supset((A\vee B)\supset C)$ で，Ax8 にあたるものは $((A\supset C)\&(B\supset C))\supset((A\vee B)\supset C)$ でそれぞれ与えられている．

[*14] (Suzuki and Ono 1997) の中で，ここで与えた **BPL** のヒルベルト系が **F** のヒルベルト系を拡張した体系であることについての議論がなされている．

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n \ \ A_1\&...\&A_n \supset B}{B}\ (MP) \quad \frac{A}{B \supset A}\ (AF)$$

F のヒルベルト系を与えるときには，新しい規則として (MP) の他に推論規則「A Fortiori (AF)」も加えなければならない．また，(MP) に当たるものも先ほどみたものとは形が少し異なる．

F の公理系は定義 8 から，Ax1 と Ax12 を落とせば手にできる．したがって，**F** の「含意」を特徴付けるのは定義 9 の Ax1，Ax10 のみと考えて良い．

このように，直観主義論理よりも弱い論理というのは，「含意」の性質が直観主義論理の「含意」より弱く，直観主義論理が扱う推論のうち，「含意」の性質を弱めて特殊化した範囲だけを取り出しているような論理体系と考えることができる*15．以上のことから，非様相論理の論理体系というのは，基礎となる最も弱い論理体系があって，そこに必要な公理を次々と足していくことで段々に強くしていく（証明できる定理の範囲を広げていく）ことができるような，ある種の階層構造をなしていると考えられる．ここで見た論理体系について言えば，**F** から始まり，次に **BPL**，直観主義論理，そして最後が古典論理といった具合に段々とその証明力が強くなっていくということである．では，この論理間の構造，あるいは，強弱関係を踏まえたとき，それぞれの論理体系に属する命題は，他の論理体系に属する命題とは異なるどのような特徴的性格を持つと言えるだろうか．この問いに関する完璧な答えを即座に与えることは難しい．しかし，一般に，各々の論理体系に属する命題が特徴的に持つ性格とは，当の論理体系の基本に据えられている論理的アイデアや理念といったもの—つまり，その論理体系がまさにそのことを探究するために設計されたと言えるような，この論理体系の根本目的—によって規定されており，いわばその反映に他ならないと考えてよいはずである．したがって，各論理体系の理念や目的を明らかにすることで各論理体系が扱う命題の特徴を捉えることができるのではないかと考えられる．このように考えるのならば，特に古典論理と直観主義論理のケースについては，次のように，非常に見通しの良い対比を認めることができる．

*15 ここでは，「直観主義論理より弱い論理」というときには，「含意」に着目しているが，もちろん例えば，「否定」を原始的な結合子と見たときには，否定を基準にし，その性質を弱く（あるいは，強く）していくことで様々な論理体系を手にすることもできる．

1.2.1　古典論理と直観主義論理の論証概念

古典論理と直観主義論理では，ある命題が一度成り立つ，あるいは，仮定して良い，ということがわかったら，その命題を何度も使って推論することが許される．ここでは詳しく述べないが，線形論理などで扱われている命題のように，証明で一度使用されたら，消費され消えてしまうような命題も考えることができる[*16]．では，古典論理と直観主義論理の命題の違いはどこにあるのだろうか．この点について，以下で見ていこう．

まず，大まかに結論から述べてみることにする．直観主義論理の中心的関心は，論証過程そのもの，つまり，一定の仮定が与えられたとき，そこからいかにして何らかの帰結が論証されうるかという $\langle$ 過程自体 $\rangle$ にあると考えることができる．これに対して，古典論理の場合，もちろんここでも論証は常に重要ではあるが，しかしその主たる関心は，論証過程以上に，そこで何が論証されるか，つまり，$\langle$ 論証の結果 $\rangle$ の側にある．この点は選言特性についての議論を例に考えるとわかりやすい．選言特性とは次のように与えられる[*17]．

命題 1 (選言特性)**.** 直観主義論理で $A \vee B$ が証明可能（$\vdash_{\mathbf{Int}} A \vee B$）ならば，$A$ が証明可能である（$\vdash_{\mathbf{Int}} A$）か B が証明可能（$\vdash_{\mathbf{Int}} B$）であるかのいずれかが直観主義論理で証明可能.

直観主義論理に対しては，このように選言特性が成り立つが，古典論理の場合には，これは必ずしも成り立たない．その最も簡単な例は，$P \vee \neg P$ である．このとき，「$\vdash_{\mathbf{CL}} P \vee \neg P$」ではあるが，「$\nvdash_{\mathbf{CL}} P$」であり，かつ「$\nvdash_{\mathbf{CL}} \neg P$」である．この違いは何を意味しているのだろうか．選言特性の証明を参考に考察をするのがわかりやすいが，直観主義論理では，帰結の候補となるような幾つかの選択肢が与えられているとき，あくまでその選択肢の中の特定の一つが（直観主義的に許された）推論規則に従って，導き出されていなくてはならない，ということである．これは，もう少し一般化して言うと次のようになる．すなわち，直観主義論理では，論証とは何よりも「構成的（constructive）な論証」—その一つ一つの推論ステップにおいて，常に，仮定（前提）から帰結（結論）が実効的（effective）

[*16] 線形論理については第 5 章で見る．

[*17] ここでの選言特性は，仮定が空である場合であるが，仮定が空でない場合も十分に考えられる (Troelstra and Schwichtenberg 2000, Theorem 4.2.3).

な仕方で産出されることとなっているような論証—でなければならず[*18]，直観主義論理の体系の基底にある考え（目的）とは，まさに，このような構成的な論証と認めることのできるあらゆる可能な論証を（しかもそうした論証のみを）構築可能にさせるような論理体系を作ることである．

他方，古典論理の場合には，排中律を例にとれば最もわかりやすいが，帰結となる幾つかの候補があるとき，そのいずれかが間違いなく導き出されることは要求されていない．では，こうした古典論理の基本にある考えはどのようなものだろうか．よく知られている通り，古典論理では文結合子についての真理関数的意味論という特徴的な考えが採用されており，さらにその前提として，いかなる命題（特に，原子命題）も真か偽のいずれか一方に定まるという二値原理の考え方が採用されている[*19]．では，それはなぜだろうか．それは一言で言えば，古典論理の目的が，いわゆる「トートロジー（恒真命題）」（論理式 A がトートロジーであるとは，A 中に現れるどの原子命題 P についても，P が真であろうと偽であろうと A 自身は真になる，ということである）の概念を明確化し，さらにはその論証を行うこと，つまり，あらゆる可能なトートロジーを（しかもそれらのみを）論証することができるような体系を構築することにあるからである[*20]．では，古典論理がそうした目的を追究することにはどのようなポイントがあるのだろうか．

のちにクリプキモデルとの関係で補足するが，一般に直観主義論理やそれより弱い論理では，二値原理の考えは採用されておらず（実際，直観主義論理やそれ以下の体系では，原子命題は真でも偽でもない場合があってもよい），これに伴って，文結合子についての真理関数的な見方も取られてはいない．その意味で，古典論理の考えは，（常識的・一般

---

*18 ここでの実効的な手段とは，推論における帰結を間違いなく導き出す手段のことを指す．

*19 真理関数的な性格を持つものとして結合子の性質をまとめたものが真理表である．ここでは，古典論理の「含意」($A{\supset}B$) の真理表のみ与える．

A\B	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

このとき，A と B は各々真にも偽にもなる可能性を持っており，その組み合わせの仕方によって $A{\supset}B$ の真偽が計算される．この表からもわかるように古典論理の「含意」は，前件 A が偽でも，$A{\supset}B$ は全体として真になってしまう．これは古典論理の「含意」が直観主義論理の「含意」とは異なり，「含意」式の前件と後件の繋がりに重きを置いていないということ，全体として真になれば細部は気にしないと考えているということの表れであると言える．

*20 この点を踏まえれば，古典論理において「$\vdash_{\mathbf{CL}} (P{\supset}Q){\supset}(\neg P \vee Q)$」であるのは問題なく，望ましいことである．というのも，この論理式の前件 $P{\supset}Q$ が真の場合には，必ず $\neg P$ が真であるか，Q が真であることとなり，$(P{\supset}Q){\supset}(\neg P \vee Q)$ はまさにトートロジーとなるからである．

的に信じられていることとは異なって）かなり独特で，極端なものであるとさえ見えるようなものであると言える[*21]．しかし同時に，古典論理的な二値的・真理関数的な捉え方が，それ以外の弱い論理の結合子の捉え方と不整合であるわけではなく，それは弱い論理の結合子の捉え方と整合的な範囲内での最大限の強化となっている，ということを念頭に置いておく必要がある．実際，例えば，直観主義論理のクリプキモデルを参照することによって理解されるとおり，一般に一つの論理式に登場する原子式の真偽がすべて確定している場合には，その論理式全体の真偽は，たとえ直観主義的な方法に従って算出したとしても，古典的な真理関数を用いて算出した場合と完全に一致する．つまり，古典論理は，二値原理および真理関数的解釈を採用することで，より弱い論理における文結合子の働きと整合性を保ちながら行いうる最大限の強化（定理の増大）を行った，文字通りの極限的体系に他ならないのであり，ここに古典論理という体系の固有のポイントが認められるということである．

こうして，直観主義論理と古典論理との対比は，最も基本的には，それぞれの体系が何を目的としているのかにあり，特に，論証という営みのどのような側面に焦点を据えるのかという点にあることが分かる．ここで，以下の点について考えてみよう．一般に，一つの論理体系が具現する論証的連関（「$\vdash$」によって表される関係）をもっとも直接に反映する文結合子は，「含意」であると考えてよい．これは言い換えれば，一般に一つの論理体系が何を目的とするか（論証関係のどのような側面に焦点を当てるか）は，まさにその論理体系における「含意」の振る舞いのうちに基本的には反映されていると考えてよい，ということである．しかし，その一方で，直観主義論理よりも弱い **BPL** や **F** といった論理は，文結合子「含意」の性質を変える（弱める）ことによって得られるため，$\vdash$ の働きが完全に「含意」結合子に反映されていると見ることはできず，これらの論理では，「連言」や「選言」結合子の性質にも注意しなければならない．したがって，ここまでの考察を次のようにまとめることができる．すなわち，古典論理から直観主義論理を経て **BPL**，**F** 等へと下っていく命題論理の諸論理の階層構造は，直接には「含意」の論理的強さの違いを識別指標とすることで特徴づけることができる．しかし，実はその根底には，直観主義論理と古典論理のケースについて見てきたように，それぞれの論理が論証活動というものの何を（どのような側面を）焦点化しようとしているかの相違・対比（強弱関係）そのものがある．以上のことを踏まえて，この点をさらに究明していくことで，それぞれの論理

[*21] 古典論理を拒否し，直観主義論理を擁護する議論は M. ダメットなどによって与えられる．(cf. (Dummet 1975))

に属する命題が持つ特徴的な性格を，より明らかにしていくことが可能であると考えられる，ということである．そして，ここで見た非様相論理の各論理の階層構造の識別指標は，あとで見るように，様相論理に話を移してみれば，必然性演算子（$\Box$）の論理的強さの違いとしてもよいということがわかる．この点については，後ほどさらに詳しく検討していくこととする．

1.3　様相論理

1.3.1　様相論理の体系

ここでいう様相論理とは，後で詳しく述べるが，古典命題論理に対して，必然性演算子 $\Box$ と可能性演算子 $\Diamond$（$\Diamond$ は $\neg\Box\neg$ と定義可能）を加えた体系，つまり，古典論理を拡張した体系のことである．先ほど見たように，古典論理に登場する文結合子は真理関数として解釈されているため，様相論理の体系の場合にもそこに登場する演算子は，こうした真理関数的な見方をベースとし，あくまでその拡張として理解されるべきであると思われるかもしれないが，文結合子とは異なる様相演算子としての $\Box$ や $\Diamond$ については，素朴な真理関数的な解釈を与えることはできない．しかし，のちに説明するクリプキモデルの手法から明らかなように，$\Box$ や $\Diamond$ についても真理関数的解釈の自然な拡張と言えるような，真理条件的解釈を行うことができる．ところがそれと同時に，様相論理というものを古典命題論理の単純な拡張であると捉えるのは，様相論理が持つ表現力についての重大な見落としに繋がってしまう．それは，古典論理より弱い論理である，直観主義論理や，**BPL**，**F** 等において扱われている命題に対して，一定の適切な翻訳手続き（のちに見る，**S4** 翻訳）に従って，様相論理に属する一定の命題を対応させると，この様相論理の命題はその推論上での振る舞いに関して，翻訳される前の命題がもとの論理体系で果たしていた役割と等価であることが示せるからである．ではなぜこのようなことが起こるのだろうか．それは簡単には，もとの非様相論理の体系における原子命題 P を様相論理の原子命題 P へと翻訳するのではなく，$\Box P$（あるいは，$P\&\Box P$）へと翻訳しているからである．そしてこのとき，もう一つ重要なことは，もとの論理体系での「$A{\supset}B$」を「$\Box(A^{\Box}{\supset}B^{\Box})$」へと翻訳していることである（後ほど説明するが，ここでの「$\supset$」は（より正確には，古典論理の「含意」）と同じと考えて良い．また，「$(\cdot)^{\Box}$」は非様相論理の論理式を様相論理の論理式へと翻訳する翻訳関数を表す）．以上のことから，直観主義論理以下の弱い論理体系の原子命題は，様相論理の $\Box$ 演算子付きの原子命題によってシミュレートされるということ，こ

のときのポイントが，$\Box$ の性質（特に，$\Box$ が論証上でどのような役割を果たすのかという点）にあるということが予想できるということがわかる．非様相論理の原子命題が様相論理の $\Box P$ へと翻訳されるということについては，また後ほど詳しく見る．

では，もう少し，$\Box$ が論証上でどのような役割を果たすのかという点について考察をしてみよう．実は，現在では，$\Box$ や $\Diamond$ の理解の仕方としては，多様なものが提案されている[*22]．しかし，ここでは最も弱い様相論理の体系（以下で見る **K**）から，最も強い部類の体系（**S4** や **S5**）までを通じてほぼ一貫しており，また基本的であると考えられる，「〜は確立済み」という読み方で説明してみよう[*23]．そこで，$\Box$ と $\Diamond$ を「$\Box P$: P は（論証やその他の検証手段を通じて）十分に確立済みである/$\Diamond P$: $\neg P$ が確立されているわけではない．P の余地がある」と読むことにし，議論を進めていくことにする．この読み方を採用したのには幾つかの理由がある．まず第一に，今も述べたように，弱い体系から強い体系まで，おおよそ一貫してこの読み方を維持できるということ，第二に，ここでは詳しく述べないが，$\Box$ や $\Diamond$ の読み方の一例である認識様相的な読みや，義務様相的な読みも若干の条件を加えれば，ここでの読み方から派生させることが可能であると予想されること，そして第三に，後ほど検討する**様相同伴** (*modal companion*)（簡単には，強弱様々な非様相論理の体系に対して，その各々に対応する適切な様相論理が存在し，前者から後者への埋め込みが可能であるということ）の意義を理解するために，この読み方が最も最適であるということ，である．では以下で，第一の理由で言及した点についてもう少し詳しく見ていこう．

1.3.2　様相論理の公理

様相論理の公理系の説明に入る前に，様相論理の語彙と論理式について確認しておく．

定義 10 (語彙)**.**

命題変数　$P, Q, R, \ldots$

[*22] このとき，もっとも有名なものは，アリストテレスからライプニッツへと受け継がれてきた真理様相的な読み方，すなわち，「$\Box P$: P は必然的/$\Diamond P$: P は可能的」である．しかし他にも，（厳密には，公理のうち，どれを採用するのかに応じて様々な違いが生じてくるが）例えば，「$\Box P$: P ということが知られている/$\Diamond P$: P でないとは知られていない（P かもしれない）」というような認識様相的な読みや，「$\Box P$: P を行うべきではない/$\Diamond P$: P が禁じられているわけではない」という，義務様相的な読みも十分正当なものと認められている．

[*23] この読み方は，A. S. トルルツトラによって指摘されたように，ゲーデルによっても，**S4** 翻訳の際にも用いられている．この点に関する議論は，後ほどより詳しく説明を与える．

論理記号　$\bot$（矛盾），&（連言），$\vee$（選言），$\supset$（含意），$\Box$（必然性）

補助記号　(，)

このとき，命題変数の可算無限集合を Prop と書き，以下用いる．語彙を定めたら，次は論理式を定義する．

定義 11 (様相論理の論理式)**.**

(i) 命題変数と $\bot$ は論理式.

(ii) A, B が論理式なら，$(A\&B)$, $(A\vee B)$, $(A\supset B)$, $(\Box A)$ も論理式.

(iii) 以上のみが論理式.

$\Diamond A$ は $\neg\Box\neg A$ と定義する．定義 1 に，論理記号として $\Box$ を加えたものを様相論理の語彙とする．それに伴い，$(\Box A)$ を定義 2 の二つ目の項目に加えたものが様相論理の論理式となる．

定義 12 (様相論理 **K** のヒルベルト系)**.**

Ax1 $A\supset(B\supset A)$

Ax2 $(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$

Ax3 $A\supset(A\vee B)$

Ax4 $B\supset(A\vee B)$

Ax5 $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$

Ax6 $(A\&B)\supset A$

Ax7 $(A\&B)\supset B$

Ax8 $(C\supset A)\supset((C\supset B)\supset(C\supset(A\&B)))$

Ax9 $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$

Ax10 $A\supset(\neg A\supset B)$

Ax11 $A\vee\neg A$

Ax12 $\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$

$$\frac{A\supset B \quad A}{B}\ (MP)$$

$$\frac{A}{\Box A}\ (NR)$$

様相論理の論理体系は, 古典論理の論理体系に, $\Box$ についての推論規則と公理を加えることで手にすることができる．$\Box$ についての推論規則は, ふつう「必然化規則 (necessitation rule)」と呼ばれる．

一般に，□ 演算子を体系内に導入する場合，もっとも基本的には，次のような理論的意図があると考えてよい．すなわち，□ 演算子は，当該の論理体系に対する**メタ言語**（この体系の諸性質について語るための高次の言語）に属する記号としての「⊢」—定理性というメタ概念を表す記号—の働きを，体系自身の中で（可能な範囲で）シミュレートする（つまり，体系に一定の仕方で内在化させる）ためのものである*[24]，ということである．この角度から考えるならば，上記の必然化規則の趣旨は，A が証明されているならば，$\Box A$ もまた証明される（A だけでなく，$\Box A$ 自身をも「証明された命題」として考えてよい）ということになる．というのも，それは，$\Box A$ の（目下意図されている）意味合いが，「A は証明されている」ということに他ならないからである．

このことは，必然化規則についてだけではない．□ についての様々な公理もまた，ある程度，もっともと言える範囲で，上のような趣旨に従って理解することができる．では以下で，この点について見ていこう．ただし，目下の説明では，「□」がシミュレートしようとしているのは，基本的に「⊢」（ある体系内での証明可能性，定理性を表す記号）そのものであるとしたが，実際には，□ によって意図されている概念を，単純に，個々の体系に特殊化された「⊢」の働きのシミュレーションだけにあるかのように理解するのは適切でないということに注意しておかなければならない．というのも，一般に論理体系が変われば，それに応じてその体系に対応する定理性の概念も変わり，つまり「⊢」の意味も変わると考えてよいが，しかし本来 □ が意図しているのは，そうした相違を超えた，より一般的・根本的な意味合いでの定理性を捉えることであるからである．このような理由により本論では，ひとまず「$\Box A$」の読みとして，「命題 A は十分に確立済みとなっている（well established)」という言い回しを用いているのである．

それでは，具体的な検討に入っていこう．□ の働きを定める公理は，一つではなく複数あるが，このことは様相論理にとって重要な特徴の一つである．ただし，その複数ある公理の中には基本的なものとそうでないものが存在する．一番基本となるのは，K 公理：$\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$ であり，この公理に加えて他のどの公理を採用するかによって □ の意味合いは変わってくる．K 公理の直観的な意味は，⊃ 上での □ の分配であり，A が B を含意すること（$A\supset B$ が確立済みで，その前件 A も確立済みなら，その後件 B も確立済みということである．また，この K 公理は，□ 式に対する (MP) の適用を許すもの

*24 このように，演算子はメタ概念を当該の論理体系に反映させているという見方は，文結合子についても可能であるということが (Sambin et al. 2000) で議論されている．この点については第 5 章で詳しく見る．

表 1.1　公理図式と到達可能性関係の対応

公理の名前	公理図式	到達可能性関係
K	$\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box)$	なし
T	$\Box A\supset A$	反射性
B	$A\supset\Box\Diamond A$	対称性
4	$\Box A\supset\Box\Box A$	推移性
5	$\Diamond A\supset\Box\Diamond A$	ユークリッド性
D	$\Box A\supset\Diamond A$	継起性
.2	$\Diamond\Box A\supset\Box\Diamond A$	有向性
.3	$\Box(\Box A\supset B)\vee\Box(\Box B\supset A)$	連結性

とも言われる．K 公理の次に基本的でよく用いられるのは T 公理：$\Box A\supset A$ である．T 公理の意味するところは，確立済みの命題は成立する，といったことであると理解してよいと言える．さらに以上に加えて，ふつう「4 公理」と呼ばれるもの，$\Box A\supset\Box\Box A$ や，また「5 公理」と呼ばれるもの，$\Diamond A\supset\Box\Diamond A$ などが必要に応じて加えられていく．4 公理の趣旨は，A が確立済みであれば，まさに「A が確立済みである」こと自体が確立済みである，といったことであるが，のちに説明するクリプキモデルの考えを参照して捉えた方がわかりやすいと思われる．クリプキモデルによれば，4 公理が意味しているのは，可能世界—大まかに言って，私たちが不断に進展させていく命題の確立の営みのプロセスにおける，個々の段階，フェーズといったものと考えてよい—の間の到達可能性関係が，いわゆる「推移性」を持つことであり，言い換えれば，各可能世界（命題を確立する営みの中の各フェーズ）は，そこから始まる到達可能性関係の系列に登場するすべての可能世界（より後のフェーズ）に直接到達しうるということ，つまり，各可能世界で確立された諸命題は，その世界を引き継いで進展していくプロセスすべてを通じて，一貫して確立済みのものとして保存される，ということである．他方，5 公理の趣旨は，一般に命題 A の否定が確立されていない（つまり $\Diamond A$ である）ならば，このとき，そのこと自体は確立済みだとしてよい，ということであり，実はかなり強い性格のもの（ある意味で，命題の確立の営みを無時間化し，この営みからプロセスといった進展の性格を取り去るもの）と見ることができる．この点については，先の 5 公理 $\Diamond A\supset\Box\Diamond A$ の双対の形の公理 $\Diamond\Box A\supset\Box A$ を用いて考えた方が，よりわかりやすい．$\Diamond\Box A\supset\Box A$ は，A を確立することが可能であるな

ら，A を確立することができるということを表現している．確立する見通しが得られたということは，いずれ確立するということの保証が得られたということであり，これすなわち，無時間的ということである．

先に挙げた公理たちの間には，複数の公理から別の公理を導き出すことができるといったような関係がある．例えば，T 公理と 5 公理からは，4 公理が帰結する．この証明は，次のように与えられる．まず，T 公理から $\Box P \supset \Diamond \Box P$ が導き出せる．このとき，**S5** では，$\Diamond \Box P \equiv \Box \Diamond \Box P$ であるため，先の T 公理の例より，$\Box P \supset \Box \Diamond \Box P$ である．また，**S5** では，$\Box P \equiv \Diamond \Box P$ でもあるため，結局 $\Box P \supset \Box \Box P$ となる．このとき，$\Box$ の働きはどの公理を認めるかによって変化してくるので，働きの異なる $\Box$ の種類の数だけ，様々な様相論理の体系を考えることができる．したがって，最も簡単で基本的な体系は，古典論理に新しい規則として先ほど見た必然化規則を加え，新しい公理としては K 公理だけを加えた体系であると考えられる．この体系は，様相論理 **K** と呼ばれる最も基本的な様相論理の体系で，この体系にどの公理を加えるかによって，様々な様相論理の体系を考えることができる．例えば，様相論理 **K** に T 公理を加えた **KT** や，4 公理を加えた **K4** などが考えられる．また，4 公理と T 公理を加えた **KT4**（普通，**S4** と呼ばれる），5 公理と T 公理を加えた **KT5**（普通，**S5** と呼ばれる）などもよく知られた様相論理の体系であるが，先ほども少し触れたように，のちにこれらは本論の議論において重要な役割を果たすことになる．ではここで，様相論理のヒルベルト系についてみてみよう．様相論理の **K** のヒルベルト系は古典論理のヒルベルト系 **HK** に K 公理：$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ を加え，推論規則として必然化規則を加えることによって手にできる．また，**S4**（**KT4**）は様相論理の **K** のヒルベルト系に 4 公理：$\Box A \supset \Box \Box A$ を，**S5**（**KT5**）は様相論理の **K** のヒルベルト系に 5 公理：$\Diamond A \supset \Box \Diamond A$ を，それぞれ加えれば手にできる[*25]．

ここまで，$\Box$ や $\Diamond$ の意味を明らかにするために $\Box A$ や $\Diamond A$ という論理式が論証の中でどのような働きをするのかという側面（構文論的特徴付け）から考察をしてきた．しかしすでに触れた通り，視点を変えて，$\Box A$ と $\Diamond A$ が一体どのような状況や手段といったものを表すのか，言い換えると，$\Box A$ と $\Diamond A$ が真となる（あるいは，偽となる）のはどのような条件のもとにおいてか，という側面（意味論的特徴付け）を考えることも可能である．そこで次に，この点を考察しよう．

[*25] 様相論理のヒルベルト系については (Chagrov and Zakharyaschev 1997, 佐野 2016) などに詳しい．

1.3.3　必然性演算子の真理条件

すでに簡単に見たが，古典論理では各命題は真か偽のいずれか一方に定まるものとみなされている．この点についてもう少し踏み込んだ言い方をしてよいのであれば，命題というものは，真偽のどちらにもなりうるようなものと考えることができるということである．つまり，私たちが日常の中で行う推論で扱っている命題というものは，古典論理の命題のように真偽が確定しているような強い命題ではなく，その時の状況や時間的要素に影響を受けて真偽が変わってくるような命題であるということである．そこで，古典論理では扱うことができない命題を扱うことができるような，つまり，状況や時間について扱うことができるような演算子が必要になってくる．それが，$\Box$ や $\Diamond$ である．したがって，$\Box A$ は「現状がどう変わりえようとも A」を意味することになる[*26]．そしてこれを形式化して整理したものが，クリプキによって与えられた様相論理のクリプキモデルである (Kripke 1963a,Kripke 1963b)．さて，様相論理の論理式の真偽の値について考察を行うためには，古典論理の真理表のようなものがなければならない．様相論理は古典論理を拡張して得られる論理なので，古典論理に含まれる結合子については特別気をつける必要はないが，$\Box$ 式や $\Diamond$ 式の真理値を与えてくれるものが必要になる．それはクリプキモデルにおいて以下のように定義される：

ある状況（世界）で $\Box A$ が真 $\Leftrightarrow$
その状況（世界）から見てあり得る全ての状況（世界）を考えて，それらすべてで A が真

つまり，現状から想定されるすべての状況を考えて，それらすべてでその論理式 A が成り立っている（真である）のならば，現状でその論理式は必然的に成り立っている（真である）と考えてよい（つまり，$\Box A$）ということである．この定義において重要なことは，$\Box$ 式がある世界で真になるかどうかを定めるには，今現在の状況だけではなく，周囲の状況（可能な世界）の状態も考慮しなければならないということである．そのため，クリプキモデルは可能世界意味論とも呼ばれる．今後，わかりやすさのために，「状況」と表現したものは「世界」と呼ぶことにする．以下で，クリプキモデルに関係する諸定義を与え

[*26] さらに言えば，ある命題 A に，$\Box$ 演算子を適用した $\Box A$ の直観的な意味は，「可能なすべての状況を考えて，そのすべての状況で A が成り立つなら，A が成り立つのは “必然”」と考えることができる．同様に，$\Diamond A$ は「考えられる状況のうち，一つでもよいので A が成り立つなら，A が成り立つのは “可能”」ということを意味していると考えることができるということである．

ておく．

定義 13. もし，W が非空な集合で，$R \subseteq W \times W$ である時，$\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ は**フレーム**（*frame*）という．もし，$\langle W, R\rangle$ がフレームで，V が $\mathsf{Prop} \to \mathcal{P}(W)$（ここで，$\mathcal{P}(W)$ は W の冪集合 $\{X \mid X \subseteq W\}$）なる写像であるとき，$\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ は**モデル**（*model*）という．このとき，V を**付値**（*valuation*）と呼ぶ．

定義 14 (様相論理の充足条件)**.** 任意のモデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$，任意の $w \in W$，そして，任意の論理式 A に対して，**充足関係**（*satisfaction relation*）$\mathfrak{M}, w \models A$（「$A$ が $\mathfrak{M}$ の w で真である」を表す）が以下のように帰納的に定義される：

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{M}, w \models P & \Leftrightarrow & w \in V(P), \\
\mathfrak{M}, w \models \bot & & \text{成り立たない} \\
\mathfrak{M}, w \models A \& B & \Leftrightarrow & \mathfrak{M}, w \models A \text{ かつ } \mathfrak{M}, w \models B, \\
\mathfrak{M}, w \models A \vee B & \Leftrightarrow & \mathfrak{M}, w \models A \text{ または } \mathfrak{M}, w \models B, \\
\mathfrak{M}, w \models A \supset B & \Leftrightarrow & \mathfrak{M}, w \models A \text{ ならば } \mathfrak{M}, w \models B, \\
\mathfrak{M}, w \models \Box A & \Leftrightarrow & wRw' \text{ なる任意の } w' \in W \text{ について}, \mathfrak{M}, w' \models A.
\end{array}
$$

このとき，V を原子命題だけではなく任意の論理式に対しても用いることができるように拡張しておく．$V(A)$ は，そこで A が真になるような状態の集合を表すこととする：

$$V(A) := \{w \mid \mathfrak{M}, w \models A\}.$$

定義 15 (妥当性)**.**

- A がモデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ で妥当である（$\mathfrak{M} \models A$ と書く）$\Leftrightarrow$ すべての $w \in W$ に対して，$\mathfrak{M}, w \models A$.
- A がフレーム $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ で妥当である（$\mathfrak{F} \models A$ と書く）$\Leftrightarrow$ すべての V とすべての $w \in W$ に対して，$\mathfrak{M}, w \models A$.
- A がフレームのクラス $\mathbb{F}$ で妥当である（$\mathbb{F} \models A$ と書く）$\Leftrightarrow$ すべてのフレーム $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}$ に対して $\mathfrak{F} \models A$.

各世界の間には，状態の進展や変化という形で関係が付いており，もう少し一般的な言い方をすれば，各世界は到達可能性関係によって定義されていると考えてよい．この到達可能性関係は，$\Box$ の充足条件を定義する際に重要な働きをする．つまり，到達可能性関係が変われば，その変化に応じて，$\Box$ の性質も変わってくるということである．到達可能性関係が $\Box$ 演算子を特徴付けることについてはひとまず措き，到達可能性関係の性質が変化

表 1.2　到達可能性関係

性質の名前	フレーム条件
反射性（Reflexivity）	$\forall x(xRx)$
推移性（Transitivity）	$\forall x, y, z(xRy \& yRz \supset xRz)$
対称性（Symmetry）	$\forall x, y(xRy \supset yRx)$
連結性（Connectedness）	$\forall x, y, z((xRy \& xRz) \supset (yRz \vee zRy))$
継起性（Seriality）	$\forall x \exists y(xRy)$
有向性（Directedness）	$\forall x, y, z((xRy \& xRz) \supset \exists w(yRw \& zRw))$
ユークリッド性（Euclidean）	$\forall x, y, z(xRy \& xRz \supset yRz)$

するとはどういうことなのかということについて見ていくことにしよう．到達可能性関係の例としては，表 1.2 のようなものがあげられる．このとき，各世界は，変項 $x, y, z, \ldots$ を用いて表すこととし，$x, y, z, \ldots$ は W 上を走る．ここでは xRy は「x は y へ到達可能である」ということを表すこととする．

到達可能性関係はいろいろな性質を組み合わせることができ，その組み合わせによって，各世界の間の関係は変わってくる．このとき，到達可能性関係も，公理の場合に見たように，複数の性質から別の性質を導き出すことができる．例えば，反射性（$\forall x(xRx)$）とユークリッド性（$\forall x, y, z(xRy \& x\mathsf{R}z \supset yRz)$）からは推移性（$\forall x, y(xRy \supset yRx)$）を導き出すことができる．その証明を簡単にみていこう．まず，任意の x, y を考え，xRy を仮定する．次に，反射性を x で例化し xRx を，ユークリッド性を x, y で例化し $(xRy \& xRx \supset yRx)$ を，それぞれ手にする．今，仮定した xRy と反射性の例化によって導かれた xRx より，$xRy \& xRx$ であり，ユークリッド性の例化の結果帰結した $(xRy \& xRx \supset yRx)$ と合わせて，yRx を手にする．

このように，到達可能性関係の範囲をどのように決めるかによって，各世界の間の繋がりも変化してくると考えることができる．つまり，先ほども述べたように，到達可能性関係は $\Box$ 演算子の働きを定めるための前提であるため，その変化に応じ，$\Box$ の性質も変化してくるということである．演算子の充足条件を考える際に，到達可能性関係が重要な役割を果たすということは，直観主義論理の「含意」の充足条件を考えるときにも大事になってくる考え方であるが，この点については後でみる．

到達可能性関係の範囲が変化するのに応じて，$\Box$ の意味が変化してくるというのは，K

公理を基本とし，加える公理の種類によって □ の働きが異なってくることに似ている．では，これらの間に何か関連はあるのだろうか．4 公理と推移性の関係については少し触れたが，実は，□ の各公理とクリプキモデルの各到達可能性関係との間には以下で定義するような対応関係がつくことが知られている[*27]．

定義 16 (定義可能性)．論理式の集合 Γ がフレームのクラス $\mathbb{F}$ を定義するのは任意のフレーム $\mathfrak{F}$ について

$$\mathfrak{F} \models \Gamma \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{F} \in \mathbb{F}$$

が成り立つ場合である．フレームのクラス $\mathbb{F}$ が定義可能であるのは，論理式の集合 Γ が存在して，Γ が $\mathbb{F}$ を定義する場合．

定義可能性の例は例えば，表 1.1 のように与えることができる．公理と到達可能性関係の間にこのような関係が存在するため，クリプキモデルは公理の組み合わせによって様々な体系を考えることができる様相論理の意味論を一様な仕方で与えることができるのである．つまり，□ や ◇ の働きの違いは，各公理が対応する到達可能性関係によって整理し，説明することができるということである．

1.3.4　様相論理の階層性

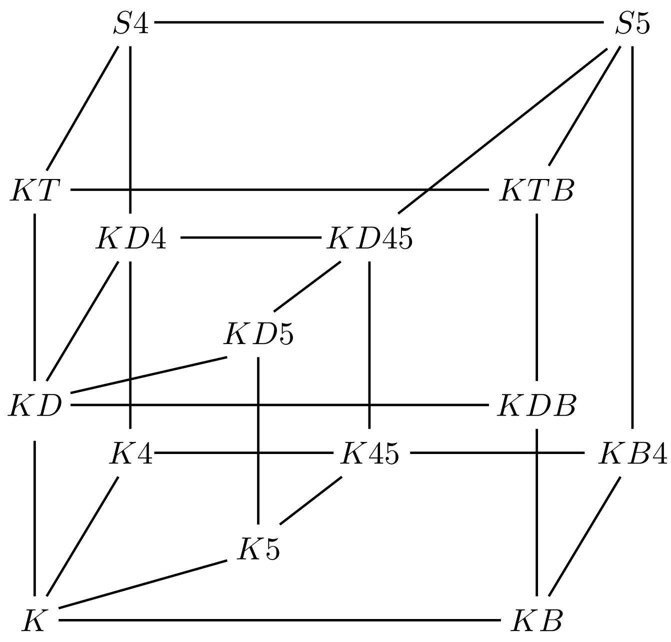
先に見たように，□ や ◇ の働きは，公理や到達可能性関係の組み合わせを変えることで，様々な種類のものが考えられる．そのため，様相論理の体系間には，先に説明したような強弱関係が存在し，例えば表 1.3 のように並べることができる．この表は，様相論理の各体系がどの公理によって特徴付けられるのか，そのときどの到達可能性関係が対応するのかについてまとめたものである．

直観主義論理と古典論理の場合のように，公理が増えるとその体系内での定理が増えると概ね考えて良いので，ここでは様相論理 **K** が最も弱く，**S5** が最も強いといえる．つまり，ある種の範囲の様相論理は，証明できる定理の数に従って，あるいは，□ の働きに従って，一定の構造を形成していると考えることができるということである．

[*27] この点についての議論は (van Benthem 1984, 佐野 2016) に詳しい．

表 1.3　様相論理の体系の強さ

公理	到達可能性関係	様相論理の体系
K, T, 5	反射性，ユークリッド性	**S5**
K, T, 4, .3	推移性，反射性，連結性	**S4.3**
K, T, 4, .2	推移性，反射性，有向性	**S4.2**
K, T, 4	推移性，反射性	**S4**
K, 4	推移性	**K4**
K	なし	**K**



例えば，T, B, 4, 5, D の公理を組み合わせて相異なる 15 の様相論理 (Garson 2018) を与えることができる．では，このような構造を形成する □ 概念を用いて，非様相論理の構造はどのように説明・整理されるのだろうか．その点について以下で見ていくことにしよう．

1.4　埋め込み定理

本節では，非様相論理の各論理体系の特徴が様相同伴関係ということでどのように共通の基盤を持って説明されうるのかを見ていく．そのための準備として，まず直観主義論理

と **S4** との間の埋め込み関係について見る．

1.4.1　ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理

この非様相論理と様相論理との間の関係についての初めての結果は，直観主義論理と様相論理 **S4** の間の関係として，ゲーデルによって示された (Gödel 1933f)．このとき，ゲーデルが用いた翻訳は，本論で用いたものとは異なっており，次のように与えられる：

$$
\begin{array}{lcl}
\neg P & := & \Box P \\
(P \supset Q) & := & \Box P \supset \Box Q \\
(P \vee Q) & := & \Box P \vee \Box Q \\
(P \& Q) & := & (P \& Q)
\end{array}
$$

この翻訳を用いて，ゲーデルは直観主義論理を **S4** に埋め込み可能であるとを述べた．「$\Box P$」は「P が証明可能」と読む．ただし，このときの「証明可能」というのは，A. S. トルルツトラ (Troelstra 1986) が指摘しているように「何らかの正しい手段で証明可能」と読むべきである[*28]． (Gödel 1933f) においてゲーデルは，直観主義論理が様相論理 **S4** に埋め込み可能であることが成立すると述べ，この逆の関係については，その成立を指摘するに留めた．そして，その逆関係はマッキンゼイとタルスキによってさらに研究が進められ (McKinsey and Tarski 1948)，さらにその後，直観主義論理の論理式を **S4** の論理式へと翻訳する翻訳関数が以下のように整備され，与えられた[*29]．この翻訳のことを本論では **S4 翻訳**と呼ぶ：

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
P^{\Box} & := & \Box P & (A \& B)^{\Box} & := & A^{\Box} \& B^{\Box} \\
\bot^{\Box} & := & \bot & (A \vee B)^{\Box} & := & A^{\Box} \vee B^{\Box} \\
(A \supset B)^{\Box} & := & \Box(A^{\Box} \supset B^{\Box}) & & &
\end{array}
$$

先にも簡単に触れたが，この翻訳において重要なのは，原子式 P と含意式 $A \supset B$ についてである．この翻訳に従えば直観主義論理の原子式 P は **S4** の $\Box P$ へと翻訳される．つまり，直観主義論理ではそれ以上分割できない最も基本的なものであると考えられていた原子式は，実は，$\Box$ 演算子を用いて表現される必要があるような，つまり，非様相論理の範囲の演算子では説明することができない，様相的性質を持ったものと考えることができるということである．また，直観主義論理の $A \supset B$ は，**S4** の $\Box(A^{\Box} \supset B^{\Box})$ へと翻訳され

[*28] (佐野 2016) では，トルルツトラの解説とゲーデルの結果についてのより詳しい説明が行われている．

[*29] 直観主義論値の論理式を様相論理 **S4** の論理式へと変換する翻訳の定義にはいくつか種類があるが，ここでの定義は (Troelstra and Schwichtenberg 2000) による．

る．このとき，「含意」も，原子式の場合と同様に，古典論理の「含意」の力は借りることになるが，実はやはり，様相的性質を隠し持っているようなものと考えることができるということである．さて，この翻訳のもとで成り立つ，直観主義論理の論理式と **S4** の論理式との間の関係は，現在では，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理としてよく知られている：

$$\vdash_{\mathbf{Int}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathbf{S4}} \ A^{\Box}.$$

つまり，直観主義論理で何か論理式が証明可能であることと，**S4** でのその翻訳式が証明可能であることが同値である，ということである．

この結果は，直観的には，直観主義論理が様相論理 **S4** に埋め込み可能である，つまり，直観主義論理の命題が持つ性質は **S4** の $\Box$ の性質によって説明可能である（解釈可能である）ということを表している．このことから，直観主義論理の命題というのは，実は様相的性質を持つようなものであり，その様相的性質は **S4** の $\Box$ によって特徴付けることができるような性質であると考えて良いということが明らかになったということである．では，他の非様相論理の体系についてはどうだろうか．以下で見るように，直観主義論理以外の非様相論理も直観主義論理の場合と同じ翻訳を用いてそれぞれ対応する様相論理に埋め込み可能である[*30]．そのことについて見るために，非様相論理の構造を考える際に重要となる「含意」についてもう少し考察していくことから始めよう．

1.4.2　非様相論理たちが織り成す構造

直観主義論理の真偽の決め方は，真理関数的ではなく，クリプキモデルによって与えることが可能であることについては先に簡単に触れた．様相論理のクリプキモデル同様，直観主義論理のクリプキモデルを与えたのもクリプキ (Kripke 1965) である．ここではまず，**F** についてのクリプキモデルの定義を与える．

定義 17 (**F** のフレームとモデル)**.** もし，W が非空な集合で，$R \subseteq W \times W$ であるとき，$\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ は**フレーム**（*frame*）という．もし，$\langle W, R \rangle$ がフレームで，V が $\mathsf{Prop} \to \mathcal{P}(W)$（ここで，$\mathcal{P}(W)$ は W の冪集合 $\{X \mid X \subseteq W\}$）なる写像であるとき，$\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ は**モデル**（*model*）という．このとき，V を**付値**（*valuation*）と呼ぶ．

[*30] ただし，直観主義論理より弱い論理，**BPL** や **F** などを同時に扱おうとするときには，あとで見る $(\cdot)^{\boxplus}$ 翻訳が用いられる．$(\cdot)^{\boxplus}$ 翻訳では，原子式 P は $P\&\Box P$ へと翻訳される．

定義 18 (**F** の充足条件)**.** 任意のモデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$，任意の $w \in W$，そして，任意の論理式 A に対して，**充足関係**（*satisfaction relation*）$\mathfrak{M}, w \models A$「$A$ が $\mathfrak{M}$ の w で真である」が以下のように帰納的に定義される：

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{M}, w \models P & \Leftrightarrow & w \in V(P), \\
\mathfrak{M}, w \models \bot & & \text{成立しない} \\
\mathfrak{M}, w \models A\&B & \Leftrightarrow & \mathfrak{M}, w \models A \text{ かつ } \mathfrak{M}, w \models B, \\
\mathfrak{M}, w \models A \vee B & \Leftrightarrow & \mathfrak{M}, w \models A \text{ または } \mathfrak{M}, w \models B, \\
\mathfrak{M}, w \models A \supset B & \Leftrightarrow & wRw' \text{ なる任意の } w' \in W \text{ について，} \mathfrak{M}, w' \models A \text{ ならば } \mathfrak{M}, w' \models B.
\end{array}
$$

非様相論理のクリプキモデルを考えるときに重要なのは，「含意」についてである．一般に，非様相論理の各論理体系のクリプキモデルは，**F** のクリプキモデルに，各々必要な条件を加えることで手にできる．直観主義論理のクリプキモデルは，**F** のクリプキモデルの定義のフレーム条件に反射性と推移性の条件を加え，そして，付値関数についての単調性の条件を加えれば手にできる．

定義 19 (直観主義論理のフレームとモデル)**.** 空でない集合 W と W 上の反射性と推移性を満たす二項関係 R の対 $\langle W, R\rangle$ を直観主義論理フレームという．$\langle W, R\rangle$ を直観主義論理フレームとする．また，V を命題変数 P に対し $V(P) \subseteq W$ となるような写像とする．もし，すべての $w, w' \in W$ と $P \in \mathsf{Prop}$ に対し，wRw' であり，かつ $w \in V(P)$ であるなら $w' \in V(P)$ であるとき，V は**単調**（*monotone*）であるという． もし，付値 V が単調なら，$\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ を単調という．

任意の直観主義論理モデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$，任意の $w \in W$，そして，任意の論理式 A が与えられたとき，充足関係の定義は，定義 18 と同じで良い．

非様相論理のクリプキモデルにおける「含意」が述べているのは以下のこと：

ある世界で $A{\supset}B$ が真 $\Leftrightarrow$
その世界から見てあり得る全ての世界を考えて，それらすべてで A が真なら，B も真

この定義から，直観主義論理の「含意」の真偽は，段々に決まっていく世界の状態を考慮して決められているものであり，現在の世界から考えられるすべての状況で，A が確立されているなら同時に B も確立されていることこそが，まさに今ここで $A{\supset}B$ が確立されているということの意味であるということがわかる．これは，直観主義論理の「含意」が前件 A と後件 B との結びつきを重視しているということの表れでもある．このよ

うに，直観主義論理においては「含意」式が，ある世界で真になるかどうかについて考える際には，周囲の世界の状況を参照しなければならない．この点は，$\Box$ の場合と同様であり，$\Box$ がそうであったように，到達可能性関係が満たす性質が変化すれば，「含意」の性質も変化する．そのため，到達可能性関係によって特徴付けられる「含意」の種類の数だけ，対応する非様相論理の体系が考えられるということである．そのように与えることが可能である非様相論理の体系というのは，実は先に簡単に触れた **BPL** や **F**，また，**中間論理**（直観主義論理と古典論理の間に存在する論理体系たちである．例えば，次に見る *Jankov* **論理**，*Gödel-Dummet* **論理**など）の各論理体系なのである．したがって，直観主義論理の「含意」が **S4** の $\Box$ で解釈可能であったのと同様に，他の非様相論理の体系にも，対応する様相論理が存在し，その対応する様相論理の体系に，非様相論理の各体系が埋め込み可能なのではないかと考えることは自然なように思われる．

1.4.3　様相同伴関係

普通，様相同伴というときには，直観主義論理が **S4** に埋め込み可能であることを最も基本となる結果とみなし，直観主義論理よりも強い論理である古典論理までの間にある論理，例えば，先にも見たような Jankov 論理や Gödel-Dummet 論理などが，それぞれ対応する様相論理に埋め込み可能であることを言う（cf. (Chagrov and Zakharyashchev 1992)）[*31]．そのため，直観主義論理よりも強い論理体系についての考察を行う場合には，埋め込みの際に用いる翻訳は，先に与えた **S4** 翻訳を用いれば十分である．

定義 20 (様相同伴)**.** 非様相論理（古典論理，中間論理，直観主義論理）の公理系 ($\mathbf{L_1}$) で，論理式 A が証明可能であるとき，かつ，またそのときにのみ，対応する様相論理の公理系 ($\mathbf{L_2}$) でその翻訳式 $A^{\Box}$ が証明可能である．このとき，$\mathbf{L_2}$ を $\mathbf{L_1}$ の**様相同伴**（*modal companion*）と呼ぶ．

$$\vdash_{\mathbf{L_1}} A \ \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{L_2}} A^{\Box}$$

しかし，直観主義論理よりも弱い論理，例えば，**BPL** や **F** などの埋め込み関係についてを考察しようとするときには，**S4** 翻訳ではうまくいかない．というのも，直観主義論理以上の論理が埋め込まれる **S4** より強い様相論理の必然性演算子は，$\Box$ を定める働き

[*31] 本論では，様相同伴関係についての証明論的側面からの研究に重点をおきその考察を行っているが，意味論的側面からの考察も行われている（cf. (Chagrov and Zakharyaschev 1997)）．

の中に，T の公理：$\Box A \supset A$ で表現される反射性の性質が組み込みとなっているからである．その結果，そこで行われる議論が，反射性に依存した形で与えられているのである．**BPL** や **F** が埋め込まれる先の T 公理を持たない様相論理の体系を考える際は，反射性に依存した形で議論が構成されるのは好ましくない．そのため，これまで見たのとは，異なる翻訳を用いる必要があるのである[*32]，これらをまとめて扱うことができるようにするために，(Visser 1981) で与えられた以下の翻訳関数を採用する：

$$\begin{array}{lcllcl} P^{\boxplus} & := & P \& \Box P & (A \& B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus} \& B^{\boxplus} \\ \bot^{\boxplus} & := & \bot & (A \vee B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus} \vee B^{\boxplus} \\ (A \supset B)^{\boxplus} & := & \Box(A^{\boxplus} \supset B^{\boxplus}) & & & \end{array}$$

S4 より強い様相論理では，$\Box P$ と $P \& \Box P$ が同値であることはすぐにわかるので，直観主義論理より強い論理の埋め込み関係を示す際に $(\cdot)^{\boxplus}$ 翻訳を用いても差し支えない．

定義 21 (拡張された様相同伴)**.** 非様相論理の公理系 ($\mathbf{L_1}$) で，論理式 A が証明可能であるとき，かつ，またそのときにのみ，対応する様相論理の公理系 ($\mathbf{L_2}$) でその翻訳式 $A^{\boxplus}$ が証明可能である．このとき，$\mathbf{L_2}$ を $\mathbf{L_1}$ の**様相同伴**（*modal companion*）と呼ぶ[*33].

$$\vdash_{\mathbf{L_1}} A \;\Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{L_2}} A^{\boxplus}$$

拡張した様相同伴の例として，表 1.4 をあげることができる．このとき，Jankov 論理（cf. (Chagrov and Zakharyaschev 1997)）は直観主義論理に公理 $\neg A \vee \neg\neg A$ を，Gödel-Dummet 論理（cf. (Chagrov and Zakharyaschev 1997)）は直観主義論理に公理 $(A \supset B) \vee (B \supset A)$ を，それぞれ加えることで手にできる．

このことからわかるのは，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理にあたることが，非様相論理の各体系と対応する様相論理の体系との間にも成り立つということである．例えば,「古典論理で論理式 A が証明可能であることと，様相論理 **S5** でその翻訳式 $A^{\boxplus}$ が証明可能であることが同値である」といったことが成り立つということである．このとき重要なのは，直観主義論理を **S4** に翻訳したときに用いられた翻訳とほとんど同じものが用いられているということである．

様相同伴関係が成り立つということから，直観主義論理の命題が **S4** の $\Box$ によって解釈

[*32] この議論は，(Yamasaki and Sano 2016) でも行われている．そこでは，第 4 章で見るラベル付きシークエント計算によって，この翻訳を用いて，埋め込み関係を一様な仕方で証明できることが示されている．その証明についての詳細な検討は第 4 章で行う．

[*33] 本論で様相同伴というときには，特に断らない場合は，拡張した様相同伴を指すこととする．

表 1.4　非様相論理の様相同伴

到達可能性関係	様相論理の体系	非様相論理の体系
反射性，ユークリッド性	**S5**	古典論理
推移性，反射性，連結性	**S4.3**	Gödel-Dummet 論理
推移性，反射性，有向性	**S4.2**	Jankov 論理
推移性，反射性	**S4**	直観主義論理
推移性	**K4**	**BPL**
なし	**K**	**F**

可能であったのと同様に，他の非様相論理の命題もそれぞれ対応する様相論理の $\Box$ によって解釈可能であるということが明らかになったと言える．これはどういうことだろうか．先に述べたように，第 1 章で扱っているような非様相論理の体系の違いは，基本的には，その論理で扱っている「含意」の性質の違いと考えて差し支えない．そこで，様相同伴の議論を非様相論理の「含意」式と様相論理でのその翻訳式とに絞って検討してみよう．

先ほど見たように，直観主義論理の「含意」は古典論理の「含意」と **S4** の $\Box$ を用いて解釈できるようなものであった．そしてまた，非様相論理の各体系にもそれぞれ，対応する様相論理が存在するということから，他の非様相論理の「含意」も，古典論理の「含意」と各々が対応する様相論理の $\Box$ を用いて解釈することができるということがわかる．つまり，非様相論理の各論理体系は「含意」によって特徴付けられると考えてよいのだが，その各論理体系ごとに固有の性質を持つとされていた「含意」はすべて，古典論理の「含意」と（その論理がどの様相論理に対応しているかによって，その性質は異なるが）$\Box$ 演算子を用いて，特徴付けることができるということである．もう少し言えば，様相同伴関係を考えることが可能であるということから，「含意」の論理的強さの違いを中心として一旦は整理されていた非様相論理の体系の間の違いは，実は，古典論理の「含意」の上での，$\Box$ の論理的強さの違いとして説明することが可能であるということが明らかになったということである．

先に列挙した非様相論理たちの対応する様相論理への埋め込み関係は以下のようにまとめることができる．

$$\begin{array}{llcll}
\mathbf{CL} & \vdash A & \Leftrightarrow & \mathbf{S5} & \vdash A^{\boxplus} \\
\mathbf{DL} & \vdash A & \Leftrightarrow & \mathbf{S4.3} & \vdash A^{\boxplus} \\
\mathbf{Jan} & \vdash A & \Leftrightarrow & \mathbf{S4.2} & \vdash A^{\boxplus} \\
\mathbf{Int} & \vdash A & \Leftrightarrow & \mathbf{S4} & \vdash A^{\boxplus} \\
\mathbf{BPL} & \vdash A & \Leftrightarrow & \mathbf{K4} & \vdash A^{\boxplus} \\
\mathbf{F} & \vdash A & \Leftrightarrow & \mathbf{K} & \vdash A^{\boxplus}
\end{array}$$

この結果からわかるのは，様々な非様相論理の体系が，同じ翻訳の下で，それぞれ対応する様相論理へと埋め込まれるということである*34．つまり，埋め込みということで，各非様相論理の命題はそれぞれに対応する埋め込み先の様相論理によって解釈可能となるのである．さらに，翻訳の形からもわかるように（原子式の埋め込み先を見ればより明らかであるが），各非様相論理の体系の論理式は埋め込んだ先の必然性演算子によって解釈される．つまり，各論理体系が扱う論理式，つまり，命題が持つ性質の違いは埋め込んだ先の必然性演算子を基準とし，それをいわば共通の概念として，比較検討することができるということである．この点については，第 4 章で詳しく検討するが，様相同伴のポイントは，本章で扱った範囲の含意の性質によって階層付けられた弱い論理から強い論理までをすべて $\Box$ という統一的な基準のもとで並べ，その強弱の比較を行える点にあると考えられる．

ではこの章の結びとして，先に述べた選言特性によって特徴付けられた直観主義論理と古典論理の違いが **S4** 翻訳を用いても維持されていることを見る*35．ここでは分かりやすさのため，$(\cdot)^{\Box}$ 翻訳を用いる．このとき，排中律を翻訳すると $\Box P \vee \Box(\Box P \supset \bot)$ となる．このとき，**S5** では，証明可能である*36．

一方，**S4** では $\Box P \vee \Box(\Box P \supset \bot)$ に対する反証モデルを与えることができるため，証明可能ではない．$\Box$ と直観主義論理の $\supset$ のクリプキモデルの充足条件は，評価したい場所

*34 ただし，その埋め込み関係には幅があることには注意が必要である．例えば，直観主義論理は，$(\cdot)^{\Box}$ 翻訳のもとで，**S4** に忠実に埋め込まれるが，**S4** に $\Box(\Box(P \supset \Box P) \supset P) \supset P$ を **S4** に加えた Grezegorczyk Logic にも忠実に埋め込み可能である（cf. (Chagrov and Zakharyaschev 1997)）．このとき，**S4** は直観主義論理が埋め込まれる最小の論理であり，Grezegorzyk Logic は最大の論理であるということが知られている．また逆に，$(\cdot)^{\Box}$ あるいは $(\cdot)^{\boxplus}$ のもとでも，**BPL** と **BPL** から単調性を落とした厳密含意論理は同じ **K4** に忠実に埋め込まれる．

*35 ところで，様相論理では，次のような形で，様相選言特性が成り立つことが知られている (Chagrov and Zakharyaschev 1997).「ある様相論理 $L = \{A \in$ 様相論理の論理式 $\mid \vdash_L A\}$ が**様相選言特性**（*modal disjunction property*）をもつと言われるのは，任意の論理式 $A_1, \ldots, A_n$ に対して $\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n \in L$ $\Leftrightarrow$ ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $A_i \in L$ が成り立つときそのときに限る.」

*36 **S5** のシークエント計算を用いた証明図は次のようになる：

の値を決定するために，そこから到達可能な世界全ての状況を参照するという点が同じであり，直観主義論理のクリプキモデルは，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理や **S4** のクリプキモデルと密接な繋がりがある．**S4** のクリプキモデルと直観主義論理のクリプキモデルの間の関係については，第 6 章で詳しく見る．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$P \Rightarrow P$}
\RightLabel{$(L\Box)$}
\UnaryInfC{$\Box P \Rightarrow P$}
\RightLabel{$(R\Box)$}
\UnaryInfC{$\Box P \Rightarrow \Box P$}
\RightLabel{(RW)}
\UnaryInfC{$\Box P \Rightarrow \Box P, \bot$}
\RightLabel{$(R\supset)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box P, \Box P \supset \bot$}
\RightLabel{$(R\Box)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box P, \Box(\Box P \supset \bot)$}
\RightLabel{$(R\vee)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box P \vee \Box(\Box P \supset \bot), \Box(\Box P \supset \bot)$}
\RightLabel{$(R\vee)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box P \vee \Box(\Box P \supset \bot), \Box P \vee \Box(\Box P \supset \bot)$}
\RightLabel{(RC)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box P \vee \Box(\Box P \supset \bot)$}
\end{prooftree}.
$$

S5 のシークエント計算の体系については第 2 章で見る．

第 2 章

シークエント計算とその発展

第 1 章では，帰結関係が持つ性質は，基本的に，含意に反映されるものと考えて議論を進めてきたが，本章からは，シークエントがその機能を果たすことになる．のちにも詳しく説明するが，推論というのは，複数の仮定からただ一つの帰結となる命題を導くという構造を持っている．この推論の構造を，ヒルベルト流の公理系は自然に有していた．しかし，シークエント計算の場合には，複数の仮定から結論のいずれかが導き出せれば良いという風に帰結関係の捉え方が変わる．

(Gentzen 1935) で，ゲンツェンは自然演繹とシークエント計算という二つの形式体系を与えたのであるがその二つの形式体系に対して，それぞれ直観主義論理と古典論理の形式化に当たるものを与えた．自然演繹の直観主義論理の体系を **NJ**，古典論理の体系を **NK** と呼ぶ．また，シークエント計算の直観主義論理の体系を **LJ**，古典論理の体系を **LK** とそれぞれ呼ぶ．自然演繹では，仮定からはじまり，結論を導き出すという形で，推論が進む．このときの仮定はただの論理式であり，公理などではない．しかし，排中律を扱う古典論理を考えるときには，仮定となる論理式に加え，排中律を基本的な論理式（basic formulae）として $A \vee \neg A$ を加えるか，推論図式と考え，例えば，$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ を加えるなど，特別な対応を考えなければならない．このようにして，自然演繹において排中律は特別な立場にあったのである．一方，シークエント計算では，排中律を扱うために，シークエントの後件に論理式が複数個出現することが求められることとなった（排中律の **LK** での証明図は後ほど与える）．そのため，排中律が証明可能ではない直観主義論理では，シークエントの後件に出現する論理式はたかだか一つで良いのである．したがって，これまで見てきた帰結関係の概念と比べ，シークエントに議論を移した際にその見方を変えなければならないのは，古典論理の場合であると考えられる．そのため，シークエント

の後件に出現する論理式の数，つまり，複数の仮定から帰結される論理式の数は，たかだか一つと見なして十分ということであり，シークエント計算の場合にも，基本的には，第 1 章の場合と帰結関係の考え方は変化していないということである．では，これらの点を踏まえ，以下で改めて，推論するとはどのようなことであるのかということについて見ていこう．

2.1　推論するとは何か

推論するとは何をしていることになっているのかという問に対する最も単純で適切な答えは，「ある命題を仮定し，そして，ある命題を結論すること」である．より詳しく言うと，幾つかの命題をまず仮定して，それらの命題から何らかの命題を結論することである．ただし，命題 A を仮定することと，主張することは異なるということに注意が必要である．ここで主張されているのは，異なる二つの命題の間の帰結関係だけである．推論ということで，これ以上の条件を付さないとしたとき，以下に述べる二点は，推論である以上，誰もが認める基本原則とみなしてよいであろう：

(i) ある命題を仮定したら，その命題自身を結論して良い．

(ii) ある命題 A から，ある命題 B を結論できるとき，この命題 A が実際に（複数の仮定から）帰結しているなら，この帰結関係は，先の帰結関係と組み合わさって，ある命題 B を帰結する．

このとき，(i) は帰結関係を二項関係と見たときには反射性，あるいは，（のちに見るが）推論規則では同一性（公理）にあたり，同様に (ii) は推移性，あるいは，カット規則に当たると考えて良い．したがってこのことから，推論というものは，その基本構造（仮定から結論を導き出すという構造）と，今述べた二つの基本原則とから構成されるようなものであると言える．このような基本的な性質を備えた推論構造というものに対して，形式化を与えることができる．

推論というのは，そもそも，私たちが日常生活の中で行っている，思考やコミュニケーションの場面で機能している働きである．その際，私たちは，言語を用いてそれらの行為を行っているのであるが，私たちが用いる言語の中には，他の単語とはその機能が異なっているいわゆる「論理語」と呼ばれるものが存在する．それが，第 1 章でもすでに見た「かつ」「または」「ならば」「〜でない」などである．そのため，これらの論理語につ

いての用法を定めることは，推論を形式化しようとする際には非常に重要な課題となるのである[*1]．このとき，第 1 章でも見たように，各命題は，もっとも基本的な要素となる原子命題と論理結合子とで構成されているのであった．その構成のされ方からも明らかなように，各命題が持つ性質は，その繋ぎとなる結合子たちがどのような性質を持つかということにかなり左右される．そのため，結合子をどのようなものと考えるべきかという問題は，命題とは何かという問題を考える際には，極めて重要な問題となるのである．

「結合子とは何か」という問に対しては，古典論理に代表されるような仕方で，「結合子とは真理関数的なものである」と考えられることがしばしばあった[*2]．しかし，命題そのものを真理関数的な無時間的なものによってのみ解釈されるものとみなすのではなく，時間的な要素を含んだものと考えるような論理（例えば，直観主義論理や，線形論理など）が様々に考察されるようになり，真理関数的な解釈だけでは，様々な論理体系が扱う結合子，あるいは命題を網羅しきれないことが次第に明らかになってきた[*3]．このことは，例えば直観主義論理が第 1 章でも見たようなクリプキモデルによって解釈されることからもわかる．このとき，直観主義論理をクリプキモデルを用いて解釈することのポイントの一つは，一度成立したら，ずっと成り立ち続けるという直観主義論理の命題が持つ性質を扱うことが可能である点にあると考えられる．そして，古典論理における結合子とは異なる解釈を必要とする結合子の構文論的な振る舞い，つまり，実際の証明系の中で結合子がどのように振る舞うのかということを分析することが重要であると次第に考えられるようになってきたのである．

自然な推論の形式化というものを考えたとき，各結合子が独立に与えられている証明系についての考察を行うことが適当であると考えられる．というのも，結合子は，最も原始的な概念であり，（各結合子が場合によっては被定義項となることもあるが）それ以上に分解できないものと考えることができるので，個々の結合子の意味付けが他の結合子に依存した形，あるいは，循環した形で与えられるのは好ましくないからである．このとき，特に G. ゲンツェン (Gentzen 1935) によって与えられた**自然演繹**（*Natural Dedaction, ND*）と**シークエント計算**（*Sequent Calculus, SC*）の体系が，その目的に十分かなうものであると考えられるようになってきた．本論では，シークエント計算に着目してその説明を進める．

[*1] 形式化と論理語についての説明は，(坂本・坂井 1971) に詳しい．

[*2] 結合子を真理関数的なものと見る見方は，第 1 章を参照のこと．

[*3] 命題に関する時間的性質・無時間的性質についての議論は，例えば (岡本 2013) で行われている．ただし，(岡本 2013) で扱われているのは，様相論理と時制論理（tense logic）の場合である．

具体的な議論に入る前に，本論で用いる**シークエント**（*sequent*）の概念を定義しておく．本論で用いるシークエントの概念は，定義 22 で与えられるものがその基本となるのであるが，必要に応じてその条件を変え，用いることとする．

定義 22 (シークエント)**.** $A, B, \ldots$ によって表現される論理式が与えられたとき，この論理式の有限列を $\Gamma, \Delta, \ldots$ などによって表現する．このとき，**シークエント**は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ によって表現し，Γ を $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の**前件**（*antecedent*）と，Δ を $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の**後件**（*succedent*）と，それぞれ呼ぶ．$\vdash$ についてのここでの使用方法を新たに定める．ある論理体系 $\mathbf{S}$ において，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能なとき，「$\mathbf{S} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$」と書く．$\mathbf{S}$ が自明な場合は，$\mathbf{S}$ を省略する．

シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は，「何らかの形で前件 Γ の全てが主張可能となったら，後件 Δ のどれかが主張可能になる」というような，前件と後件の間に必然的結びつきが存在していることを表している．したがって，シークエントが扱うのは，命題たちの間の帰結関係である．ただし，このとき主張されているのは，それらの間の依存関係（つまり，シークエント全体）であって，その前件も後件も主張されてはいないことに注意しなければならない．このとき「$\vdash$」を用いて第 1 章で，帰結関係を定義した際には，複数の仮定から，一つの結論を導くことができるという形で与えたが，ここでは，帰結するものがその後件のどれかであれば良いという風に，帰結関係の定義が変わっている．このとき，シークエントにおいて，前件の「,」を連言と，後件の「,」を選言と解釈していることに注意が必要である．シークエント計算における，**推論規則**は，一般的に以下のような形で与えられる：

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

このとき，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ を（推論規則の）**結論**（*conclusion*），$\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を（推論規則の）**前提**（*premise* (*s*)）と呼ぶ．このとき，推論規則には，二通りの読み方ができる．推論規則は先にあげたシークエントの読み方と合わせて，次のように読むことができる．ここでは簡単のために，$n = 2$ の場合：

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

を例にとって説明を与える．まず一つ目の読み方は，「何らかの形で前件 Γ_1 の全てが主張可能になったら，後件 Δ_1 のどれかが主張可能になる」かつ，「何らかの形で前件 Γ_2 の全てが主張可能になったら，後件 Δ_2 のどれかが主張可能になる」なら，「何らかの形で

前件 Γ の全てが主張可能になったら，後件 Δ のどれかが主張可能になる」．続いて，もう一つは，先の推論規則の読み方の対偶をとったものである．「何らかの形で前件 Γ の全てが主張可能であり，かつ，後件 Δ の全てが主張可能でない」なら，「何らかの形で前件 Γ_1 の全てが主張可能であり，かつ，後件 Δ_1 の全てが主張可能でない」または，「何らかの形で前件 Γ_2 の全てが主張可能であり，かつ，後件 Δ_2 の全てが主張可能でない」と読む，読み方である．

ではここで，先ほどの推論の基本原則の (ii) について，もう少し検討してみよう．(ii) を形式化してみると次のようになる：

$$\frac{\Rightarrow A \quad A \Rightarrow B}{\Rightarrow B}$$

「$\Rightarrow A$」は「無仮定で A が出てくる」ということを意味し，「$A \Rightarrow B$」は「すでにその存在が保証されている A と B との間に関係がつく」ということを意味していると考えると，「$\Rightarrow B$」は素直に，「無仮定で B が出てくる」ということを表すことになる．そのため，この形式化がまさに (ii) を表現しているということがわかる．このことはもう少し，一般的な形で与えることができる：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

これは，いわゆるカット規則である．これが述べているのは，以下のようなことである．ここでは，Δ はないものと考えて差し支えない．このとき，ある命題 A と何か別の仮定 Γ' を使って Δ' が導かれたとする．また，その一方で，別の仮定 Γ から A が導かれていたとする．このとき，二つ目の前提の A を Γ で置き換えてもよい．「A は Γ から導き出すことができるので，A を Γ で置き換えてもよい」ということで表現されていることこそが，カット規則の趣旨であり，帰結関係が持つ基本的な性質であると言えるのである．つまり，シークエントで表現された帰結関係を帰結関係たらしめているのは，カットの規則に他ならないということである．この置き換え（A を Γ で置き換えること）が許されるからこそ，帰結関係の方向（向き）が保証され，その前件と後件に違いがあることが正当化されると考えられるのである．

したがって，カット規則というのは，推論を形式化した体系にとっては本質的な規則であり，その規則を体系が持つこと，あるいは，カット規則を明示的に持たなくても，他

の規則だけでカット規則と同じ推論を与えることが可能であること[*4]は，当該の形式体系が，推論を正しく扱える形式化であるということの保証となるのである．そのため，カット規則は，取り除くことができるので初めから入れる必要がないと考えるのは誤りであり，明示的にであれ隠伏的にであれ，カット規則が持つその性質をその体系が有しているということが，形式体系にとっては重要となるのである．というのも，それがなければ，推論の正しい形式化にはなっていないからである．しかし，ここでカット規則について一つ注意しておかなければならないことがある．それは，形式体系として成立することが望ましいと考えられているカット除去の成否に関する問題が，実は体系依存的な問題であるということである．これは，様相論理 **S5** のカット除去定理についての議論が良い例である．新しい概念的道具立てを導入しない普通のシークエント計算（**LK** を **S5** の必然性演算子についての規則で拡張した体系）による形式化では，**S5** のカット除去定理は成立しない．というのも，後ほど見るように，**S5** のシークエント計算の体系を用いて，B 公理を証明するためには，カット規則がその証明の中でどうしても必要になるからである．しかし，例えば後ほど見る，ラベル付きシークエント計算などを用いれば，**S5** でもカット除去定理が成立することが知られている[*5]．つまり，ある論理体系に対して，一部のシークエント計算を用いて，カット除去定理を示すことができなくても，形式体系を工夫することで，カット除去定理を示すことができるようになるということである．

さて，ここでは，カット規則についての考察から始めたが，先ほどの推論の基本原則の (ii) の条項を見ると，推論規則には，シークエントの前件と後件との間に存在するものとはまた別の帰結関係が存在していることがわかる．それは，推論規則の前提と結論の間の帰結関係である．このとき，シークエント計算における各結合子の推論規則は，すべてこの形で与えられる．すでになされている主張からどのような主張を引き出してよいのかというのを定めたものが推論規則であり，シークエント計算では，推論規則を適用するとは，帰結関係を操作することと考えられるのである．したがって，シークエントを用いて構成された証明図が記述しているのは，どのような状況下でそのシークエントが主張可能になるのか，あるいは，どのようなステージに至れば，あるシークエントが主張可能になるのかという，主張の局面や段階についての情報であると言える．このことから，シーク

[*4] これは一般に推論規則の許容可能性と呼ばれる．この正確な定義は後ほど与える．

[*5] ラベルなしのシークエント計算を用いて **S5** でカット除去定理を示すことができないことは，本章の後半で，ラベル付きシークエント計算を用いて **S5** でカット規則を除去可能であることについては，第 4 章で，それぞれ見る．

エントというのは，論理的帰結関係そのものを十分な仕方で記述することが可能であり，単に論理式によって与えられるものとは一線を画す豊かな表現形式であることがわかる．

このような形で与えられたシークエント計算のポイントをまとめると，（１）シークエントの形式化を生かすような仕方で，（推論規則の形をとることで）何かある前提からある結論が出るという形で結合子に関する規則をすべて記述できること；そのため，（２）メタ言語としては，第 1 章で見たようなメタ言語でのモーダス・ポネンスの規則 (MP) に当たるものだけで，証明図を構成することができるということ，である．加えて，この基本的な構造を維持し，直観主義論理をはじめとする弱い論理から，古典論理のような強い論理まで，すべて一様な仕方で形式化可能であることも，シークエント計算が持つ重要な性質の一つであると言える．そこで，次節において，ゲンツェンによって与えられたシークエント計算について見て行こう．

2.2　シークエント計算の体系

本節では，G. ゲンツェンによって与えられた，古典論理のシークエント計算体系 **LK** と直観主義論理のシークエント計算体系 **LJ** について説明を行う．

2.2.1　LK と LJ

ゲンツェンは，1935 年に “Untersuchungen über das logische Schliessen” において自然演繹とシークエント計算を与えた．自然演繹では論理結合子に対する除去則と導入則とが与えられ，結合子の意味が定められる．自然演繹はその名の通り，人間の自然な推論（actual reasoning）を形式化した体系と言われている（cf. (Gentzen 1935), p.68 ）．一方，シークエント計算は，証明図の構成という点に目下の主眼を置き，与えられた体系である．では以下で，シークエント計算の体系を説明するために必要な用語の導入から始める．語彙，論理式，シークエントの定義は，定義 1，定義 2，定義 22 とそれぞれ同じで良い．

表 2.1 によって与えられるのが，古典論理のシークエント計算の体系 **LK** である．このとき，直観主義論理のシークエント計算の体系 **LJ**（表 2.2）は **LK** において，シークエントの後件に出現する論理式の数をたかだか一つに制限すれば手にできる．

本論ではその詳しい証明は見ないが，**LK** と **LJ** では，カット除去定理が成り立つ．

表 2.1　**LK** (Gentzen 1935)

(Axioms)

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\ (Id)$$

(Logical Rules)

$$\frac{A_0, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \& A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \& A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B}\ (R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}\ (R\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}\ (R\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Theta \Rightarrow \Xi}{A \supset B, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Xi}\ (L\supset) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \supset B}\ (R\supset)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\neg) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (R\neg)$$

(Structural Rules)

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LC) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (RC)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LW) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (RW)$$

$$\frac{\Gamma, B, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (LE) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, B, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, A, B, \Delta}\ (RE)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Sigma \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Pi}\ (Cut)$$

Fact 1 (**LK** と **LJ** のカット除去定理)**.** $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を終式とする **LK** 証明図に対し，これと同じ終式を持ち，かつカット規則を含まないような証明図を作ることができる．このことは，**LJ** に対しても成り立つ．

また，**LK** と，第 1 章で与えた，古典論理のヒルベルト流の公理系との間に次のような対応関係が成り立つ．ここでまず，$\Gamma \equiv A_0, \ldots, A_m$ のとき，Γ の要素を全て & で繋いだ論理式 $\bigwedge \Gamma$ と，Γ の要素を全て $\vee$ で繋いだ論理式 $\bigvee \Gamma$ を以下のように定める．

表 2.2　**LJ** (Gentzen 1935)

(Axioms)

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\ (Id)$$

(Logical Rules)

$$\frac{A_0, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \& A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \& A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B}\ (R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A_0}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (R\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A_1}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (R\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Theta \Rightarrow \Xi}{A \supset B, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Xi}\ (L\supset) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}\ (R\supset)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (L\neg) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}\ (R\neg)$$

(Structural Rules)

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LC)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LW) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}\ (RW)$$

$$\frac{\Gamma, B, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (LE)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (Cut)$$

定義 23.

$$\bigwedge \Gamma \quad = \quad \begin{cases} A_1 \wedge \ldots \wedge A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \top & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\bigvee \Gamma \quad = \quad \begin{cases} A_1 \vee \ldots \vee A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \bot & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

Fact 2. シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を論理式 $\bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$ へと翻訳する．このとき，次のことが成り立つ．

$$\mathbf{LK} \vdash \ \Gamma \Rightarrow \Delta \ \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{HK}} \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$$

このことは，**LJ** と直観主義論理のヒルベルト流の公理系との間にも成り立つ．

LK や **LJ** はシークエント計算の最も基本となる形式体系であり，現在では，様々に改良されたシークエント計算の形式体系が与えられている．以下では，その幾つかについて見ることで，シークエント計算についてさらに掘り下げていく．

ところで，本章の冒頭で述べた，**LK** での排中律の証明図は以下のように与えられる：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \Rightarrow P}\,(Id)}{\Rightarrow P, \neg P}\,(R\neg)}{\Rightarrow P \vee \neg P, \neg P}\,(R\vee)}{\Rightarrow P \vee \neg P, P \vee \neg P}\,(R\vee)}{\Rightarrow P \vee \neg P}\,(RC).$$

このとき，後件に論理式が二つ以上出現している箇所がある．そのため，シークエントの後件に論理式がたかだか一つしか出現することのできない直観主義論理では，排中律を示すことができないのである．

2.2.2　構造規則を吸収した体系

LK や **LJ** では，構造規則が，明示的な推論規則として，形式体系の中に含まれていたが，ここでは，構造規則（弱化と縮約）をその形式体系の中に組み込んで形式化した体系（このような体系は，**G3** 型（**G3**-style）と呼ばれる）について見る．**G3** 型のシークエント計算の体系では，シークエントの定義は定義 22 と同じでよい．ただし，Γ と Δ は有限多重集合とし，交換規則は考えない．

推論規則として弱化と縮約に関係する規則を加えることは，その論理体系が扱う命題の性質に影響を与えると考えられる．というのも，例えば，縮約を考えたとき，シークエントの前件（あるいは，後件）に出現している異なる二つの命題の現れが，形が同じというだけで一つにまとめられてしまうのは，明らかに命題のあり方（証明の中での使用のされ方）に影響を与えることになるからである．また，結論から前提に向かって証明図は構成されることが多いため，構造規則を加えることは，証明図の構成のしやすさに影響を与える．例えば，カット規則がそのよい例であるが，証明図を下から構成していく際，カット規則が適用されたと考える．このとき，一般に，どの論理式がカット規則の適用によって

消滅したのかはわからない．そのため，カット規則の適用が許されているときには，一般にはその証明図の構成は格段に難しくなる，つまり，証明探索が困難になるということである．これと同じことが，弱化と縮約の規則の場合にも生じる．そのため，その性質からして，構造規則を持っている方が望ましい論理体系に対して，構造規則の機能は維持しつつ，しかし，明示的にそれらの規則は含まれていない形式体系を与えることが可能であることが望ましい．この点に主眼を置いて発展したと考えられる形式体系の一つが，**G3** 型と呼ばれるタイプのシークエント計算である[*6]．**G3** 型で形式化されたシークエント計算では，構造規則が形式体系の中に吸収されている．つまり，証明図を構成する際に明示的に構造規則が用いられることはないが，その働きは他の結合子の推論規則の中に組み込まれているのである．このとき，構造規則を吸収した体系を用いて証明できる命題たちの集合の範囲は，構造規則を明示的に用いて証明を行う場合とその範囲を変えない．では以下で，**G3** 型のシークエント計算がどのような形式体系であり，今述べたことがどのように実現されているのかについて，直観主義論理のシークエント計算の体系を例にとってその説明を行う．

LJ をはじめとする直観主義論理のシークエント計算の体系では，伝統的には，シークエントの後件では，論理式の出現がただ一つに制限されたものが用いられる．しかし，ここでは，その条件を取り除いて，直観主義論理のシークエントであっても，シークエントの後件に出現する論理式は複数個で構わないものを用いる．直観主義論理の後件複数な形での形式化は様々に行われているが，ここでは，表 2.3 のように与えられる形式体系 **G3I** を用いる[*7]．**G3I** は，(Troelstra and Schwichtenberg 2000, Negri and von Plato 2001) などの様々な文献の中で触れられている[*8*9]．

[*6] **G3** 型については (Troelstra and Schwichtenberg 2000, Negri and von Plato 2001) に詳しい．

[*7] 直観主義論理の後件が複数な形のシークエント計算の体系は，本論で扱うもの以外にも (Negri and von Plato 2001) などで提案されているものもある． (Negri and von Plato 2001) では，**G3I** と，$(L\supset)$ の規則が異なる． (Negri and von Plato 2001) での $(L\supset)$ の規則は以下：

$$\frac{A\supset B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\supset).$$

[*8] また， (Troelstra and Schwichtenberg 2000, p.88) において，A. ドラガリンが H. A. J. M. シュリネックスに宛てた手紙（1990.11.22.）の中で，自身の (Dragalin 1988) の中で用いた含意の左規則より，**G3** 型の直観主義論理の後件複数なシークエント計算の規則としては，ここで与えた **G3I** の左規則の方が好ましいと考えていたということが述べられている．その理由の一つとして，この規則の高さ保存の反転可能性が両方の前提に対して成立するということが挙げられている．

[*9] また，**G3I** に対する，**G3** 型でない直観主義論理の後件複数なシークエント計算の体系は， (Maehara

表 2.3　**G3I**

(Axioms)

$$\frac{}{P,\Gamma \Rightarrow \Delta, P}\ (Id) \qquad \frac{}{\bot,\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\bot)$$

(Logical rules)

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\&B}\ (R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (R\vee)$$

$$\frac{A{\supset}B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A{\supset}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L{\supset}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A{\supset}B}\ (R{\supset})$$

先にも述べたように，**G3** 型のシークエント計算の体系は，弱化，縮約，カット規則が論理結合子の推論規則の中に吸収されているのであるが，それがどのように実現されているのかを以下で見る．この点について確認するため，まずはじめに必要な定義[*10]を与え，その準備を行う．

まずは，主式についての定義である．

定義 24 (文脈，主式)**．G3I** の推論規則における Γ と Δ は**文脈**（*context*）と呼ばれる．**G3I** の各規則の結論において，文脈に含まれていない論理式（たち）は**主式**（*principal formula* (*s*)）と呼ばれる．

次は，導出についての用語法である．

定義 25 (導出)**．G3I** における**導出**（*derivation*） $\mathcal{D}$ は公理と **G3I** の規則によって生成される有限木構造として帰納的に定義される．$\mathcal{D}$ のルートノードにあるシークエントを $\mathcal{D}$ の**エンドシークエント**（*end sequent*）と呼ぶ．導出の高さは，エンドシークエントから公理に至るまでの導出の中での極大な枝の長さとする．もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ がそのエンドシー

1954) で，**L′J** として，扱われている．

[*10] ここでの定義は，**G3** 型のシークエント計算を用いたカット除去定理を行うために与えるものである．**G3** 型のシークエント計算を用いたカット除去定理の議論は，ラベルなしのシークエント計算については (Troelstra and Schwichtenberg 2000, Negri and von Plato 2001) などで，ラベル付きシークエント計算については， (Negri 2005, Dyckhoff and Negri 2012, Yamasaki and Sano 2016) などで扱われている．

クエントが $\Gamma \Rightarrow \Delta$ であるような **G3I** における導出 $\mathcal{D}$ を持つなら，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は **G3I** において**導出可能**（*derivable*）である（**G3I** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く）．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図の高さがせいぜい n であることを **G3I** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く．

もしも，そのことが記述の文脈から明らかな場合には，しばしば "**G3I** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$" という表現から "**G3I**" を省略する．今，**G3I** では，複合式の同一性が成り立つ．

命題 2 (複合式の同一性)**.** 任意の論理式 A に対して，$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ のような形をしたシークエントが **G3I** で導出可能である．

次は，証明図の高さを保存した，推論規則の許容可能性についての定義である．

定義 26 (許容可能性)**. G3I** において，ある規則の前提が導出可能であるときにはいつでも，もしその規則の結論も **G3I** において導出可能であるなら，その規則は，**G3I** において，**許容可能**（*admissible*）と言われる．

G3I において，ある規則の，前提がせいぜい高さ n で導出可能であるときにはいつでも，もし，その規則の結論も **G3I** において，せいぜい高さ n で導出可能であるなら，その規則は，**G3I** において，**高さ保存で許容可能**（*height-preserving admissible*, hp-admissible）と言われる．

この定義の下で，弱化は高さ保存で許容可能である．弱化の規則は，

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LW) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (RW)$$

の二つ．

補題 3 (弱化の許容可能性)**.** 弱化の規則は **G3I** で，高さ保存で許容可能である：

(i) もし $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n A, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
(ii) もし $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A$.

次は反転可能性についての定義である．

定義 27 (反転可能性)**. G3I** において，ある規則の，結論がせいぜい高さ n で導出可能であるときにはいつでも，その規則の前提も **G3I** において，せいぜい高さ n で導出可能であるなら，その規則は，**G3I** において，**高さ保存で反転可能**（*height-preserving invertible*, hp-invertible）と言われる．

このとき，**G3I** では，次のことが成り立つ．

補題 4 (反転可能性)**.** **G3I** の $(R\supset)$ 規則以外のすべての規則は，高さ保存で反転可能.

補題 5 (縮約の許容可能性)**.** 縮約の規則は，**G3I** で高さ保存で許容可能：

(i) もし，$\vdash_n A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき$\vdash_n A, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

(ii) もし，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$ なら，そのとき，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A$.

続いては，カット規則の許容可能性についてである．

命題 6 (**G3I** のカット規則の許容可能性)**.** (Cut) の規則：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut)$$

は **G3I** において許容可能である（カット除去可能である）.

このようにして，**G3** 型のシークエント計算では，構造規則がその形式体系内に吸収される．そのため，シークエント計算を **G3** 型の形に変形することができれば，その証明探索の労力は格段に低くて済むのである．

さて，では次に G. ミンツによって与えられた直観主義論理の後件複数な体系の一つである **LJpm** を見る．ここでは，**LJpm** を用いて，形式体系からモデルを構成するという操作がどのような手順で行われるのかについて見る．

2.3　ミンツの LJpm

ここでは，ミンツによって与えられた **LJpm** (Mints 2000) を導入し，その完全性の証明の議論の流れを簡単に説明する．その考察を通じて，形式体系からモデルを構成しようとする際に用いられる，整合的な拡張概念（より詳しく言うと，論理式の包含関係）が，直観主義論理のラベル付きシークエント計算に出現する二項関係と自由変項を考察する際の手掛かりとなることを明らかにすることを目指す．

2.3.1　直観主義論理のクリプキモデル

クリプキモデルは，第 1 章で導入済みであるが，本章では，直観主義論理のクリプキモデルを理解していることが今後の議論において重要であると考えられるので，繰り返しに

はなるが，定義の形で再度確認をしておく．

定義 28 (直観主義論理のフレーム・モデル・充足条件)**.** 空でない集合 W と W 上の反射性と推移性を満たす二項関係 R の対 $\langle W, R\rangle$ を直観主義論理フレームという．今，$\langle W, R\rangle$ を直観主義論理フレームとする．また，V を命題変数 P に対し $V(P) \subseteq W$ となるような写像とする．もし，すべての $w, w' \in W$ と $P \in \mathsf{Prop}$ に対し，wRw' であり，かつ $w \in V(P)$ ならば $w' \in V(P)$ であるとき，V は**単調**（*monotone*）であるという． もし，付値 V が単調なら，$\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ は単調であるという．任意の直観主義論理モデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$，任意の $w \in W$，そして，任意の論理式 A が与えられたとき，**充足関係** $\mathfrak{M}, w \models A$「$A$ は $\mathfrak{M}$ の w で真」が以下のように帰納的に定義される：

$\mathfrak{M}, w \models P$	$\Leftrightarrow$	$w \in V(P)$,
$\mathfrak{M}, w \models \bot$		成立しない
$\mathfrak{M}, w \models A\&B$	$\Leftrightarrow$	$\mathfrak{M}, w \models A$ かつ $\mathfrak{M}, w \models B$,
$\mathfrak{M}, w \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathfrak{M}, w \models A$ または $\mathfrak{M}, w \models B$,
$\mathfrak{M}, w \models A \supset B$	$\Leftrightarrow$	wRw' なる任意の $w' \in W$ について， $\mathfrak{M}, w' \models A$ ならば $\mathfrak{M}, w' \models B$.

妥当性の概念は定義 15 と同じでよい．

2.3.2 LJpm

LJpm では，語彙，論理式，部分論理式，シークエントの用法は，**LJ** の場合と同じでよい．ただし，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の Γ と Δ は論理式の有限多重集合とし，交換規則は考えない．このとき，**LJpm** は直観主義論理のシークエント計算の体系であるにもかかわらず，後件の複数性を許す[*11]．

このとき，**LJpm** の推論規則の中には，**G3** 型のシークエント計算の際にも出てきた，反転可能性を持つ規則がある．

[*11] **LJpm** と **G3I** とは，シークエントの後件の論理式の出現についての制限に関して同じであるが，**LJpm** では，弱化と縮約とカット規則が形式体系内で許容可能でない点で異なっている．このとき，構造規則が体系内に吸収されている体系（ここでは，**G3I**）を用いる方が，議論を行いやすいのではないかという印象を素朴な直感として持つ．しかし，結合子の規則の中に構造規則が吸収されていない体系を用いる方が，結合子の規則の性質がよりはっきりする（つまり，その規則によって表現されているのは，結合子の性質のみである）ため，シークエントを用いてモデルを構成するという操作が実際にどのように行われるのかについての考察が行いやすいと考えられる．そのため，本論では，**LJpm** を用いて説明を行うこととした．

表 2.4　**LJpm** (Mints 2000)

(Axioms)

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\,(Ax) \qquad \frac{}{\bot \Rightarrow P}\,(L\bot)$$

(Logical Rules)

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L\&) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\&B}\,(R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L\vee) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\,(R\vee)$$

$$\frac{A \supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L\supset) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \supset B}\,(R\supset)$$

(Structural Rules)

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LC) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(RC)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LW) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(RW)$$

定義 29 (**LJpm** の反転可能規則)**.** ある論理規則

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(r)$$

の結論の導出可能性が前提（たち）の導出可能性を含意するとき，(r) を**反転可能な規則**（*invertible rule*）という．

LJpm では，$(R\supset)$ 以外はすべて，反転可能規則である．また，**LJpm** では，部分式特性が成り立つ．加えて，カット除去定理を示すことができる．

2.3.3　LJpm の完全性

ここでは，**LJpm** の完全性の証明について見ていきたいと思う．まず，シークエントが反証される条件を定める．

定義 30. もし，$V(\bigwedge\Gamma, w) = 1$ かつ $V(\bigvee\Delta, w) = 0$ なら，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ はクリプキモデル

$\langle W, R, V\rangle$ の，$w \in W$ で反証される．このとき，$V(\Gamma \Rightarrow \Delta, w) = 0$ と書く．

さて，以下でモデルを構成するために必要となる概念の定義を与える．

定義 31 (完備シークエント)**.** Γ の全部分論理式からなる集合を $Sub(\Gamma)$ と書く．あるシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が完備 (complete) であるのは，

(1) (導出不可能性) そのシークエントが導出不可能．$\mathbf{LJpm} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

かつ

(2) (部分論理式 A に関わる条件) $A \in Sub(\Gamma, \Delta)$ であるどんな論理式に対しても：
 (2-1) (A の明示的出現) $A \in \Gamma \cup \Delta$
 か
 (2-2) (A の clash 性) $\mathbf{LJpm} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ かつ $\mathbf{LJpm} \vdash A, \Gamma \Rightarrow \Delta$
 のどちらかである．

以下，完備であるシークエントのことを「**完備シークエント**（*complete sequent*)」と呼ぶ[*12]．

つまり，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が導出不可能で，しかも $A \in Sub(\Gamma, \Delta)$ であるどの部分論理式 A も (2-1) または (2-2) の条件を満たしているものが，完備シークエントとなる．実際には，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が完備シークエントであるとき，その部分論理式 A はすべて，(2-1) の条件を満たすのであり，(2-2) の条件を満たすことはない．より詳しく言えば，(2-2) の clash 性条件を満たす部分論理式 A があるときは $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が導出可能になり，(1) と矛盾してしまう．そのため，(2-2) の条件を満たすことはないと言えるのである．このことを示すには **LJpm** には本来含まれないカット規則を使う必要がある．しかし，当面の論証ではカット規則抜きの体系 **LJpm** を対象としているので，直ちに，(2-2) の場合が空であると，結論することはできない．このように述べると，最初から (2-2) の条件を取り除いて完備シークエントの条件を与えればよいように思われるかもしれないが，それでは補題 8 の証明が行えなくなってしまう．そのため，(2-2) の clash 性の可能性をひとまず認めておかなければならないのである．

定義 32. あるシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が反転可能規則に対して，**飽和**（*saturated*）しているのは：

[*12] 定義 31 は本論でまとめ直したものである．

(i) (導出不可能性)　**LJpm** $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ かつ，

(ii) (飽和条件)　$\Gamma \Rightarrow \Delta$ に出現しているすべての論理式 A, B に対して，次のいずれかが満たされている：

($\& \Rightarrow$) $A \& B \in \Gamma$ ならば，$A \in \Gamma$ かつ $B \in \Gamma$.

($\Rightarrow \&$) $A \& B \in \Delta$ ならば，$A \in \Delta$ または $B \in \Delta$.

($\vee \Rightarrow$) $A \vee B \in \Gamma$ ならば，$A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$.

($\Rightarrow \vee$) $A \vee B \in \Delta$ ならば，$A \in \Delta$ かつ $B \in \Delta$.

($\supset \Rightarrow$) $A \supset B \in \Gamma$ ならば，$A \in \Delta$ または $B \in \Gamma$.

以下，反転可能規則に対して飽和したシークエントのことを「**飽和シークエント**（*saturated sequent*)」と呼ぶ [*13]．このとき，(ii) の五つの条件はすべて，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ に出現している各論理式 C について，それが複合式であるとき，つまり，C が $A \& B$ か $A \vee B$ か $A \supset B$ のとき，その部分論理式，つまり A と B（のうち少なくとも一つ）がそれ自身 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 中にどのように出現していなければならないのかを定めている．ここでは，$C \equiv A \supset B$ のとき，Δ に C が出現する場合についての議論がなされていない．それは，($R\supset$) が **LJpm** において反転可能でない規則であることによる．

反転可能規則は推論規則の結論の反証モデルが前提の反証モデルになり，推論規則の前提の反証モデルが結論の反証モデルにもなるため，推論規則の前提の反証モデルが結論の反証モデルにもなる．したがって，反証モデルを探したいシークエントが飽和シークエントであり，後件に $\supset$ 式を含まないときには，自分自身を参照することで，モデルを構成できることになる．そのため，あるシークエントが飽和シークエントで，後件に含意式を含まないときには，そのシークエントの証明図をそれ以上遡らなくても，原子式に注目するだけで，反証モデルを構成できるということになる．このとき，前件中の原子式はすべて成立，後件中の原子式はすべて不成立になるように値を振ると，前件中の複合式はすべて成立，後件中の複合式はすべて不成立にすることができる．

さて，ここまで，完備シークエントと飽和シークエントの定義を与えた．続いて，以下では，完備シークエントが飽和シークエントを含意することについて見る．

補題 7 (飽和化, (Mints 2000, Lemma 8.3))**.** 与えられたシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が完備シークエントであるとき，そのシークエントは飽和シークエントである．

[*13] 飽和シークエントという呼び方は (Mints 2000) では用いられてはいない．

この補題 7 が成り立つことにより，完備シークエントは必ず飽和シークエントであるということは保証されたが，この逆は成り立たない．つまり，飽和シークエントが常に完備シークエントであるとは限らないのである．例えば，$\Rightarrow P\&Q$ について考えてみる．これは導出不可能なシークエントである．このシークエントの飽和シークエントは $\Rightarrow P\&Q, P$（$\Rightarrow P\&Q, Q$ でも良い）このとき，完備シークエントは $\Rightarrow P\&Q, P, Q$ であるか，$Q \Rightarrow P\&Q, P$（$\Rightarrow P\&Q, Q$ の時は，$\Rightarrow P\&Q, P, Q$ であるか，$P \Rightarrow P\&Q, Q$）である．飽和シークエントはもとのシークエントの部分論理式を全て含まなくても良いが，完備シークエントはもとのシークエントの部分論理式をすべて含む必要があるので，完備シークエントと飽和シークエントは一般的には異なる．しかし，飽和シークエントの条件を満たすだけで，完備シークエントになるものも存在する．例えば，$\Rightarrow P \vee Q$ について考える．これは導出不可能なシークエントである．このシークエントの飽和シークエントは $\Rightarrow P \vee Q, P, Q$ である．しかし，このシークエント中にはもとのシークエントの部分論理式が全て出現しているので，完備シークエントでもある．また，導出不可能なシークエントは完備シークエントへと必ず拡張できる．その拡張の仕方を以下の補題で見る．

補題 8 (完備化, (Mints 2000, Lemma 8.4))**.** 導出不可能などのシークエント $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ も，Γ_0, Δ_0 の部分論理式からなる完備シークエントへと拡張できる．このとき，導出不可能なシークエントが定義 31 を満たすことを示せばよい．

Proof. Γ_0, Δ_0 の部分論理式を $A_0, \ldots, A_n$ のように列挙する．このとき，$0 \leq i \leq n$ であり，$\{A_0, \ldots, A_n\} \subseteq Sub\,(\Gamma_0, \Delta_0)$ である．

今，$\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ の導出不可能性を保存しながら，A_i が $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ の前件，後件のどちらに入るかについて考えればよい．$A_i, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ のときを考える．

(1) $\nvdash A_i, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ のとき
$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A_i\}$，$\Delta_{i+1} = \Delta_i$ であり，$\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ は定義 31 の (2-1) を満たす．

(2) $\vdash A_i, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ のとき
(i) $\nvdash \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, A_i$ であるか，(ii) $\vdash \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, A_i$ である．(i) のときは，$\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{A_i\}$，$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ であり，$\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ は定義 31 の (2-1) を満たす．(ii) のときは，$\vdash A_i, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$，$\vdash \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, A_i$ なので，$\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ は定義 31 の (2-2) を満たす．このとき，$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$，$\Delta_{i+1} = \Delta_i$ となる．

したがって，$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ は完備シークエントへと必ず拡張できる．

□

この補題によって，導出不可能なシークエントが完備シークエントへと必ず拡張できることが保証された．つまり，部分論理式がシークエントの導出不可能性を維持して，シークエント中に現れるようにすれば，導出不可能なシークエントから，完備シークエントを作ることができるということである．さて，では以下で，反証モデルを構成する際に用いられるカノニカルモデルの定義を与えよう．

定義 33 (カノニカルモデル)**.** 次のクリプキモデル $\mathfrak{K} = \langle W_{\mathfrak{K}}, R_{\mathfrak{K}}, V_{\mathfrak{K}} \rangle$ をカノニカルモデルと呼ぶ．

- $W_{\mathfrak{K}}$: 完備シークエントすべてからなる集合
- $(\Gamma \Rightarrow \Delta) R_{\mathfrak{K}} (\Gamma' \Rightarrow \Delta') \Leftrightarrow \Gamma \subseteq \Gamma'$
- $\Gamma \Rightarrow \Delta \in V_{\mathfrak{K}}(P) \Leftrightarrow P \in \Gamma$

$\subseteq$ が反射的で推移的であることにより，$R_{\mathfrak{K}}$ は反射的で推移的であり，$\in$ は $\subseteq$ に関して，単調であるので，$V_{\mathfrak{K}}$ は原子式に対して単調である．

定義 34. シークエントからなる集合 M が反転可能でない規則に対して，飽和しているのは，M 中のどの $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対しても，以下の条件が満たされているとき：

($\Rightarrow\supset$) $A \supset B \in \Delta$ なら，$A, \Gamma \subseteq \Gamma'$ かつ $B \in \Delta'$ なるシークエント $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ が M 中に存在する．

この定義によって，後件に含意式が出現する場合についても扱うことができるようになる．ある集合 M が定義 34 の条件を満たすようなシークエントとして含意式を中に含むシークエントの例を考えてみる．このとき, 例えば,$\nvdash (P \supset Q) \supset P \Rightarrow P, P \supset Q$ を例にとる．このシークエントは飽和シークエントであるが，ここで考えている M が反転可能でない規則に対して飽和しているためには，この M の要素として，$\nvdash (P \supset Q) \supset P, P \Rightarrow Q, P \supset Q$ か $\nvdash P, (P \supset Q) \supset P, P \Rightarrow Q$ が含まれていなければならない．

また，完備シークエントすべてからなる集合 $W_{\mathfrak{K}}$ は反転可能でない規則に対して飽和している．

命題 9. $W_{\mathfrak{K}}$ を完備シークエント全てからなる集合とする．そのとき，任意の $\Gamma \Rightarrow \Delta \in W_{\mathfrak{K}}$ に対して，

(i) $C \in \Gamma$ なら，$\mathfrak{K}, \Gamma \Rightarrow \Delta \models_{\mathfrak{K}} C$

(ii) $C \in \Delta$ なら，$\mathfrak{K}, \Gamma \Rightarrow \Delta \not\models_{\mathfrak{K}} C$

(iii) $\mathfrak{K}, \Gamma \Rightarrow \Delta \not\models_{\mathfrak{K}} \Gamma \Rightarrow \Delta$．つまり，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\Gamma \Rightarrow \Delta \in W_{\mathfrak{K}}$ で不成立．

では以下で，完全性の証明について見る．(Mints 2000) では，より一般的な飽和モデルに対して完全性の証明が与えられているが，本論で必要となる概念は，カノニカルモデルが扱う範囲に収めることができるので，カノニカルモデルを用いてその議論を考える．

命題 10 (完全性)**．LJpm** 中のどの導出不可能なシークエントもカノニカルモデル $\mathfrak{K}$ で反証される．したがって，どんな妥当なシークエントも **LJpm** で導出可能である．

Proof. 今，どんな導出不可能なシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ も，補題 8 より，完備シークエントへと拡張できるので，完備シークエント $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ を持つ．カノニカルモデル $\mathfrak{K}$ の集合 $W_{\mathfrak{K}}$ は全完備シークエントからなる集合なので，今拡張したシークエントもその中に含まれる．命題 9 より $\mathfrak{K}, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \not\models_{\mathfrak{K}} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ が成立する．ところで，今 $R_{\mathfrak{K}}$ は定義 33 より，$\Gamma \subseteq \Gamma'$ なので，$\mathfrak{K}, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \not\models_{\mathfrak{K}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ も成立． □

このとき，**LJpm** の完全性の証明を与えることが可能であることから **LJpm** $+ (Cut)$ なる体系に対するカット除去定理も意味論的に証明される（ただし，**LJpm** $+ (Cut)$ の健全性が示されている必要がある）*[14]．ここでは，**LJpm** での，形式体系からどのようにクリプキモデルを構成し，完全性の証明を与えるかを見てきたが，**LJ** の完全性も，**LJpm** で見たのと同様に，形式体系からクリプキモデルを構成することによって示される．**LJ** の場合にも，構成されるクリプキモデルの到達可能性関係は，シークエントの前件の包含関係によって定められる（cf. (鹿島 2006)）．

2.3.4　ミンツのカノニカルモデルと到達可能性関係 $R_{\mathfrak{K}}$

これまでのカノニカルモデルを用いた完全性の議論から，何を明らかにできるのかを以下で見ていこう．ここで注目すべきは，カノニカルモデルを考察する際に導入した到達可能性関係 $R_{\mathfrak{K}}$ である．この到達可能性関係が持つ性質は，含意式がシークエントの後件に出現した際，そのシークエントを，証明不可能性を保ったまま拡張するために重要となる．証明不可能なシークエントに対して，カノニカルモデルを用いてその反証モデルを与

*[14] **LJpm** $+ (Cut)$ のカット除去定理示すためには，**LJpm** $+ (Cut) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，**LJpm** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることを示せば良い．このとき，**LJpm** $+ (Cut)$ の健全性と命題 10 を経由して，**LJpm** $+ (Cut)$ に対するカットの意味論的証明を与えることができる．

えるためには，当該のシークエントを証明不可能性を保ったまま完備シークエントへと拡張し，シークエントの後件に含意式が含まれている場合には，反転可能でない規則に対して飽和するようにそのシークエントを拡張すれば良い．そうすることで，証明不可能なシークエントに対しては，シークエントの前件の論理式をすべて真に，後件に出現する論理式をすべて偽にすることによって，カノニカルモデル内に必ず反証モデルを取ることができる．このとき，シークエントの前件では，一度真になった論理式が真であることを保ったまま，論理式からなる集合を拡張することが求められる．この要請は，直観主義論理の付値関数が単調であることを反映したものであると考えられる．これに対して，シークエントの後件では，前件の場合と同様の条件が求められないのであるが，これはそもそも，後件で考察されている論理式たちが全て偽であること，また，証明論的な対応で見れば，直観主義論理では，$(R\supset)$ の適用の際に，後件の要素が一つでなければならないという制限が必要とされることによる．この点について，もう少し詳しく検討してみよう．先にも述べたように，シークエントの規則には，二つの読み方があるのであるが，シークエントをもとにしてクリプキモデルを構成しようとするときには，二つ目の読み方に基づいてその議論が行われている．つまり，シークエントの対偶をとった読み方「シークエントの前件の論理式は全て真であり，後件の論理式は全て偽でなければならない」という読みを採用するわけである．このことによって，シークエントの後件に出現する「,」の読み方は，「かつ」となっているのであるが，「または」と読むのがもともとの読み方である．そのため，もとのシークエントを考えたときに，実際には成り立っていない論理式が，選言によって紛れ込んでいることは十分に考えられる．そのため，「,」を「かつ」に読み替えて，シークエントの対偶をとった場合にも，シークエントの後件には，余計な情報が紛れ込んでいることが十分に考えられる．このことによって，シークエントからクリプキモデルを構成し，その到達可能性関係についての条件を考えようとするときには，シークエントの後件の情報（どの論理式が，偽となっているか）は保存する必要はなくシークエントの前件の論理式の状態だけを見れば十分であると考えられるのである．

さて，$R_{\mathfrak{K}}$ を用いて行われたような整合的な拡張の概念は，推論規則の中に，明示的な形での記述はされない．このことは，本章の冒頭で導入したシークエント計算の体系を見れば明らかである．では，反映されていないこの概念を形式体系に，明示的な形で反映することができないかというとそうではない．ゲンツェンによって与えられたシークエント計算の体系に，**LK** や **LJ** では明示化されていない概念を明示化するための新しい対象を補うことで，第 4 章で導入するようなラベル付きシークエント計算などの体系では，それ

らの概念を明示化した形でその形式体系を与えることができるのである．

ここでの $R_{\mathfrak{K}}$ が実際に直観主義論理のラベル付きシークエント計算に出現する二項関係を解釈するために用いることができるということを，第 4 章で見る．なぜなら，**LJpm** での完全性を示す際には，形式体系からクリプキモデルを構成し，その証明を与えるのであるが，この手法は，**LJ** の完全性を示そうとする際にも用いられる手法であり，直観主義論理のゲンツェン流の形式体系の完全性を示すときには一般的な手法であると考えられるからである．また，クリプキモデルを形成する際に用いられる到達可能性関係は **LJpm** の場合と同様に，包含関係によって定められるからである．つまり，ここで見た，$R_{\mathfrak{K}}$ のような性質は，直観主義論理の完全性を示そうとする際には，必然的に出てくる性質と考えて差し支えないということである．のちに，直観主義論理のラベル付きシークエント計算に着目したときに，そこでの二項関係 R を包含関係と解釈して差し支えないということについて見る．

2.4　様相論理のシークエント計算の体系

ではこの章の結びとして，様相論理のシークエント計算の体系を見る．まず，基本的な準備から始める．様相論理の語彙と論理式は，第 1 章で与えたものと同じで良い．シークエントの定義は，定義 22 と同じで良い．このとき，$\Gamma \equiv A_1, \ldots, A_n$ であるとき，$\Box\Gamma$ は $\Box A_1, \ldots, \Box A_n$ を表すものとする．今，様相論理 **K** のシークエント計算の体系 **LmK**（cf. (Ohnishi and Matsumoto 1957)）は，古典論理のシークエント計算の体系 **LK** に次の必然性演算子についての規則を付け加えることで手にすることができる：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (\Box).$$

現在では，様相論理の各論理体系に対するシークエント計算の体系が与えられているが，ここでは，様相論理 **S4** と **S5** に対するシークエント計算の体系のみ与えることとする．**S4** のシークエント計算の体系（cf. (Ohnishi and Matsumoto 1957)）は，先の $(\Box)$ 規則の代わりに，**LK** に次の二つの規則を加えることで手にできる：

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \Rightarrow \Delta}\ (L\Box) \quad \frac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (R\Box).$$

このようにして与えられる，**S4** のシークエント計算の体系において，**S4** の公理系の特徴であるところの 4 の公理を次のように示すことができる：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \Rightarrow A}\,(Id)}{\Box A \Rightarrow A}\,(L\Box)}{\Box A \Rightarrow \Box A}\,(R\Box)}{\Box A \Rightarrow \Box\Box A}\,(R\Box)}{\Rightarrow \Box A \supset \Box\Box A}\,(R\supset).$$

Fact 3 (様相論理 **K** と **S4** のカット除去定理)**.** 様相論理 **K** と **S4** のシークエント計算の体系では，カット除去定理が成り立つ**.**

次に，**S5** のシークエントと計算の体系（cf. (Ohnishi and Matsumoto 1957)）についてであるが，**S4** で与えたシークエント計算の体系での $(R\Box)$ の規則を次の形で与えられるものに変えれば良い．

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \Box A}\,(R\Box).$$

このように与えられる規則を用いて，5 の公理を示すことができる：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Box\neg A \Rightarrow \Box\neg A}\,(Id)}{\Rightarrow \Box\neg A, \neg\Box\neg A}\,(R\neg)}{\Rightarrow \Box\neg A, \Box\neg\Box\neg A}\,(R\Box)}{\neg\Box\neg A \Rightarrow \Box\neg\Box\neg A}\,(L\neg)}{\Rightarrow \neg\Box\neg A \supset \Box\neg\Box\neg A}\,(R\supset).$$

ところで，この形で与えられる **S5** のシークエント計算の体系に対しては，カット除去定理が成立しないことが知られている．これは，**S5** のシークエント計算における B 公理の証明図についての考察から導き出される．B 公理は，**S5** のシークエントを用いて以下のように示される：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P \Rightarrow P}\,(Id)}{P, \neg P \Rightarrow}\,(L\neg)}{P, \Box\neg P \Rightarrow}\,(L\Box)}{P \Rightarrow \neg\Box\neg P}\,(R\neg) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Box\neg P \Rightarrow \Box\neg P}\,(Id)}{\Rightarrow \neg\Box\neg P, \Box\neg P}\,(R\neg)}{\Rightarrow \Box\neg\Box\neg P, \Box\neg P}\,(R\Box)}{\neg\Box\neg P \Rightarrow \Box\neg\Box\neg P}\,(L\neg)}{P \Rightarrow \Box\neg\Box\neg P}\,(Cut).$$

今，$P \Rightarrow \Box\neg\Box\neg P$ がカット規則の適用なしの証明図を持つと仮定する．この時，この証明図の中で適用される最後の推論規則の候補を考えると，その候補は，弱化と縮約の規則たちだけである．このとき，これらの規則が，何かしらのシークエントに適用さ

れ，今の結論である $P \Rightarrow \Box\neg\Box\neg P$ が出てきたはずであるが，シークエントの候補は，$\Rightarrow \Box\neg\Box\neg P$，$P \Rightarrow$，$P, P \Rightarrow \Box\neg\Box\neg P$，$P \Rightarrow \Box\neg\Box\neg P, \Box\neg\Box\neg P$ である．しかし，これらのシークエントに対し，どんな規則の適用についての遡り考えようとも，公理には到達しない．よって，矛盾する．したがって，$P \Rightarrow \Box\neg\Box\neg P$ を証明するには，カット規則が必要であることがわかる[*15]．

このとき，古典論理と直観主義論理の場合と同様に，様相論理 **K**，**S4**，**S5** についても，ヒルベルト流の公理系とシークエント計算の体系との間の対応関係を示すことができる．

Fact 4. シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を論理式 $\bigwedge\Gamma\supset\bigvee\Delta$ へと翻訳する．このとき次のことが成り立つ：

$$\mathbf{LmK} \vdash\ \Gamma \Rightarrow \Delta\ \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{HmK}} \bigwedge\Gamma\supset\bigvee\Delta$$

このとき，**S4**，**S5** についても，同じことが成り立つ．

[*15] この議論は (Ono 1998) に詳しい．

第 3 章

ラベルなしのシークエント計算を用いた BPL と K4 の埋め込み定理

本章では，A. Visser によって与えられた **BPL** が，様相論理 **K4** に埋め込み可能であることを見る．このとき，(Ishii et al. 2001) の体系を参考にし，**G3** 型のラベルなしの **BPL** のシークエント計算の体系を与える．また，(Troelstra and Schwichtenberg 2000, Mints 2012) でのアイデアをベースとし，原子式 P を $P \& \Box P$ へと翻訳する翻訳を用いて，**BPL** を **K4** への証明論的な証明を与える．このことから，**BPL** と **K4** の証明図の間の対応を明らかにすることができる．また，$(\cdot)^{\boxplus}$ 翻訳の適用範囲の広さも同時に示すことができる．

3.1 Visser の Basic Propositional Logic

BPL の語彙，論理式は定義 1，定義 2 と同じで良い．また，シークエントの定義は，定義 22 と同じで良いが，Γ, Δ は論理式の有限多重集合とし，交換規則は考えない．**BPL** に対するラベルなしの **G3** 型のシークエント計算の体系を導入する前に，**BPL** のクリプキモデルをまず与えることとする．

定義 35 (BPL のフレームとモデル)**.** 空でない集合 W と W 上の推移性を満たす二項関係 R の対 $\langle W, R\rangle$ を **BPL** フレームという．今，$\langle W, R\rangle$ を **BPL** フレームとし，V を命題変数 P に対し $V(P) \subseteq W$ となるような写像とする．もし，すべての $w, w' \in W$ と $P \in \mathsf{Prop}$ に対し，wRw' であり，かつ $w \in V(P)$ であるなら $w' \in V(P)$ であるとき，V は**単調**（*monotone*）であるという．もし，付値 V が単調なら，$\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ を単調と

いう．任意の **BPL** モデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$，任意の $w \in W$，そして，任意の論理式 A が与えられたとき，充足条件の定義は，定義 18 と同じで良い．

任意の $w \in W$ に対して，$\mathfrak{M}, w \models A$ であるとき，A は $\mathfrak{M}$ で**妥当**という．また，任意の $w \in W$ に対して，任意の $A \in \Gamma$ に対して，$\mathfrak{M}, w \models A$ であるときはいつでも，ある $C \in \Delta$ に対して，$\mathfrak{M}, w \models C$ であるならば，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathfrak{M}$ **において妥当である**という．

3.2　BPL の G3 型のラベルなしのシークエント計算

表 3.1 で，私たちは，**BPL** の **G3** 型のラベルなしのシークエント計算の体系（**G3B**）を与える．ここでまず，含意に対する規則 $(\supset)$ の例を幾つか与えよう．$n = 0, 1, 2$ のとき，規則の形は以下のようになる：

$$\frac{\Sigma, A \Rightarrow B}{\Sigma \Rightarrow A{\supset}B, \Theta}\,(\supset)_{,} \qquad \frac{\Sigma, C_1{\supset}D_1, A \Rightarrow B, C_1 \quad D_1, C_1{\supset}D_1, \Sigma, A \Rightarrow B}{\Sigma, C_1{\supset}D_1 \Rightarrow A{\supset}B, \Theta}\,(\supset)_{,}$$

$$\frac{\Sigma, \Phi, A \Rightarrow B, C_1, C_2 \quad D_1, \Sigma, \Phi, A \Rightarrow B, C_2 \quad D_2, \Sigma, \Phi, A \Rightarrow B, C_1 \quad D_1, D_2, \Sigma, \Phi, A \Rightarrow B}{\Sigma, C_1{\supset}D_1, C_2{\supset}D_2 \Rightarrow A{\supset}B, \Theta}\,(\supset)_{,}$$

ここでは，$\Phi \equiv C_1{\supset}D_1, C_2{\supset}D_2$.

弱化と縮約などの構造規則は **G3B** の中には見つけられないが，これらの規則は，次の節で許容可能であることが示される．つまり，これらの規則を新しく加えることになっても，導出可能なシークエントの全体は変わらないということである．このとき，**G3B** での部分式特性はすぐに示せる．

命題 11 ((Yamasaki and Sano 2017, Proposition 1))**.** **G3B** は部分式特性を満たす．つまり，もし $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が **G3B** で導出可能なら，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の部分論理式によってそのシークエントの全てが構成されている．

G3B は $(\supset)$ 規則に注意する必要があるため，改めて **BPL** での文脈と主式の定義を与えておく．

定義 36 (文脈，主式)**.** $(\supset)$ を除く **G3B** の推論規則に含まれる Γ と Δ は**文脈**（*context*）と呼ばれる．$(\supset)$ の規則においては，Σ と Θ が**文脈**．**G3B** の各規則の結論において，文脈に含まれない論理式（たち）のことを**主式**（*principal formula (s)*）と呼ぶ．

表 3.1　**G3B** (Yamasaki and Sano 2017)

(Axioms)

$$\frac{}{P, \Gamma \Rightarrow \Delta, P}\ (Id) \quad \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\bot)$$

(Logical Rules)

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\&B}\ (R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (R\vee)$$

$$\frac{C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_1, \Sigma, A \Rightarrow B, \Gamma_1 \quad \ldots \quad C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_{2^n}, \Sigma, A \Rightarrow B, \Gamma_{2^n}}{\Sigma, C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n \Rightarrow A \supset B, \Theta}\ (\supset)\dagger$$

†: $n \geq 0$, $\Gamma_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, かつ $\gamma(i)$ は $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta(i) = \{1, \ldots, n\} \setminus \gamma(i)$.

定義 37 (導出)．**G3B** における導出（*derivation*）$\mathcal{D}$ は公理と **G3B** の規則によって生成される有限木構造として帰納的に定義される．$\mathcal{D}$ のルートノードにあるシークエントを $\mathcal{D}$ の**エンドシークエント**（*end sequent*）と呼ぶ．導出の高さは，エンドシークエントから公理に至るまでの導出の中での極大な枝の長さとする．もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ がそのエンドシークエントが $\Gamma \Rightarrow \Delta$ であるような **G3B** における導出 $\mathcal{D}$ を持つなら，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は **G3B** において**導出可能**（*derivable*）である（**G3B** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く）．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図の高さがせいぜい n であることを **G3B** $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く．

命題 12 ((Yamasaki and Sano 2017, Proposition 2))．任意の A について，$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ なるシークエントが **G3B** で導出可能である．

Proof. A の複雑度についての帰納法で示す．もし，A が原子式か $\bot$ のときには明らか．もし，$n > 0$ なら，帰納法の仮定を適用することによって全ての場合を簡単に示すことができる．ここでは，含意の場合のみ示す．もし $A \equiv B \supset C$ のとき，導出の最後のステップは以下のようになる：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ B\supset C, \Gamma, B \Rightarrow C, \Delta, B & C, B\supset C, \Gamma, B \Rightarrow C, \Delta\end{matrix}}{B\supset C, \Gamma \Rightarrow \Delta, B\supset C}\ (\supset),$$

このとき，$B\supset C, \Gamma, B \Rightarrow C, \Delta, B$ と $C, B\supset C, \Gamma, B \Rightarrow C, \Delta$ は明らかに帰納法の仮定によって導出可能であることがわかる．□

(Ishii et al. 2001) においても **BPL** のカットなしのシークエント計算の体系が与えられており，“**LBP**” と呼ばれている（表 3.2 を見よ）．

表 3.2　**LBP** (Ishii et al. 2001)

(Axioms)

$$\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{\bot \Rightarrow}$$

(Inference Rules)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LW) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (RW)$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\&B}\ (R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (R\vee)$$

$$\frac{\Delta_1, \Sigma, A \Rightarrow B, \Gamma_1 \quad \ldots \quad \Delta_{2^n}, \Sigma, A \Rightarrow B, \Gamma_{2^n}}{\Sigma, C_1\supset D_1, \ldots, C_n\supset D_n \Rightarrow A\supset B}\ (\supset)\dagger$$

†: $n \geq 0$, $\Gamma_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, かつ $\gamma(i)$ は $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta(i) = \{1, \ldots, n\} \setminus \gamma(i)$.

(Ishii et al. 2001) において，シークエントは論理式の有限集合のペアとして定義されていることに注意する必要がある．したがって，彼らの体系は，縮約（また，交換）の規則を持たない．**LBP** の公理の形は，**G3B** とは異なっている．& と ∨ の規則は **G3B** の規則と同じである．しかし，含意の規則は，**G3B** の規則と同じではない．**LBP** の含意

の規則と，**G3B** の含意の規則を比較したとき，**LBP** の含意の規則は **G3B** での規則より，簡単な形をしている．これは，**G3B** では，弱化と縮約の規則が許容可能であることによる．

LBP に対する，文脈，主式，導出の概念は，**G3B** と同じである．後ほど，**G3B** が **LBP** と同値であることを示す．

3.3　カット規則の許容可能性

この節では，**G3B** において，カットの規則が許容可能であることを示す．

($\supset$) の規則が持つ組み合わせ的な（combinatorial）性質が議論を少し複雑にするが，縮約なしのシークエント計算の体系におけるカット除去の標準的な構文論的な議論にしたがって，その証明を与えることができる[*1]．

定義 38. カットの規則は以下のように定義される：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut),$$

ここでは，A を**カット式**（*cut formula*）と呼ぶ．

定義 39 (許容可能性)**.** **G3B** において，ある規則の前提が導出可能であるときにはいつでも，その規則の結論も **G3B** において導出可能であるなら，その規則は，**G3B** において，**許容可能**（*admissible*）と言われる．

G3B において，ある規則の，前提がせいぜい高さ n で導出可能であるときにはいつでも，その規則の結論も **G3B** においてせいぜい高さ n で導出可能であるなら，その規則は **G3B** において，**高さ保存で許容可能**（*height-preserving admissible*, hp-admissible）と言われる．

補題 13 (弱化の許容可能性，(Yamasaki and Sano 2017, Lemma 1))**.** 弱化の規則は **G3B** で，高さ保存で許容可能である：

(i) もし $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n A, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

(ii) もし $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A$.

[*1] 第 2 章で見た，**G3I** についてのカット除去の議論と，第 4 章で見るラベル付きシークエント計算についてのカット除去の議論とその構造と同じであることがわかる．

Proof. 導出の高さ n についての帰納法によって，それぞれの場合を示す．ここでは，(ii) の場合に着目する（(i) の場合は，帰納法の仮定より明らか）．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の導出 $\mathcal{D}$ が存在すると仮定する．$\mathcal{D}$ が高さゼロの導出のとき，つまり，公理の場合，$A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ となる．

もし，$\mathcal{D}$ の最後に適用された規則が，$(L\&)$, $(R\&)$, $(L\vee)$, $(R\vee)$ のとき，その前提（たち）に帰納法の仮定を適用し，それから，帰納法の仮定を適用した結果に当該の規則を適用すれば良い．もし，最後に適用された規則が $(\supset)$ のとき，もとの導出は以下のような形をしている：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\dots,C_n{\supset}D_n,\Delta_1,\Sigma,E \Rightarrow F,\Gamma_1\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\dots,C_n{\supset}D_n,\Delta_{2^n},\Sigma,E \Rightarrow F,\Gamma_{2^n}\end{array}}{\Sigma, C_1{\supset}D_1,\dots,C_n{\supset}D_n \Rightarrow E{\supset}F,\Theta}\ (\supset),$$

ここでは，$n \geq 0$, Γ_i と Δ_i は，表 3.1 で与えられたように定義される．

もとの導出の全ての前提に $(\supset)$ を適用すればよい，このときは，Θ, A を文脈とみなし，$(\supset)$ の適用を行っていることに注意が注意が必要である．　□

定義 40 (反転可能性)**.** **G3B** において，その規則の結論がせいぜい高さ n で導出可能であるときにはいつでも，その規則の前提（たち）も **G3B** においてせいぜい高さ n で導出可能であるなら，その規則は，**G3B** において，**高さ保存で反転可能**（*height-preserving invertible*, hp-invertible）と言われる．

補題 14 (反転可能性，(Yamasaki and Sano 2017, Lemma 2))**.** **G3B** の $(\supset)$ 規則以外のすべての規則は，高さ保存で反転可能．

Proof. & と $\vee$ の左と右の規則の四つの場合がある．例えば，$(L\&)$ の場合，$\vdash_n A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，$\vdash_n A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることを示せば十分である．もし，$A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ が公理なら，$A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ も公理となる．もし，$n > 0$ なら，1) $A\&B$ が主式の場合は明らか．2) そうでないときは，もとの導出の前提（たち）に，帰納法の仮定を適用し，それから，もとの導出の最後に適用した規則を適用する．

□

補題 15 (縮約の許容可能性，(Yamasaki and Sano 2017, Lemma 3))**.** 縮約の規則は，**G3B** で高さ保存で許容可能：

(i) もし，$\vdash_n A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき $\vdash_n A, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

(ii) もし，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$ なら，そのとき，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, A$.

Proof. 導出の高さ n についての同時帰納法で示す．もし，$n = 0$ なら，仮定されている各シークエントは公理である．このとき，ゴールとなるシークエントも公理であることは明らかである．では次に，$n > 0$ としよう．順番に各項目を見ていくことにする．

(i) もし，$n > 0$ なら，A の形に依存して，二つの場合がある．まず，もし，A が主式でないとき．そのときは，どの規則が，$A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ に適用されたのかを考える．この場合，$A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ を手にするために，素直に帰納法の仮定を適用することができる．そうでないときには，その規則の結論の前件に主式を導入することができるような，最後に適用された規則に依存して，さらなる場合分けを行う．その候補は，次の三つの規則である：$(L\&)$, $(L\vee)$, $(\supset)$.
$(L\&)$ か $(L\vee)$ の場合には，議論は，$(L\&)$ や $(L\vee)$ に対する高さ保存の反転可能性と帰納法の仮定を用いて簡単に進む．前件の中に主式が多く存在するので，$(\supset)$ の場合，先の二つと同じ議論を行うことができない．そういうわけなので，二つの可能性がある：(1) A の出現の一つが，主式であり，それ以外の論理式は文脈である；(2) A の二つの出現がどちらも主式である．(1) の場合に対し，A の出現の一つ（ここでは，$A \equiv C_1 \supset D_1$）が文脈の一つと考える．もとの導出は，以下のようになる：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_1, \Sigma, C_1 \supset D_1, E \Rightarrow F, \Gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\vdots\\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_{2n}, \Sigma, C_1 \supset D_1, E \Rightarrow F, \Gamma_{2n}\end{matrix}}{\Sigma, C_1 \supset D_1, C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n \Rightarrow E \supset F, \Theta}\ (\supset),$$

ここでは，$n \geq 1$, Γ_i と Δ_i は，表 3.1 でのように定義される．
もとの導出のすべての前提に帰納法の仮定を適用し，それから，$(\supset)$ を適用すればよい．このとき，以下の導出を手にすることができる：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_1, \Sigma, E \Rightarrow F, \Gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\vdots\\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_{2^n}, \Sigma, E \Rightarrow F, \Gamma_{2^n}\end{matrix}}{\Sigma, C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n \Rightarrow E \supset F, \Theta}\ (\supset).$$

(2) の場合に対しては，A の両方の出現が，$(\supset)$ の主式であると考える．例えば，もとの導出が以下の形をしていると仮定する

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,C_n{\supset}D_n,\Delta_1,\Sigma,E\Rightarrow F,\Gamma_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,C_n{\supset}D_n,\Delta_{2^{n+1}},\Sigma,E\Rightarrow F,\Gamma_{2^{n+1}}\end{array}}{\Sigma,C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,C_n{\supset}D_n\Rightarrow E{\supset}F,\Theta}\ (\supset),
$$

ここでは，$n \geq 1$, $\Gamma_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, $\gamma(i)$ は $\{1,\ldots,n+1\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta(i) = \{1,\ldots,n+1\} \setminus \gamma(i)$.
$C_{n+1} = C_n$ かつ $D_{n+1} = D_n$ であることに注意しなさい．
もとの導出の $(\supset)$ の前提において，そこでの Γ_i が，C_n の出現を二つ含んでいるようなシークエントが 2^{n-1} 個存在し，また，そこでの Δ_i が D_n の出現を二つ含んでいるようなシークエントが 2^{n-1} 個存在する．今，帰納法の仮定を用いて，これらのシークエントから，C_n の二つの現れ，あるいは，D_n の二つの現れを一つにし，$C_n{\supset}D_n$ の二つの現れも一つにする．次に，これらの縮約の結果出てきたシークエント全てに $(\supset)$ を適用する．そういうわけで，以下のように望んでいた導出を手にできる：

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,\Delta'_1,\Sigma,E\Rightarrow F,\Gamma'_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,\Delta'_{2^n},\Sigma,E\Rightarrow F,\Gamma'_{2^n}\end{array}}{\Sigma,C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n\Rightarrow E{\supset}F,\Theta}\ (\supset),
$$

ここでは，$n \geq 0$, $\Gamma'_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta'_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, $\gamma(i)$ は $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta(i) = \{1,\ldots,n\} \setminus \gamma(i)$.

(ii) (i) の場合と同様に，A が主式の場合だけを考える．もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$ を手にするために最後に適用される規則が，$(R\&)$ か $(R\vee)$ の場合は簡単．
もし，A の最も外側の結合子が，$\supset$（$A \equiv E{\supset}F$）であるとき，A の出現の一つは，いつも文脈である．なぜなら，主式の出現は $(\supset)$ の結論の後件においてただ一つであるからである．もとの導出は以下のような形をしている：

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,\Delta_1,\Sigma,E\Rightarrow F,\Gamma_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\vdots\\ C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,\Delta_{2^n},\Sigma,E\Rightarrow F,\Gamma_{2^n}\end{array}}{\Sigma,C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n\Rightarrow E{\supset}F,E{\supset}F,\Theta}\ (\supset),
$$

ここでは，$n \geq 0$, Γ_i と Δ_i は，表 3.1 でのように定義される．

もとの導出の $(\supset)$ のすべての前提に $(\supset)$ を適用し，以下の導出を手にできる：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_1, \Sigma, E \Rightarrow F, \Gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\vdots \\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n, \Delta_{2^n}, \Sigma, E \Rightarrow F, \Gamma_{2^n}\end{matrix}}{\Sigma, C_1 \supset D_1, \ldots, C_n \supset D_n \Rightarrow E \supset F, \Theta} \ (\supset),$$

ここでは，結論部分で，文脈に主式の $E \supset F$ とは別に，新たに別の $E \supset F$ を導入していないということに注意せよ．

□

定義 41. カット式 A の**重さ**（*weight*）は，A における論理結合子の数とする．また，(Cut) の**高さ**（*cut-height*）は，(Cut) の二つの前提の導出の高さの和とする．

定理 1 ((Yamasaki and Sano 2017, Theorem 1))**.** **G3B** においてカット規則は許容可能．

Proof. (Cut) の規則は以下のように定義されていることを思い出しなさい．

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \ (Cut).$$

カット式 A の重さについての帰納法と (Cut) の cut-height についての部分帰納法によって (Cut) の許容可能性を示す．証明は，以下のように与えられる．まず，(i) と (ii) の場合を考える．(Cut) の前提の少なくとも一つが公理．残りの場合に対しては，三つの場合がある：(iii) カット式が最後の前提中で主式でないとき；(iv) カット式が左の前提だけで主式；(v) カット式が (Cut) の両方の前提において主式．

(i) (Cut) の左の前提が公理のとき: この場合の証明は省略する．

(ii) (Cut) の右の前提が公理のとき：まず, 右の前提 $A, \Pi \Rightarrow \Sigma$ は公理 (Id)．つまり, 以下の場合のうちの一つを手にする：右の前提が $A, P, \Pi' \Rightarrow \Sigma', P$ か $P, \Pi \Rightarrow \Sigma', P$ の形をしているとき．そこでは，$A \equiv P$．前者の場合には，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ も公理 (Id)．

後者の場合には，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma', P$ を手にする必要がある．これは，左の前提 $\Gamma \Rightarrow \Delta, P$ から弱化の高さ保存の許容可能性によって導出可能．第二に，右の前提が公理 $(L\bot)$．もし，カット式 A において，$A \not\equiv \bot$ なら，Π の中に，$\bot$ を見つけることができるので，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ も公理 $(L\bot)$．それ以外の場合，つまり，もし，

$A \equiv \bot$ なら，左の前提 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot$ の最後に適用された規則を調べる必要がある．もし最後の規則が公理なら，この場合は，(i) の場合に還元できる．それ以外の場合は，(iii) の特別な場合になる．

(iii) カット式は左の前提で，主式でないとき：(Cut) の左の前提の最後に適用された規則に依存して，場合分けを行う．つまり，すべての論理規則についての五つの場合が考えられる．まず，& を見る．この場合，以下の導出をまず手にしている：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{B, C, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}}{B\&C, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(L\&) \qquad \dfrac{\vdots}{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{B\&C, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut).$$

この導出は，以下の導出へと変形される：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{B, C, \Gamma \Rightarrow \Delta, A} \qquad \dfrac{\vdots}{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{B, C, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)}{B\&C, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(L\&).$$

この場合，変形された導出の (Cut) の cut-height はもとの導出の (Cut) の cut-height より小さくなっている．$(\supset)$ を除いた場合は，この場合と同様に証明できる．$(\supset)$ の場合は，議論は以下のように進む．もとの導出は以下のようになる：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Delta_1, \Gamma, E \Rightarrow F, \Gamma_1} \quad \ldots \quad \dfrac{\vdots}{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Delta_{2^n}, \Gamma, E \Rightarrow F, \Gamma_{2^n}}}{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Gamma \Rightarrow E{\supset}F, \Delta, A}\,(\supset) \qquad \dfrac{\vdots}{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Gamma, \Pi \Rightarrow E{\supset}F, \Delta, \Sigma}\,(Cut),$$

ここでは，$n \geq 0$, Γ_i と Δ_i は，表 3.1 でのように定義される．

カット式 A は $(\supset)$ の規則の結論の文脈に含まれるので，以下の導出を手にできる：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Delta_1, \Gamma, E \Rightarrow F, \Gamma_1} \quad \ldots \quad \dfrac{\vdots}{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Delta_{2^n}, \Gamma, E \Rightarrow F, \Gamma_{2^n}}}{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Gamma \Rightarrow E{\supset}F, \Delta, \Sigma}\,(\supset)}{\overline{C_1{\supset}D_1, \ldots, C_n{\supset}D_n, \Gamma, \Pi \Rightarrow E{\supset}F, \Delta, \Sigma}},$$

ここでは，二重線は弱化を必要な回数的適用することを意味する．

(iv) カット式が左の前提だけで主式のとき：(Cut) の左の前提の最後に適用された規則に依存して場合分けが生じる．カット式 A が左の前提だけで主式である場合を考えると，三つの可能性が考えられる：$(R\&)$, $(R\vee)$, $(\supset)$．もし最後に適用された規則が $(R\&)$ か $(R\vee)$ なら，(iii) と同じ．最後に適用された規則が $(\supset)$ なら，私たちは (Cut) の右の前提の最後に適用された規則を調べる必要がある．ここでは，カット式 A は主式ではない．その他の場合は，(iii) と似た仕方で示されるので，唯一自明でないのは，(Cut) の右の前提の最後に適用された規則が $(\supset)$ の場合である．

もし，(Cut) の右の前提に最後に適用された規則が $(\supset)$ なら，カット式 A は $C\supset D$ の形をしており，以下の導出を手にしていることになる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Psi,\Gamma,\Theta_1,C\Rightarrow D,\Xi_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \Psi,\Gamma,\Theta_{2n},C\Rightarrow D,\Xi_{2n}\end{array}}{\Psi,\Gamma\Rightarrow\Delta,C\supset D}\,(\supset)\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ C\supset D,\Phi,\Pi,\Delta_1,E\Rightarrow F,\Gamma_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\vdots\\ C\supset D,\Phi,\Pi,\Delta_{2m},E\Rightarrow F,\Gamma_{2m}\end{array}}{C\supset D,\Phi,\Pi\Rightarrow E\supset F,\Sigma}\,(\supset)}{G_1\supset H_1,\ldots,G_n\supset H_n,\Gamma,C_1\supset D_1,\ldots,C_m\supset D_m,\Pi\Rightarrow\Delta,E\supset F,\Sigma}\,(Cut)\quad,$$

ここでは，$\Psi = G_1\supset H_1,\ldots,G_n\supset H_n$, $n \geq 0$, $\Xi_i = \{G_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Theta_i = \{H_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, $\gamma(i)$ は $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合の上を走る．$\delta(i) = \{1,\ldots,n\} \setminus \gamma(i)$．また，$\Phi = C_1\supset D_1,\ldots,C_m\supset D_m$, $m \geq 0$, $\Gamma_k = \{C_j \mid j \in \gamma'(k)\}$, $\Delta_k = \{D_j \mid j \in \delta'(k)\}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^m$, $\gamma'(k)$ は $\{1,\ldots,m\}$ の部分集合の上を走る．$\delta'(k) = \{1,\ldots,m\} \setminus \gamma'(k)$.

変形の過程は以下のように進む．まず，(Cut) の左の前提に適用された規則 $(\supset)$ のすべての前提に対して，$(\supset)$ を適用する：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Psi,\Gamma,\Theta_1,C\Rightarrow D,\Xi_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \Psi,\Gamma,\Theta_{2^n},C\Rightarrow D,\Xi_{2^n}\end{array}}{\Psi,\Gamma\Rightarrow C\supset D}\,(\supset),$$

ここでは，$(\supset)$ の結論の後件における文脈が空．次に，この結果に基づいて，(Cut) の右の前提に適用された規則 $(\supset)$ の全ての前提において，$C\supset D$ の出現を取り除く：

$$\mathcal{D}_k = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Psi,\Gamma,\Theta_1,C\Rightarrow D,\Xi_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \Psi,\Gamma,\Theta_{2^n},C\Rightarrow D,\Xi_{2^n}\end{array}}{\Psi,\Gamma\Rightarrow C\supset D}\,(\supset)\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ C\supset D,\Phi,\Pi,\Delta_k,E\Rightarrow F,\Gamma_k\end{array}}{\Psi,\Gamma,\Phi,\Pi,\Delta_k,E\Rightarrow F,\Gamma_k}\,(Cut),$$

ここでは，$1 \leqslant k \leqslant 2^m$ であり，また，この下付き添字 k はもとの導出において，(Cut) の右の前提の $(\supset)$ の前提の数である．

最後に，$\mathcal{D}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 2^m)$ の全ての導出から，以下の導出を手にする：

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta_1, E \Rightarrow F, \Gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_k \\ \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta_k, E \Rightarrow F, \Gamma_k\end{matrix}}{\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi \Rightarrow \Delta, E \supset F, \Sigma}\ (\supset).$$

(v) (Cut) の両方の導出でカット式が主式のとき．$A \equiv C_1 \supset D_1$ の場合を考える．

一般的な議論を提示する前に，例をひとつ見る．もとの導出が以下のようであると仮定しなさい：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_{l1} \\ \Gamma, C_1 \Rightarrow D_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C_1 \supset D_1}\ (\supset) \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_{r1} \\ C_1 \supset D_1, \Pi, E \Rightarrow F, C_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_{r2} \\ D_1, C_1 \supset D_1, \Pi, E \Rightarrow F\end{matrix}}{C_1 \supset D_1, \Pi \Rightarrow E \supset F, \Sigma}\ (\supset)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, E \supset F, \Sigma}\ (Cut).$$

このとき，議論を三つのステップに分ける．最初のステップでは，(Cut) の右の前提の $(\supset)$ の全ての前提における $C_1 \supset D_1$ の出現を取り除く．$\mathcal{D}_{l1}$ と $\mathcal{D}_{r1}$ から，以下の導出 $\mathcal{D}_1$ を構成する：

$$\mathcal{D}_1 = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_{l1} \\ \Gamma, C_1 \Rightarrow D_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow C_1 \supset D_1}\ (\supset) \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_{r1} \\ C_1 \supset D_1, \Pi, E \Rightarrow F, C_1\end{matrix}}{\Gamma, \Pi, E \Rightarrow F, C_1}\ (Cut).$$

$\mathcal{D}_{l1}$ と $\mathcal{D}_{r2}$ から，以下の導出 $\mathcal{D}_2$ を手にする：

$$\mathcal{D}_2 = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_{l1} \\ \Gamma, C_1 \Rightarrow D_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow C_1 \supset D_1}\ (\supset) \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_{r2} \\ C_1 \supset D_1, D_1, \Pi, E \Rightarrow F\end{matrix}}{D_1, \Gamma, \Pi, E \Rightarrow F}\ (Cut).$$

$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ において，cut-height が小さくなるので，(Cut) を取り除くことができることに注意しなさい．

二番目のステップにおいて，カット式 $C_1 \supset D_1$ の部分論理式 (C_1 と D_1) を (Cut) の左の前提の $(\supset)$ の前提から取り除くことができる．

$\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_{l1}$ から，以下の導出を構成することができる：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\stackrel{\mathcal{D}_1}{\Gamma,\Pi,E\Rightarrow F,C_1}\quad \stackrel{\mathcal{D}_{l1}}{C_1,\Gamma\Rightarrow D_1}}{\Gamma,\Pi,E,\Gamma\Rightarrow F,D_1}\,(Cut)}{\Gamma,\Pi,E\Rightarrow F,D_1}\quad \stackrel{\mathcal{D}_2}{D_1,\Gamma,\Pi,E\Rightarrow F}}{\dfrac{\Gamma,\Pi,E,\Gamma,\Pi,E\Rightarrow F,F}{\Gamma,\Pi,E\Rightarrow F}}\,(Cut)
$$
,

ここでは，二重線は縮約の有限回の適用を意味する，かつ，カット式 C_1 や D_1 の重さは，もとの導出のカット式 $C_1{\supset}D_1$ の重さより小さいので，(Cut) の適用が可能であることに注意しなさい．

最後のステップにおいて，以下の導出を手にするために，(Step 2) で手にした結論に対して，($\supset$) を適用する：

$$
\dfrac{\stackrel{\vdots}{\Gamma,\Pi,E\Rightarrow F}}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,E{\supset}F,\Sigma}\,(\supset).
$$

これまで，簡単な例を用いてどのようにカット規則を取り除くことができるのかを見てきた．以下では，一般的な議論を提示する．もとの導出は以下としよう：

$$
\dfrac{\mathcal{D}_1\quad \mathcal{D}_2}{G_1{\supset}H_1,\ldots,G_n{\supset}H_n,\Gamma,C_2{\supset}D_2,\ldots,C_m{\supset}D_m,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma,E{\supset}F}\,(Cut).
$$

$$
\mathcal{D}_1=\dfrac{\stackrel{\mathcal{D}_{l1}}{\Psi,\Gamma,\Theta_1,C_1\Rightarrow D_1,\Xi_1}\quad\ldots\quad\stackrel{\mathcal{D}_{l2^n}}{\Psi,\Gamma,\Theta_{2^n},C_1\Rightarrow D_1,\Xi_{2^n}}}{\Psi,\Gamma\Rightarrow\Delta,C_1{\supset}D_1}\,(\supset)
$$

$$
\mathcal{D}_2=\dfrac{\stackrel{\mathcal{D}_{r1}}{C_1{\supset}D_1,\Phi,\Pi,\Delta_1,E\Rightarrow F,\Gamma_1}\quad\ldots\quad\stackrel{\mathcal{D}_{r2^m}}{C_1{\supset}D_1,\Phi,\Pi,\Delta_{2^m},E\Rightarrow F,\Gamma_{2^m}}}{C_1{\supset}D_1,\Phi,\Pi\Rightarrow E{\supset}F,\Sigma}\,(\supset)
$$

ここでは，$\Psi=G_1{\supset}H_1,\ldots,G_n{\supset}H_n$, $n\geq 0$, $\Xi_i=\{G_j\mid j\in\gamma(i)\}$, $\Theta_i=\{H_j\mid j\in\delta(i)\}$, $1\leqslant i\leqslant 2^n$, $\gamma(i)$ は $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合の上を走る．$\delta(i)=\{1,\ldots,n\}\smallsetminus\gamma(i)$．また，$\Phi=C_2{\supset}D_2,\ldots,C_m{\supset}D_m$, $m\geq 0$, $\Gamma_k=\{C_j\mid j\in\gamma'(k)\}$, $\Delta_k=\{D_j\mid j\in\delta'(k)\}$, $1\leqslant k\leqslant 2^m$, $\gamma'(k)$ は $\{1,\ldots,m\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta'(k)=\{1,\ldots,m\}\smallsetminus\gamma'(k)$．

カット式は (Cut) の両方の前提において主式であることを思い出しなさい．前の例で見たように，この議論は三つのステップに分割される．

(Step 1) (Cut) の右の前提の $(\supset)$ の右の各前提において，$C_1 \supset D_1$ の出現を以下のように取り除く：

$$\dfrac{\dfrac{\stackrel{\mathcal{D}_{l1}}{\Psi, \Gamma, \Theta_1, C_1 \Rightarrow D_1, \Xi_1} \quad \ldots \quad \stackrel{\mathcal{D}_{l2^n}}{\Psi, \Gamma, \Theta_{2^n}, C_1 \Rightarrow D_1, \Xi_{2^n}}}{\Psi, \Gamma \Rightarrow C_1 \supset D_1}\,(\supset) \qquad \stackrel{\mathcal{D}_{rk}}{C_1 \supset D_1, \Phi, \Pi, \Delta_k, E \Rightarrow F, \Gamma_k}}{\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta_k, E \Rightarrow F, \Gamma_k}\,(Cut).$$

(Step 2) 議論の詳細に移る前に，(Cut) の右の前提の $(\supset)$ の前提において，C_1 と D_1 の出現に注意を払うために，このステップにおいて役に立つ概念 **シークエントの適切なペア**（*nice pair of sequents*）を導入しよう．

$\Gamma'_k = \{C_j \mid j \in \gamma''(k)\}$, $\Delta'_k = \{D_j \mid j \in \delta''(k)\}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{m-1}$ を定める．このとき，$\gamma''(k)$ は $\{2, \ldots, m\}$ の部分集合の上を走り，$\delta''(k) = \{2, \ldots, m\} \setminus \gamma''(k)$. (Step 1) により，そのルートが以下の形をしているシークエントの数は 2^{m-1}:

$$\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E \Rightarrow F, \Gamma'_k, C_1$$

かつ，そのルートが以下の形をしているシークエントの数も 2^{m-1}:

$$D_1, \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E \Rightarrow F, \Gamma'_k.$$

シークエントの適切なペアはまさに上記のような特定の形をしたシークエントのペアとして定義される．このとき，適切なペアのシークエントは，後件の C_1 の出現と前件の D_1 の出現だけが異なっていることがわかる．

もとの導出，つまり $\Psi, \Gamma, \Theta_i, C_1 \Rightarrow D_1, \Xi_i$ が導出可能であるような，(Cut) の左の前提中で，下付き添字 i $(1 \leqslant i \leqslant 2^n)$ を固定する．

まず，(Cut) によって，$\Psi, \Gamma, \Theta_i, C_1 \Rightarrow D_1, \Xi_i$ の前件中の C_1 の出現を，結果として出てきたすべてのシークエント $\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E \Rightarrow F, \Gamma'_k, C_1$ を用いて，取り除く．

さらに，C_1 の出現を取り除くことによってこれらのすべてから，C_1 を取り除くのに用いた，適切なペアのシークエントのうち，もう一方のシークエント $D_1, \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E \Rightarrow F, \Gamma'_k$ を用いて (Cut) を適用することによって D_1 の出現も取り除く．

これまでのことをまとめると以下のようになる．各 k $(1 \leqslant k \leqslant 2^{m-1})$ と i $(1 \leqslant i \leqslant 2^n)$ に対して，導出を定める：

$$
\mathcal{D}_{(k,i)} = \begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E \Rightarrow F, \Gamma'_k, C_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{li} \\ C_1, \Phi, \Gamma, \Theta_i \Rightarrow D_1, \Xi_i\end{array}}{\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E, \Phi, \Gamma, \Theta_i \Rightarrow F, \Gamma'_k, D_1, \Xi_i}\ (Cut) \\ \hline\hline \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E, \Theta_i \Rightarrow F, \Gamma'_k, \Xi_i, D_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ D_1, \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E \Rightarrow F, \Gamma'_k\end{array}}{\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E, \Theta_i, \Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, E \Rightarrow F, \Gamma'_k, \Xi_i, F, \Gamma'_k}\ (Cut), \\ \hline\hline
\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, \Theta_i, E \Rightarrow F, \Gamma'_k, \Xi_i
\end{array}
$$

ここでの，二重線は縮約を有限回適用することを意味する．

(Step 3) このステップでは，(Step 2) の結果として出てきたシークエントの全て

$$\Psi, \Gamma, \Phi, \Pi, \Delta'_k, \Theta_i, E \Rightarrow F, \Gamma'_k, \Xi_i$$

に対し，$(\supset)$ を適用する．このようなシークエントの数は，$2^n \cdot 2^{m-1} = 2^{n+m-1}$.

このとき，以下の導出を手にする：

$$
\dfrac{\mathcal{D}_{(1,1)} \quad \mathcal{D}_{(1,2)} \quad \ldots \quad \mathcal{D}_{(1,2^n)} \quad \mathcal{D}_{(2,1)} \quad \ldots \quad \mathcal{D}_{(2,2^n)} \quad \ldots \quad \mathcal{D}_{(2^{m-1},2^n)}}{G_1 \supset H_1, \ldots, G_n \supset H_n, \Gamma, C_2 \supset D_2, \ldots, C_m \supset D_m, \Pi \Rightarrow E \supset F, \Delta, \Sigma}\ (\supset)
$$

なぜ，$(\supset)$ の上記のような適用において，望んでいた結論を手にできるのだろうか．$G_{n+1} \supset H_{n+1}, \ldots, G_{n+m-1} \supset H_{n+m-1}$ を $C_2 \supset D_2, \ldots, C_m \supset D_m$ と考える．このとき，この同一視によって，$(\supset)$ の結論の前件の主式が適切に導入されていることが簡単にわかる．ここでは，$\Psi = G_1 \supset H_1, \ldots, G_n \supset H_n$ かつ $\Phi = C_2 \supset D_2, \ldots, C_m \supset D_m$ であることを思い出そう．

□

次の節で，証明論的（あるいは，構成的）な埋め込みの結果を経由して，様相論理 **K4** のカット規則の許容可能性に，**G3B** のカットの許容可能性を還元することで，この定理の異なった証明論的な証明も与える．

3.3.1　健全性と完全性

さて，先にも述べたように，**G3B** と **LBP** の同値性を示すことができる．ただし，**G3B** と **LBP** での，シークエント概念の間に，違いがあることに注意しなければならな

い．**G3B** では，シークエントは多重集合のペアであるが，**LBP** では，シークエントは集合のペアである．**G3B** と **LBP** の同値性を示すために，多重集合を対応する集合へと変換する関数 $(\cdot)^*$ を定める必要がある．また，**LBP** から **G3B** への方向については，**G3B** の弱化の許容可能性を用いる．

命題 16 ((Yamasaki and Sano 2017, Proposition 3))**.** Γ と Δ は論理式の有限多重集合とする．このとき，**LBP** $\vdash \Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ と **G3B** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ が同値になる．

クリプキモデルに対する **LBP** の完全・健全性と **G3B** と **LBP** の同値性から，**G3B** が全ての推移的なクリプキフレームのクラスに対して，完全でありかつ健全であることが導き出せる．そこでまず， (Ishii et al. 2001) での **LBP** に対する健全性と完全性について見ておく．**LBP** におけるシークエントの妥当性は **G3B** の妥当性概念と同じでよい．

Fact 5 ((Ishii et al. 2001))**.** Γ と Δ を論理式の有限集合とする．このとき，**LBP** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることと，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が任意の **BPL** フレームで妥当であることは同値である．

定理 2 (**G3B** の健全性と完全性，(Yamasaki and Sano 2017, Theorem 2))**.** Γ と Δ を論理式の有限多重集合とする．**G3B** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることと，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が任意の **BPL** フレームで妥当であることは同値である．

Proof. 左辺から右辺の方向に対して，まず，**G3B** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ を仮定する．命題 16 から，**LBP** $\vdash \Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ を手にできる．続いて，Fact 5 より，$\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ が任意の **BPL** フレームで妥当であることが帰結する．このことから，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が任意の **BPL** フレームで妥当であることはすぐにわかる．反対の方向に対しては，まず，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が任意の **BPL** フレームで妥当であることを仮定する．このとき，$\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ が任意の **BPL** フレームで妥当であることは明らかである．よって，Fact 5 から，**LBP** $\vdash \Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ であることが帰結する．そして，命題 16 から，**G3B** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ を手にできる． □

3.4　BPL から様相論理 K4 への証明論的埋め込み

この節では，**G3B** が **G3K4** へと埋め込み可能であることを示す．まず，**K4** に対する **G3** 型のラベルなしのシークエント計算の体系を与える．

3.4.1　K4 に対する G3 型のラベルなしのシークエント計算の体系：G3K4

様相論理の語彙，論理式の定義は第 1 章と同じで良い．シークエントの定義は定義 22 と同じで良いが，Γ, Δ は様相論理の論理式の有限多重集合とする．

G3K4[*2]における，導出，許容可能性などの概念は，**G3B** と同様に与えられる．様相論理 **K4** に対するシークエント計算は以下の規則を **LK** に加えることで手にできる：

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ .$$

K4 に対するシークエント計算の体系は，まず，G. サンビンと S. ヴァレンティーニ (Sambin and Valentini 1982) によって与えられた．彼らの体系はカット除去定理を満たす（ (Sambin and Valentini 1982, Theorem 2.4) を見よ）．

K4 の **G3** 型のラベルなしのシークエント計算の体系を定義するのは簡単である．その体系 **G3K4** は，表 3.3 のように与えられる．つまり，以下の規則：

$$\frac{\Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Sigma}\ (\Box_4)$$

を (Troelstra and Schwichtenberg 2000) で与えられた **G3** 型のラベルなしの古典論理のシークエント計算の体系に加えればよいということである．$\Box$ に対するこの規則が，(Sambin and Valentini 1982) によって与えられた規則から，簡単に手に入ることはすぐにわかる．

$(\Box_4)$ の規則を除いた **G3K4** の全ての規則の文脈の概念は，**G3B** の文脈の概念と同じ．$(\Box_4)$ において，Π と Σ は文脈．$(\Box_4)$ の規則を除いた **G3K4** の各規則の結論において，文脈に含まれない論理式（たち）を，**主式**（*principal formula* (*s*)）と呼ぶ．$(\Box_4)$ に対して，結論中の $\Box\Gamma$ と $\Box A$ は主式．**G3K4** において，高さ保存の弱化の許容可能性，$(\Box_4)$ の規則を除く全規則の高さ保存の反転可能性，高さ保存の縮約の許容可能性が成り立つ．この体系 **G3K4** も以下のようにカット除去定理が成り立つ．

[*2] 第 4 章で見る，ラベル付きシークエント計算での **K4** の体系も，**G3K4** と呼ばれるが，本章では，**G3K4** というときには，**K4** に対するラベルなしの **G3** 型のシークエント計算の体系を指すこととする．

表 3.3　**G3K4**

(Axioms)

$$\frac{}{P, \Gamma \Rightarrow \Delta, P}\ (Id) \quad \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\bot)$$

(Logical Rules)

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B}\ (R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (R\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\supset) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \supset B}\ (R\supset)$$

$$\frac{\Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Sigma}\ (\Box_4)$$

Fact 6. **G3K4** においてカット規則は許容可能.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut).$$

3.4.2　埋め込み定理

ここでは，第 1 章ですでに与えた ⊞ 翻訳を用いる.

定義 42 (翻訳 $(\cdot)^{\boxplus}$).

$$\begin{array}{rcl} P^{\boxplus} & := & P \& \Box P, \\ \bot^{\boxplus} & := & \bot, \\ (A \supset B)^{\boxplus} & := & \Box(A^{\boxplus} \supset B^{\boxplus}), \\ (A \& B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus} \& B^{\boxplus}, \\ (A \vee B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus} \vee B^{\boxplus}. \end{array}$$

有限多重集合 $\Gamma \equiv A_1, ..., A_n$ に対して，$\Gamma^{\boxplus} := A_1^{\boxplus}, ..., A_n^{\boxplus}$ と定める.

この翻訳は第 4 章でも見るように，ラベル付きシークエント計算を用いた **BPL** から **K4** への埋め込みの際にも用いられる[*3].

以下で，ここで与えるラベルなしのシークエント計算の体系についての以下のような同値関係が成り立つことを見ていく：

G3B $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることと，**G3K4** $\vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$ であることは同値である.

まず，左辺から右辺の方向（補題 19）を示す．この補題を示すために，準備として二つの補題を示す必要がある.

補題 17 ((Yamasaki and Sano 2017, Lemma 4)). **G3K4** $\vdash A^{\boxplus} \Rightarrow \Box A^{\boxplus}$.

Proof. A の複雑度についての帰納法によって示す．もし，$A \equiv P$ なら，$P\&\Box P \Rightarrow \Box(P\&\Box P)$ を示せばよい.

$$\dfrac{\dfrac{P,\Box P \Rightarrow P \qquad \dfrac{P,\Box P \Rightarrow P}{P,\Box P \Rightarrow \Box P}\,(\Box_4)}{P,\Box P \Rightarrow P\&\Box P}\,(R\&)}{\dfrac{P,\Box P \Rightarrow \Box(P\&\Box P)}{P\&\Box P \Rightarrow \Box(P\&\Box P)}\,(L\&)}\,(\Box_4) \quad ,$$

ここでは，$(\Box_4)$ の各々の適用の結論の前件中に出現する P の各出現は文脈である.

もし，$A \equiv B\&C$ なら，$B^{\boxplus}\&C^{\boxplus} \Rightarrow \Box(B^{\boxplus}\&C^{\boxplus})$ を示せばよい．帰納法の仮定によって，$B^{\boxplus} \Rightarrow \Box B^{\boxplus}$ と $C^{\boxplus} \Rightarrow \Box C^{\boxplus}$ の導出を手にしていると仮定する．このとき，以下の導出を手にする：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{B^{\boxplus} \Rightarrow \Box B^{\boxplus}}}{B^{\boxplus}, C^{\boxplus} \Rightarrow \Box B^{\boxplus}}\,(hp{-}weak) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{C^{\boxplus} \Rightarrow \Box C^{\boxplus}}}{B^{\boxplus}, C^{\boxplus} \Rightarrow \Box C^{\boxplus}}\,(hp{-}weak)}{B^{\boxplus}, C^{\boxplus} \Rightarrow \Box B^{\boxplus}\&\Box C^{\boxplus}}\,(R\&) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Box B^{\boxplus}, \Box C^{\boxplus}, B^{\boxplus}, C^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}} \quad \dfrac{\vdots}{\Box B^{\boxplus}, \Box C^{\boxplus}, B^{\boxplus}, C^{\boxplus} \Rightarrow C^{\boxplus}}}{\Box B^{\boxplus}, \Box C^{\boxplus}, B^{\boxplus}, C^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}\&C^{\boxplus}}\,(R\&)}{\Box B^{\boxplus}, \Box C^{\boxplus} \Rightarrow \Box(B^{\boxplus}\&C^{\boxplus})}\,(\Box_4)}{\Box B^{\boxplus}\&\Box C^{\boxplus} \Rightarrow \Box(B^{\boxplus}\&C^{\boxplus})}\,(L\&)}{\dfrac{B^{\boxplus}, C^{\boxplus} \Rightarrow \Box(B^{\boxplus}\&C^{\boxplus})}{B^{\boxplus}\&C^{\boxplus} \Rightarrow \Box(B^{\boxplus}\&C^{\boxplus})}\,(L\&)}\,(Cut) \quad ,$$

ここでは，$(hp{-}weak)$ は高さ保存の弱化の規則の適用を意味する.

[*3] ただし，第 4 章では古典論理から F に至るまで，広範な埋め込みの証明を与えるために ⊞ 翻訳を用いる.

もし，$A \equiv B \vee C$ なら，この時，その証明は，& の場合と似たものになる．もし，$A \equiv B \supset C$ なら，$\Box(B^{\boxplus} \supset C^{\boxplus}) \Rightarrow \Box\Box(B^{\boxplus} \supset C^{\boxplus})$ は公理図式 $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ の例なので，その証明は簡単に与えられる．$\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ は **G3K4** で導出可能である．　□

補題 18 ((Yamasaki and Sano 2017, Lemma 5))**.** $\Theta^{\boxplus}$ を翻訳された論理式の多重集合とする．以下の規則が **G3K4** で許容可能である．

$$\frac{\Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A}{\Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Box A, \Sigma}\ (\Box').$$

Proof. **G3K4** $\vdash \Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A$ ならば，**G3K4** $\vdash \Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Box A, \Sigma$ であることを示せば十分である．

G3K4 において,$\vdash \Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A$ を仮定する．$\vdash \Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A$ から, 高さ保存の弱化の許容可能性を適用し,$\vdash \Box\Theta^{\boxplus}, \Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A$ が帰結する．$\Box\Theta^{\boxplus} = \{\Box B^{\boxplus} \mid B \in \Theta\}$ とする．このとき，$\vdash \Box\Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow \Box A, \Sigma$ を手にするために，$\vdash \Box\Theta^{\boxplus}, \Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow A$ に $(\Box_4)$ を適用する．補題 17 から，任意の B に対して $B^{\boxplus} \Rightarrow \Box B^{\boxplus}$ を手にする．そこで，$\Box\Theta^{\boxplus}$ の各メンバー $\Box B^{\boxplus}$ を $B^{\boxplus} \Rightarrow \Box B^{\boxplus}$ を用いて (Cut) を適用すれば十分である．結果として，$\vdash \Theta^{\boxplus}, \Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Box A, \Sigma$ を手にする．　□

補題 18 は，$(\Box_4)$ の適用において，文脈 $\Theta^{\boxplus}$ を加えても差し支えないということを意味する．

補題 19 ((Yamasaki and Sano 2017, Lemma 6))**.** **G3B** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば **G3K4** $\vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$.

Proof. **G3B** において，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の導出の高さ n の帰納法によって示す．**G3B** において，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の導出が存在すると仮定する．もし，この導出の高さが 0 の場合，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は公理．もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が公理（つまり，(Id) か $(L\bot)$）なら，その翻訳 $\Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$ は明らかに導出可能.

そこでの導出の高さが 0 以上の場合を考えよう．最後に適用された規則が $(\supset)$ であるとき，つまり，以下の導出を手にしているとする：

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_m \supset D_m, \Delta_1, \Gamma', A \Rightarrow B, \Gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\vdots \\ C_1 \supset D_1, \ldots, C_m \supset D_m, \Delta_{2^m}, \Gamma', A \Rightarrow B, \Gamma_{2^m}\end{matrix}}{\Gamma', C_1 \supset D_1, \ldots, C_m \supset D_m \Rightarrow A \supset B, \Delta'}\ (\supset),$$

ここでは，$m \geq 0$, $\Gamma_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^m$, $\gamma(i)$ は $\{1, \ldots, m\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta(i) = \{1, \ldots, m\} \setminus \gamma(i)$.

帰納法の仮定により，シークエント $\{\Box(C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus})\}_{1 \leqslant i \leqslant m}, \Delta_i^{\boxplus}, \Gamma'^{\boxplus}, A^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}, \Gamma_i^{\boxplus}$ を手にする．ここでは，$1 \leqslant i \leqslant 2^m$．これらのシークエントに対し，$(L\supset)$ を有限回適用し，$\{C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus}\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ を手にする．さらに，$(R\supset)$ を $(L\supset)$ の適用の結果に適用し，そして $(\Box_4')$ を適用する．そういうわけで，**G3K4** において，以下の導出を手にすることができる：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi_1 \quad \Phi_2}{\Gamma'^{\boxplus}, \{\Box(C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus})\}_{1 \leqslant i \leqslant m}, \{C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus}\}_{1 \leqslant i \leqslant m}, A^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}}\,(L\supset)}{\Gamma'^{\boxplus}, \{\Box(C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus})\}_{1 \leqslant i \leqslant m}, \{C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus}\}_{1 \leqslant i \leqslant m} \Rightarrow A^{\boxplus} \supset B^{\boxplus}}\,(R\supset)}{\Gamma'^{\boxplus}, \{\Box(C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus})\}_{1 \leqslant i \leqslant m} \Rightarrow \Box(A^{\boxplus} \supset B^{\boxplus}), \Delta'^{\boxplus}}\,(\Box_4') \quad ,
$$

$$
\Phi_1 = \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma'^{\boxplus}, \{\Box(C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus})\}_{1 \leqslant i \leqslant m}, \{C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus}\}_{1 \leqslant i \leqslant m-1}, A^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}, C_m^{\boxplus} \end{array}
$$

$$
\Phi_2 = \quad \begin{array}{c} \vdots \\ D_m^{\boxplus}, \Gamma'^{\boxplus}, \{\Box(C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus})\}_{1 \leqslant i \leqslant m}, \{C_i^{\boxplus} \supset D_i^{\boxplus}\}_{1 \leqslant i \leqslant m-1}, A^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus} \end{array}
$$

そのエンドシークエントは $\Gamma', C_1 \supset D_1, \ldots, C_m \supset D_m \Rightarrow A \supset B, \Delta'$ の翻訳の結果になっている．

残りの場合についての証明は，$(\supset)$ の場合と似た仕方で与えることができる．　□

続いて，以下の補題 20 によって，右辺から左辺の方向を示すことができる．というのも，$\Pi = \Sigma = \emptyset$ とおくことによって，補題 20 の特別な場合として定理 3 の右辺から左辺の方向を示すことができるからである．

補題 20 ((Yamasaki and Sano 2017, Lemma 7))**.** Γ と Δ は論理式の有限多重集合とし，Π と Σ は原子式の有限多重集合とする．このとき，

$$
\mathbf{G3K4} \vdash \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus} \quad \text{ならば} \quad \mathbf{G3B} \vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta.
$$

Proof. **G3K4** において，$\Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}$ の導出の高さ n についての帰納法で示す．もし，$n = 0$ なら，**G3K4** において，$\Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}$ は公理（$(L\bot)$ と (Id) の二つの場合がある）．そういうわけで，**G3B** において，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta$ も公理.

もし，$n > 0$ なら，この導出の最後に適用された規則に依存して場合分けを行う．Π と Σ が，原子式の有限多重集合なので，翻訳された，$\Gamma^{\boxplus}$ と $\Delta^{\boxplus}$ における論理式の最も外側の論理結合子は，含意であることはない．そういうわけで，最後に適用された規則は，含意の規則以外でなければならない．そこで，以下の場合を考える：

(i) 最後に適用された規則が $(L\vee)$ か $(R\vee)$; (ii) 最後に適用された規則が $(L\&)$ か $(R\&)$; (iii) 最後に適用された規則が $(\Box_4)$.

(i) 最後に適用された規則が $(L\vee)$ か $(R\vee)$：帰納法の仮定の素直な適用が，**G3B** での要求された導出を与える．

(ii) 最後に適用された規則が $(L\&)$ か $(R\&)$：さらなる二つの場合分けを行う：1) $P^{\boxplus} \equiv P\&\Box P$ がこの規則の主式；2) $(A\&B)^{\boxplus} \equiv A^{\boxplus}\&B^{\boxplus}$ がこの規則の主式．後者の 2) の場合は (i) の場合と同様に示すことができる．ここでは，1) の場合に集中する．まず，最後に適用された規則が $(L\&)$ であると仮定する，つまり，**G3K4** での導出が以下の形をしていると仮定する：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P, \Box P, \Gamma^{\boxplus}, \Pi', \Box\Pi' \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}\end{array}}{P\&\Box P, \Gamma^{\boxplus}, \Pi', \Box\Pi' \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}}\ (L\&).$$

帰納法の仮定によって私たちは $(L\&)$ の前提から，要求されていたように **G3B** において以下の導出を手にできる：

$$\begin{array}{c}\vdots\\ P, \Gamma, \Pi' \Rightarrow \Sigma, \Delta.\end{array}$$

次に，最後に適用された規則が，$(R\&)$ であると仮定する．このとき，この導出の最後の形は次のようになる：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta'^{\boxplus}, P\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta'^{\boxplus}, \Box P\end{array}}{\Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta'^{\boxplus}, P\&\Box P}\ (R\&).$$

このとき，$(R\&)$ の左の前提に帰納法の仮定を適用すれば，求めていた導出を手にできる：

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta', P.\end{array}$$

(iii) **G3K4** で最後に適用された規則が，$(\Box_4)$ とする．このとき，もとの導出は以下の形をしている（$m \geq 0$）：

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Pi'', \Box\Pi'', C_1^{\boxplus}{\supset}D_1^{\boxplus}, \ldots, C_m^{\boxplus}{\supset}D_m^{\boxplus}, \Box(C_1^{\boxplus}{\supset}D_1^{\boxplus}), \ldots, \Box(C_m^{\boxplus}{\supset}D_m^{\boxplus}) \Rightarrow A^{\boxplus}{\supset}B^{\boxplus}\end{array}}{\Gamma'^{\boxplus}, \Pi', \Box\Pi', \Pi'', \Box\Pi'', \Box(C_1^{\boxplus}{\supset}D_1^{\boxplus}), \ldots, \Box(C_m^{\boxplus}{\supset}D_m^{\boxplus}) \Rightarrow \Box(A^{\boxplus}{\supset}B^{\boxplus}), \Delta'^{\boxplus}, \Sigma}\ (\Box_4),$$

ここでは，$\Gamma'^{\boxplus}, \Pi', \Box\Pi', \Pi''$ と $\Delta'^{\boxplus}, \Sigma$ は $(\Box_4)$ の結論の文脈，Γ' と Δ' は **BPL** の論理式からなる多重集合，そして，Π', Π'', Σ は全て，原子式の多重集合であることに注意しなさい．ここで示したいのは，以下のシークエントが **G3B** で導出可能であること：

$$\Gamma', \Pi', \Pi'', C_1 \supset D_1, \ldots, C_m \supset D_m \Rightarrow A \supset B, \Delta', \Sigma.$$

このとき，以下のような $(\supset)$ の規則の適用の際に用いる前提を全て導き出せば十分である：

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta_1, \Gamma', \Pi', \Pi'', C_1{\supset}D_1, \ldots, C_m{\supset}D_m, A \Rightarrow B, \Gamma_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Delta_{2^m}, \Gamma', \Pi', \Pi'', C_1{\supset}D_1, \ldots, C_m{\supset}D_m, A \Rightarrow B, \Gamma_{2^m}\end{array}}{\Gamma', \Pi', \Pi'', C_1{\supset}D_1, \ldots, C_m{\supset}D_m \Rightarrow A{\supset}B, \Sigma, \Delta'}\ (\supset),$$

ここでは，$m \geq 0$, $\Gamma_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^m$, $\gamma(i)$ は $\{1, \ldots, m\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta(i) = \{1, \ldots, m\} \setminus \gamma(i)$.
$(\supset)$ の結論において，Γ', Π', Π'', Σ, Δ' が文脈に含まれることを述べておく．$1 \leqslant i \leqslant 2^m$ としよう．このとき，以下のシークエントが，**G3B** で導出可能であること示せば十分：

$$\Delta_i, \Gamma', \Pi', \Pi'', C_1{\supset}D_1, \ldots, C_m{\supset}D_m, A \Rightarrow B, \Gamma_i.$$

今，先のもとの導出を思い出しなさい．ここで，以下の導出を手にするために，もとの導出において，$(\Box_4)$ の前提に対して，**G3K4** での $(R{\supset})$ の高さ保存の反転可能性を適用することで，以下のシークエントを手にできる：

$$\Pi'', \Box\Pi'', C_1^{\boxplus}{\supset}D_1^{\boxplus}, \ldots, C_m^{\boxplus}{\supset}D_m^{\boxplus}, \Box(C_1^{\boxplus}{\supset}D_1^{\boxplus}), \ldots, \Box(C_m^{\boxplus}{\supset}D_m^{\boxplus}), A^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}$$

このシークエントもまた，**G3K4** で導出可能である．さらに，$(L{\supset})$ に対する反転可能性をこのシークエントに適用し，以下のシークエントを手にする：

$$\Delta_j^{\boxplus}, \Pi'', \Box\Pi'', \Box(C_1^{\boxplus}\supset D_1^{\boxplus}), \ldots, \Box(C_m^{\boxplus}\supset D_m^{\boxplus}), A^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}\Gamma_j^{\boxplus}.$$

このシークエントは，全ての $1 \leqslant j \leqslant 2^m$ に対して，**G3K4** において導出可能である．$1 \leqslant i \leqslant 2^m$ であるような i を固定していることを思い出しなさい．このとき，**G3K4** において，もとの導出の $(\Box_4)$ の前提とせいぜい同じ高さで

$$\Delta_i^{\boxplus}, \Pi'', \Box\Pi'', \Box(C_1^{\boxplus}\supset D_1^{\boxplus}), \ldots, \Box(C_m^{\boxplus}\supset D_m^{\boxplus}), A^{\boxplus} \Rightarrow B^{\boxplus}, \Gamma_i^{\boxplus}$$

を導出可能であるので，**G3B** において導出可能であるような以下のシークエント

$$\Delta_i, \Pi'', C_1\supset D_1, \ldots, C_m\supset D_m, A \Rightarrow B, \Gamma_i$$

を手にするために，帰納法の仮定をこのシークエントに適用できる．
このとき，このシークエントの前件に対する高さ保存の弱化の適用（ここで Γ' と Π' を加える）が，**G3B** で望んでいたシークエントが導出可能であるということを結論づけることを可能にする．

□

補題 19 と補題 20 から，**G3B** と **G3K4** との間の証明論的な埋め込みを確立することができる．

定理 3 ((Yamasaki and Sano 2017, Theorem 3))**.**

G3B $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$であること，**G3K4** $\vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$であることは同値である．

3.4.3　証明論的埋め込みの拡張

証明論的な埋め込みの議論は他の埋め込みの関係に拡張できる．例えば，**DNT**$(=$ **BPL** $\oplus \neg\neg\top)$ と **KD4**$(=$ **K4** $\oplus \Diamond\top)$[*4]．もし，これらの論理体系に対する **G3** 型のシークエント計算の体系が与えられたら，**DNT** と **KD4** はどちらも，意味論的に，全ての継起的かつ推移的なクリプキフレームのクラスによって特徴付けられる．

DNT と **KD4** の各々の **G3** 型のシークエント計算の体系をどのように手にできるかを見てみよう．**DNT** に対する，カットなしのシークエント計算の体系は (Ishigaki and

[*4] **DNT** から **KD4** への埋め込みは，(Ma and Sano 2015) の中に見られる．彼らは，(Chagrov and Zakharyashchev 1992) の意味論的な手法と原子式 P を $\Box P$ へと飛ばす翻訳を用いている．

Kashima 2008) において与えられている．(Ishigaki and Kashima 2008) を参照することで，**DNT** の **G3** 型のシークエント計算の体系を与えることができる．もし，**DNT** に対する **G3** 型のシークエント計算の体系（**G3DNT**）を手にしたいなら，以下の規則を **G3B** に加えれば十分である：

$$\frac{C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,\Delta_1,\Sigma\Rightarrow\Gamma_1\quad\ldots\quad C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n,\Delta_{2^n},\Sigma\Rightarrow\Gamma_{2^n}}{\Sigma,C_1{\supset}D_1,\ldots,C_n{\supset}D_n\Rightarrow\Theta}\ (\supset_D),$$

ここでは，$n \geq 0$, $\Gamma_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, $\gamma(i)$ は $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合の上を走る．また，$\delta(i) = \{1,\ldots,n\} \setminus \gamma(i)$．**KD4** のシークエント計算の体系はすでに (Goble 1974) において与えられているので，**K4** の場合と同様に，**KD4** に対する **G3** 型のシークエント計算の体系を手にするのは簡単である．**G3KD4** を手にするために，**G3K4** に以下の規則を加えれば良い：

$$\frac{\Box\Gamma,\Gamma\Rightarrow}{\Sigma,\Box\Gamma\Rightarrow\Theta}\ \Box_D.$$

G3 型のシークエント計算に対する標準的な議論を用いて **G3DNT** と **G3KD4** の両方に対するカット規則の許容可能性を確立することができる．**G3DNT** に対しては，**G3B** に対する議論と同様の議論を用いることができる．そのため，**G3DNT** と **G3KD4** に対して，先ほど与えた埋め込みの議論を次のように拡張することができる：

定理 4 ((Yamasaki and Sano 2017, Theorem 5))**.**

G3DNT $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることと，**G3KD4** $\vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$ であることは同値である．

3.4.4　証明論的証明の意義

ではここで，定理 3 の重要な二つの帰結について述べよう．証明論的な埋め込みの結論として，**BPL** のカット除去定理と決定可能性を **K4** のそれに還元することができる．論理体系 **L** を決定可能（*decidable*）と呼ぶのは，任意の論理式 A に対して，**L** において，A が証明可能か可能でないかを決定可能であるような実効的なアルゴリズムが存在するとき．決定可能性の還元の議論については，カット除去定理の場合と同様に示されるので，ここでは，カット規則の許容可能性の還元に着目する．

定理 5 ((Yamasaki and Sano 2017, Theorem 4)). 以下のカット規則は，**G3B** において許容可能である．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut).$$

Proof. カット規則の許容可能性の還元に対して，$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $\vdash A, \Pi \Rightarrow \Sigma$ がともに，**G3B** において，$\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ を導き出す．議論は次のように進む．$\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $A, \Pi \Rightarrow \Sigma$ は **G3B** において導出可能であると仮定する．このとき，これらの仮定と定理 3 から，$\Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}, A^{\boxplus}$ と $A^{\boxplus}, \Pi^{\boxplus} \Rightarrow \Sigma^{\boxplus}$ も **G3K4** において導出可能である．**G3K4** での，カット規則の許容可能性から，**G3K4** において，$\Gamma^{\boxplus}, \Pi^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}, \Sigma^{\boxplus}$ が導出可能である．最後に，**G3B** において，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ が導出可能であることを手にするために，補題 20 を適用すればよい． □

証明論的証明のポイントの一つは，証明図についての一歩ずつの分析を行うことが可能であることにあると言える．例えば，カット除去定理の還元についての証明の中で，補題 20 を適用した．この結果を用いることができるのは，(Cut) なしで，補題 20 は示すことができるからである．カット除去定理を示そうとしているのに，補題 20 の中で **G3B** のカット除去定理が用いられていては，**G3B** のカット除去は定理の成立は保証されない．今，補題 20 では，証明論的手法を用いて示すことによってその証明の中で，カットが適用されていないことが保証される．そのため，安心して補題 20 を適用することができ，**G3B** のカット規則の許容可能性は **G3K4** のそれに還元できるのである．

第 4 章

ラベル付きシークエント計算の体系

本章では，ラベル付きシークエント計算 (Negri 2005) についての考察を行うとともに，ラベル付きシークエント計算を用いた埋め込み定理の証明を与える．

ラベル付きシークエント計算の体系は，様相論理のシークエント計算を与える試みの一つ，もう少し言うと，**S5** のカット除去定理を示すことを目標として，S. ネグリによって与えられた形式体系である (Negri 2005)．ラベル付きシークエント計算で用いられているラベルについては， (Negri 2005) で指摘されているように，S. カンガーによってその考察が行われている (Kanger 1957)．また，A. シンプソンの博士論文 (Simpson 1994) の中では，ラベルが，直観主義様相論理の自然演繹の体系の中で扱われる．ラベル付きシークエント計算の特徴の一つは，推論規則の中に自由変項や二項関係といったものが明示的に出現する点である．また，様々な論理体系を一様な仕方で形式化できるというのもその特徴の一つである．例えば，ラベル付きシークエント計算では，様々ある様相論理の体系についての形式化を行うことができ (Negri 2005)，また，直観主義論理をはじめとする非様相論理（中間論理，古典論理，直観主義論理より弱い論理）の体系についても，形式化を行うことができる (Dyckhoff and Negri 2012, Yamasaki and Sano 2016)．本論では，様相論理に対するラベル付きシークエント計算の体系は， (Negri 2005) のものを採用するが，非様相論理の形式体系については， (Yamasaki and Sano 2016) で与えられたものを用いる．

4.1　非様相論理のラベル付きシークエント計算の体系

本節では，(Yamasaki and Sano 2016) で与えられた，非様相論理のラベル付きシークエント計算の体系（$\mathbf{G3F(m)}^*$）を与え，その体系において，カット除去定理が成り立つことを示す．また，$\mathbf{G3F(m)}^*$ がどの程度の範囲の論理体系たちをカバーすることができるのかについても見る．

4.1.1　非様相論理のラベル付きシークエント計算

具体的に推論規則を見る前に，ラベル付きシークエント計算の語彙について説明をする．論理式は，$A, B, C, \ldots$ で表され，その構成は第 1 章で与えたものと同じで良い．ここでは，説明のため，改めて明示的にそれらを与える：

$$\mathsf{Form} \ni A ::= P \,|\, \bot \,|\, A\&B \,|\, A \vee B \,|\, A \supset B \quad \text{ただし，} P \in \mathsf{Prop}$$

今，変項の集合 W が与えられたとする．このとき，**ラベル付き表現** (*labelled expression*) (φ, ψ, etc.) は，$x{:}A$ か $x\mathsf{R}y$ を表しているとする．この $x\mathsf{R}y$ のことを原子述語と呼ぶ．ただし，$x, y \in W$ かつ $A \in \mathsf{Form}$．このとき，シークエントは $\varphi_1, ..., \varphi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m$ の形をしており後件中に $x\mathsf{R}y$ は出現しない．

では次に，ラベル付きシークエント計算の規則について見ていく．ラベル付きシークエント計算は，第 2 章で説明したような **G3** 型のシークエント計算として，形式化が行われている．**G3** 型のシークエント計算では，構造規則が全て，論理結合子の規則の中に吸収されているのであった．そのため，ラベル付きシークエント計算でも構造規則は一つも与えられてはいない．

ラベル付きシークエント計算では，まず一つのベースとなる論理体系の規則が与えられる．そして，そこに次々と条件を加えていくことによって，様々な論理体系を扱うことができるようになる．ここでの，ベースになる論理体系は，第 1 章ですでに導入した Corsi の **F** である．そのラベル付きシークエント計算の体系 **G3F** は表 4.1 のように与えられる． (Dyckhoff and Negri 2012) でも，直観主義論理より広い範囲を扱うことができる非様相論理の体系を，一様な仕方で扱えるラベル付きシークエント計算が与えられている． (Dyckhoff and Negri 2012) では，直観主義論理の原子式の単調性を参考にした形の $x\mathsf{R}y, x{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}P$ が，(Id) の規則として与えられている．この点は，本論で与える

非様相論理の (Id) の規則とは異なる点である． (Dyckhoff and Negri 2012) との形式化の違いについては，後ほど詳しく説明する．

表 4.1　**G3F** (Yamasaki and Sano 2016)

(Axioms)

$$\frac{}{x{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}P}\ (Id) \quad \frac{}{x{:}\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\bot)$$

(Logical Rules)

$$\frac{x{:}A, x{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A\&B}\ (R\&)$$

$$\frac{x{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad x{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A, x{:}B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A \vee B}\ (R\vee)$$

$$\frac{x\mathsf{R}y, x{:}A\supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}A \quad x\mathsf{R}y, x{:}A\supset B, y{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x{:}A\supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\supset)$$

$$\frac{x\mathsf{R}y, y{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A\supset B}\ (R\supset)\dagger$$

†: y は結論に出現しない（つまり，y が Γ，Δ 中に含まれないということ）

このとき，その推論規則をよく見ると，ラベル付きシークエント計算では，クリプキモデルの充足条件で表現される結合子の解釈と齟齬がない形で，その形式化が与えられていることがわかる．このことを，含意の結合子を例にとって見ていこう．定義 18 で見たように，含意の充足条件は以下のように与えられる：

$$x \models A\supset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall y\,((x\mathsf{R}y \text{ かつ } y \models A) \text{ ならば } y \models B)$$

充足条件の左辺から右辺の方向は，$\supset$ の左規則にあたる：

$$\frac{x\mathsf{R}y, x{:}A\supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}A \quad x\mathsf{R}y, x{:}A\supset B, y{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x{:}A\supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\supset).$$

このとき，この規則が記述しているのは次のこと．x, y はここでは「状態」と考え，$x\mathsf{R}y$ は「x から y に情報が進展する」と読むことにする．

今簡単のため，Γ はないものとする．まず，状態 x で $A\supset B$ が成り立っているとする．次に，x から情報が進展する y があったとする．y で A でない場合は，Δ であり議論は

終わり．y で A である場合を考える．y で A である場合は，x で $A{\supset}B$ であること，x から y に情報が進展することから，y で B が帰結し，Δ を手にできる．このとき，今説明したような推論規則で表現されている情報の流れが，充足条件の左辺から右辺の方向に対応している．

一方，充足条件の右辺から左辺の方向は $\supset$ の右規則に対応する：

$$\frac{x\mathsf{R}y, y{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A{\supset}B}\ (R{\supset}).$$

今，x から y へと情報が進展すると考え，y で A が成り立ち，同じ y で B が成り立つなら，そのとき，もとの x で $A{\supset}B$ が成り立つ．このように表現された，情報の流れが，先の充足条件の右辺から左辺に当たる．

含意について理解できれば，他の規則についても，結合子の推論規則が表現する推論実践とクリプキモデルの充足条件で表現されている内容が対応していることがわかる．

4.1.2　非様相論理のラベル付きシークエント計算の体系 **G3F(m)***

非様相論理のラベル付きシークエント計算の諸体系は，**G3F** をベースとして与えることができる．このベースとなる **G3F** に対し，目標とする論理体系がどのような性質を持っているのかということに合わせて，必要な推論規則を加えていけば良い．このとき，当該の論理体系のクリプキモデルを考えたときに，どのような条件が課されているのかということを参考にすることで，必要な推論規則が何であるかを明らかにすることができる．そのため，考えなければならないのは，二項関係 $x\mathsf{R}y$ が持つ性質と，単調性についてである．このことを踏まえて，ラベル付きシークエント計算では，二項関係 $x\mathsf{R}y$ と単調性についての規則を考える必要が生じてくる．何か欲しい論理体系がある時は，その体系のクリプキモデルを参照し，そこでのフレーム条件として何が課されていたかを考え，必要な R に関係する規則を先の **G3F** に加えていけば良い．その具体的な手順については，後ほど説明する．その準備として，まず本論内で必要となる R と，単調性についての規則を与える．最初は，単調性の規則である．以下に与えるものが単調性を表す規則である：

$$\frac{x\mathsf{R}y, x{:}P, y{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Mon).$$

この規則は，状態 x で P が成り立ち，x から y へと情報が進展すると考えたとき，状態 y で P が成り立つという推論実践を記述していると考えられる．この性質は，単調性に

表 4.2　幾何学的含意の例

性質の名前	フレーム条件
反射性（Reflexivity）	$\forall x(x\mathsf{R}x)$
推移性（Transitivity）	$\forall x, y, z(x\mathsf{R}y \& y\mathsf{R}z \supset x\mathsf{R}z)$
推移性（Symmetry）	$\forall x, y(x\mathsf{R}y \supset y\mathsf{R}x)$
連結性（Connectedness）	$\forall x, y, z((x\mathsf{R}y \& x\mathsf{R}z) \supset (y\mathsf{R}z \vee z\mathsf{R}y))$
継起性（Seriality）	$\forall x \exists y(x\mathsf{R}y)$
有向性（Directedness）	$\forall x, y, z((x\mathsf{R}y \& x\mathsf{R}z) \supset \exists w(y\mathsf{R}w \& z\mathsf{R}w))$
ユークリッド性（Euclidean）	$\forall x, y, z(x\mathsf{R}y \& x\mathsf{R}z \supset y\mathsf{R}z)$
空関係（Emptiness）	$\forall x, y(x\mathsf{R}y \supset \bot)$

よって表現される性質である．このことから，この規則が，単調性を表現する規則としての働きをすることがわかる．では，次は R に関する規則である．第 1 章で見たフレーム条件は，実は次のような一般的な形をしている．**幾何学的含意**（*Geometric Implication*）は (Simpson 1994, Negri 2005, Yamasaki and Sano 2016) などで扱われている．

定義 43 (幾何学的含意)**. 幾何学的含意**（*Geometric Implication*）は一階の述語論理の形をした以下のような形の文である：

$$\forall \vec{x}\,(S_1 \& \cdots \& S_m \supset \exists \vec{y} \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant n} (T_{j1} \& \cdots \& T_{jn_j})),$$

ここでは，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ は，一階の述語論理における異なる変項の対からなる有限対（finite taples）である．また，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ の両方に出現する変項は存在しないこと，そして，$S_1, ..., S_m$ と $T_{j1}, ..., T_{jn_j}$ は $x\mathsf{R}y$ の形をした原子述語であることを仮定する．最後に，私たちがここで用いる二項述語 R を解釈するために，定義 17 の $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ から R を用いることにする．

本論で扱うフレーム条件は表 4.2 のように与えられる[*1]．

この形をしたフレーム条件は以下の *GRS* 図式に沿って規則に書き換えることができる．この定義 43 の幾何学的含意を σ とすると：

[*1] フレーム条件については表 1.2 でも与えたが，ここでは，空関係の条件を加え，再掲する．

$$\sigma := \forall \vec{x}\,(S_1\& \cdots \& S_m \supset \exists \vec{y} \bigvee_{1\leqslant j\leqslant n} (T_{j1}\& \cdots \& T_{jn_j})),$$

ここでは，(Negri 2005, Dyckhoff and Negri 2012) でのように，簡単さのために，常に $\vec{y}$ の長さが 1 であると仮定されている．このとき，どんな幾何学的含意 σ も**幾何学的規則図式**（*Geometric Rule Scheme, GRS*）：

$$\frac{\overline{T_1}[z_1/y_1], \overline{S}, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \cdots \quad \overline{T_n}[z_n/y_n], \overline{S}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\overline{S}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (GRS),$$

と呼ばれる推論規則へと変形できる．ここでは，$[z_i/y_i]$ は y_i への z_i の代入を表しており，$z_1, ..., z_n$ は結論には出現しない．また，$\overline{S}$ は $x\mathsf{R}y$ の形をした原子述語の多重集合 $S_1, ..., S_m$ を表している．同様に，$\overline{T_j}$ は $x\mathsf{R}y$ の形をした原子述語の多重集合 $T_{j1}, ..., T_{jk_j}$ を表している．幾何学的規則図式が次の形 $\forall \vec{x}\,(S_1\& \cdots \& S_m \supset \bot)$ をしているときには，対応する規則として以下の形をとる：

$$\frac{}{\overline{S}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (GRS).$$

前提のない形で与えられるこの特別な規則は，**前提なしの幾何学的規則図式**（*zero-premise geometric rule scheme*）と呼ばれる．フレーム条件から (GRS) を用いて与えられる規則は表 4.3 のように与えられる．

表 4.3　(GRS) の例 (Yamasaki and Sano 2016)

フレーム条件	(GRS)
反射性	$\dfrac{x\mathsf{R}x, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(Ref)$
推移性	$\dfrac{x\mathsf{R}y, y\mathsf{R}z, x\mathsf{R}z, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, y\mathsf{R}z, \Gamma \Rightarrow \Delta}(Tran)$
対称性	$\dfrac{x\mathsf{R}y, y\mathsf{R}x, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}(Sym)$
連結性	$\dfrac{x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}z, y\mathsf{R}z, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}z, z\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}z, \Gamma \Rightarrow \Delta}(Con)$
継起性	$\dfrac{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(Ser)$ y is fresh
有向性	$\dfrac{x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}z, y\mathsf{R}w, z\mathsf{R}w, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}z, \Gamma \Rightarrow \Delta}(Dir)$ w is fresh
ユークリッド性	$\dfrac{x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}z, y\mathsf{R}z, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}z, \Gamma \Rightarrow \Delta}(Euc)$
空関係	$\dfrac{}{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}(Emp)$

定義 44. 幾何学的規則図式たちの例からなる**有限集合** $*$ を用いて，**G3F** を拡張した体系を $\mathbf{G3F}^*$ と書く．また，原子命題の単調性についての規則である (Mon) によって，$\mathbf{G3F}^*$ を拡張したことを $\mathbf{G3Fm}^*$ と書く．$\mathbf{G3F(m)}^*$ を用いて，$\mathbf{G3F}^*$ と $\mathbf{G3Fm}^*$ を表していることとする．

次にシークエントの構成要素についての用語を導入する．以下で与える，定義 45 から定義 50 は，第 2 章，あるいは第 3 章で与えられた定義と基本的には同じものであるが，わかりやすさのため，再掲することとした．従って先に述べたように，以下の議論の流れは **G3I** などの場合と同様に進む．

定義 45 (文脈，主式)**.** $\mathbf{G3F(m)}^*$ の推論規則における Γ と Δ は**文脈**（*context*）と呼ばれる．$\mathbf{G3F(m)}^*$ の各規則の結論において，文脈に含まれていない論理式（たち）は**主式**（*principal formula* (*s*)）と呼ばれる．

次は，導出についての用語法である．

定義 46 (導出)**.** $\mathbf{G3F(m)}^*$ における**導出**（*derivation*）$\mathcal{D}$ は公理と $\mathbf{G3F(m)}^*$ の規則によって生成される有限木構造として帰納的に定義される．$\mathcal{D}$ のルートノードにあるシークエントを $\mathcal{D}$ の**エンドシークエント**（*end sequent*）と呼ぶ．導出の高さは，エンドシークエントから公理に至るまでの導出の中での極大な枝の長さとする．もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が，そのエンドシークエントが $\Gamma \Rightarrow \Delta$ であるような $\mathbf{G3F(m)}^*$ における導出 $\mathcal{D}$ を持つなら，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathbf{G3F(m)}^*$ において**導出可能**（*derivable*）である（$\mathbf{G3F(m)}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く）．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図がせいぜい高さ n であることを $\mathbf{G3F(m)}^* \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く．

もしも，そのことが文脈から明らかな場合には，しばしば “$\mathbf{G3F(m)}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$” という表現から “$\mathbf{G3F(m)}^*$” を省略する．

今，$\mathbf{G3F(m)}^*$ では，複合式の同一性が成り立つ．

命題 21 (複合式の同一性, (Yamasaki and Sano 2016, Proposition 1))**.** 任意の論理式 A に対して，$\mathbf{G3F(m)}^*$ において $x{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A$ が導出可能である．

このように与えられる $\mathbf{G3F(m)}^*$ では，クリプキモデルに対して健全性と完全性が成り立つ．

4.1.3　$\mathbf{G3F(m)}^*$ の健全性と完全性

ここでは，$\mathbf{G3F(m)}^*$ のクリプキモデルに対する健全性と完全性について簡単に確認する[*2]．

今，Var は全ラベルの集合である．このとき，クリプキモデルに対する $\mathbf{G3F(m)}^*$ の健全性を示すために，Form の論理式に対するクリプキモデルをラベル付き表現にも用いることができるように定義し直す必要がある．$\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ が与えられたとき，**付値**（*assignment*）は関数 $f : \mathsf{Var} \to W$ のように与えられる．モデル $\mathfrak{M}$ と付値 f が与えられたら，ラベル付き表現に対する**充足関係**（*satisfaction relation*）$\mathfrak{M}, f \models \varphi$（「$f$ のもとで，$\mathfrak{M}$ において，φ が成り立つ」と読む）は次のように定義される：

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{M}, f \models x{:}A & \Leftrightarrow & \mathfrak{M}, f(x) \models A, \\ \mathfrak{M}, f \models x\mathsf{R}y & \Leftrightarrow & (f(x), f(y)) \in R. \end{array}$$

シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が **f のもとで，$\mathfrak{M}$ において成り立つ**のは，Γ の全てが f のもとで，$\mathfrak{M}$ において成り立つときにはいつでも，ある $w{:}B \in \Delta$ に対して，$w{:}B$ が，f のもとで，$\mathfrak{M}$ において成り立つときである．

もし，すべての付値 f に対して $\mathfrak{M}, f \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，「モデル $\mathfrak{M}$ において，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が**妥当**（*valid*）である」（$\mathfrak{M} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く）と言う．

もし，すべてのモデル $\mathfrak{M} \in \mathbb{M}$ に対して，$\mathfrak{M} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，「モデルのクラス $\mathbb{M}$ において，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は**妥当**（*valid*）である」（$\mathbb{M} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く）と言う．

$*$ を幾何学的規則図式の有限集合とする．このとき，$\mathbb{M}^*$（あるいは，$\mathbb{M}^*_{\mathbf{m}}$）を全モデルのクラス（あるいは，全単調モデル（*monotone models*）のクラス）として定義する．そこに含まれるフレームたちは $*$ に対応するすべての幾何学的含意を満たす．

これらの定義を踏まえ，$\mathbf{G3F(m)}^*$ の健全性を示すことができる．

定理 6 ($\mathbf{G3F(m)}^*$ の健全性, (Yamasaki and Sano 2016, Theorem 3))**.**

(i) もし，$\mathbf{G3F}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，そのとき $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathbb{M}^*$ において妥当．

(ii) もし，$\mathbf{G3Fm}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，そのとき $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathbb{M}^*_{\mathbf{m}}$ において妥当．

完全性は定理 7 のように示されるが，このとき完全性の証明を示すために，次のようなクリプキモデルが用いられる．

[*2] その詳しい証明は (Yamasaki and Sano 2016) を参照のこと．

定義 47 (飽和化, (Yamasaki and Sano 2016, Definition 10))．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ をシークエントとする．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathbf{G3F}^*$ **で飽和している**というのは，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が以下の条件を満たしているとき：

(**unprov**)　$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathbf{G3F}^*$ において，導出可能ではない．
(**l**&)　$x{:}A\&B \in \Gamma$ ならば，$x{:}A, x{:}B \in \Gamma$.
(**r**&)　$x{:}A\&B \in \Delta$ ならば，$x{:}A \in \Delta$ あるいは $x{:}B \in \Delta$.
(**l**$\vee$)　$x{:}A \vee B \in \Gamma$ ならば，$x{:}A \in \Gamma$ あるいは $x{:}B \in \Gamma$.
(**r**$\vee$)　$x{:}A \vee B \in \Delta$ ならば，$x{:}A, x{:}B \in \Delta$.
(**l** $\supset$)　$x{:}A \supset B$ かつ $x\mathsf{R}y \in \Gamma$ ならば，$y{:}A \in \Delta$ あるいは $y{:}B \in \Gamma$.
(**r** $\supset$)　$x{:}A \supset B \in \Delta$ ならば，ある y に対して，$x\mathsf{R}y, y{:}A \in \Gamma$ かつ $y{:}B \in \Delta$.
(**grs**)　$S_1, \cdots, S_m \in \Gamma$ ならば，ある $j \in \{1, \cdots, n\}$ とある z_j に対して，$T_{j1}[z_j/y_j], \cdots, T_{jn_j}[z_j/y_j] \in \Gamma$.

シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が，$\mathbf{G3Fm}^*$ **で飽和している**のは，それが以下の条件と，(**unprov**) を除く，上記の七つの条件を満たしているとき：

(**unprov′**)　$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathbf{G3Fm}^*$ において，導出可能ではない．
(**mon**)　$x\mathsf{R}y$, $x{:}P \in \Gamma$ ならば，$y{:}P \in \Gamma$.

補題 22 (飽和化, (Yamasaki and Sano 2016, Lemma 7))．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ を有限シークエントし，$\mathbf{G3F(m)}^* \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と仮定する．このとき，$\Gamma \subseteq \Gamma^+$, $\Delta \subseteq \Delta^+$ かつ $\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ が $\mathbf{G3F(m)}^*$ で飽和しているような，シークエント $\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ が存在する．

定義 48 ((Yamasaki and Sano 2016, Definition 11))．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は飽和シークエントとする．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ から導出されるモデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ を以下のように定める：

- W は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に出現するラベルからなる集合とする．
- $xRy \;\Leftrightarrow\; x\mathsf{R}y \in \Gamma$.
- $x \in V(P) \;\Leftrightarrow\; x{:}P \in \Gamma$.

ここで与えたモデルが，クリプキモデルであることはすぐにわかる．ここでさらに次の二つの補題を示す．

補題 23 (Truth Lemma, (Yamasaki and Sano 2016, Lemma 8))．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ を飽和シークエントとし，$\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ から導出されたモデルとする．

(i) $x{:}A \in \Gamma$ ならば，そのとき，$\mathfrak{M}, x \models A$.

(ii) $x{:}A \in \Delta$ ならば，そのとき，$\mathfrak{M}, x \not\models A$.

補題 24 ((Yamasaki and Sano 2016, Lemma 9))**.** $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を飽和シークエントとし，$\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ から導出されたモデルとする．このとき，$\mathfrak{M}$ の付値 V は単調であり，かつ $\mathfrak{M}$ の $\langle W, R\rangle$ は $*$ に対応する全幾何学的含意を満たす.

これらの補題を用いて $\mathbf{G3F(m)}^*$ の完全性を示すことができる.

定理 7 ($\mathbf{G3F(m)}^*$ の完全性, (Yamasaki and Sano 2016, Theorem 4))**.**

(i) もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathbb{M}^*$ において妥当なら，$\mathbf{G3F}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ である.

(ii) もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathbb{M}^*_{\mathbf{m}}$ において妥当なら，$\mathbf{G3Fm}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ である.

さてこのとき，シークエントを利用してクリプキモデルを構成し，完全性の証明を与えるという $\mathbf{G3F(m)}^*$ の完全性の証明の与え方が，**LJpm** の完全性の証明の手法と同じであることはすぐにわかる.

4.2　$\mathbf{G3F(m)}^*$ がカバーする体系

本節では，$\mathbf{G3F(m)}^*$ がどの程度の範囲の論理体系をカバーすることができるのかについて見る.

4.2.1　中間論理

中間論理は，直観主義論理と古典論理の間にある論理体系のことを指す．直観主義論理の体系は，**G3Fm** を表 4.3 の (Ref) と $(Tran)$ を用いて拡張することによって手にできる．この体系をここでは，**G3Int** と呼ぶ．直観主義論理のラベル付きシークエント計算の体系は (Dyckhoff and Negri 2012) でも扱われている．しかし，この二つの体系には違いがある． (Dyckhoff and Negri 2012) の体系は，命題変数の単調性の公理：

$$x\mathsf{R}y, x{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}P$$

を持つが，これは，**G3Int** で証明可能である．逆に， (Dyckhoff and Negri 2012) では，**G3Int** の (Id) が導出可能であり，(Mon) は許容可能である．そのため，**G3Int** としてここで与える体系と， (Dyckhoff and Negri 2012) で与えられる直観主義論理のラベル付

きシークエント計算の体系はその証明力が変わらないことがわかる．

このとき，幾何学的含意図式を用いて， (Dyckhoff and Negri 2012) で行われているように，幾つかの中間論理をカバーすることができる．

1 Jankov Logic **KC**：Jankov Logic あるいは弱排中律の論理は公理 $\neg P \vee \neg\neg P$ によって特徴づけらる．Jankov Logic のラベル付きシークエント計算 **G3Jan** は Table 4.3 の (Dir) を **G3Int** に加えれば良い．

2 Gödel-Dummet Logic **LC**：Gödel-Dummet Logic は公理 $(P \supset Q) \vee (Q \supset P)$ によって特徴付けられる．Gödel-Dummet Logic のラベル付きシークエント計算 **G3GD** は Table 4.3 の (Con) を **G3Int** に加えれば良い．

3 古典論理 **G3CL**：古典論理は，$\neg\neg P \supset P$ か $\neg P \vee P$ を直観主義論理に加えることで特徴付けられる．古典論理のラベル付きシークエント計算 **G3CL** は Table 4.3 の (Sym) か (Euc)（この二つは R の反射性が仮定されているときには互いに同値になる）を **G3Int** に加えれば良い．

4.2.2　BPL の拡張

BPL では，直観主義論理の定理である $(P\&(P \supset Q)) \supset Q$ も $(P \supset (P \supset Q)) \supset (P \supset Q)$ もどちらも定理ではない． (Visser 1981) において初めて導入されたときには，**BPL** の体系は自然演繹であったが，現在では，ゲンツェン流のシークエント計算の体系 (Ardeshir and Ruitenburg 1998, Ishii et al. 2001, Kikuchi and Sasaki 2003, Ruitenburg 1991) やヒルベルト流の公理系 (Kikuchi 2001, Suzuki and Ono 1997, Suzuki et al. 1998) が与えられている．ラベル付きシークエント計算の **BPL** の体系 **G3BPL** は，**G3Fm** を Table 4.3 の $(Tran)$ で拡張することによって手に入れることができる．このとき，**G3BPL** の二つの拡張を与えることができる：

1. **DNT**：**DNT** は **BPL** に $\neg\neg\top$ を加えることで手にできる論理体系である (Ishigaki and Kashima 2008)．**DNT** のラベル付きシークエント計算の体系 **G3DNT** は **G3BPL** に Table 4.3 の (Ser) の規則を加えれば手にできる．
2. **Log**(•) (Ma and Sano 2015)：Table 4.3 の空関係の条件によって **BPL** を拡張することによって手にできる．このとき，**Log**(•) のラベル付きシークエント計算は **BPL** に Table 4.3 の (Emp) の規則を加えれば手にできる．

4.2.3　厳密含意論理

厳密含意の論理は，C. I. ルイスによって，実質含意のパラドクスを解消することを目的として提案された (Lewis 1912)．厳密含意の幾つかの体系は， (Lewis 1913) の中で初めて提示された．厳密含意論理の族に関しては， (Corsi 1987) の中で弱論理という名で，その論理たちについての研究が行われており，ヒルベルト流の公理系が与えられた．また， (Ishigaki and Kashima 2008) では，厳密含意のコルシの論理体系 **F** に対するラベルなしのゲンツェン流のシークエント計算の体系が与えられた． (Došen 1993, Restall 1994) でも，厳密含意の論理たちに対するヒルベルト流の公理系が与えられている．さらに，厳密含意論理の自然演繹の体系は (Cerrato 1994) において与えられている．

厳密含意論理はときに，部分直観主義論理と呼ばれることがある．この部分直観主義論理はクリプキモデルのクラスによって特徴付けられる．厳密含意論理のクリプキモデルは直観主義論理のクリプキモデルとその充足条件は同じであるが，単調性はいつも成り立つとは限らない．厳密含意論理はフレーム条件の組み合わせとして扱うことができる．では以下で，先行研究などで扱われている厳密含意論理の拡張した体系の幾つかを，$\mathbf{G3F(m)}^*$ を用いて扱うことができることについて見る．

1. **FD** : **FD** (Corsi 1987) は **F** に $\neg\neg\top$ を付け加えることで手にでき，継起性を満たすクリプキモデルのクラスによって特徴付けられる．この論理は $\mathbf{D}_\sigma$ (Došen 1993) として，$\mathbf{GKD^I}$ (Ishigaki and Kashima 2008) として，研究されている．**FD** のラベル付きシークエント計算の体系 **G3FD** は **G3F** に Table 4.3 の (Ser) の規則を加えれば手にできる．
2. **FC** : **FC** (Corsi 1987) は **F** に公理 $((C\&(A\supset B))\supset D)\vee((A\&(C\supset D))\supset B)$ を付け加えることで手にできる．**FC** のラベル付きシークエント計算 **G3FC** は **G3F** に Table 4.3 の (Con) の規則を加えれば手にできる．
3. **FT** : **FT** (Corsi 1987) は **F** に公理 $(A\supset B)\supset(C\supset(A\supset B))$ を付け加えることで手にできる．また， (Ishigaki and Kashima 2008) においてラベルなしのシークエント計算 $\mathbf{GK4^I}$ が与えられている．また， (Restall 1994) では，b という名前でその体系が与えられている．**FT** のラベル付きシークエント計算の体系 **G3FT** は **G3F** に Table 4.3 の $(Tran)$ の規則を加えれば手にできる．
4. **FR** : **FR** (Corsi 1987) は **F** に公理 $A\&(A\supset B)\supset B$ を付け加えることで手にできる．また， (Ishigaki and Kashima 2008) においてラベルなしのシークエント計算

GKT$^{\mathbf{I}}$ が与えられている．**FR** のラベル付きシークエント計算の体系 **G3FR** は **G3F** に Table 4.3 の (Ref) の規則を加えれば手にできる．

5. **FRT** : **FRT** (Corsi 1987) は **FT** に公理 $A\&(A{\supset}B){\supset}B$ を付け加えることで手にできる． (Ishigaki and Kashima 2008) においてラベルなしのシークエント計算 **GKS4**$^{\mathbf{I}}$ が与えられている．また，(Restall 1994) では，bw という名前でその体系が与えられている．**FRT** のラベル付きシークエント計算の体系 **G3FRT** は **G3F** に Table 4.3 の (Ref) と $(Tran)$ の規則を加えれば手にできる．
6. **FS** : **FS** (Corsi 1987) は **F** に公理 $A{\supset}(B \vee \neg(A{\supset}B))$ を付け加えることで手にできる． (Ishigaki and Kashima 2008) においてラベルなしのシークエント計算 **GKB**$^{\mathbf{I}}$ が与えられている．**FRS** のラベル付きシークエント計算の体系 **G3FS** は **G3F** に Table 4.3 の (Ser) の規則を加えれば手にできる． (Ishigaki and Kashima 2008) の中で，**GKB**$^{\mathbf{I}}$ のカット規則の許容可能性は示されていないが，のちに見るように，**G3FS** においてカット規則が許容可能であることが示される．
7. **GK5**$^{\mathbf{I}}$: **GK5**$^{\mathbf{I}}$ (Ishigaki and Kashima 2008) はユークリッド性でそのフレーム条件が特徴付けられるような論理体系のラベルなしのシークエント計算の体系である．**GK5**$^{\mathbf{I}}$ のラベル付きシークエント計算の体系 **G3FE** は **G3F** に Table 4.3 の (Euc) の規則を加えれば手にできる． (Ishigaki and Kashima 2008) の中で，**GK5**$^{\mathbf{I}}$ のカット規則の許容可能性は示されていないが，**G3FE** においてカット規則が許容可能であることが示される．

ラベル付きシークエント計算を用いて形式化したときには，各論理体系の違いは，ベースとなる **G3F** に，フレームに関するどの規則を加えるかの違いに依存して決まる．このようにして，様々な論理体系を一様な仕方で与える手法は，現在多くの形式体系で採用されており，例えば，ハイパーシークエントやツリーシークエントなどがある[*3]．

4.3　G3F(m)* のカット除去定理

ここでは，**G3F(m)*** のカット除去定理の証明を見る．まずはじめに，ラベル付き表現に対する代入の概念を定義する．ラベル z におけるラベル x をラベル y へと変える代入 $z[y/x]$ を定義する：

[*3] このように様々に与えられるシークエント計算の間の関係については (Poggiolesi 2011) に詳しい．

$$z[y/x] \quad \equiv \quad \begin{cases} y & \text{if } z \equiv x; \\ z & \text{if } z \not\equiv x. \end{cases}$$

また，以下のようにして，ラベル付き表現 φ において，代入 $[y/x]$ を自然な形で定義できる：

$$(z{:}A)[y/x] \equiv z[y/x] : A \text{ かつ } (z\mathsf{R}w)[y/x] \equiv z[y/x]\mathsf{R}w[y/x].$$

補題 25 ((Yamasaki and Sano 2016, Lemma 1))**.** もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathbf{G3F(m)}^*$ において導出可能であるなら，そのとき，$\Gamma[y/x] \Rightarrow \Delta[y/x]$ も，高さ保存で導出可能である．つまり，もし，$\mathbf{G3F(m)}^* \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\mathbf{G3F(m)}^* \vdash_n \Gamma[y/x] \Rightarrow \Delta[y/x]$.

この補題 25 を**高さ保存の代入**（*height-preserving substitution*, hp-substitution）と呼ぶ．

定義 49 (許容可能性, (Yamasaki and Sano 2016, Definition 6))**.** $\mathbf{G3F(m)}^*$ において，もし，その規則の，前提が導出可能であるときにはいつでも，その規則の結論も $\mathbf{G3F(m)}^*$ において導出可能であるなら，その規則は，$\mathbf{G3F(m)}^*$ において，**許容可能**（*admissible*）と言われる．

$\mathbf{G3F(m)}^*$ において，その規則の，前提がせいぜい高さ n で導出可能であるときにはいつでも，もし，その規則の結論も $\mathbf{G3F(m)}^*$ において，せいぜい高さ n で導出可能であるなら，その規則は，$\mathbf{G3F(m)}^*$ において，**高さ保存で許容可能**（*height-preserving admissible*, hp-admissible）と言われる．

補題 26 (弱化の許容可能性, (Yamasaki and Sano 2016, Lemma 8))**.** 弱化の規則は $\mathbf{G3F(m)}^*$ で高さ保存で許容可能である．つまり：

(i) もし，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n x{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

(ii) もし，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A$.

(iii) もし，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

この補題の各項は導出の高さ n についての帰納法を用いて示すことができる．

定義 50 (反転可能性, (Yamasaki and Sano 2016, Definition 7))**.** $\mathbf{G3F(m)}^*$ において，その規則の，結論がせいぜい高さ n で導出可能であるときにはいつでも，もし，その規則の前提も $\mathbf{G3F(m)}^*$ において，せいぜい高さ n で導出可能であるなら，その規則は，$\mathbf{G3F(m)}^*$ において，**高さ保存で反転可能**（*height-preserving invertible*, hp-invertible）

と言われる．

補題 27 (反転可能性, (Yamasaki and Sano 2016, Lemma 3))．**G3F(m)*** の全推論規則は，高さ保存で反転可能である．

補題 28 (縮約の許容可能性, (Yamasaki and Sano 2016, Lemma 4))．縮約の規則は，**G3F(m)*** において高さ保存で許容可能である．つまり：

(i) もし，$\vdash_n x{:}A, x{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n x{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

(ii) もし，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A, x{:}A$ なら，そのとき，$\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A$.

(iii) もし，$\vdash_n x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta$ なら，そのとき，$\vdash_n x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

定義 51 ((Yamasaki and Sano 2016, Definition 8))．ラベル付きカット式 $x{:}A$ の**重さ**（*weight*）は，A における論理結合子の数とする．また，(Cut) の**高さ**（*cut-height*）は，(Cut) の二つの前提の導出の高さの和とする．

定理 8 (**G3F(m)*** のカット除去定理, (Yamasaki and Sano 2016, Theorem 1))．**G3F(m)*** においてカット規則は許容可能.

Proof. ラベル付きカット式 $x{:}A$ の重さについての帰納法と，(Cut) の cut-height についての部分帰納法を用いて示す．まず，以下に挙げる (i) と (ii) の場合を考える．このとき，カットの前提の少なくとも一つが公理か前提なしの幾何学的規則図式である．残りの場合に対しては，三つの場合分けが存在する：(iii) 左の前提では，カットラベル付き表現は主式ではない；(vi) 左の前提だけで，カットラベル付き表現が主式；(v) カットの前提の両方でカットラベル付き表現が主式.

(i) カットの左の前提が公理か幾何学的規則図式：この場合の証明は省略する．

(ii) カットの右の前提が公理か幾何学的規則図式：まず，右の前提 $x{:}A, \Pi \Rightarrow \Sigma$ が公理 (Id) であると仮定する．つまり，以下の場合のうちの一つを手にしているとする：右の前提が次の形 $x{:}A, y{:}P, \Pi' \Rightarrow \Sigma', y{:}P$ か $x{:}P, \Pi \Rightarrow \Sigma', x{:}P$ をしているとき．後者の場合には $A \equiv P$ であり，前者の場合には，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ も公理 (Id) となる．後者の場合，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma', x{:}P$ を手にできる．これは，高さ保存の弱化の規則の適用を行うことによって，左の前提 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}P$ から導くことができる．次に，右の前提が公理 $(L\bot)$ であると仮定する．もし，カットラベル付き表現 $x{:}A$ において $A \not\equiv \bot$ であるとき，Π 中に $w{:}\bot$ が含まれる．そういうわけなので，

$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ も公理 $(L\bot)$ である．そうでない場合，つまり，もし，$A \equiv \bot$ であるとき，左の前提 $\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}\bot$ の最後の規則を調べる必要がある．もし，最後の規則が公理の場合，この場合は (i) の場合へと還元できる．それ以外の場合には，(iii) の特別な場合となる．

最後に，右の前提が前提なしの幾何学的規則図式であると仮定する．もし，カットの右の前提が $x{:}A, \overline{S}, \Pi' \Rightarrow \Sigma$ なる形をした前提なしの幾何学的規則図式であるとき，カットの結論も前提なしの幾何学的規則図式である．

(iii) カットラベル付き表現が左の前提で主式でない：ここでは，(Cut) の左の前提の最後に適用された規則に依存して場合分けを行う．つまり，すべての推論規則と (Mon) と (GRS) の場合を含めて八つの場合分けが考えられる．ここでは，$(R\supset)$ の場合を考える．このとき，以下の導出が考えられる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ y\mathsf{R}z, z{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta', z{:}C, x{:}A\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', y{:}B\supset C, x{:}A}\,(R\supset)\dagger \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ x{:}A, \Pi \Rightarrow \Sigma\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', y{:}B\supset C, \Sigma}\,(Cut),$$

ここでは，z はより下のシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta', y{:}B\supset C, x{:}A$ の中に出現しない．まず，変項の衝突を避けるために，$y\mathsf{R}z, z{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta', z{:}C, x{:}A$ に対して，$[w/z]$ を用いて，高さ保存の代入を行う．ここでは，w は (Cut) の結論中には存在しないと仮定する．このとき，以下の導出を手にすることができる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ y\mathsf{R}w, w{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta', w{:}C, x{:}A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ x{:}A, \Pi \Rightarrow \Sigma\end{array}}{y\mathsf{R}w, w{:}B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', w{:}C, \Sigma}\,(Cut)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', y{:}B\supset C, \Sigma}\,(R\supset)\dagger \qquad ,$$

今，cut-height が最初より下がっているので，カット規則の適用が可能となる．これ以外の場合にも（(GRS) と (Mon) も含むが），同様の仕方で示すことができる．また特に，固有変項条件のない推論規則の場合（例えば，(Mon)）には，ここで示したよりも簡単に示すことができる．

(iv) 左の前提だけで，ラベル付きカット表現が主式：ここでは，(Cut) の右の前提で最後に適用された規則によって場合分けを行う．しかし，最初の場合分けの条件付けから，右の前提の最後に適用された規則において，カットラベル付き表現 $x{:}A$ は主式ではない．この場合の議論は (iii) と同様の仕方で示すことができるため，その証明は省略する．

(v) カットラベル付き表現がカットの両方の前提で主式：このとき，さらに三つの場合分けが生じる：カットラベル付き表現 $x{:}A$ において，A が $B \vee C$ か $B \& C$ か $B \supset C$ である場合の 3 つである．私たちは次のような導出を手にできる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ x\mathsf{R}z, z{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta, z{:}C\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}B\supset C}\,(R\supset)\dagger \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ x{:}B\supset C, x\mathsf{R}w, \Pi \Rightarrow \Sigma, w{:}B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ w{:}C, x{:}B\supset C, x\mathsf{R}w, \Pi \Rightarrow \Sigma\end{matrix}}{x{:}B\supset C, x\mathsf{R}w, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(L\supset)}{x\mathsf{R}w, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut),$$

ここで z はより下のシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}B\supset C$ には出現しない．このとき，$[w/z]$ に対する高さ保存の代入を用いて，以下のような $\mathcal{D}_L$ なる導出を構成できる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}B\supset C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ x{:}B\supset C, x\mathsf{R}w, \Pi \Rightarrow \Sigma, w{:}B\end{matrix}}{x\mathsf{R}w, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, w{:}B}\,(Cut) \quad \begin{matrix}\vdots\\ w{:}B, x\mathsf{R}w, \Gamma \Rightarrow \Delta, w{:}C\end{matrix}}{x\mathsf{R}w, x\mathsf{R}w, \Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma, w{:}C}\,(Cut),$$

ここでは，cut-height が低くなっているため，左のカット規則の適用が可能であること，カットラベル付き表現 $w{:}B$ の重さは $x{:}B\supset C$ の重さより下がっているため，カット規則の最後の適用が可能となる．

次に，もとの導出から以下のような導出 $\mathcal{D}_R$ も構成することができる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ x\mathsf{R}z, z{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta, z{:}C\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}B\supset C}\,(R\supset) \quad \begin{matrix}\vdots\\ x{:}B\supset C, w{:}C, x\mathsf{R}w, \Pi \Rightarrow \Sigma\end{matrix}}{w{:}C, x\mathsf{R}w, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut),$$

ここでは，cut-height が下がっているので，カット規則の最後の適用が可能であることに注意しなければならない．今，私たちは $\mathcal{D}_L$ と $\mathcal{D}_R$ によって次の導出を手にできる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_L\\ x\mathsf{R}w, x\mathsf{R}w, \Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma, w{:}C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_R\\ w{:}C, x\mathsf{R}w, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma\end{matrix}}{x\mathsf{R}w, x\mathsf{R}w, x\mathsf{R}w, \Gamma, \Gamma, \Gamma, \Pi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Delta, \Sigma, \Sigma}\,(Cut)}{x\mathsf{R}w, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma},$$

ここでは，証明図中の二重線は縮約を必要な回数適用することを示している．また，カットラベル付き表現 $w{:}C$ の重さが $x{:}B\supset C$ の重さより下がっているため，カット規則の適用が可能となる．

□

4.4　様相論理のラベル付きシークエント計算

様相論理の論理式は，第 1 章で与えたものと同じでよい．つまり，先の Form に $\Box A$ を加えれば手に入れることができる．シークエントの定義は，非様相論理の場合と同じでよい．このように与えた様相論理の論理式の集合を MForm と書く．このとき，ラベル付き表現は非様相論理の場合と同様にして与えられるが，ここでは $x{:}A$ の A は MForm の要素とする．そのため，$x : A$ の A の部分には $\Box A$ も出現してよいことになる．$\Diamond A$ は $\neg\Box\neg A$ として定義する．ここでは，シークエントは，後件中にも $x\mathsf{R}y$ を含んでいてもよい．

さて，様相論理のラベル付きシークエント計算の体系では，必然性演算子についての規則を考えなければならない．必然性の二つの規則は，非様相論理の結合子の場合と同様に，クリプキモデルの充足条件と対応する形でその規則が与えられる．$\Box$ の充足条件は定義 14 で与えられたように，

$$\mathfrak{M}, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad \forall y\,(x\mathsf{R}y \text{ ならば } \mathfrak{M}, y \models A).$$

この充足条件の左辺から右辺は概念的に次の規則に対応する：

$$\frac{y{:}A, x{:}\Box A, x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}\Box A, x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\Box).$$

同様に，この充足条件の右辺から左辺の方向は次の規則に対応する：

$$\frac{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}\Box A}\ (R\Box)\dagger.$$

†: y は結論には出現しない（つまり，y が Γ，Δ 中に含まれないということ）

このとき，非様相論理の含意の右規則の場合と同様に，変項 y についての条件が必要となる．また，必然性演算子の規則もその規則の中に R を含む．

様相論理 **K** のラベル付きシークエント計算は Table 4.4 のように与えられる．

G3K と **G3F** では，必然性演算子についての規則が加わることとは別に，含意の規則が異なること，**G3K** では (Rid) についての規則が加わっているという点で違いがある．今，様相論理のラベル付きシークエント計算の諸体系は，**G3K** を基本とし，そこに，非様相論理の場合と同じ R の規則たちを必要に応じて加えていくことで，手にすることがで

表 4.4　**G3K**　(Negri 2005)

(Axioms)

$$\frac{}{x{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}P}\ (Id) \qquad \frac{}{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta, x\mathsf{R}y}\ (Rid) \qquad \frac{}{x{:}\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\bot)$$

(Logical Rules)

$$\frac{x{:}A, x{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A\&B}\ (R\&)$$

$$\frac{x{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad x{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A, x{:}B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A \vee B}\ (R\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A \quad x{:}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}A{\supset}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\supset) \qquad \frac{x{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A{\supset}B}\ (R\supset)$$

(Modal Rules)

$$\frac{y{:}A, x{:}\Box A, x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}\Box A, x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\Box) \qquad \frac{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}\Box A}\ (R\Box)\dagger$$

$$\frac{x\mathsf{R}y, y{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}\Diamond A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\Diamond)\dagger \qquad \frac{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}A, x{:}\Diamond A}{x\mathsf{R}y, \Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}\Diamond A}\ (R\Diamond)$$

†: y は結論でフレッシュ（つまり，y が Γ，Δ 中に含まれないということ．）

きる．ただし，単調性の規則が加わることがないことに注意が必要である．それらは，例えば，以下のように与えられる：

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{G3S5} & = & \mathbf{G3K} + (Ref) + (Tran) + (Sym) \\
\mathbf{G3S4.3} & = & \mathbf{G3K} + (Ref) + (Tran) + (Con) \\
\mathbf{G3S4.2} & = & \mathbf{G3K} + (Ref) + (Tran) + (Dir) \\
\mathbf{G3S4} & = & \mathbf{G3K} + (Ref) + (Tran) \\
\mathbf{G3K4} & = & \mathbf{G3K} + (Ref) \\
\mathbf{G3K} & &
\end{array}$$

様相論理の場合も非様相論理の場合と同様に **G3K*** を定めることができる．このとき，**G3K*** に対しても，カット除去を示すことができる[*4]．

[*4] その詳しい証明は (Negri 2005) を見よ．

4.5　ラベル付きシークエント計算を用いた埋め込み定理

これまで，非様相論理と様相論理のラベル付きシークエント計算がどのような体系であるのかを見てきた．本節では，ラベル付きシークエント計算の体系を用いて，第 1 章で見た様相同伴関係を，一様な仕方で証明可能であることを見る．

4.5.1　ラベル付きシークエント計算を用いた証明

今，以下のように，第 3 章で見た翻訳を用いる．ただし，ラベル付き表現に関しては，必要に応じてもとの翻訳を拡張する．また，この翻訳が，ラベル付き表現のラベルを書き変えるものではないことに注意しなければならない．

定義 52 (ラベルへの拡張を行った翻訳 $(\cdot)^{\boxplus}$, (Yamasaki and Sano 2016, Definition 9))**.**

$$\begin{array}{rcl} P^{\boxplus} & := & P\&\Box P, \\ \bot^{\boxplus} & := & \bot, \\ (A\&B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus}\&B^{\boxplus}, \\ (A \vee B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus} \vee B^{\boxplus}, \\ (A\supset B)^{\boxplus} & := & \Box(A^{\boxplus}\supset B^{\boxplus}), \\ (x : A)^{\boxplus} & := & x : A^{\boxplus}, \\ (x\mathsf{R}y)^{\boxplus} & := & x\mathsf{R}y. \end{array}$$

ラベル付き表現の有限多重集合 $\Gamma \equiv \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ に対して，$\Gamma^{\boxplus} := \varphi_1^{\boxplus}, \ldots, \varphi_n^{\boxplus}$ を定義する．

さて，埋め込み定理を示すために，次の二つの補題を示す必要がある．まずは，埋め込みの soundness の方向である（つまり，定理 9 の左辺から右辺の方向）．この証明は，埋め込む前の非様相論理の体系における証明図の高さについての帰納法で示す．その詳しい証明がどのように与えられるのかを見てみよう．

補題 29 ((Yamasaki and Sano 2016, Lemma 5))**.**

(i) $\mathbf{G3F}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，$\mathbf{G3K}^* \vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$.

(ii) 以下の規則が，$\mathbf{G3K}^*$ において許容可能であると仮定する．

$$\frac{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, y{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (TMon)$$

このとき，$\mathbf{G3Fm}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，$\mathbf{G3K}^* \vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$.

Proof. はじめに，(i) を，$\mathbf{G3F}^*$ の証明図の高さ n についての帰納法を用いて示す．$\mathbf{G3F}^*$ での $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の導出が存在すると仮定する．このシークエントの高さが 0 であるとき，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は公理か前提なしの幾何学的規則図式である．もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が公理（つまり，(Id) か $(L\bot)$）であるとすると，そのとき，その翻訳の結果 $\Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$ は明らかに導出可能である．もし，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が前提なしの幾何学的規則図式であるなら，そのとき，$\Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$ も $\overline{S}^{\boxplus}, \Gamma'^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$ の形をした前提なしの幾何学的規則図式である．というのも，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の形は $\overline{S}, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ であり，$\overline{S}^{\boxplus} \equiv \overline{S}$ であるからである．では次は，その証明図の高さが 0 以上の場合を考える．最後に適用された規則が $(R{\supset})$ であるとする，このとき，私たちは以下の導出を手にしているとする：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ x\mathsf{R}y, y{:}A, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}B\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}A{\supset}B}\ (R{\supset}).$$

帰納法の仮定より，私たちは $\mathbf{G3K}^*$ において，以下のような導出を素直に手にできる：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ x\mathsf{R}y, y{:}A^{\boxplus}, \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}, y{:}B^{\boxplus}\end{array}}{x\mathsf{R}y, \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}, y{:}A^{\boxplus}{\supset}B^{\boxplus}}\ (R{\supset})}{\Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}, x{:}\Box(A^{\boxplus}{\supset}B^{\boxplus})}\ (R\Box),$$

このエンドシークエントは $\Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}, (x{:}A{\supset}B)^{\boxplus}$ の翻訳の結果になっている．

(GRS) を除く，残りの場合に対しては，$(R{\supset})$ の場合と同様の議論を用いて証明を与えることができる．最後に適用された規則が (GRS) である場合には，目下のゴールとなるシークエントの翻訳が，$\mathbf{G3K}^*$ において導出可能であることはすぐにわかる．というのも，翻訳 $(\cdot)^{\boxplus}$ は，ラベルの書き換えを行わないため，$(x\mathsf{R}y)^{\boxplus} := x\mathsf{R}y$ となるからである．

(ii) に対しては，(i) の場合とほとんど同じ議論でその証明を与えることができる．ここでは，最後に適用された規則が (Mon) である場合の証明を与える．このとき，証明図は以下のような形をしている：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ x\mathsf{R}y, x{:}P, y{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{x\mathsf{R}y, x{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Mon).$$

ここでは，$(TMon)$ が許容可能であるという仮定を使う．$(TMon)$ の規則は，原子式の単調性についての規則 (Mon) の翻訳である．このとき，先の導出の (Mon) の前提に帰

納法の仮定を適用し，それから，$(TMon)$ を適用すれば良い．その証明図は以下：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, y{:}P\&\Box P, \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}\end{array}}{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}}\ (TMon),$$

このエンドシークエントは目指していた通り，$(x\mathsf{R}y)^{\boxplus}, (x{:}P)^{\boxplus}, \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \Delta^{\boxplus}$ となる．　□

次は定理 9 の右辺から左辺の方向である．

補題 30 ((Yamasaki and Sano 2016, Lemma 6))**.** Γ, Δ を Form からなるラベル付き表現の有限多重集合とし，Π, Σ を Form からなる原子式のラベル付き表現の有限多重集合とする．このとき，

$$\mathbf{G3K}^* \vdash \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus} \quad \text{ならば，} \quad \mathbf{G3F}^* \vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta.$$

Proof. $\mathbf{G3K}^*$ での，$\Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}$ の証明図の高さ n についての帰納法を用いて示す．$n = 0$ であり，$\Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}$ が，$\mathbf{G3K}^*$ における公理（このとき，その可能性は二つ：$(L\bot)$ と (Id)）か前提なしの幾何学的規則図式であるとき，$\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta$ も $\mathbf{G3F}^*$ において公理か前提なしの幾何学的規則図式である．

$n > 0$ なら，導出の最後に適用された規則で場合分けをする．今，Π と Σ は Form からなるラベル付きの原子式であり，$\Gamma^{\boxplus}$ と $\Delta^{\boxplus}$ では，含まれるラベル付き表現の最も外側の結合子が，含意 $\supset$，可能性演算子 $\Diamond$ であることは決してない．そういうわけなので，最後に適用された規則は $\supset$ か $\Diamond$ 以外でなければならない．以下では，次の場合を考える：(i) 最後に適用された規則が，$(L\vee)$，$(R\vee)$ と (GRS) のうちのどれか；(ii) 最後に適用された規則が $(L\&)$ か $(R\&)$；(iii) 最後に適用された規則が $(L\Box)$ か $(R\Box)$.

(i) 最後に適用された規則が，$(L\vee)$，$(R\vee)$，(GRS) のうちのどれかの場合：帰納法の仮定を素直に適用することで，$\mathbf{G3F}^*$ において求めていた導出を手にできる．例えば，(GRS) の場合には，証明図は以下のような形で終わる：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \overline{T_1}[z_1/y_1], \overline{S}^{\boxplus}, \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \overline{T_n}[z_n/y_n], \overline{S}^{\boxplus}, \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}\end{array}}{\overline{S}^{\boxplus}, \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}}\ (GRS),$$

このとき，$\overline{S}^{\boxplus} \equiv \overline{S}$ であることに注意しなさい．$\overline{T_j}^{\boxplus} \equiv \overline{T_j}$ であるので，その前提

に帰納法の仮定を適用することができ，同じ (GRS) の規則を適用することによって，**G3F*** における以下の導出を手に入れることができる：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \overline{T_1}[z_1/y_1], \overline{S}, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \overline{T_n}[z_n/y_n], \overline{S}, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta\end{array}}{\overline{S}, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta}\ (GRS)$$

(ii) 最後に適用された規則が $(L\&)$ か $(R\&)$ である時：さらに二つの場合分けをしなければならない：1) $P^{\boxplus} \equiv P\&\Box P$ が主式である場合，2) $(A\&B)^{\boxplus} \equiv A^{\boxplus}\&B^{\boxplus}$ が主式である場合．後者の場合 2) は (i) の場合と同様の仕方で示すことができる．そこで，ここでは，1) の場合について考える．まず，最後に適用された規則が $(L\&)$ である場合を考える．このとき，**G3K*** における導出は以下のような形をしている

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ x{:}P, x{:}\Box P, \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}\end{array}}{x{:}P\&\Box P, \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}}\ (L\&).$$

帰納法の仮定を適用することによって，$(L\&)$ の前提から，**G3F(m)*** における次のような導出を手にすることができる：

$$\begin{array}{c}\vdots\\ x{:}P, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta,\end{array}$$

続いて 1) の残りのもう一つの場合を考える，最後に適用された規則が $(R\&)$ であると仮定する．このとき，この導出の最後のステップは以下のようになる：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}, x{:}P\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}, x{:}\Box P\end{array}}{\Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}, x{:}P\&\Box P}\ (R\&).$$

このとき，この導出の左の前提に対して帰納法の仮定を適用することによって次のような導出を手にできる：

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta, x{:}P.\end{array}$$

(iii) 最後に適用された規則が $(L\Box)$ か $(R\Box)$ であるとき：まずその導出の前提における含意式に対して高さを保存する反転可能性の補題を適用し，そして，帰納法の仮定

を適用する．例えば，$(R\Box)$ の場合を考える．このとき，その導出の最後のステップは次のようになる：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ x\mathsf{R}y, \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}, y{:}A^{\boxplus}\supset B^{\boxplus}\end{array}}{\Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}, x{:}\Box(A^{\boxplus}\supset B^{\boxplus})}\ (R\Box),$$

ここでの y は結論には出現しない．このとき，まず $\mathbf{G3K}^*$ の高さを保存する反転可能性をその前提に適用し，次のような高さを保存したままの導出を手にする：

$$x\mathsf{R}y, \Gamma^{\boxplus}, \Pi, \Box\Pi, y{:}A^{\boxplus} \Rightarrow \Sigma, \Delta^{\boxplus}, y{:}B^{\boxplus}$$

次に，帰納法の仮定をこのシークエントに適用することができるので，まず，帰納法の仮定を適用し，それから，$(R\supset)$ を適用する：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ x\mathsf{R}y, \Gamma, \Pi, y{:}A \Rightarrow \Sigma, \Delta, y{:}B\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta, x{:}A\supset B}\ (R\supset).$$

$\Box$

これら二つの補題を用いて，以下の埋め込み定理を示すことができる．

定理 9 ((Yamasaki and Sano 2016, Theorem 2))**.**

(i) $\mathbf{G3F}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることと，$\mathbf{G3K}^* \vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \ \Delta^{\boxplus}$ であることは同値である．

(ii) 以下の規則が $\mathbf{G3K}^*$ において許容可能であると仮定する：

$$\dfrac{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, y{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (TMon).$$

このとき，$\mathbf{G3Fm}^* \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \Leftrightarrow \mathbf{G3K}^* \vdash \Gamma^{\boxplus} \Rightarrow \ \Delta^{\boxplus}$.

Proof. (i)(ii) のどちらも，左辺から右辺の証明は，補題 29 から導くことができる．一方，右辺から左辺の方向は，補題 30 において，$\Pi = \Sigma = \emptyset$ とすることによって証明できる．このとき，$\mathbf{G3F}^*$ における導出可能性が，$\mathbf{G3Fm}^*$ における導出可能性を含意していることに注意しなさい．また，(ii) の右辺から左辺の方向に対しては，$(TMon)$ の許容可能性は必要ないことに注意が必要である． $\Box$

以下の命題たちが定理 9 (ii) を適用するための十分条件を与えてくれる．

命題 31. もし，$x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P \Rightarrow y{:}\Box P$ は $\mathbf{G3K}^*$ で導出可能なら，

$$\dfrac{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, y{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (TMon)$$

が $\mathbf{G3K}^*$ で許容可能.

Proof. $\mathbf{G3K}^*$ で，$x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P \Rightarrow y{:}\Box P$ と $x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta$ の両方が導出可能と仮定する．この仮定と，弱化の許容可能性によって，$x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}\Box P$ が帰結する．このとき，私たちは以下のように $x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta$ を示すことができる：

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P, y{:}P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}P}\,(Id)}{x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}P}\,(L\Box) \quad x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}\Box P}{x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}P\&\Box P}\,(R\&)}{x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}P\&\Box P}\,(L\&) \quad y{:}P\&\Box P, x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x\mathsf{R}y, x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, x{:}P\&\Box P, \Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta}\,(Cut) \\ \hline\hline x\mathsf{R}y, x{:}P\&\Box P, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array},$$

ここでは，二重線は縮約を必要な回数適用することを意味する． □

命題 32. もし，幾何学的規則図式からなる有限集合 $*$ に Table 4.3 の $(Tran)$ が含まれているとき，$\mathbf{G3K}^*$ において $x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P \Rightarrow y{:}\Box P$ は導出可能.

Proof.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x\mathsf{R}y, y\mathsf{R}z, x\mathsf{R}z, x{:}P, x{:}\Box P, z{:}P \Rightarrow z{:}P}\,(Id)}{x\mathsf{R}y, y\mathsf{R}z, x\mathsf{R}z, x{:}P, x{:}\Box P \Rightarrow z{:}P}\,(L\Box)}{x\mathsf{R}y, y\mathsf{R}z, x{:}P, x{:}\Box P \Rightarrow z{:}P}\,(Tran)}{x\mathsf{R}y, x{:}P, x{:}\Box P \Rightarrow y{:}\Box P}\,(R\Box).$$

□

これらの命題から，(Mon) を持つシークエント計算 $\mathbf{G3Fm}^*$ は幾何学的規則図式として，$(Tran)$ を含む $\mathbf{G3K}^*$ へと埋め込み可能であることがわかる．このようにして，定理 9 は一様な仕方で厳密含意の論理の拡張から様相論理への埋め込みをカバーすることができる．というのも，ラベル付きシークエント計算は，(GRS) の規則としてどの規則を持つのかの違いによって，その論理体系の特徴付けを行うことができるからである．この特徴付けにより，埋め込み関係にある論理の間では同じ R の規則が採用されているということが $*$ の働きからわかる．翻訳に関しては，R が翻訳によって変化しないことがポイント

となる．このように，R の違いに，各論理体系の違いを還元したことが，異なる論理体系の特徴付けを一様な仕方で与えることを可能にし，同様に，埋め込み定理の証明も一様な仕方で与えることを可能にしたと考えられる．

4.6　ラベル付きシークエント計算の二項関係と自由変項

ここでは，ラベル付きシークエント計算に出現する二項関係と自由変項についての考察を試みる．まず直観主義論理の場合に着目し，その説明を始める．

4.6.1　直観主義論理のラベル付きシークエント計算の二項関係と自由変項

ここではまず，ミンツのカノニカルモデルにおける到達可能性関係 $R_{\mathfrak{K}}$ について確認する．$R_{\mathfrak{K}}$ はシークエントの前件の論理式の包含関係で定義されていたので，そこでの条件は，反射性と推移性によって特徴付けられる．これは，クリプキモデルで言えば，直観主義論理のクリプキモデルの到達可能性関係が，二つの性質を持つことに対応している．一方，ラベル付きシークエント計算の完全性の証明は，証明不可能なシークエントを証明不可能性を保ったまま部分論理式を加え拡張していくという方法で示される．このとき，ラベル付きシークエント計算の R はクリプキモデルの R を用いて解釈される．そのため，形式体系の中に，R の規則としてどのようなものが認められているのかによって，そこでの自由変項たちがどのように結び付けられるかが変わってくる．直観主義論理の場合には，反射性と推移性の規則が含まれているため，R の性質も反射性と推移性によって特徴付けられる．このとき，ミンツの $R_{\mathfrak{K}}$ とラベル付きシークエント計算の R を統合する見方ができ，可能世界の集合をシークエントの集合とみてよく，到達可能性関係をその間の関係と考え定義することができる．

このことから，直観主義論理の完全性を，シークエントを拡張するという方針で示そうとする際には，必然的に包含関係として定められる二項関係 R のようなものが必要となり，その必要とされる R を形式体系に明示化したものを，ラベル付きシークエント計算の R とみなすことができると考えられる．また，そのため，このとき，R で結び付けられた自由変項は，その一つ一つがシークエントとして解釈してよいと考えられるのである（シークエントの包含関係はシークエントの前件の包含関係によって定める）．

直観主義論理のラベル付きシークエント計算に関しては，そこでの二項関係を包含関係を用いて解釈し，自由変項は，一つ一つをシークエントとして解釈しうると考えるのはそ

の完全性についての証明からも自然な見方であると考えられる．

以上のことから，ラベル付きシークエント計算はミンツの定義を一般化し，表現力を強めたものであると考えて差し支えないということがわかる．

4.6.2　二項関係と自由変項

ラベル付きシークエント計算の二項関係は，ミンツの $R_{\mathfrak{K}}$ の一般化と考えられる．では，自由変項（ここでの，x や y）についてはどうだろうか．二項関係が含意の規則においてのみ出現するのに対し，自由変項はすべての論理式に付され，どの推論規則の中でも，その明示化が要求される．

このとき，もちろん様々にその解釈の余地はあると考えられるが，ここでは，これらの記号をその論理式が導入された局面（状況，状態）を表していると解釈する．そうすると，含意式では，含意の結合子を導入する前と導入した後では，局面が変化しているということがわかる．つまり，自由変項は各論理式が帰結関係のどの段階で出現したのかを表しており，R は，どの変項とどの変項が関係付いているのかについての関係性を表しているということである．この論理式が導入された局面というのは，もう少し広くその意味を解釈して，情報の進展の段階と考えても良い．このように考えたとき，この自由変項たちは，各論理式が情報の進展のどの段階にいるのかを表現し，R はどの段階とどの段階がつながり，関係しているのかを表現していることになる．

ラベル付きシークエント計算は二項関係の性質の違いにより，様々な論理体系を一様な仕方で扱うことができるのであるが，このことによって，含意や必然性演算子の規則を明示的に変更しなくても，含意や必然性演算子の性質の違いを表現することができる．そのため，各論理体系が扱う命題の性質は，二項関係がどのような性質を持つのかによって，もう少し言うと，そこで考えられている状況たちが，互いにどのように関係付けられているのかによって変化すると考えられる．これは，のちに検討する，命題が持つ $\langle$ 有効性の範囲 $\rangle$ の議論と関連する．その点についての詳しい考察は後ほど行う．

第 5 章

ベーシックロジックと線形論理

本章では，サンビンら (Sambin et al. 2000) によって与えられたベーシックロジックを導入する[*1]．このとき，ベーシックロジックでは，シークエントの環境（つまり，構造）の違いが，論理体系の違いを考察する際の基準とされるということについて見る．また，ジラールによって，線形論理（線形論理は，先にも見たように，直観主義論理や古典論理の構造に対する条件付けを制限することによって与えられる論理である）に直観主義論理が埋め込み可能であるということが示されたのであるが，本論では，ジラールによって与えられた翻訳とは異なる翻訳を用いて，直観主義論理が線形論理に埋め込み可能であることを見る．

5.1 ベーシックロジック

命題を構成する結合子というものが，メタ概念の反映になっているという考え方は，結合子の捉え方として最も基本的であり，その代表と考えられるのが第 1 章でも見た，必然性演算子である．ここでは，サンビンらのベーシックロジックについての考察を参考に，文結合子がどのようなメタ概念の反映になっているのかについての説明を行う．

ゲンツェンによって与えられたシークエント計算は，様々にその研究が進んだのであるが，サンビンら (Sambin et al. 2000) によって，シークエントの一部として出現している

[*1] ベーシックロジックの研究は，部分構造論理（substructural logic）の研究からの派生と見ることができる（cf. （大西 2009)）．このとき，部分構造論理は，シークエント計算における，構造規則（弱化・縮約・交換）のうちのいくつかを制限した体系の論理的性質を議論することを目的としている（cf. （古森・小野 2010) ）．その一方で，のちに詳しく見るように，ベーシックロジックは，論理規則は固定し，シークエントの構造を調整することで様々な論理体系を与えるような論理体系である．

「コンマ」や「二重矢印」の働きを生かすだけで，各結合子の意味を説明可能であるということが明らかにされてきた*2．彼らは，結合子をメタの構造の反映と見なし，各結合子に対する推論規則の与え方に対する正当化を行った．本節では，彼らの理念を理解することを目指し，**ベーシックロジック**（*basic logic*）がどのような論理であるのかを見ていく．

5.1.1　結合子の推論規則についての正当化

2.1 節の冒頭で見た推論の二つの基本原則を思い出そう．ここでは，説明のため記号化も交えた形で与える．それは次のようなものであった．

(i) ある命題 A を仮定したら，その命題自身 A を結論して良い．

(ii) ある命題 A から，ある命題 B を結論できるとき（$A \Rightarrow B$），この命題 A が実際に帰結しているなら（$\Rightarrow A$），この帰結関係（$\Rightarrow A$）は，先の帰結関係（$A \Rightarrow B$）と組み合わさって，ある命題 B が帰結する（$\Rightarrow B$）．

この二つの基本原則のうち，(ii) は (i) とは異なり，帰結関係の構造が，入れ子になっていることに注意しなければならない．ここでは例えば，$A \Rightarrow B$ の中には A と B の間に論理式の間の帰結関係が存在する．次に，$\Rightarrow A$ と $A \Rightarrow B$ から，$\Rightarrow B$ を導き出す際にも，シークエントの間の帰結関係が存在する．つまり，一つの推論（帰結関係）を一つの対象とみなし，それらの間にも，推論を行う（帰結関係が存在する）ことができるということである．ここでは，このような推論関係を「推論の構造に関係する推論」と呼ぶことにし，「**メタレベル**」，あるいは，「**構造レベル**」の推論と表現する．一方，メタレベルの推論ではないものを単に「推論」と呼び，「**対象レベル**」，あるいは，「**命題レベル**」の推論と表現する．

ベーシックロジックでは，結合子をこのメタレベルの推論の構造を反映させたものと見なす．ベーシックロジックの目的の一つは，様々な論理たちの宇宙の中に，一つの構造を見出すこと（ (Sambin et al. 2000, p.979)）．また，**定義方程式**（*definitional equation*）を解くという仕方で，各結合子の推論規則を定めるという方法をとると，推論規則をメタの構造を推論規則の中に反映させることができるという形で正当化することをもまた目的としている．

*2 ベーシックロジックについては， (大西 2012) でもその詳しい説明が与えられている．

ベーシックロジックは，三つの特徴的な性質を持つ：(i) reflection（反映）; (ii) symmetry（対称性）; (iii) visibility（可視性）．(iii) はシークエントが持つ性質のことを指し，シークエントの前件（後件）に出現する論理式がたかだか一つであるときに，シークエントの前件（後件）は可視性を持つと言う．また，(i) から（少なくとも）(ii) の条件が自然と帰結することがわかるので，ここでは，(i) について少し詳しく見て行こう．ここでの反映とは，(大西 2009, p.142) の中でまとめられているように，以下のようなテーゼが意図されていると考えるのがよいだろう：

「論理定項とはシークエント・レベルの構造に対する，命題レベルでの反映である」

ここでのシークエント・レベルとは，先ほど述べた，メタレベルのことと考えてよい．結合子というのはメタレベルでの構造を反映した形で与えられているものであるということを表しており（これは**反映原理** (principle of reflection) と言われる)，メタレベルの構造を反映した形で与えられる結合子を選択するのがよいということが意図されている．メタレベルの構造を表現する語は，「*yields*（**与える**）」，「*and*（**と**）」の二つのみであると考えておき， (Sambin et al. 2000) では，この二つの語が「*link*」と呼ばれる．このとき，ベーシックロジックで扱われる各結合子（$\otimes$,$\mathcal{P}$,&,$\oplus$,$\rightarrow$,$\leftarrow$）の推論規則は，この二つの *link* があれば与えることができる．

ではここで，具体的な議論に入る前に，まず簡単に記号法と用語法を定める．$A, B, C, \ldots$ は論理式を表現する．A_1 *and* $\ldots$ *and* A_n の略記として $A_1, \ldots, A_n$ を用いる．シークエントの定義は Defintion 22 と同じでよい．また，ここでは，シークエントは「Γ *yields* Δ」によって表現されるのであるが，「$\Gamma \vdash \Delta$」と書かれ，「Δ は Γ の帰結である」ということを表現していると考えてよい．また，$\Gamma \vdash \Delta$ において，$\vdash$ をこのシークエントの**主結合**（*main connective*）と呼ぶこととする．論理記号で表現されたとき，“$\vdash$” は「*yields*」の，“,” は「*and*」の，それぞれ省略とみなされていることがわかる．ここでの推論規則は，例えば

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\ (r)$$

のように書き，「$\Gamma' \vdash \Delta'$ から $\Gamma \vdash \Delta$ へと移行ができること（we can move from the assertion $\Gamma' \vdash \Delta'$ to the assertion $\Gamma \vdash \Delta$. (Sambin et al. 2000, p.984))」を表現している．このとき，この一つのシークエントから異なるシークエントへの移動には，これま

での *yields* によって表現されていたのとは異なるレベルの帰結関係が用いられていることがわかる．つまり，推論規則の中には，本質的に，推論についてのメタ概念が用いられているということである．これが，先ほど指摘した，(ii) の原則の中に潜んでいた帰結関係が持つ入れ子構造の正体である．

link の一つである *and* が最も外側の結合である場合には，「$(\Gamma' \vdash \Delta')$ *and* $(\Gamma'' \vdash \Delta'')$」が「$\Gamma' \vdash \Delta'$ と $\Gamma'' \vdash \Delta''$ が同時に成り立っている」を表現するが，*and* が *yields* の内部に入ってしまった時は，そうではなくなる．つまり，A *and* $B \vdash \Delta$ のように，*and* が論理式の内部に入り込んでしまったときには，「A *and* $B \vdash \Delta$」は「$A \vdash \Delta$ *and* $B \vdash \Delta$」と同値ではなくなる．このことは，$\vdash$ の左側に，*and* が入ったときにも言える．その場合は，「$\Gamma \vdash A$ *and* $\Gamma \vdash B$」と「$\Gamma \vdash A$ *and* B」が同値ではなくなる．したがって，最も外側の結合にならない *and* は，一般的に「と」に期待されるような推論的性質は持たないということである．そのため，ここまで見てきたシークエント計算の体系では，シークエントの後件では「,」は「または」と解釈されたが，ベーシックロジックでは「かつ」と考えておけば十分であるということがわかる．

一方，*yields* が最も外側にあるときには，メタのメタの帰結関係を表し，「$(\Gamma' \vdash \Delta') \vdash (\Gamma \vdash \Delta)$」は「$\Gamma' \vdash \Delta'$ から $\Gamma \vdash \Delta$ が帰結する」が表現するものと同じである．このとき，この二つの表現の同値性から，シークエントの二つの**合成**（*composition*）を与えることができる．（表記 $\phi(\Gamma/A)$ は ϕ 中の A を Γ で置き換えるということを表す）：

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma'(\Gamma/A) \vdash \Delta}\ (LCut) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta' \quad A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta'(\Delta/A)}\ (RCut)$$

これはいわゆるカット規則である．このとき，シークエントの同一性と合成が，それぞれ，推論の基本原則 (i)，(ii) で表現されたものにあたると考えてよい．

ここでまず，一般的に，定義方程式とは何か，定義方程式を解くとはどういうことであるのかということを確認する．

新しい結合子 $\circ$ を与えたいとすると，その結合子が満たすべき同値性を参考にして，その欲しい結合子を定める．このとき，その同値性のことを「**定義方程式** (definitional equation)」と呼ぶ．それは例えば，以下のような形で与えられる：

$$\text{任意の}\Delta\text{に対して，}(A \circ B \vdash \Delta) \quad \Leftrightarrow \quad ((A \ and\ B) \ \vdash \ \Delta)$$

ここでの $\Leftrightarrow$ は，$\vdash$ が両方向に成り立っているということを表現しているが，この $\Leftrightarrow$ は，メタのメタの構造に関係する帰結関係を表現している．また，この両辺は，左辺が被定義項，右辺が定義項である．このとき，右辺から左辺への方向から，次の規則が自然に生じる：

$$\frac{A\ and\ B \vdash \Delta}{A \circ B \vdash \Delta}\ .$$

この方向の規則は，一般に**形成**（*formation*）の規則と言われる．一方，この逆向きは，定義されるべき $\circ$ がすでに前提中に出現しているので，そのままでは，$\circ$ についての明示的な情報を与えてはくれなさそうである：

$$\frac{A \circ B \vdash \Delta}{A\ and\ B \vdash \Delta}\ .$$

そういうわけで，この $\circ$ を前提ではなく結論中に出現するように変形しなければならない．以下に見るような一定の操作を行えば，必要な規則が手にできる．そのため，まず Δ を $A \circ B$ とすることで，

$$\frac{A \circ B \vdash A \circ B}{A\ and\ B \vdash A \circ B}$$

となる．続いて，$A \circ B \vdash A \circ B$ は同一性を表す推論の前提（つまり，公理）であるため消し，$A\ and\ B \vdash A \circ B$ を手にする．このとき，and は「,」で略記されるので，$A, B \vdash A \circ B$ となる．そして，$\Gamma \vdash A$ と $\Gamma' \vdash B$ が成立していると仮定して，次のように変形を行うことができる：

$$\dfrac{\Gamma' \vdash B \quad \dfrac{\Gamma \vdash A \quad A, B \vdash A \circ B}{\Gamma, B \vdash A \circ B}\,(LCut)}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \circ B}\,(LCut)\ .$$

さらに，$A, B \vdash A \circ B$ は公理とみることができるのでないものと考えてよく，以下の規則を手にできる：

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \circ B}\ .$$

この規則は，先の定義方程式の，左辺から右辺の方向から導出可能であることがわかる．そのため，この方向の変形後の規則は「**明示的反映**（*explicit reflection*）」規則と呼ばれ

る．このような二つの規則（形成規則と明示的反映規則）を与えることによって，$\circ$ の振る舞いを定義することができる．ここで見たような仕方で，各結合子は，定義方程式を解くという形で，その推論規則を定めることができる．このとき，ここまで見てきた $\circ$ は結合子 $\otimes$ の説明となっている．では以下で，具体的に各結合子（$\otimes$ も再度見るが）について見てみよう．

二つの *link*，*and* と *yields* は，そのスコープの違いによって，その性質が区別され，対象言語の中でここで問題にしている六つの結合子に反映される．*and* が連言・選言に反映され，*yields* が含意に反映される．また，その反映のされ方は，各 *link* がシークエントのどの位置に出現するのか，どちらの *link* が最も外側の結合になっているのかで変わってくる．まず，$\vdash$ によって表現されているシークエントの主結合としての *yields* が最も外側の結合になる場合を考える．このとき，もう一つの *link* である *and* が主結合の *yields* の左右どちらに出現するかを考察することで，*and* の振る舞いを調べることができる．まず，*and* がシークエントの主結合の左側に出現している場合を見る．その定義方程式は以下：

$$\text{任意の}\Delta\text{に対して，}(A \otimes B \vdash \Delta) \ \Leftrightarrow\ ((A, B) \vdash \Delta)$$

このとき，$\vdash$ によって表現されているシークエントの主結合としての *yields* の左側に出てくる *and* の性質を対象レベルの論理結合子 $\otimes$ が反映しているということになる．この定義方程式を解くことによって $\otimes$ の二つの規則が与えられる（$\otimes$ の形成規則を「($\otimes$-F)」と，$\otimes$ の隠伏的規則を「(I$\otimes$-F)」と，それぞれ書く）：

$$\frac{A, B \vdash \Delta}{A \otimes B \vdash \Delta}\ (\otimes\text{-F}) \qquad \frac{A \otimes B \vdash \Delta}{A, B \vdash \Delta}\ (\mathrm{I} \otimes \text{-R})$$

これら二つの規則は，結合子 $\otimes$ を *yields* の左側のコンマ，つまり，*and* の反映として定める．このとき，形成規則に関しては，このままでも，結合子の意味を与える規則になっている．しかし，先ほども見たように，反映規則の方はそうではない．そこで，先ほど見たのと同様の変形を行う．まず，規則の Δ を $A \otimes B$ と見なし，

$$\frac{A \otimes B \vdash A \otimes B}{A, B \vdash A \otimes B}$$

を手にする．$A \otimes B \vdash A \otimes B$ は公理なので消し，(I$\otimes$-R) と同値な，$A, B \vdash A \otimes B$ を手にする．このとき，（A と B はそれぞれが，$\Gamma \vdash A$, $\Gamma' \vdash B$ から導き出されると考えて）次のような推論を行える：

$$\dfrac{\Gamma' \vdash B \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \quad A, B \vdash A \otimes B}{\Gamma, B \vdash A \otimes B}\ (LCut)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \otimes B}\ (LCut) \quad .$$

したがって，結局，(I⊗-R) 規則と同値な $\otimes$ の明示的反映規則（「(E⊗-R)」と書く）を手にできる：

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \otimes B}\ (\mathrm{E} \otimes \text{-R})$$

さて，このようにして，$\otimes$ の定義方程式は**解かれた**．ここで，表記について述べておく．以下では，結合子 $\circ$ の形成規則を ($\circ$-F) と，隠伏的反映規則を (I$\circ$-R) と，明示的規則を (E$\circ$-R) と，それぞれ書くこととし，用いる．この乗法的な連言 $\otimes$ の規則を対称化した規則が，乗法的な選言 $\mathcal{P}$ についての規則である．このことから，結合子 $\mathcal{P}$ は $\vdash$ によって表現されているシークエントの主結合としての *yields* の右に出現する *and* を反映していることがわかる．その定義方程式は以下：

$$\text{任意の}\Gamma\text{に対して，}(\Gamma \vdash B \mathcal{P} A) \ \Leftrightarrow\ (\Gamma \vdash B, A)$$

$\mathcal{P}$ についてもこれまでと同様に，

$$\dfrac{\Gamma \vdash B, A}{\Gamma \vdash B \mathcal{P} A}\ (\mathcal{P}\text{-F}) \quad \dfrac{\Gamma \vdash B \mathcal{P} A}{\Gamma \vdash B, A}\ (\mathrm{I}\mathcal{P}\text{-R})$$

となる規則を手にできる．このとき，(I$\mathcal{P}$-R) の規則から，Γ を $B\mathcal{P}A$ と見なし，

$$\dfrac{B\mathcal{P}A \vdash B\mathcal{P}A}{B\mathcal{P}A \vdash B, A}$$

を手にする．ここから，公理 $B\mathcal{P}A \vdash B\mathcal{P}A$ を消し，$B\mathcal{P}A \vdash B, A$ を手にできる．そして，以下のように推論できる：

$$\dfrac{\dfrac{B\mathcal{P}A \vdash B, A \quad A \vdash \Delta}{B\mathcal{P}A \vdash B, \Delta}\ (RCut) \qquad B \vdash \Delta'}{B\mathcal{P}A \vdash \Delta', \Delta}\ (RCut) .$$

ここから，$B\mathcal{P}A \vdash B, A$ を取り除き，

$$\frac{B \vdash \Delta' \quad A \vdash \Delta}{B\mathcal{P}A \vdash \Delta', \Delta}\ (\mathrm{E}\mathcal{P}\text{-R})$$

を手にできる．このとき，$\mathcal{P}$ の規則は，$\otimes$ の二つの規則と完全に対称的な規則になっていることがわかる．二つの結合子に対する規則が有するこのような関係こそが，ベーシックロジックの特徴の二つ目としてあげた「対称化」が目指すものである．

さて，次は *and* が最も外側の結合になる場合についてである．まず，*and* がシークエントの主結合となる *yields* の右側でその性質が反映されている場合を考える．定義方程式は以下：

$$\text{任意の}\Gamma\text{に対して，}(\Gamma \vdash B\&A) \quad \Leftrightarrow \quad (\Gamma \vdash B) \ \ \text{and} \ \ (\Gamma \vdash A)$$

であり，与えられる規則は，

$$\frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B\&A}\ (\&\text{-F}) \quad \frac{\Gamma \vdash B\&A}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma \vdash B\&A}{\Gamma \vdash A}\ (\mathrm{I}\&\text{-R})$$

今，(I&-R) の一つ目の規則について考える．このとき，Γ を $B\&A$ で置き換え，この規則と同値な $B\&A \vdash B$ を与えることができる．続いて，$B\&A \vdash B$ と合成を用いて，次のような推論ができ，

$$\frac{B\&A \vdash B \quad B \vdash \Delta}{B\&A \vdash \Delta}\ (RCut)$$

となるが，$B\&A \vdash B$ は公理と見なせるので，を取り除いて，

$$\frac{B \vdash \Delta}{B\&A \vdash \Delta}$$

となる．これが，(E&-R) の二つある規則のうちの一つである．もう一つは同様に，

$$\frac{A \vdash \Delta}{B\&A \vdash \Delta}$$

として与えられる．

さて，次は，*and* がシークエントの主結合となる *yields* の左側でその性質が反映されている場合である．次のように与えられる定義方程式を解いて，

$$\text{任意の}\Delta\text{に対して，}(A \oplus B \vdash \Delta) \ \Leftrightarrow \ (A \vdash \Delta) \text{ and } (B \vdash \Delta)$$

以下の規則を手にできる．

$$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{A \oplus B \vdash \Delta}\ (\oplus\text{-F}) \quad \frac{A \oplus B \vdash \Delta}{A \vdash \Delta} \quad \frac{A \oplus B \vdash \Delta}{B \vdash \Delta}\ (\mathrm{I} \oplus \text{-R})$$

このとき，先ほどと同様に，(I$\oplus$-R) の規則の一つ目から，Δ を $A \oplus B$ と見なし，

$$\frac{A \oplus B \vdash A \oplus B}{A \vdash A \oplus B}$$

と同値な $A \vdash A \oplus B$ を手にできる．この $A \vdash A \oplus B$ を用いて次の推論を行うことができ，

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A \vdash A \oplus B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ (LCut)$$

であるが，この推論から，$A \vdash A \oplus B$ を取り除いて，以下の (E$\oplus$-R) 規則の一つを手にできる．

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ (\mathrm{E} \oplus \text{-R})$$

もう一つの規則は以下：

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ (\mathrm{E} \oplus \text{-R})$$

このようにして，*and* が最も外側の結合になっているかいないか，また，*yields* との間にどのような関係が成立しているのかに関するすべての組み合わせについて考察することによって，*and* がどのようにして，対象言語の中に反映されているのかが明らかになった．

では，次は *yields* についてである．先にも述べたように，*yields* が反映されるのは「含意」である．*yields* も *and* の場合と同じように，シークエントの主結合としての *yields* に対して，対象言語に反映される *yields* がその左右どちらに出現しているのかについての場合分けが必要になる．*yields* を反映する結合子を与える最も直観的な定義方程式の与え方は以下：

$$\text{任意の}\Gamma\text{に対して，}(\Gamma \vdash A{\rightarrow}B) \ \Leftrightarrow\ (\Gamma \vdash (A\ yields\ B)).$$

このとき，自然にこの定義方程式を解くと以下のようになる

$$\frac{\Gamma \vdash (A \ \vdash\ B)}{\Gamma \vdash A{\rightarrow}B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{A{\rightarrow}B \vdash (\Gamma \ \vdash\ \Delta)}$$

しかし，この規則のままでは，例えば以下のような推論ができてしまう：

$$\cfrac{\cfrac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B{\rightarrow}C \vdash (A \vdash D)}}{B{\rightarrow}C \vdash A{\rightarrow}D}$$

一般には，上記のように *yields* の入れ子を許すシークエントは扱うことができない[*3]．そこで，先の定義方程式を解いた結果でてきた規則の Γ を空とすることで，以下の二つの規則を手にできる：

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A{\rightarrow}B}\ (\rightarrow\text{-F}) \quad \frac{\vdash A \quad B \vdash \Delta}{A{\rightarrow}B \vdash \Delta}\ (\text{E} \rightarrow\text{-R})$$

また，先程の推論

$$\cfrac{\cfrac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B{\rightarrow}C \vdash (A \vdash D)}}{B{\rightarrow}C \vdash A{\rightarrow}D}$$

を見たとき，$A \vdash B$ と $C \vdash D$ と $B{\rightarrow}C \vdash A{\rightarrow}D$ はシークエントとして適切な形をしているので，この推論に当たることを表現可能でなければならない．そのため，*yields* が入れ子になることを許す規則を明示的に認めない場合，以下の規則を追加する必要が生じてくる：

$$\frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B{\rightarrow}C \vdash A{\rightarrow}D}\ (\rightarrow U)$$

では次は，シークエントの主結合である *yields* の左に出現する *yields* がどのように対象言語に反映されているのかを見る．

[*3] 例えば，K. ドシャンのハイヤーシークエント計算（higher sequent calculus）(Došen 1985) などでは，$\vdash$ の入れ子を許した形式化が行われる．

$$\text{任意の}\Delta\text{に対して，}(B{\leftarrow}A \vdash \Delta) \ \Leftrightarrow \ ((B \ yields \ A) \vdash \Delta)$$

このとき，先ほどと同様に，

$$\frac{(B \vdash A) \vdash \Delta}{B \leftarrow A \vdash \Delta}\ (\leftarrow\text{-F}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B \qquad A \vdash \Delta}{(\Gamma \vdash \Delta) \vdash A{\leftarrow}B}\ (\mathrm{I} \leftarrow\text{-R})$$

となる．ここでは，$\rightarrow$ の場合とは対称的に Δ を空と見なし，

$$\frac{B \vdash A}{B \leftarrow A \vdash}\ (\leftarrow\text{-F}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B \quad A \vdash}{\Gamma \vdash A{\leftarrow}B}\ (\mathrm{E} \leftarrow\text{-R})$$

さらに次の規則も同様に必要となる．

$$\frac{D \vdash C \quad B \vdash A}{D{\leftarrow}A \vdash C{\leftarrow}B}\ ({\leftarrow}U)$$

このとき，この二つの結合子，$\rightarrow$ と $\leftarrow$ は，論理式をシークエントの主結合となる $\vdash$ の一方から他方へと移行させる働きをしていることがわかる．このようにシークエントの主結合である帰結関係は，「一方から他方へ」というような形で表現される時間的性質とでも呼べるような性質を含むものであるため，その明示的な反映である含意結合子も時間的性質を含んでいると考えるのが自然である．この時間的性質は，連言や選言は持たない性質である．また，含意の二つの結合子についての考察から，推論規則の水平線や定義方程式の中に出現する $\vdash$（$\dashv$）を表現する *yields*，シークエントの主結合となる *yields*，対象言語に反映される *yields* の三つは，同じ *yields* で表現されていても，そこで扱われる概念は，それぞれ異なっているということがわかる．先にも触れたように，水平線を表現する *yields* はシークエントの間の帰結関係を，シークエントの主結合を表現する *yields* は論理式の列の間の帰結関係を，$\rightarrow$ と $\leftarrow$ によって対象言語に反映される *yields* は二つの命題の間の帰結関係を，それぞれ表現している．このとき，これら三つの *yields* はそれぞれ異なる対象の間の帰結関係を表現しているのであるが，どれも，帰結関係という概念を表現していることには変わりない．様々な場面で用いられる「帰結関係」ということでどのような概念が想定されているのかについて考えるためには，異なる三つの帰結関係の間の関係を明らかにしなければならないが，残念ながら，その十分な議論をここでは行う準備がないため，本論では，これ以上詳しく立ち入らない[*4]．ベーシックロジックでは，上記で与え

[*4] この点については，ドシャン (Došen 1985) の体系についての考察が手がかりになると考えられるが，本論ではこの点については措く．

た論理結合子以外に，論理定項 $\perp, 1, \top, 0$ についての定義方程式が解かれ，その規則が与えられる．

5.1.2　基本論理 **B** と論理体系の階層性

これまで見たように，*and* と *yields* という二つの *link* を反映する形で，各結合子の推論規則は与えられる．これらの規則を用いて与えられる体系が表 5.1 で与える，ベーシックロジックの体系 **B** である．

このとき，ベーシックロジックでは，この体系 **B** を基礎とし，あとはシークエントの構造についての制約を様々に調整することで，直観主義論理をはじめとする様々な論理体系を扱うことができる．先のように，定義方程式を解くという形で与えられた規則が，その結合子にとって最適なものと考え固定する．つまり，それらを基本となる推論規則と考えるのである．

では，この **B** を基礎の（ベースとなる）論理として，直観主義論理や古典論理はどのように与えられるのだろうか．ベーシックロジックでは，**B** を基礎とし，シークエントに対する制約を緩めていくことで，様々な論理体系を手にすることができるのであるが，その制限の緩め方には二つの方向がある．一つは，構造規則を許すこと，もう一つはシークエントの可視性の制限を緩めることである．一つ目については，ここでは交換規則は想定済みなので，構造規則は弱化と縮約の二種類とし，シークエントの前件と後件にそれぞれ適用する規則を考えることができる．このとき，例えば，任意の論理体系 **X** に対して，シークエントの両辺への弱化の適用を認めたときには，**XW** と書き，同様に，縮約を認めたときには，**XC** と書く．

二つ目に関しては，可視性を崩す，つまり，主式となる論理式以外にもシークエント中に複数の論理式が出現することを許すのである．このとき，シークエントの前件への可視化を認めたときは，先ほどのように任意の論理体系 **X** に対して，**XL** と，後件に認めたときには，**XR** とそれぞれ書くことにする．これらの組み合わせは，以下のようにまとめることができる[*5]．

[*5] ここでの体系の与え方は，(Sambin et al. 2000) でのものより，少し詳しい．(Sambin et al. 2000) では，弱化と縮約は，S として，一つの指標を用いて与えられているため，扱える体系は 8 種類だけである．しかし，本論では，弱化と縮約はそれぞれが重要であるとみなしており，また，その二つは別々に考察された方が，より細かな分析を行うことが可能と考えられるため，弱化と縮約を分けることとした．

表 5.1　**B**　(Sambin et al. 2000)

(公理)

$$\frac{}{A \vdash A}\ (Id)$$

(構造規則)

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ (LE) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ (RE)$$

(演算規則)

$$\frac{B, A \vdash \Delta}{B \otimes A \vdash \Delta}\ (L\otimes) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \mathcal{P} B}\ (R\mathcal{P})$$

$$\frac{B \vdash \Delta_1 \quad A \vdash \Delta_2}{B \mathcal{P} A \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (L\mathcal{P}) \quad \frac{\Gamma_2 \vdash A \quad \Gamma_1 \vdash B}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash A \otimes B}\ (R\otimes)$$

$$\frac{\vdash \Delta}{1 \vdash \Delta}\ (L1) \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \bot}\ (R\bot)$$

$$\frac{}{\bot \vdash}\ (L\bot) \quad \frac{}{\vdash 1}\ (R1)$$

$$\frac{B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta}{B \oplus A \vdash \Delta}\ (L\oplus) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ (R\&)$$

$$\frac{B \vdash \Delta}{B \& A \vdash \Delta} \quad \frac{A \vdash \Delta}{B \& A \vdash \Delta}\ (L\&) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ (R\oplus)$$

$$\frac{}{0 \vdash \Delta}\ (L0) \quad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (R\top)$$

$$\frac{B \vdash A}{B \leftarrow A \vdash}\ (L \leftarrow) \quad \frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}\ (R \rightarrow)$$

$$\frac{\vdash B \quad A \vdash \Delta}{B \rightarrow A \vdash \Delta}\ (L \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash}{\Gamma \vdash A \leftarrow B}\ (R \leftarrow)$$

$$\frac{D \vdash C \quad B \vdash A}{D \leftarrow A \vdash C \leftarrow B}\ (U \leftarrow) \quad \frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B \rightarrow C \vdash A \rightarrow D}\ (U \rightarrow)$$

B	**BL**	**BR**	**BLR**
BC	**BLC**	**BRC**	**BLRC**
BW	**BLW**	**BRW**	**BLRW**
BCW	**BLCW**	**BRCW**	**BLRCW**

このとき，直観主義論理は **BLCW**，古典論理は **BLRCW**，線形論理は **BLR** にそれぞれ対応する．さて，では，直観主義論理や古典論理以外の論理はベーシックロジックの中でどのように扱えばいいだろうか．先にも述べたように，**B** は構造についての制約についての考察が主なため，結合子についてのこれ以上の分析は出来ない．そのため，このままでは，含意についてのより繊細な分析は出来ないということである．つまり，第 1 章で見たような直観主義論理より弱い論理についての考察は行えないということである[*6]．その一方で，連言と選言については構造という観点からの分析が適していると考えられる．ベーシックロジックでは，各論理体系の間の違いを，シークエントの環境（構造）に課される条件の違いとして考え，その分析が行われる．この分析の基準は，様相同伴関係の際に用いられた，必然性演算子を用いる場合とは異なる分析の指標である．

ベーシックロジックには，実は二つの側面がある．結合子の推論規則に対する正当化を行うという側面と，新しい形式体系としての側面である．この第一の側面は，ゲンツェンの **LJ** や **LK** などの他のシークエント計算の体系は持っていない．また，結合子の正当化を行うという目的を達したことの副産物として，まさに，様々に存在する論理体系の基礎となる論理体系 **B** を定めることができたのである．**B** を用いることによって，私たちは，何を基準に論理体系を特徴付け，比較の尺度とすべきかという問題に対する一つの答えを手にすることができる．各論理体系は，一見すると，結合子，特に含意が持つ性質やその規則にだけその違いが反映されているように見えるが，実はそう単純な話ではないということがわかるのである．ベーシックロジックの特徴は，(i) 論理結合子はメタの構造として大事な部分を対象言語に固定したもの；(ii) 各論理体系の違いはシークエントの環境（構造）に課されている条件の違いとみなす，という二つに簡単にまとめることができる．

[*6] この点については，**BPL** を **B** の拡張として扱うことができないということが (Ardeshir and Vaezian 2012) で検討されている．しかし，(Ardeshir and Vaezian 2012) では，新しく論理体系 **U** を与え，その **U** を用いて，**BPL** と **B** を共通の基盤のもとで扱うことが可能であることについての議論が行われている．また，(Kurokawa 2018) でも，nested sequent の文脈で，refrection をより自然な形で解釈することができ，そのことによって，サンビンらが扱っているよりも，より多くの論理体系（cf. 厳密含意論理，部分直観主義論理，部分構造論理 etc.）を一様な仕方で扱うことが可能であるということが述べられている．

(i) の方向からは，連言と選言については，and に基づいて，かなり詳細にその性質についての分析を行うことができる．その一方で，含意については，その分析に限界があるように思われる．この点については，(Ardeshir and Vaezian 2012) での議論を参考にすることで，さらなる考察を行うことが可能であると考えられるが，その準備がないため，本論ではその点については深く立ち入ることはしない．

(ii) の方向からは，様相同伴では比較することができなかった線形論理などが新たに，直観主義論理や古典論理と比較可能になる．これは，必然性演算子とは異なる基盤として，「構造」を用いたことによる．ただし，現状のままの分析では線形論理は **BPL** 以外の **F** などとは比較することが（著者が知る限り）できない．

5.2　線形論理

5.2.1　線形論理

線形論理は J.-Y. ジラールによって与えられた論理体系 (Girard 1987) であり，古典論理のシークエント計算の推論規則たちが持つ対称性と直観主義論理の証明図の構成における特徴である構成性を兼ね備えた論理体系である．このとき，線形論理の論理式は以下のように与えられる．また，シークエントの定義は，定義 22 と同じでよく，Γ と Δ は論理式の有限多重集合とする．

$$\mathsf{Form}_{LL} \ni A ::= P \mid 1 \mid \top \mid 0 \mid \bot \mid A \otimes A \mid A \& A \mid A \mathcal{P} A \mid A \oplus A \mid A \multimap A \mid A \leadsto A \mid {\sim} A \mid !A \mid ?A$$

$$P \in \mathsf{Prop}$$

線形論理の結合子は，直観主義論理や古典論理のそれより数が多く，各結合子（定項）が二種類与えられる．そのため，それらは以下のように分類される．

	conjunction	disjunction	implication	true	false
multiplicative	$A \otimes A$	$A \mathcal{P} A$	$A \multimap A$	1	$\bot$
additive	$A \& A$	$A \oplus A$	$A \leadsto A$	$\top$	0

さらに，様相性を表現する演算子を持つ．それらは次のように解釈される[*7]．

[*7] !と?の意味を解釈する際に用いた欧文は (Troelstra and Schwichtenberg 2000, p.295) による．

- $!A$ は「A を 0 回か一回以上使うことができる “A can be used zero, one or more times”」と概ね考えてよい．
- $?A$ は「A を 0 回か一回以上手に入れることができる “A can be obtained zero, one or more times”」と概ね考えてよい．

線形論理の!と?演算子は，双対の関係にある．また，その推論規則が同じ形であることから，様相論理 **S4** の様相演算子とその振る舞いが同じであることが指摘されている．以上のことを踏まえて，線形論理の体系は表 5.2 のように与えられる．表 5.2 を見ればわかるように，線形論理では弱化や縮約の適用が認められていない．

5.3　直観主義論理と線形論理

各論理体系ごとに採用されている推論規則は異なっているため，そこで構成された証明図が表現する命題概念は，当然各論理体系ごとに異なっている．ここでは，直観主義論理と線形論理の間の関係についてみる．

5.3.1　ジラール埋め込み

各論理体系が持つ命題というのは，第 1 章でもみたように，そこで扱われる結合子がどのような性質を持つのかによって左右される．ここでは，直観主義論理が線形論理に埋め込み可能であることについてみる．

直観主義論理と線形論理との間の違いを生み出している要因の一つは，弱化と縮約を認めるか認めないかの違いである．というのも，縮約や弱化があれば，乗法的・加法的な結合子は，その同値性を以下のように示すことができるからである：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}(Id)}{A\&B \Rightarrow A}(L\&) \quad \dfrac{\dfrac{}{B \Rightarrow B}(Id)}{A\&B \Rightarrow B}(L\&)}{A\&B, A\&B \Rightarrow A \otimes B}(R\otimes)}{A\&B \Rightarrow A \otimes B}(LC) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}(Id)}{A, B \Rightarrow A}(LW) \quad \dfrac{\dfrac{}{B \Rightarrow B}(Id)}{A, B \Rightarrow B}(LW)}{A, B \Rightarrow A\&B}(R\&)}{A \otimes B \Rightarrow A\&B}(L\otimes)$$

表 5.2　**GLL** (Troelstra and Schwichtenberg 2000)

(Axioms)

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\ (Ax)$$

(Logical Constants)

$$\frac{}{0, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L0) \quad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \top}\ (R\top) \quad \frac{}{\bot \Rightarrow}\ (L\bot) \quad \frac{}{\Rightarrow 1}\ (R1)$$

(Logical Rules)　(i) Logical constants

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}\ (R\bot)$$

(ii) Negation

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, {\sim}A \Rightarrow \Delta}\ (L{\sim}) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, {\sim}A}\ (R{\sim})$$

(iii) Cut

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut)$$

(iv) Multiplicative (context-free)

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\otimes) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \otimes B}\ (R\otimes) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A\mathcal{P}B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (L\mathcal{P}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\mathcal{P}B}\ (R\mathcal{P})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \multimap B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (L\multimap) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \multimap B}\ (R\multimap)$$

(v) Additive (contextual)

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&_1) \quad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\&B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\&_2) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\&B}\ (R\&)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\oplus) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B}\ (R\oplus_1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B}\ (R\oplus_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightsquigarrow B \Rightarrow \Delta}\ (L\rightsquigarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightsquigarrow B, \Delta,}\ (R\rightsquigarrow_1) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightsquigarrow B, \Delta}\ (R\rightsquigarrow_2)$$

(vi) Exponentials

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L!) \quad \frac{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, A}{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A}\ (R!) \quad \frac{A, !\Gamma \Rightarrow ?\Delta}{?A, !\Gamma \Rightarrow ?\Delta}\ (L?) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ (R?)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LW!) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ (RW?) \quad \frac{!A, !A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LC!) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ (RC?)$$

$\Gamma \equiv A_1, \ldots, A_n$ なら，そのとき $!\Gamma \equiv !A_1, \ldots, !A_n$（?の場合も同様である）.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{(RW)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow B$}
\RightLabel{(RW)}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$(R\mathcal{P})$}
\BinaryInfC{$A, B \Rightarrow A\mathcal{P}B$}
\RightLabel{$(L\otimes)$}
\UnaryInfC{$A \otimes B \Rightarrow A\mathcal{P}B$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(R\otimes)$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A \otimes B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Id)}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow B$}
\RightLabel{$(R\otimes)$}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow A \otimes B$}
\RightLabel{$(L\mathcal{P})$}
\BinaryInfC{$A\mathcal{P}B \Rightarrow A \otimes B, A \otimes B$}
\RightLabel{(RC)}
\UnaryInfC{$A\mathcal{P}B \Rightarrow A \otimes B$}
\end{prooftree}
$$

そのため，結合子が多い論理体系では，概念の統合が行われていないということであり，結合子を多く持つ線形論理は直観主義論理よりも繊細な概念分析を行うことができると考えられるのである．

直観主義論理が線形論理に埋め込み可能であるという結果は，ジラールによってその考察が行われた (Girard 1987)．この埋め込みのことをここでは，**ジラール埋め込み**（Girard embedding）と呼ぶ．その際に用いられた翻訳は以下：

定義 53 (ジラール翻訳 $(\cdot)^*$)**.**

$$
\begin{array}{lcl}
(P)^* & := & P \\
(\bot)^* & := & 0 \\
(A \wedge B)^* & := & A^* \& B^* \\
(A \vee B)^* & := & !A^* \oplus !B^* \\
(A \supset B)^* & := & !A^* \multimap B^*
\end{array}
$$

この翻訳の下で，以下のような埋め込みの結果が得られた．

命題 33 (ジラール埋め込み，(Troelstra 1992, Theorem 5.11))**.**

$\mathbf{Int} \vdash \Gamma \Rightarrow A$ であることと，$\mathbf{LL} \vdash !\Gamma^* \Rightarrow A^*$ であることは同値である．

この結果からわかるのは，上記の翻訳を用いれば直観主義論理を弱い論理であるところの線形論理を用いて十分に解釈できるということである[*8]．このとき，注目すべき点は二つ

[*8] ただし，様相同伴関係についての際にもそうであったように，翻訳は一つであるとは限らない．翻訳を変えて埋め込みを行った結果が，それぞれどのような関係にあるのかについては，考察すべき重要な問題ではあるがここでは措く．また，解釈という用語の使い方にも注意が必要である．本論では，「直観主義論理を線形論理を用いて解釈する」と述べているが，解釈というときには，解釈する側の演算子，ここでは，線形論理の演算子がより具体的にどのような演算子であるかが明らかでなければならない．しかし，線形論理の演算子をどのようなもの考えるかは，実は，そう明らかではない．そのため，解釈という用語を用いるのが適切であるか否かに関しては，慎重な議論を要するが，のちに見るように，ここではひとまず，直観主義論理の演算子を線形論理の演算子たちを組み合わせて表現できるということを概ね指すと考えて議論を進める．線形論理の演算子がより具体的に直観主義論理の演算子を解釈しうるのかについては，今後引き続き検討が必要とされる．

ある．一つ目は，原子式の翻訳の仕方についてである．ここでは，直観主義論理の原子式は，線形論理の原子式へとそのまま埋め込まれる．これは，様相論理 **S4** への埋め込みの場合とは異なり，直観主義論理と線形論理では，原子式はそのままで構わないということを表している（ただし，あとで見るようにシークエントレベルでの翻訳を考えた際に前件にのみ!を付す必要がある．これは，論理式レベルの翻訳とシークエントレベルでの翻訳では異なる解釈が必要であることを表している）．また，ここでは，連言と選言については，線形論理の加法的結合子に翻訳されていることから，ここでは直観主義論理の連言，選言結合子は，線形論理の乗法的な結合子と見るのではなく，加法的な結合子と考えれば十分であるとみなされているということがわかる．

では，このジラールによって与えられた翻訳以外に直観主義論理を線形論理へと埋め込む翻訳は考えられないだろうか．以下ではその点について，検討してみよう．

5.3.2　直観主義論理の線形論理への埋め込み

ここでは，先のジラール翻訳の代わりに，別の翻訳を定義し，直観主義論理が古典線形論理に埋め込み可能であるということについてみる．

ここで与える翻訳は以下のようになる．この翻訳では，左右を分けた形でその翻訳を行う[*9]：

定義 54 (l-r 翻訳)**.**

$$
\begin{array}{lcllcl}
(P)^l & := & P & (P)^r & := & P \\
(\bot)^l & := & \bot & (\bot)^r & := & \bot \\
(A\&B)^l & := & !A^l \otimes !B^l & (A \wedge B)^r & := & ?A^r \otimes ?B^r \\
(A \vee B)^l & := & !A^l \mathcal{P} !B^l & (A \vee B)^r & := & ?A^r \mathcal{P} ?B^r \\
(A \supset B)^l & := & ?A^r \multimap !B^l & (A \supset B)^r & := & !A^l \multimap ?B^r
\end{array}
$$

この翻訳の下で，次の対応関係が成り立つ．

[*9] (Liang and Miller 2009) では，直観主義論理を一様な仕方で扱うことができる直観主義論理の体系を与える際に，直観主義論理を線形論理に一旦埋め込むという仕方で議論が進む．そこでは，直観主義論理の各形式体系の間の関係について議論を行うために，線形論理が用いられる．このとき，直観主義論理を線形論理に埋め込みをする際に，直観主義論理の論理式がシークエントの前件・後件のどちらに出現しているかに応じて，用いられる翻訳が異なる．ただし，その翻訳は本論で用いるものとは形が異なる．本論で用いる翻訳はそのシークエントの「,」を乗法的な解釈するのが自然であると考えたときには，ジラールのものより自然な翻訳であると考えられる．しかし，この点についてのより具体的な議論は，今後の課題として措く．

定理 10.

$$\mathbf{G3I} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ ならば，} \mathbf{GLL} \vdash !\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta^r.$$

Proof. $\mathbf{G3I} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図の高さについての帰納法で示す．

$(n = 0)$

(Id) このとき，**G3I** では次のような形をしている（$\Gamma \equiv P, \Gamma'$，$\Delta \equiv P, \Delta'$）：

$$\dfrac{}{P, \Gamma' \Rightarrow \Delta', P}\ (Id)$$

GLL の対応する証明図は以下（$!\Gamma^l \equiv !P, !\Gamma'^l$，$?\Delta^r \equiv ?\Delta'^r, ?P$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \Rightarrow P}\ (Ax)}{!P \Rightarrow P}\ (L!)}{!P \Rightarrow ?P}\ (R?)}{!P, !\Gamma'^l \Rightarrow ?P}\ (LW!)}{!P, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?P}\ (RW?).$$

二重線は，$(LW!)$ と $(RW?)$ をそれぞれ必要な回数適用することを表す．

$(L\bot)$ **G3I** においては次のようになる（$\Gamma \equiv \bot, \Gamma'$）：

$$\dfrac{}{\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\ (L\bot).$$

GLL での対応する証明図は以下（$!\Gamma^l \equiv !\bot, !\Gamma'^l$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \Rightarrow}\ (L\bot)}{!\bot \Rightarrow}\ (L!)}{!\bot, !\Gamma'^l \Rightarrow}\ (LW!)}{!\bot, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r}\ (RW?).$$

二重線は，$(LW!)$ と $(RW?)$ をそれぞれ必要な回数適用することを表す．

$(n > 0)$ $\mathbf{G3I} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ で最後に適用された推論規則で場合分けを行う．

$(L\&)$ **G3I** での証明図は次のような形をしている（$\Gamma \equiv A\&B, \Gamma'$）：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{A\&B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\ (L\&).$$

まず，帰納法の仮定を適用し，**GLL** で以下のような証明図を手にできる（$!\Gamma^l \equiv !(!A^l \otimes !B^l), !\Gamma'^l$）：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ !A^l, !B^l, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r\end{matrix}}{!A^l \otimes !B^l, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r}\,(L\otimes)}{!(!A^l \otimes !B^l), !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r}\,(L!).$$

$(R\&)$ **G3I** の証明図は次のような形をしている（$\Delta \equiv \Delta', A\&B$）：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', B\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', A\&B}\,(R\&).$$

まず，この前提に帰納法の仮定を適用し，**GLL** での対応する次のような証明図を手にできる（$?\Delta^r \equiv ?\Delta'^r, ?(?A^r \otimes ?B^r)$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ !\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?A^r\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ !\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?B^r\end{matrix}}{!\Gamma^l, !\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?\Delta'^r, ?A^r \otimes ?B^r}\,(R\otimes)}{!\Gamma^l, !\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?\Delta'^r, ?(?A^r \otimes ?B^r)}\,(R?)}{!\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?\Delta'^r, ?(?A^r \otimes ?B^r)}\,(LC!)}{!\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?(?A^r \otimes ?B^r)}\,(RC?).$$

二重線は，$(LC!)$ と $(RC?)$ をそれぞれ必要な回数適用することを表す．

$(L\vee)$ **G3I** では次のような形をしている（$\Gamma \equiv A \vee B, \Gamma'$）：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A, \Gamma' \Rightarrow \Delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ B, \Gamma' \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{A \vee B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(L\vee)$$

まず帰納法の仮定を適用し，**GLL** で以下のような証明図を手にできる（$!\Gamma^l \equiv !(!A^l \mathcal{P} !B^l), !\Gamma'^l$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots \qquad\qquad \vdots}{!A^l, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r \quad !B^l, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r}}{!A^l \mathcal{P} !B^l, !\Gamma'^l, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r, ?\Delta^r}\ (L\mathcal{P})}{!(!A^l \mathcal{P} !B^l), !\Gamma'^l, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r, ?\Delta^r}\ (L!)}{!(!A^l \mathcal{P} !B^l), !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r, \Delta^r}\ (LC!)}{!(!A^l \mathcal{P} !B^l), !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r}\ (RC?) \ .$$

二重線は，$(LC!)$ と $(RC?)$ をそれぞれ必要な回数適用することを表す．

$(R\vee)$ **G3I** の証明図は次のような形をしている（$\Delta \equiv \Delta', A \vee B$）：

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow \Delta', A, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', A \vee B}\ (R\vee) .$$

まず，帰納法の仮定を適用し，**GLL** で以下の証明図を手にできる（$?\Delta^r \equiv ?\Delta'^r, ?(?A^r \mathcal{P} ?B^r)$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{!\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?A^r, ?B^r}}{!\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?A^r \mathcal{P} ?B^r}\ (R\mathcal{P})}{!\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?(?A^r \mathcal{P} ?B^r)}\ (R?) .$$

$(L\supset)$ このとき，**G3I** では次のような形をしている（$\Gamma \equiv A \supset B, \Gamma'$）：

$$\dfrac{\dfrac{\vdots \qquad\qquad \vdots}{A \supset B, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}}{A \supset B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\ (L\supset) .$$

帰納法の仮定を適用し，**GLL** で以下のような証明図を手にできる（$!\Gamma^l \equiv !(?A^r \multimap !B^l)$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots \qquad\qquad \vdots}{!(?A^r \multimap !B^l), !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r, ?A^r \quad !B^l, !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r}}{!(?A^r \multimap !B^l), !\Gamma'^l, !\Gamma'^l, ?A^r \multimap !B^l \Rightarrow ?\Delta^r, ?\Delta^r}\ (L\multimap)}{!(?A^r \multimap !B^l), !\Gamma'^l, !\Gamma'^l, !(?A^r \multimap !B^l) \Rightarrow ?\Delta^r, ?\Delta^r}\ (L!)}{!(?A^r \multimap !B^l), !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r, ?\Delta^r}\ (LC!)}{!(?A^r \multimap !B^l), !\Gamma'^l \Rightarrow ?\Delta^r}\ (RC?) \ .$$

二重線は，$(LC!)$ と $(RC?)$ をそれぞれ必要な回数適用することを表す．

$(R\supset)$ **G3I** では次のような形をしている（$\Delta \equiv \Delta', A\supset B$）：

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, A \Rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', A\supset B}\ (R\supset).$$

帰納法の仮定を適用し，**GLL** で次のような証明図を手にできる（$?\Delta^r \equiv ?\Delta'^r, ?(!A^l \multimap ?B^r)$）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ !\Gamma^l, !A^l \Rightarrow ?B^r\end{matrix}}{!\Gamma^l \Rightarrow !A^l \multimap ?B^r}\ (R\multimap)}{!\Gamma^l \Rightarrow ?(!A^l \multimap ?B^r)}\ (R?)}{\overline{!\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta'^r, ?(!A^l \multimap ?B^r)}}\ (RW?).$$

二重線は，$(RW?)$ を必要な回数適用することを表している．

□

この補題の証明から次のことがわかる：

- **GLL** 側では，$(RW?)$ を使うのは (Id) と $(L\bot)$ と $(R\supset)$ の場合のみ．
- 線形論理の翻訳先の結合子は，乗法的なものを用いても良い．ただし，!と?についての縮約の規則が必要となる．

一点目から，直観主義論理のシークエントが持つべき特徴を再考しようとした際，シークエントのどの部分が本当に後件一つでなければならないのかということがわかる．一般的に言われる **LJ** の一番の特徴はシークエントの後件の論理式の出現をたかだか一つに制限することである．ここで用いた後件複数の **G3I** の体系は **LJ** の制限を可能な限り緩め，拡張した体系である．この体系を用いて，弱化や縮約に対してもより強い制限を課す，線形論理への埋め込みを考え，線形論理のどこに弱化が適用されたのかを考えることによって **LJ** のシークエントのどこが本当に後件一つでなければならないのかを明らかにすることができたと考えられる．

続く二点目についてであるが，この翻訳を用いても線形論理への埋め込みが可能であるということから，ベースとなる各結合子は，乗法的なもので十分ということがわかる．証明図を見ると，線形論理側では，乗法的な結合子は，!と?の弱化や縮約と協力することに

よって，加法的な形で与えられている直観主義論理の結合子を解釈する証明図を与えることが可能となっていることがわかる．結合子が持つ性質を明らかにしようとする際には，よりプリミティブな性質を提示できる方が好ましいと考えられるので，解釈に用いる線形論理側での結合子は乗法的な性質を持つ形でその翻訳を与えておく方がここでの趣旨に則した翻訳であると考えられる．

5.3.3　左右で異なる翻訳

本論での翻訳がジラール翻訳と異なるのは次の点である．

- 翻訳に?を明示的に用いたこと．
- 含意とともに，連言・選言も乗法的な結合子を用いて翻訳したこと．

ジラール翻訳では，直観主義論理の形式体系として用いられていたシークエント計算におけるシークエントの後件は一つであったため，シークエントの前件の環境の条件を復元するために，線形論理側で前件に!を付した．しかし，ここでは後件も複数であることを認めた（つまり，シークエントの後件においても，その環境についての条件について考察する必要が出てきたということ）ので，線形論理側のシークエントの後件でも前件で用いた!と同じ働きをするものが必要とされたのである．それこそが，?である．後件にも!が付された論理式は出現するが，前件で期待されている!の働き（弱化や縮約が認められるような性質）は?が付された論理式が行う．そのため，シークエントの後件では，明示的に?が必要になるのである．直観主義論理と線形論理とでは，シークエントの環境の間に違いがあるため，結果として，左右で異なる翻訳が必要とされたのである．

このとき，論理定項 $\perp$ を含め，すべての論理式を乗法的なものを用いて解釈を与えたのは，本章の冒頭で見たベーシックロジックで考えられている，プリミティブなシークエントの環境が乗法的なものとして解釈されていたことに由来する．サンビンらの議論では，メタレベルでの概念を反映させることで，結合子の正当化が行われていたのであるが，その際ベースとなるシークエント（メタレベル）の環境は乗法的なものを中心に与えられていた．そのため，結合子を解釈するにあたり，乗法的なものを用いる方が加法的なものを用いるより自然であると考えることができるのである．

定理 10 の逆方向については以下のような予想が成り立つ：

予想 1.

$$\mathbf{GLL} \vdash !\Gamma^l \Rightarrow ?\Delta^r \text{ ならば，} \mathbf{G3I} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

このとき，シークエントの後件に含意の翻訳式が出現する場合は除いて，以下のような補題を用いて示すことができる：

補題 34. **GLL** の後件に含意式の翻訳が含まれないとする．このとき，Γ, Δ, Π, Σ は論理式の有限多重集合とし，Θ, Ξ は原子式の有限多重集合とする．

$$\mathbf{GLL} \vdash !\Gamma^l, \Pi^l, \Theta \Rightarrow \Xi, \Sigma^r, ?\Delta^r \text{ ならば，} \mathbf{G3I} \vdash \Gamma, \Pi, \Theta \Rightarrow \Xi, \Sigma, \Delta.$$

この証明は，証明図の高さについての帰納法を用いて示すことができる．$\Pi = \Theta = \Xi = \Sigma = \emptyset$ とすることで，後件に含意が含まれる場合は除いて，予想 1 を示すことができる．後件に含意が含まれる場合については，この補題を用いても示すことができない．そのため，シークエントの後件に含意が含まれる場合については，予想 1 に戻って，**G3I** 側の証明図の構成のされ方を手掛かりにすることでその成立を期待することができる．しかし，そのフォーマルな証明を与えることが可能であるか否かは明らかではないため，今後の課題とし措く．そのため，この翻訳が，直観主義論理の結合子の解釈として，適切なものであるかを十分に明らかにできているとは言い難いが，少なくとも，直観主義論理の命題は乗法的な結合子と!と?を用いて解釈しうるということについては明らかにすることができたのではないかと思われる．

第 6 章

論理体系を用いた命題概念の分析

本章では，様相同伴関係とベーシックロジックを用いた命題概念の分析のまとめを行う．また，様相と構造とが，それぞれ，命題が持つ有効性の範囲を持つという性質と，リソース性を持つという性質を表現しているということを明らかにすることを目指す．そこでまずはじめに，直観主義論理のクリプキモデルについて，埋め込み定理の観点からの考察を試みる．

6.1 ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理と直観主義論理のクリプキモデル

本節では，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理についての結果を手がかりに，直観主義論理のクリプキモデルが与えられた経緯についての考察を行う．

このとき検討しなければならないのは，

- なぜ，付値関数は単調性が必要とされるのか
- なぜ，直観主義論理の含意の充足条件は次のような定義なのか

$$\mathfrak{M}, w \models A \supset B \ \Leftrightarrow\ \forall v \in W(wRv \text{ かつ } \mathfrak{M}, v \models A \text{ ならば } \mathfrak{M}, v \models B)$$

の二点にまとめることが可能である．そのため，以下ではこの点について，埋め込み定理を用いて，いかにして整合的な説明を与えることができるのかについての考察を試みる．

このとき着目すべきは，**S4** 翻訳の働きについてである．**S4** 翻訳について再び思い出そう．

$$
\begin{array}{llllll}
P^{\Box} & := & \Box P & (A\&B)^{\Box} & := & A^{\Box}\&B^{\Box} \\
\bot^{\Box} & := & \bot & (A\vee B)^{\Box} & := & A^{\Box}\vee B^{\Box} \\
(A\supset B)^{\Box} & := & \Box(A^{\Box}\supset B^{\Box}) & & &
\end{array}
$$

この翻訳の下で，次のゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理

$$\mathbf{Int}\vdash A \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{S4}\vdash A^{\Box}$$

が成立したのであるが，この定理が示しているのは，この翻訳の下で，直観主義論理と **S4** における証明可能性が互いに保存されるということである．

また，**S4** と直観主義論理は，それぞれ対応するクリプキモデルに対して完全であることが知られている．このとき，埋め込み定理で見たように証明図の間に一定の対応関係が存在するため，両者のクリプキモデルがフレーム条件などを共有することは自然なように思われる．しかし，それはなぜだろうか．まず，**S4** についてであるが，**S4** のクリプキモデルが現にこのような定義で与えられるのは必然性演算子のクリプキモデルにおける解釈を前提にすればほぼ明らかである．**S4** の公理をよく見ると，4 と T の公理を持つので，**S4** の公理たちとモデルに課される条件がうまく対応していることはすぐにわかる．一方，直観主義論理に関しては，その定義についてはそれほど明らかではない．

では，当のクリプキの考えはどうだろうか．以下で，クリプキがどのように考えていたのかまず見ていくことにしよう．

6.1.1　クリプキと直観主義論理のクリプキモデル

ここでは，直観主義論理のクリプキモデルを与えたところの A. S. クリプキの考えを簡単に整理することから始める．クリプキがクリプキモデルについて述べている論文は 5 本ある：

“Semantical Analysis of Modal Logic (abstract)” (Kripke 1959a)
“Completeness Theorem in Modal Logic” (Kripke 1959b)
“Semantical Analysis of Modal Logic I” (Kripke 1963a)
“Semantical Considerations on Modal Logic” (Kripke 1963b)
“Semantical analysis of intuitionistic logic I” (Kripke 1965)

(Kripke 1959a) の中で，クリプキは，**S4** をはじめとする様相論理に加え，直観主義論理についても，完全性を示すことができる意味論を与えることが可能であると述べてい

る．このとき，すでに，直観主義論理の意味論は，**S4** の意味論を参考に与えることが可能であるということも指摘されている：

> **S4** に対する [モデルを作るための] 手法が，ハイティングの体系 [つまり，直観主義論理] に対する意味論的な道具立て（semantical apparatus）をも与えてくれる．その道具立ては実は，ベートのもの [ベートモデル] を簡素化した結果に他ならない．（Kripke 1959a, p.324）（[ ] 内は著者による）

続いて，(Kripke 1959b) と (Kripke 1963a)，そして (Kripke 1963b) において，様相論理のクリプキモデルについての考察を行っている．このとき，特に，(Kripke 1963b) の最後で，再び次のように述べている：

> 最後に，次のことを指摘しておこう．直観主義論理を **S4** へと埋め込む，普通に用いられる写像（usual mapping）[**S4** 翻訳のことを指す] を使うことによって，私たちは，直観主義述語計算に対するモデル理論をも手に入れることができる．（Kripke 1963b, p.206）（[ ] 内は著者による）

カッコ内に補足した通り，ここで言われている「usual mapping」は，**S4** 翻訳に他ならないと考えられる．このアイデアに基づいて，クリプキは，続く (Kripke 1965) で，明示的に直観主義論理のクリプキモデルを与えたのであるが，ここでもやはり：

> 我々が，(Kripke 1959a) で様相論理の意味論 [つまり，クリプキモデルのこと] が得られていることを告知し，さらに，(Kripke 1963a) と (Kripke 1963b) で，この意味論を詳しく展開したのだが，この意味論と合わせて，よく知られた，直観主義論理の様相論理 **S4** への埋め込み写像 [**S4** 翻訳のこと] を用いることで，以下に提示する直観主義論理の意味論の着想が得られたのである．（Kripke 1965, p.92）（[ ] 内は著者による）

以上からもクリプキ自身が直観主義論理のクリプキモデルを構想する上で，**S4** 埋め込みを基盤に据えていたことは全く明らかである．ただし，同時にクリプキ自身は次のように述べて，直観主義論理に対する自らのクリプキモデルを可能なかぎり **S4** に対するクリプキモデルから独立な仕方で提示しようとしている：

> しかしながら，私たちは，直観主義論理の意味論を **S4** のそれとは独立に展開することを望む（後略）．（Kripke 1965, p.92）

確かに，クリプキが主張するように，直観主義論理の意味論はある面ではそれ自身だけで全く独立に[*1]定義することが可能であるので，以上のように **S4** の意味論からの独立性をクリプキが主張するのはもっともである．しかし，上記においてクリプキが明言している通り，直観主義論理の意味論にとって **S4** 埋め込みは決定的な手掛かりを与えたので，クリプキが間接的に認めている範囲に話を止めず，より徹底的な仕方で，この依存関係を明確化することは重要である．そこで，以下ではそれについて見ていこう．

この作業に入る前に，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理の意味論的手法を用いた証明を見ておこう．その証明とは，直観主義論理に対するクリプキモデルの考えを前提にし，これを用いるような証明である．この証明を見ることで，直観主義論理クリプキモデルがどのように働くのかがよくわかる．

6.1.2　直観主義論理の埋め込み定理の意味論的な証明

$$\mathbf{Int} \vdash \Gamma \Rightarrow A \;\Leftrightarrow\; \mathbf{S4} \vdash \Gamma^{\Box} \Rightarrow A^{\Box}$$

を示す際，左辺から右辺に関しては，$\mathbf{Int} \vdash \Gamma \Rightarrow A$ の証明図の高さについての帰納法を用いて，いわゆる証明図の変形操作を行うことだけで，その証明を与えることができる．しかし，右辺から左辺に関しては，少し工夫を行う必要がある．そのため，この向きの証明は，クリプキモデルの議論を用いて与えることもある（cf. (小野 1994)）．ここでは，右辺から左辺の方向の証明が，証明論的ではない手法（意味論的手法）でどのような手順で示されるのかということについて確認をしておく[*2]．

まず，$\Gamma \Rightarrow A$ を $\bigwedge\Gamma \supset A$ として，論理式に翻訳する．ここでは，対偶を証明する．今，$\mathbf{Int} \nvdash \bigwedge\Gamma \supset A$ と仮定する．このとき，$(\bigwedge\Gamma \supset A)^{\Box} \equiv \Box(\bigwedge\Gamma^{\Box} \supset A^{\Box})$ となる．ところが，一般に任意の論理式 C について C が **S4** で証明可能であるとき，またそのときにのみ，$\Box C$ が証明可能になる．よって，$\bigwedge\Gamma^{\Box} \supset A^{\Box}$ が **S4** で証明可能でないことを示すには，$(\bigwedge\Gamma \supset A)^{\Box}$ が証明可能でないことを示せばよい．

このとき，先ほどの仮定と **LJpm** のクリプキモデルに関する完全性より，$\bigwedge\Gamma \supset A$ を偽にする直観主義論理のクリプキモデル $\langle W, R, V \rangle$ が存在する．R は今，反射的で推移的なので，$\langle W, R \rangle$ を **S4** フレームと考えることができる．**S4** フレームとしての $\langle W, R \rangle$ 上の

[*1] しかし，どのような意味で独立であるかは明らかではない．本論では，この点については措く．

[*2] クリプキモデルの完全性を経由した，いわゆる意味論的証明は (小野 1994) に詳しい．本論でもその議論を参考とした．

付値 $\models^*$ を

$$\mathfrak{M}, w \models^* P \Leftrightarrow w \in V(P)$$

と定める．このとき，任意の論理式 C 及び，任意の $w \in W$ に対して，

$$\mathfrak{M}, w \models^* C^{\Box} \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \models C$$

が成り立つことを示す．まず，C が命題変数 P の場合は $\models$ が直観主義論理の付値であることから，次のように同値変形を行うことができる．今，$\models$ は単調的なので，

$$\mathfrak{M}, w \models P \Leftrightarrow wRv \text{ なるすべての } v \text{ に対して，} \mathfrak{M}, v \models P$$

である．続いて，帰納法の仮定より，

$$wRv \text{ なるすべての } v \text{ に対して，} \mathfrak{M}, v \models^* P$$

となる．**S4** のクリプキモデルの定義より，

$$\mathfrak{M}, w \models^* \Box P.$$

このとき，**S4** 翻訳より，

$$\mathfrak{M}, w \models^* P^{\Box}$$

となる．$C \equiv D \& E \equiv D \vee E$ の場合はその議論は簡単であるが，$C \equiv D \supset E$ の場合には注意が必要である．そこで，$C \equiv D \supset E$ の場合を考える．このとき，帰納法の仮定を用いて，次のように示すことができる．まず，直観主義論理のクリプキモデルの定義より，

$$wRv \text{ なるすべての } v \text{ に対して，} \mathfrak{M}, v \models D \text{ ならば } \mathfrak{M}, v \models E \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \models D \supset E$$

となる．次に帰納法の仮定より，

$$wRv \text{ なるすべての } v \text{ に対して，} \mathfrak{M}, v \models^* D^{\Box} \text{ ならば } \mathfrak{M}, v \models^* E^{\Box} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \models D \supset E$$

となり，**S4** のクリプキモデルの定義より，

$$\mathfrak{M}, w \models^* \Box(D^{\Box} \supset E^{\Box}) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \models D \supset E$$

となり，**S4** 翻訳より，

$$\mathfrak{M}, w \models^* (D \supset E)^{\Box} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \models D \supset E$$

となる．結果として，

$$\mathfrak{M}, w \models^* C^{\Box} \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \models C$$

を示すことができる．ここで，w として u，C として $\bigwedge \Gamma \supset A$ を取れば，$\mathfrak{M}, u \not\models^* (\bigwedge \Gamma \supset A)^{\Box}$ が手にできる．よって，$(\bigwedge \Gamma \supset A)^{\Box}$ は **S4** で証明可能ではない．したがって，$\Box(\bigwedge \Gamma^{\Box} \supset A^{\Box})$ が **S4** で証明可能でないことを示すことができる．

このようにして，直観主義論理のクリプキモデルから，**S4** のクリプキモデルを構成することによってゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理の右辺から左辺の証明を与えることができる．直観主義論理の原子式の単調性が原子式 P を翻訳によって $\Box P$ へと翻訳することでカバーされていること，直観主義論理の含意を **S4** では $\Box$ と含意で翻訳していることが重要な点である．では，これらの点に着目し，**S4** 翻訳と直観主義論理クリプキモデルとの間の関係について，以下で改めて見てみよう．

6.1.3　ゲーデルの S4 翻訳から見る直観主義論理のクリプキモデル

今，我々が前提にしているのは，以下の二つの条件のみである．

- **S4** のクリプキモデルの定義とその完全性
- ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理

では以下で，以上の二つの条件から直観主義論理のクリプキモデルを導き出すことを試みてみよう．**S4** では，次のことが成り立つ．

命題 35.

$$\mathbf{S4} \vdash A^{\Box} \leftrightarrow \Box(A^{\Box})$$

この証明は，A の複雑度についての帰納法を用いてすぐに示せる．続いて，この命題と **S4** のクリプキモデルに対する完全性より

$$\text{任意の } \mathbf{S4} \text{ フレーム } \mathfrak{F} \text{ に対し，} \mathfrak{F} \models A^{\square} \leftrightarrow \square(A^{\square}).$$

である．つまり，任意の **S4** モデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ と $w \in W$ について

$$\mathfrak{M}, w \models A^{\square} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}, w \models \square(A^{\square}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \ \in W \ (wRu \text{ ならば } \mathfrak{M}, u \models A^{\square})$$

であり，ここでさらに **S4** フレームにおける到達可能性関係が推移的であることを考慮に入れると次のようになる．一旦，ある世界 w で真となった $A^{\square}$ は，w から到達可能なあらゆる u で $\mathfrak{M}, u \models A^{\square}$ であるということであり，このことが表しているのは，**S4** で $A^{\square}$ が単調であるということに他ならない．このとき加えて，**S4** のクリプキモデルに対する完全性より，次のことが成り立つ．

命題 36.

$$\mathbf{S4} \vdash A^{\square} \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } \mathbf{S4} \text{ フレーム } \mathfrak{F} \text{ に対し，} \mathfrak{F} \models A^{\square}.$$

そして，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理より，

$$\mathbf{Int} \vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S4} \vdash A^{\square}$$

であり，次のことが成り立つ：

$$\mathbf{Int} \vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } \mathbf{S4} \text{ フレーム } \mathfrak{F} \text{ に対し，} \mathfrak{F} \models A^{\square} \qquad \cdots\star$$

以上のことを踏まえ，ここで考えなければならないのは：

1. フレーム条件を定める．
2. 直観主義論理モデルとなる $\mathfrak{N} = \langle W, R, U\rangle$ の，付値となる U の条件を定める．
3. 直観主義論理モデルにおける充足条件 $\models$ を改めて定義する．

の三点である．1 点目については，**S4** 翻訳を参考に考える．直観主義論理からの翻訳と命題 35 から

$$\mathbf{Int} \vdash A \Leftrightarrow \ \mathbf{S4} \vdash \square A^{\square}$$

であり，このとき，任意の **S4** モデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ において，$V(\Box A^{\Box})$ は R について上方閉（つまり単調）となるので，直観主義論理モデル $\mathfrak{N} = \langle W, R, U\rangle$ についても，$U(A)$ が上方閉になるように R と U を与えるのが自然である．

すると，まず R は「上方」という概念が自然に定義できるような性質を持つことが要求される．つまり，R が少なくとも弱い意味での順序，所謂，擬順序（推移的で反射的）であることが要求されるということを表す．そこでさらに U について考えてみる．まず原子式について定め，次に複合式について議論する．では，原子式についてである．

V は，$\Box$ に対して，単調性を実現する．そこで，直観主義論理の付値 U に関しても，そのような単調性が実現されれば良い．**S4** の $\Box$ の性質，すなわち，いわゆる 4 公理（**S4**$\vdash \Box A \supset \Box\Box A$）によって生み出されている性質からして，

$$\text{任意の } v \in W \text{ に対して，} wRv \text{ かつ } w \in V(\Box P) \text{ ならば } v \in V(\Box P)$$

が成り立つ．そこで，このことから，U は P に関して単調でなければならないという条件が必要になる．つまり，

$$\text{任意の } v \in W \text{ に対して，} wRv \text{ かつ } w \in U(P) \text{ なら } v \in U(P)$$

と定めるということである．このとき，いつものように，原子式の場合は次のように定められていると考えて良く，

$$\mathfrak{N}, w \models P \;\Leftrightarrow\; w \in U(P)$$

と定義する．このようにして，付値関数 U が単調であると決まったが，複合式も **S4** 翻訳を考慮に入れて見直すと，それらの式の真理集合も単調になっている．つまり，到達可能性関係に関して，真理が保存される．したがって，直観主義論理の場合も $\models$ を定める上で，単調性が成立するように配慮しなければならない．

& と $\vee$ については，古典論理と同じ充足条件の定義を用いれば，単調性は帰結する．そのため問題は含意の場合である．では，含意の場合について考える．今，現在 $\not\models A$ かつ $\not\models B$（このとき，$\models A \supset B$）として，そこから到達可能などこかで，$\models A$ かつ $\not\models B$（このとき，$\not\models A \supset B$）となる場合を考える．このとき，各論理式の単調性だけから，含意式の単調性を保証することができない．そのため，

$$\mathfrak{N}, w \models A \supset B \quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{N}, w \models A \text{ ならば } \mathfrak{N}, w \models B$$

と定義してしまうと，含意式は単調性を満たさないということである．よって，$A \supset B$ を直観主義論理モデルにおいて単調にさせるには，孤立した可能世界についてのみ注目し，充足条件を定めてはならず，つまり，古典論理的に充足条件を定めてはならず，他の世界との関係において定めなければならないのである．では，具体的にはどうすれば良いだろうか．ここでは，**S4** における，$\Box(A^{\Box} \supset B^{\Box})$ の充足条件を参考にすることが有効である．**S4** では，**S4** のクリプキモデルの定義より，

$$\mathfrak{M}, w \models \Box(A^{\Box} \supset B^{\Box}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall v \in W(wRv \text{ ならば } \mathfrak{M}, v \models A^{\Box} \supset B^{\Box})$$

となっているので，これをこのまま採用してみる．ではその議論を具体的に見てみよう．実際に **S4** 翻訳から，$\mathfrak{M}, w \models \Box(A^{\Box} \supset B^{\Box})$ を参考にし，その定義を与えることを試みる．今，

$$\mathfrak{M}, w \models \Box(A^{\Box} \supset B^{\Box})$$

は，様相論理の充足条件より，

$$\forall v \in W(wRv \text{ ならば } \mathfrak{M}, v \models A^{\Box} \supset B^{\Box})$$

と同値であり，さらにまた様相論理の充足条件より，

$$\forall v \in W(wRv \text{ ならば } (\mathfrak{M}, v \models A^{\Box} \text{ ならば } \mathfrak{M}, v \models B^{\Box}))$$

と同値になることはすぐにわかる．そこで，この最後の変形の結果を参考に，直観主義論理における $A \supset B$ の充足条件を次のように，

$$\mathfrak{N}, w \models A \supset B \ \Leftrightarrow \ \forall v \in W(wRv \text{ かつ } \mathfrak{N}, v \models A \text{ ならば } \mathfrak{N}, v \models B)$$

と定めれば良い．

　このように定義することで，直観主義論理の含意の論理式も単調性を満たすようになる．これらのことから，直観主義論理の $\models$ はよく知られた，以下のような定義でよいことがわかる．

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{N}, w \models P & \Leftrightarrow & w \in U(P) \;\; (\Leftrightarrow w \in V(\Box P)) \\
\mathfrak{N}, w \models \bot & & \text{成り立たない} \\
\mathfrak{N}, w \models A \& B & \Leftrightarrow & \mathfrak{N}, w \models A \text{ かつ } \mathfrak{N}, w \models B \\
\mathfrak{N}, w \models A \vee B & \Leftrightarrow & \mathfrak{N}, w \models A \text{ または } \mathfrak{N}, w \models B \\
\mathfrak{N}, w \models A \supset B & \Leftrightarrow & \forall v \in W (wRv \text{ かつ } \mathfrak{N}, v \models A \text{ ならば } \mathfrak{N}, v \models B)
\end{array}$$

直観主義論理の $\models$ は複合式に関しても単調な形で定めるのが自然であり，この定義は，**S4** 翻訳とも整合的である．

6.2　様相同伴とベーシックロジックを用いた分析

本節では，様相同伴での論理体系の分析とベーシックロジックを用いた分析との間の関係を明らかにすることを目指す．その点についての考察を行うために，様相同伴とベーシックロジックを用いた分析についてのまとめをそれぞれに与え，ジラール翻訳と **S4** 翻訳との間の関係についての考察を行う．

6.2.1　様相同伴関係による分析

様相同伴関係とは，異なる様々な非様相論理の体系が，それぞれ対応する様相論理の体系に埋め込み可能であるということについて述べたものであった．このとき注目すべきは，その各々の埋め込みに用いられる翻訳として，全て共通のものが用いられているということである．その翻訳を思い出してみよう．ここでは，古典論理から **F** までのより広い範囲の様相同伴関係についての考察を行うため，その翻訳として，以下のものを見る：

$$\begin{array}{rcl}
P^{\boxplus} & := & P \& \Box P, \\
\bot^{\boxplus} & := & \bot, \\
(A \& B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus} \& B^{\boxplus}, \\
(A \vee B)^{\boxplus} & := & A^{\boxplus} \vee B^{\boxplus}, \\
(A \supset B)^{\boxplus} & := & \Box (A^{\boxplus} \supset B^{\boxplus}).
\end{array}$$

原子式と含意の翻訳の際に，$\Box$ 演算子が用いられていることに着目する．これは，非様相論理の論理式が，様相概念によって表現されうるような性質を有していること表していると考えられる．また，全ての埋め込みにおいて共通の翻訳が用いられているということから，非様相論理の各論理体系が扱っている命題概念の違いは，対応する様相論理の必然性演算子の違いに帰着させることが可能であるということがわかる．つまり，必然性演算子を非様相論理を解釈する際に用いる共通の基盤と見做すことができるということである．

これは，古典論理よりも弱い論理であるところの直観主義論理などを必然性演算子を用いて，強い論理である古典論理へと埋めこむことで，それらがどのような論理体系であるのかを比較検討する試みであると言える．このことによって，各々の体系が持つ含意を中心とした結合子によって特徴付けられていた各論理体系の命題概念を，古典論理の含意と必然性演算子を用いて比較可能になったということである．これはまた，必然性演算子を用いて，命題概念が持つ性質を説明することが可能となったということも表している．

このように必然性演算子を用いて，非様相論理が扱う命題の多様性を統一的な仕方で扱うことができるのであるが，様相同伴関係を用いて扱うことができるのは，基本的には含意に着目した論理体系の分類についてのみであり，構造規則の有無が関係する分類，連言や選言に関わることについては，現状では詳細に扱うことができない．そのため，様相同伴関係を用いた議論では，構造規則を明示的に操作することによって与えられる線形論理については，その比較を行うことが十分にはできないと考えられるのである．しかし，構造という観点からの分類は，ベーシックロジックを用いることによって行うことが可能である．そのことについて，以下で再度見ていくことにしよう．

6.2.2　ベーシックロジックによる分析

ベーシックロジックは，第 5 章において見たように，そのシークエントの環境に付される条件を調整することで，様々な論理を形式化することができるのであった：

B	**BL**	**BR**	**BLR**
BC	**BLC**	**BRC**	**BLRC**
BW	**BLW**	**BRW**	**BLRW**
BCW	**BLCW**	**BRCW**	**BLRCW**

様相同伴関係に関連する論理体系は，古典論理 **BLRCW**，直観主義論理 **BLCW** の二つだけである．このとき，古典論理と直観主義論理の違いは，右辺の可視性を崩しても良いかという点の違いだけである．この違いはシークエントの後件の複数性を許すか許さないかによる違いである．ベーシックロジックを用いて論理体系を分析しようとするときに基準として用いられている概念は，シークエントの環境，つまり，構造である．シークエントの環境を調整することで，様々な論理体系を扱おうとしているのである．これは，構造について何も条件を課されていない論理体系を考え，そこに構造に関する条件を加えていくことで，様々な論理体系を一様な仕方で扱おうとする試みであり，この構造という観点からすると，線形論理は **BLR** として与えることができ，直観主義論理や古典論理と比較

することが可能となる．直観主義論理や古典論理では，弱化と縮約を用いることが許されている（好きな命題を導入したり，まとめたりすることができる）ため，これらの体系の命題は，推論の中で何度も用いることができるのである．一方，線形論理が扱う命題は，一度消費されてしまえば消えてしまうような命題である．構造に対する条件を変えることは，シークエントの環境を変えることになる．それが結果として，命題が持つ性質を変えることになるのである．

ベーシックロジックを用いた論理体系の分析は，様相同伴を用いた場合の分析とは異なり，諸論理体系を構造という観点から分類しようとする試みである．このように述べると，様相同伴とベーシックロジックを用いた命題についての分析との間には，大きな隔たりがあるように思われるかもしれないが，実際にはそうではなく，これら二つの見方は，非様相論理を分析する際の視点の違いにすぎないと考えることができる．

6.2.3　二つの分析

本論では，様相同伴とベーシックロジックという二つの尺度を持って形式体系が持つ性質の分析を行ってきた．様相同伴の議論の際には，埋め込み先の必然性演算子の振る舞いを見ることで，もとの非様相論理の命題が持つ性質を考察できる．さらに，様々ある非様相論理の体系をすべて，一様な仕方で，対応する様相論理に埋め込みができたことにより，共通の基盤の下で，非様相論理の体系を比較検討することができるようになったと考えられる．そのことによって，命題概念に多様性があること，またその多様性の中にも一定の構造があることを明らかにすることができた．つまり，各論理体系の特徴を埋め込んだ先の様相論理の違いとして特徴づけることが可能であるということが明らかになったということである．様相同伴関係を用いた，各論理体系の間の比較は，ベーシックロジックの考え方を用いて，その特徴づけを行う場合よりも，広範囲の論理体系について考察できるという利点がある．

一方，ベーシックロジックでは，論理体系 $\mathbf{B}$ を基本とし，シークエントの環境に対する条件を変化させることで，様々な論理体系を手にすることができた．ベーシックロジックでは，結合子をシークエントの構造を反映したものと考え，論理結合子を固定し，その違いを構造の反映のされ方の違いに帰着したのである．そのため，論理体系を分類する際に用いた基準は，構造についてのものである．ベーシックロジックを用いた分析では，様相同伴関係を用いたときには考察することのできなかった，連言や選言に関わる性質を変

化させることによって生じてくる論理体系を分析することができるという利点がある．

このようにそれぞれの視点から述べると，その二つの分析の方向性は全く相容れないように思われるがそのように考えるの早計である．次の点について考えてみよう．

様相概念は，到達可能な世界の間の関係についての制約が変化することで各論理体系で扱うことのできる命題が持つ性質を変化させることができるのである（ラベル付きシークエント計算の二項関係について考察した際に見たように，ラベル付きシークエント計算を用いたときの各体系の違いは，二項関係の違いに集約され，到達可能な世界の間の関係についての制約が変わると，命題が持つ性質が変わるのであった）．一方，構造は，シークエントの環境を変えることによって，命題が持つ性質を変化させることができるのである．この二つの見方は，一方は意味論の観点からの考察であり，もう一方は，証明論の観点からの考察であるという点で，未だ隔たりはあるが，直観主義論理を **S4** にも線形論理にも埋め込むことができるという事実から，全く無関係ではないこと，ある一定の共通の概念を有していると考えるのはそうおかしな見方ではないように思われる．

また，線形論理と **S4** では，それぞれ，!と $\Box$ が直観主義論理の命題が持つ性質をカバーしていると考えられるのであるが，ジラール翻訳と **S4** 翻訳の違いは，その尺度が異なっているだけで，どちらも，直観主義論理の命題が持つ性質をカバーしていると考えることができるのである．このように考えることは，線形論理の!の推論規則と **S4** の $\Box$ の推論規則が全く同じ形で与えられていることからも，自然な見方であるということがわかる．

このことから，様相同伴で見たような必然性演算子を用いた論理体系の分析と，構造に着目したベーシックロジックの分析とが，全く無関係ではないであろうという予想が立つ．では，これらの点を踏まえ，以下で，これら二つの分析の中心概念とされる，様相と構造が命題概念が持つどのような性質を表現することができるのかということについて見ていこう．

6.3　様相と構造

では，ここで改めて，命題とは何かについて考えてみる．クリプキモデル（可能世界意味論）においては，命題は，各々の可能世界ごとに（それと相対的に）成立・不成立が定まるもの，可能世界に相対的なものとして捉えられていた．このように，命題の成立・不成立が何らかのもの（可能世界）に相対化されるという考え自体は，それほど意外ではない．例えば，通常の自然言語に登場する「…は猫である」という表現（普通の論理学の

用語で言えば「述語」，あるいは，一つの自由変項を含む論理式）を考えてみよう．この表記は主語に例えば，「タマ」を補えば，その結果得られる文「タマは猫である」が（タマが実際に猫であれば）表現する命題は成立する．さらにまた，ポチを補えば，その結果得られる文が表現する命題は（ポチが犬であれば），不成立である．これは普通以下のように説明される．「…は猫である」のような述語が表現しているのはいわゆる，命題関数（対象たちから命題への関数）であり，命題関数とはまさに，タマやポチなど，個々の対象に対して述語づけられる（適用される）ことによって，その結果生じる命題の成立・不成立が初めて，定まるようなものである．言い換えると，文字通り，⟨ 対象の特徴づけ（characterization of objects）⟩ の働きを補うものである．

以上と類比的に考えると，命題についても次のように考えることが可能であることがわかる．つまり，例えば，目下「雨が降っている」といった文が表現する命題は，それ自体の成立・不成立を問いうるものではなく，ある一定の状況 w に対して適用されることで初めて，成立ないし，不成立が定まるのであり，この命題は当該の状況 w を適切に特徴付けているという点で，⟨ w について成立する ⟩ とみなすことができ，また，w において雨降りであるわけではないならば，この命題は，w を適切に特徴付けていないという点で，w について不成立であると，みなすことができるのに他ならない．

以上のようにして，一般に命題は各々の可能的状況についての特徴付けを行うもの，簡単に言えば，⟨ 可能的状況についての述語 ⟩ として，捉えることができる．そしてこれに応じて，各々の状況の側も（１）当該の命題を成立させる状況（つまり，この命題によって適切に特徴づけられる状況）と，（２）そうでない状況，に分けて考えることができる．そこで今，次のような言い方を導入する．

命題 A が与えられているとき，この A によって適切に特徴付けられる，すべての状況たちの集合（つまり，A を成立させるようなすべての状況たちの集まり）を ⟨A の有効性の範囲（the extent of potency of A）⟩ と呼ぶ（通常，記号表記で，書けば $\{w(\in W)|\mathfrak{M}, w \models A\}$ であり，さらに，付値関数 V が定義されていれば，$V(A)$ に当たる）．

しかし，ここで重要なのは，ここまで簡単に「（可能的）状況」と呼んできたものをより詳しくは，どのようなものとして考えるか，また，これと相関して当の状況を命題が「特徴付ける」ということの内実をどう考えるかということである．すでに見た通り，様相論理の体系には，**K** に始まり，**S4** や **S5** といった極めて，多様なものがある．その相違は，一言で言えば，状況（可能世界）の間の到達可能性関係 R として，どのような特性を持つものと考えるかのに対応している．このとき，R にいかなる条件も課さなければ，そのよ

うな論理体系は **K** に対応し，他方，反射性と推移性という条件を課せば，**S4** に，そこに，対称性という条件を加わえれば，**S5** に対応するのであった．

では，例えば，**S4** モデルで考えたとき，そこでの可能的状況とはどのようなものと考えられるだろうか．すでに見た通り，**S4** モデルでは，任意の $\Box A$ について，もしもある状況 w でそれが，一旦成立すると，w から到達可能ないかなる可能世界 v でも，$\Box A$ は成立し続ける．つまり，$V(\Box A)$ —このモデルにおける $\Box A$ の有効性の範囲—は擬順序 R について上方閉（upward closed）であるということである．ではそのようなことは何を意味しているのだろうか．

もちろん，この問いに対する答えは一つである必要はない．しかし，**S4** が直観主義論理の様相同伴である（**S4** 翻訳による前者の中への後者の埋め込み像が，後者とほぼ同型の部分言語となっている）という事情に力点を置くならば，ある程度まで答えは絞られてくる．つまり，任意の直観主義論理の論理式 A について，その **S4** 翻訳 $A^{\Box}$ を考えると，**S4** モデルにおける $A^{\Box}$ の $\langle$ 有効性の範囲 $V(A^{\Box})$ $\rangle$ がやはり，（このモデルの到達可能性関係について）上方閉であるからである．この点について考察するために，直観主義論理における「含意」の充足条件を考えてみよう．それは，以下のように与えられる：

$$[*] \quad \mathfrak{M}, w \models A \supset B \Leftrightarrow \forall u (\in W)(wRu \text{ ならば } (\mathfrak{M}, u \models A \text{ ならば } \mathfrak{M}, u \models B))$$

一般に w, u などの可能世界においては，可算個の（つまり有限個，または，可算無限個の）原子命題が成り立っていると考えられる．しかしここでは話を単純化して，w, u において成立する原子命題はたかだか有限個であるとしてみよう．ここでは，w において成立するそれらの有限個の命題を Γ で表す．ところで，R に関する単調性により，wRu であるいかなる u についても，u で成立する原子命題たちは，上記の Γ にさらに幾つかの（有限個の）原子命題たちを付け加えたものと考えてよい．これら新たにつけ加わった原子命題たちを Δ と書くことにする．

以上を踏まえると，先の $[*]$ は実質的には次のことを述べているということがわかる．

$$[*1] \quad \Gamma \vdash A \supset B \ \Leftrightarrow \forall \Delta (\Gamma, \Delta \vdash A \text{ ならば } \Gamma, \Delta \vdash B)$$

ただし，Γ は w で成立している原子命題の全て，$\Gamma \cup \Delta$ は u で成立している原子命題の全てを，それぞれ，表すこととする．

まず右辺から左辺に向けて読んでみる．

$[*2]$ 今，Γ が成り立っている w に加え，任意の Δ が加わった状況（つまり u）を考

えたとき，そこでは，A が導かれるなら，B も導かれるとする．するとそのとき，Γ が成り立っているときのみの状況 w において，$A \supset B$ が導かれる．

実は，[$*2$]（[$*1$] の右辺から左辺の方向）は，証明論的に証明可能である，今，Δ として，A 自身を取る．すると，$\Gamma, \Delta \vdash A$ ならば $\Gamma, \Delta \vdash B$ は，$\Gamma, A \vdash A$ ならば $\Gamma, A \vdash B$ と書き換わり，このときさらに，$\Gamma, A \vdash A$ は直観主義論理で証明可能であるため，$\Gamma, A \vdash B$ も証明可能であり，さらに，$\Gamma \vdash A \supset B$ も証明可能となる．今度は，[$*1$] の左辺から右辺，つまり，

> [$*3$]　Γ（が成立している w）で，$A \supset B$ が導かれるならば，いかなる Δ についても，Γ, Δ（が成立している u）を考えると，もしも，Γ, Δ から A が導かれるなら，そのとき，Γ, Δ から B もまた導かれる．

このとき，実はこれも証明可能である．$\Gamma \vdash A \supset B$ つまり，$\Gamma, A \vdash B$ と，$\Gamma, \Delta \vdash A$ とが成り立つとする．このとき，カット規則の適用により，結果として $\Gamma, \Delta \vdash B$ が導かれる[*3]．

そのため，結局，[$*1$] が証明可能であることがわかった．しかし，[$*1$] は [$*$] の，w を Γ に，u を Γ, Δ に，$\models$ を $\vdash$ にそれぞれ書き換えた結果であるので，両者を単純に同一視することはできない．とくに，[$*$] では，(i) $\forall u(wRu$ ならば $(\mathfrak{M}, u \models A$ ならば $\mathfrak{M}, u \models B))$ という表現が登場するのに対し，[$*1$][$*2$] では，(ii) $\forall \Delta(\Gamma, \Delta \vdash A$ ならば $\Gamma, \Delta \vdash B)$ が登場している[*4]．

また，このとき，一般には，あらゆる Δ の方が強い条件を表現している．なぜなら，Δ

[*3] 上述した通り，ここでは，たかだか有限個の原子命題が成立するのみであるような w, u に考察を限っている．これは一見大きな制限に思えるが，本論におけるように，さしあたり，命題論理だけを考察主題とし，述語論理の事は考慮に入れないのであれば，実質的には何の制限ともならないと考えて良い．なぜなら，任意の A, B について，もしも $A \supset B$ が，何らかのモデル $\mathfrak{M}$ の何らかの可能世界 v（可算個の原子命題が成立している世界）で成立するならば，つまり，$\mathfrak{M}, v \models A \supset B$ ならば，そのとき，あるモデル $\mathfrak{M}'$ と v' が存在して，$\mathfrak{M}', v' \models A \supset B$ となっており，しかも，v' では，有限個の原子命題しか成立していないといえるからである．実際，もとの $\mathfrak{M}$ 中の v 以降の部分（v によって生成される部分モデル）だけを取り出して，$\mathfrak{M}'$ とし，v 自身を v' としてとり，さらに，$v = v'$ 以降の各世界 s において成立するのは，もとの $\mathfrak{M}$ において s で成立していた原子命題たちのうち，A または B に登場するもののみであるとすれば良い．

[*4] 各 Δ に関して，Γ, Δ は，いわゆる consistent prime theory に対応している．

- Γ が理論（Theory）であるのは，$\Gamma \vdash A$ ならば，$A \in \Gamma$ であるとき．
- 理論 Γ が無矛盾である（consistent）であるのは，$\Gamma \nvdash \bot$ であるとき．
- 理論 Γ が prime であるのは，$A \vee B \in \Gamma$ ならば，$A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$ であるとき．

はあらゆる論理式上を動く変項であるが（従って，Δ として A 自身をとっても良い），u において成立する論理式はそのような一般性を必ずしも持たず，当のモデルの中で，wRu なるいかなる u を考えても，例えば A 自身はそこでは成立しないといったことが考えられるからである．しかし，そうした相違はあるにせよ，[$*$1] はほぼ忠実な [$*$] の証明論的な観点からの書き換えと見ることができる．なぜなら，いかなる Δ を取っても，適切なモデルを選べば，そこでの w（つまり，Γ を成立させている可能状況）から到達可能な適当な u が存在して，そこでは，Γ と Δ がちょうど成立するようにすることができるからである．

というわけで，[$*$] を理解する上で，[$*$1] を参考にすることは十分理にかなっているということがわかる．このとき，繰り返して注意しておくと，もちろん，一般的な意味論的な可能世界，可能世界間の到達可能性関係，そして，各可能世界における命題の成立，不成立，といった概念が単純にそれぞれに対応する証明論的（構文論的）概念に還元できる，あるいは，同一視できるとかいうことではない．例えば，二重否定律や排中律の反証の構築を証明論的手法で行うことはできない．しかし，そうした相違を踏まえた上で，[$*$] の趣旨を [$*$1] を手掛かりに理解することは何も問題ないし，非常に啓発的であると考えられる．このとき，まず第一に，各可能状況はそれぞれにおいて，一定の原子命題たち（いわば，推論活動（reasoning）を行っていく上で，出発点に据えることのできる最も基本的な情報に当たるもの）を，成立させている．言い換えれば，各可能状況は，私たちが，獲得している情報の集合（available な情報の集まり）をモデル化したものに他ならない．さらに，直観主義論理モデルにおいて，各命題 A の有効性の範囲 $V(A)$ が到達可能性関係 R について上方閉であることは，明らかに，この関係が情報の増大（私たちが次々に新しい情報を得ていくこと）をモデル化したものであることを示している．つまり，wRu である可能状況 w から，u へと私たちが何らかの仕方で遷移した場合，私たちが利用することのできる情報がまさに，増大しているということを表しているということである．

ただしここで，次の点に注意する必要がある．以上の通り，直観主義論理モデルにおいて，wRu ならば，u において，一般に，w よりも情報が増大していると考えてよいが，実は，そう言えるのは，w で成立している命題たちが全て，u でも成立し続けていることによってである．$V(A)$ が R について，上方閉であるとはまさに，このことを意味している．つまり，直観主義論理モデルの一層基礎的な特性として，一般に，命題 A が状況 w で成立すると，この w から，到達可能なあらゆる状況において A は成立し続けるということ，つまり，ここで問題となっている命題 A（が表現している情報）とは，状況が遷移

すると成立しなくなってしまったり，消失してしまったりするものではなく，そうした状況の遷移を通じて，成立し続ける（いわば，古びることのない，あるいは，繰り返し何度でも使用可能な）情報であるということを指摘できる．例えば，すでに触れたが，時間論理などで，典型的に取り扱われる命題とは，「（目下）雨が降っている」といったものである．これは，状況 w で成立しているからと言って，そこから遷移可能な（ここでは遷移可能ということが時間の経過として捉えられているという特徴も見られるが），そこから，遷移可能な何らかの状況 u においては，一般には成立しない．そのため，この命題は，「その場限りで通用する一時的な情報」とでも呼ぶべきものであり，直観主義論理における命題とは決定的に異なっている．

「（目下）雨が降っている」を “一時的な” ものとしてではなく，“持続的に利用可能なもの” に変化させた情報とは，例えば，「かくかくの状況で雨が降っている」といったものになる．このようにして直観主義論理が扱う命題は，ある一定の明確な特徴を持つことが理解される：

（１） 直観主義論理の命題は，あらゆる状況下で成立（真）か偽の一方に定まるというわけではなく，むしろ，未確定（不成立であるが偽だとまでは言えない．なぜなら，今後それが成立しうるという情報が得られる余地があるため）であることが当たり前にありうるような情報である．

（２）他方で，ある状況でその命題が成立すると，この状況から遷移可能ないかなる状況においても，その命題は成立し続ける．つまり，状況の遷移（私たちの行う情報確立活動の進展）において不変であるような情報であるということに他ならない．

では，今度は構造規則との関係で明らかになる命題の特性について考えてみよう．線形論理に登場する「!」という様相演算子は，大まかに言えば，この演算子を冠された命題については，一般にシークエントの左規則において，好きなように弱化規則と縮約規則とを適用して良いということを表している．シークエントの左規則に現れる論理式とは，ごく一般的に言えば，「仮定として用いることのできる式」にほかならないが，もう少し踏み込んで言うと，（当該シークエントによって表現された）推論を実行する上で，その資源（resource），素材（material），基礎部品（building block）となるものであると考えることができる．例えば，「あなたは入構許可証の発行を受けている（ので，入構して良い）」という許可言明を考えてみる．この場合，もしもあなたが実際に（許可されている当該の時間と場所において）入構したとすると，そのことの正当化をまさにこの命題が果たしてくれる．つまり，あなたはこの命題をこの入構を正当化してくれる証拠（evidence）とし

て利用（使用）することができる．しかし同時に，こうした正当化のための証拠としての使用は資源としてのこの命題を消費する（無効化する）ことでもある．例えば，入構許可証に有効期間が明示してあったとする．そうすると，この命題は，その有効期間を過ぎてしまうともはや正当化の証拠としては使用できない，あるいは，有効期間の明示はないかもしれないが，例えば，この命題が，当の使用とともに，廃棄されてしまう（入場券によくあるように機械に“吸い込まれ”て，つまり，回収されてしまう）といったことが考えられる．一般に，許可や禁止，命令といった事柄は，その特性上，この入構の例のように，多様な行為主体（情報処理の担い手となるエージェント）の相互行為を制御することを目的としており，その場合，当の許可，禁止，命令などを表現する命題が，使用される（その命題を証拠として，何らかの行為が正当化される）とその結果，無効化する（消費される）ということは，何ら不思議ではない．こうして，ある種の命題が，一定の情報処理のうちにその処理のための資源・素材・基礎部品といったものとして登場し，そして，その際，その処理の中で使用されることによって，消費・廃棄・無効化されるということが，十分理解可能であることが，明らかになった．一般に，線形論理においては，弱化・縮約という構造規則の適用が禁じられるわけだが，このことが持つ意味は，とりあえず，シークエントの左辺に登場する命題との関係で言えば，まさにそこに登場する命題たちに対して，以上に見たような資源・素材・基礎部品としての性格を考えることにある，と言って良いだろう．つまり，線形論理のシークエントに（!も?も冠されずに）登場している命題とは，こうした情報処理にとっての資源・素材・基礎部品として使用（消費）可能な情報ピースといったものに他ならないということである．

以上から逆に，「!」という様相演算子の働きがどこにあるかも明らかとなってくる．与えられた命題 A に対して，!を冠することが果たしていつも可能であるのか（有意味となるのか）は明らかではない．しかし，確かに，ある種のケースでは!を冠することで，何が起こるのかはほぼ明確に説明することができる．つまり，先の入構許可の例で言えば，!を冠されていない命題が「（目下）あなたは入構を許可されている」といった意味であるのに対して，$!A$ は「（どれほど状況が変転し，すでに何度入構許可の証拠としてこの命題を使っていようと，あるいは，いなかろうと，そのことに関わりなく）いつ，いかなる状況下でも（目下）あなたは入構を許可されている」といった意味になる．つまり，$\mathbf{LL} \vdash !A \Rightarrow A$ という証明可能なシークエントが示している通り，ひとたび，$!A$ が仮定されれば，そこから，ありとあらゆる（相異なった）「目下の」状況下で，あなたはそこでの入構を正当化することができる，という帰結が得られるということに他ならない．

先に，**S4** 埋め込みの場合に即しながら命題というものは，一般に，「有効性の範囲」を持つ，ということを確認した．特に，一般に直観主義論理の命題 A は，その **S4** 翻訳 $A^{\Box}$ について，$\mathbf{S4} \vdash A^{\Box} \supset \Box A^{\Box}$ が成り立つということが示している通り，潜在的にすべて **S4** 翻訳で言えば，その冠頭に $\Box$ を隠し持っていると見ることができる．言い換えれば，**S4** モデルにおける $A^{\Box}$（つまり，$\Box A^{\Box}$）がその有効性の範囲に関して，R 上方閉であることにぴったり対応して，直観主義論理モデルにおける A の有効性の範囲もまた，R 上方閉となっており，要するに，直観主義論理の命題 A とは，それがある可能状況で，ひとたび成立すれば，この状況から任意有限回の遷移の繰り返しで，到達できるいかなる可能状況においても，一貫して成立し続けるものである（直観主義論理において取り扱われるのは，まさに，そのような特性を持つ命題たちのみである）ということに他ならない．ところで，一見 $\langle$ 有効性の範囲 $\rangle$ の考えと「（命題の）リソースとしての使用可能性」という考えは，縁遠いものに見える．ある命題が，ある可能状況で有効（妥当）であるからといってそのことが当の命題を（何らかの使用とか情報処理活動といったものにとっての）リソースとして役立てうることを意味するようには思えないからである．

しかし，より詳しく検討してみると，二つの考えは重要な仕方で結びつけられていることがわかる．ある命題が，まさに直観主義論理の命題のように，R について上方閉であるような有効性の範囲を持つとする．このとき，この命題は，一度ある状況で有効となると，その状況から遷移しうる任意の状況（つまり，先に見たとおり，少なくとも現状と同等か，あるいは，さらに多くの情報が利用可能となっているような，より進展した状況）においても有効であり続ける．では，この場合の有効とはどのようなことであるのだろうか．それは，例えば，当該の状況で成り立っている（手に入っている）さらなる情報を特定する（推論を介して導出する）際に，まさにその命題を随意に用いて良いということ（仮定に加える必要がなく，まさに，何回でも繰り返し用いられて良いということ）である（ここでの R は反射的であるため，どの状況でも好きなだけ多く自分自身へと遷移して良いということに注意が必要である）．このように考えてみると，結局，ある状況で有効となっている命題とは，その状況で（あるいは，その状況から遷移可能な任意の状況で），一定の情報処理活動が遂行されるための，随意に利用可能なデータ，一片の情報，つまり，まさにある種の（無尽蔵に利用可能な）リソースに他ならない，ということがわかる．

以上のようにして，ある直観主義論理の命題がある状況で有効であるとは，一言で言えば，当該状況，及び，そこから遷移可能な任意の状況において，その命題が，まさにリソースとして利用可能であることを含意しており，この命題が，R 上方閉な有効性の範囲を持

つとは，ある種の強い仕方における $\langle$ リソースとしての繰り返し適用の可能性 $\rangle$ をもつことに他ならないことが理解される．もちろんこのように述べたことは多くの点で，未考察なままにとどまっている問題が残されている．例えば，ある命題が，ある状況における情報処理活動に対して，まさに，一片の情報という（通常は結果的に消費される）リソースとして寄与するとは，より正確にはどのようなことなのか．また，線形論理という弱い，つまりカットを除いた構造規則の適用が禁止されている論理から出発して考えると，直観主義論理に至るまでに，様々に中間的な強さを持つ論理体系が存在する．これらの体系についても，未だ十分な解明が行われているわけではないとはいえ，それぞれについての様相埋め込みや，線形埋め込みが存在している．こうした埋め込み（そこでの様相公理や構造規則の詳細）のそれぞれに応じてどのような命題概念が（あるいは，命題というものが持ちうる，どのような機能的特性が）焦点を当てられているのかについても，未解明なことが多い．しかし，以上で見たような $\langle$ 有効性の範囲 $\rangle$ という考えと，$\langle$ 情報処理のためのリソース $\rangle$ という考えは，そうした他の命題概念の側面や機能を理解する上でも，大いに役立つことを期待して良いと考えられる．

結び

本論では，論理体系を用いて命題が持つ多様性やそれらの間の関係について見てきた．第 1 章では，論理結合子を用いて，なぜ命題概念を分析することができるのかということを，論理体系の成り立ちに基づいて説明を与えた．非様相論理と様相論理のヒルベルト流の公理系を与え，各体系は公理によって各々にその特徴づけが行われているということを説明した．特に，非様相論理では，帰結関係という考え方が，各論理体系の命題が持つ性質を特徴づけるということを，古典論理と直観主義論理の場合を中心に見た．一方，様相論理では，各論理体系が持つ命題の性質は，必然性演算子の振る舞いによって特徴づけられる．また，非様相論理の命題は，**S4** 翻訳（あるいは，$(\cdot)^{\boxplus}$ 翻訳）のもとで，対応する様相論理に埋め込み可能であることから，比較検討することが可能であることに着目し，命題概念には多様性があり，その多様な命題たちの間に一定の関係構造が存在すること，論理体系を用いて命題概念を分析できるということについて見た．

第 2 章では，ゲンツェンによって与えられた，直観主義論理と古典論理のシークエント計算の体系を導入した．ヒルベルト流の公理化の場合には，帰結関係は「複数の仮定から一つの結論を導き出してよい」という形で与えられていたがシークエント計算の体系では，帰結関係は「複数の仮定から複数の結論のどれかが導き出せればよい」という風に変わる．帰結関係の扱いを調整することによって，シークエント計算の体系では，直観主義論理と古典論理を一様な形式化のもとで扱うことができる．ここでは，シークエント概念に着目し，推論するとは何かということについての説明を与えた．また，構造規則を吸収した形のシークエント計算の体系である **G3** 型のシークエント計算の体系を直観主義論理の場合に与え（ただしここでは，直観主義論理の後件複数な形のシークエント計算の体系を採用した），さらにミンツによって与えられた直観主義論理の後件複数なシークエント計算の体系 **LJpm** を与えた．

第 3 章では，フィッサーによって与えられた **BPL** に対するラベルなしの **G3** 型のシークエント計算の体系（この体系では，カット除去定理を示すことができる）を与え，同じ

くラベルなしの **G3** 型のシークエント計算で与えられた様相論理 **K4** へと埋め込み可能であることを証明論的な手法で示した．このことから，**G3B** に対するカット除去定理の証明を **G3K4** のそれに還元し示す証明を与えた．

第 4 章では，非様相論理のラベル付きシークエント計算を与えることを中心に，本論で与えた非様相論理のラベル付きシークエント計算の体系が，どの程度の範囲の論理体系を扱うことが可能であるのかを見た．また，この新しく与えたラベル付きシークエント計算の体系を用いて，各非様相論理をそれぞれ対応する様相論理の体系へと埋め込み可能であることについての証明論的証明を与えた．

第 5 章では，これまでの様相を用いた分析とは異なる，「構造」という観点から，命題概念を分析し，比較検討するために，サンビンらによって与えられたベーシックロジックを導入し，その考察を行った．ベーシックロジックでは，シークエントの構造が持つ性質を操作することで，様々な論理体系を扱うことができる．加えて，構造概念と関係の深い線形論理を与え，構造概念の分析のため，直観主義論理が線形論理に埋め込み可能であることを，既存の翻訳とは異なる翻訳を用いて，その埋め込みの証明論的証明を与えた．

第 6 章では，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理と直観主義論理のクリプキモデルとの間の関係を明らかにするとともに，本論のまとめとして，様相と構造との間の関係について考察を行った．

本論では，様相と構造という二つの性質を基準として，論理体系を分析したが，勿論，ここで用いた性質以外にもその基準となるような性質の候補は十分に考えうる．しかし，その候補となる性質がどのようなものであるのか，また，様相や構造といった見方との間にどのような関係があるのかについては，今後さらなる検討が必要とされる．様相と構造との間の関係に関して言えば．第 6 章の最後でも述べてきたが，本論で見たような多様な論理体系たちを統一的な仕方で，全て一様に扱うことができるか否かは現状では定かではないが，帰結関係の条件付け（シークエントの条件）ということについて，今以上の分析の仕方を与えることができれば，直観主義論理を中心とする非様相論理の諸体系を比較・検討し，さらに，様相演算子が出現する論理体系についても，シークエント概念を用いて考察を行うことが可能なのではないかと考えられる．

さて，その一方で，本論では命題概念を分析するにあたり，様々な形式体系を用いてきた．形式体系というものは，その目的別に注目したい性質にスポットを当て，その形式化が行われる．そのため，各形式体系は，そのどれもが異なる力を有しており，様々な角度から命題概念を分析することが可能であるようなものであることがわかる．このとき，命

題が持つ性質をその中に十分に含んでいる推論規則の適用の結果構成された証明図というのは，命題が持つ性質をダイレクトに反映している．そのため．推論の結果構成された証明図と命題との間に重要なつながりがあることは明らかである．しかし，形式体系と命題が持つ性質が，どのように関係し合っているのかということについては，本論では詳しく検討することができなかった．これらの点についても今後さらなる考察が必要とされるということに言及し，本論の結びとしたい．

参考文献

[Ardeshir and Ruitenburg 1998] M. Ardeshir and W. Ruitenburg. Basic propositional calculus 1, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 44, pp. 317-343, 1998.

[Ardeshir and Vaezian 2012] M. Ardeshir and V. Vaezian. A unification of the basic logics of Sambin and Visser, *Logic Journal of IGPL 6(6)*, November 2012, pp. 1202-1213, 2012.

[Becker 1930] O. Becker. Zur Logik der Modalitäten. *Jahrbuch für Philosophische und phänomenologische Forschung*, 11, pp. 497-547, 1930.

[Blackburn et al. 2001] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2001.

[van Benthem 1984] J. van Benthem. Correspondence Theory. In: D. M. Gabbay and F. Guenthner, Dordrecht, Reidel. (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. Ⅱ, pp. 167-247, 1984.

[Bolzano 1837] B. Bolzano, *Wissenschaftslehre*, Versuch einer ausführlichen und gröBtentheils neuenDarstellung der Logik mit seter Rücksicht auf deren disherige Beardeiter. Heraus gegeben von mehren seiner Freunde. Mit einer Vorrede des Dr. J. Ch. A. Heinroth Sulzbach 1837. 4 vols. Translation in Bolzano 2014.

[Bolzano 2014] B. Bolzano, *Theory of Science*, 4 vols., Trans. by Paul Rusnock and Rolf George, Oxford University press, 2014.

[Chagrov and Zakharyashchev 1992] A. Chagrov and M. Zakharyashchev. Modal Companions of Intermediate Propositional logic, *Studia Logica*, Vol. 51, pp.49-82, 1992.

[Chagrov and Zakharyaschev 1997] A. Chagrov and M. Zakharyaschev. *Modal Logic*. Number 35 in Oxford Logic Guides. Oxford Science Publications, 1997.

[Corsi 1987] G. Corsi. Weak logics with strict implication, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 33, pp.389-406, 1987.

[Cerrato 1994] C. Cerrato. Natural deduction based upon strict implication for normal modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 35, pp. 471-495, 1994.

[Došen 1985] K. Došen. Sequent-systems for modal logic, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 50, pp. 149-159, 1985.

[Došen 1993] K. Došen. Modal translation in K and D, *Diamond and Defaults*, pp. 103-127, 1993.

[Dragalin 1988] A. Dragalin. *Mathmatical Intuitionism: Introduction to Proof Theory*, American Mathematics Society, 1988.

[Dummet 1975] M. Dummet. The philosophical basis of intuitionistic logic,*Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 80, pp. 5-40. reprinted in Dummett 1978, pp. 215-247. 1975.

[Dyckhoff and Negri 2012] R. Dyckhoff and S. Negri. Proof analysis in intermediate logics, *Archive for Mathematical Logic*, Vol. 51, pp. 71-92, 2012.

[Frege 1892] G. Frege. Über Sinn und Bedeutung, in *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, NF 100, Leipzig, S. 25-50, 1892.

[Garson 2018] J. Garson. Modal logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of philosophy*. fall 2018 edition, 2018.

[Gentzen 1935] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen I, II, *Mathematische Zeitschrift*, 39, pp. 176-210, pp. 405-431. Translation in Gentzen 1969, pp. 68-131, 1935.

[Gentzen 1969] G. Gentzen. *The Collected Papsers of Gerhard Gentzen*, North-Holland publ. Co., Amsterdam. English translation of Gentzen's papers, edited and introduced by M. E. Szabo. 1969.

[Girard 1987] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, Vol. 50, pp. 1-102, 1987.

[Goble 1974] L. Goble. Gentzen systems for modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 15, pp. 455-461, 1974.

[Gödel 1933f] K. Gödel. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus, trans. by J. Dawson. In S. Feferman et al. (eds.), *Kurt Gödel Collected Works, Vol. I: Publications 1929-1936*. Oxford University Press, Oxford. pp. 300-303, 1986. Originally published as "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls". *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Vol. 4, pp. 39-40, 1933.

[Ishigaki and Kashima 2008] R. Ishigaki and R. Kashima. Sequent Calculi for Some Strict Implication Logics, *Logic Journal of the IGPL*, Vol. 16(2), pp. 155-174, 2008.

[Ishii et al. 2001] K. Ishii, R. Kashima and K. Kikuchi. Sequent calculi for Visser's propositional logics, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 41(1), pp. 1-22, 2001.

[Kanger 1957] S. Kanger. *Probability in Logic*, Almqvist and Wiskell, Stockholm, 1957.

[Kikuchi 2001] K. Kikuchi. Relationships between basic propositional calculus and substructural logics, *Bulletin of the Section of Logic*, Vol. 30(1), pp. 15-20, 2001.

[Kikuchi and Sasaki 2003] K. Kikuchi and K. Sasaki. A Cut-Free Gentzen Formulation of Basic Propositional Calculus, *Journal of Logic, Language and Information*, Vol. 12, pp. 213-225, 2003.

[Kripke 1959a] S. A. Kripke. Semantical Analysis of Modal Logic(abstract) *Journal of Symbolic Logic*, 24, pp.323-324, 1959.

[Kripke 1959b] S. A. Kripke. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 24, pp.1-14, 1959.

[Kripke 1963a] S. A. Kripke. Semantical Analysis of Modal Logic I Normal Modal Propositional Calculi. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 9*. pp. 67-96, 1963.

[Kripke 1963b] S. A. Kripke. Semantical Considerations on Modal Logic, J. -Y. Béziau (ed.), *Universal Logic: An Anthology*. pp. 197-208, 2012. Originally published as "Semantical Consideration on Modal Logic". Acta Philosophica Fennica 16, pp. 83-94, 1963.

[Kripke 1965] S. A. Kripke. Semantical analysis of intuitionistic logic I, In: J. N. Crossley and M.A.E. Dummett, eds., *Formal Systems and Recursive Functions.*

North-Holland, Amsterdam, pp.92-130, 1965.

[Kurokawa 2014] H. Kurokawa. Hypersequent calculi for modal logics extending S4. In: Y. Nakano. et al. (eds.), *JSAI-isAI 2013. LNCS*, Vol. 8417, pp. 51-68. Springer, 2014.

[Kurokawa 2018] H. Kurokawa. The Principle of Reflection and Nested Sequents. *JAIST, Mathmatical Logic and its Applications*, 2018. (talk)

[Lewis 1912] C. I. Lewis. Implication and the algebra of logic. *Mind*, Vol. 21, pp. 522-531, 1912.

[Lewis 1913] C. I. Lewis. A new algebra of strict implications and some consequents. *J. Philos. Psychal. Science Methods*, Vol. 10, pp. 428-438, 1913.

[Lewis and Langford 1932] C. I. Lewis and C. H. Langford. *Symbolic Logic*. The Century Co., 1932.

[Liang and Miller 2009] C. Liang and D. Miller. Focusing and polarization in linear, intuitionistic, and classical logics. *Theoretical Computer Science*, Vol. 410, Issue 46, pp. 4747-4768, 2009.

[Ma and Sano 2015] M. Ma and K. Sano. On Extensions of Basic Propositional Logic. In: *Proceedings of Thirteenth Asian Logic Conference*, pp. 170-200, 2015.

[Maehara 1954] S. Maehara. Eine Darstellung der intuitionistischen Logik in der klassischen.*Nagoya Mathematical Journal*,Vol. 7, pp. 45-64, 1954.

[McKinsey and Tarski 1948] J. C. C. McKinsey and A. Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 13, pp. 1-15, 1948.

[Mints 2000] G. Mints. *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*. Springer Science+Buisiness Media New York, New York, 2000.

[Mints 2012] G. Mints. The Gödel-Tarski Translations of Intuitionistic Propositional Formulas. In: E. Erdem et al. (eds.), *Correct Reasoning*, LNCS 7265, pp.487-491, 2012.

[Moore 1899] G. E. Moore. The Nature of Judgment, *Mind*, New Series, Vol. 8, No. 30 (Apr.), pp. 176-193. 1899.

[Negri 2005] S. Negri. Proof analysis in modal logic, *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 34, pp. 507-544, 2005.

[Negri and von Plato 2001] S. Negri and J. von Plato. *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge. 2001.

[Ohnishi and Matsumoto 1957] M. Ohnishi and K. Matsumoto. Gentzen method in modal culculi. *Osaka Math. J.*,Vol. 9, pp. 113-130, 1957.

[Ono 1998] H. Ono. Proof-Theoretic Methods in Nonclassical Logic –an Introduction. *Theories of Types and Proofs*, eds. by Takahashi, M. et al., MSJ Memoir 2, Mathematical Society of Japan, pp. 207-254, 1998.

[Poggiolesi 2011] F. Poggiolesi. *Gentzen Calculi for Modal Propositional Logic.* Springer, 2011.

[Quine 1951] Willard V. O. Quine. *Two Dogmas of empiricism.*In: Quine 1953, pp. 20-46 ,1951.

[Quine 1953] Willard V. O. Quine. *From a Logical Point of View: 9 Logico-Philosophical Essays*, Harvard University Press, 1953.

[Restall 1994] G. Restall. Subintuitionistic logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 35, pp. 116-129, 1994.

[Ruitenburg 1991] W. Ruitenburg. Constructive logic and the paradoxes. *Modern Logic*, Vol. 1(4), pp. 271-301, 1991.

[Russell 1903] B. Russell. *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, 1903

[Sambin et al. 2000] G. Sambin, G. Battilotti and C. Faggian. Basic Logic: Reflection, Symmetry, Visibility. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 65(3), pp. 979-1013, 2000.

[Sambin and Valentini 1982] G. Sambin and S. Valentini. The modal logic of provability. The sequential approach. *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 11(3), pp. 311-342, 1982.

[Sano and Ma 2015] K. Sano and M. Ma. Alternative Semantics for Visser's Propositional Logics. In: M. Aher, D. Hole, E. Jeřábek, C. Kupke. (eds.), *Logic, Language, and Computation.* TbiLLC 2013. Lecture Notes in Computer Science, vol 8984. Springer, Berlin, Heidelberg. pp. 257-275, 2015.

[Simpson 1994] A. Simpson. *Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic.* PhD Thesis, University of Edinburgh, 1994.

[Suzuki and Ono 1997] Y. Suzuki and H. Ono. Hilbert-style proof system for BPL.

Technical Report IS-RR-97-0040F, Japan Advanced Institute of Science and Technology, 1997.

[Suzuki et al. 1998] Y. Suzuki, F. Wolter and M. Zakharyaschev. Speaking about transitive frames in propositional languages. *Journal of Logic, Language and Information*, Vol. 7(3), pp. 317-339, 1998.

[Troelstra 1986] A. S. Troelstra. Introductory note to 1933f. In: S. Feferman et al. (eds.), *Kurt Gödel Collected Works, Vol. I: Publications 1929-1936*. Oxford University Press, Oxford. pp. 296-299, 1986.

[Troelstra 1992] A. S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic*, CSLI-Lecture Notes 29, Center for the Study of Language and Information, Stanford, California, 1992.

[Troelstra and Schwichtenberg 2000] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, England, 2nd edition, 2000.

[Visser 1981] A. Visser, A propositional logic with explicit fixed points, *Studia Logica*, Vol. 40(2), pp. 155-175, 1981.

[Wittgenstein 1933] L. Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus* [*Logisch-Philosophische Abhandlung*], with an English translation by C. K. Ogden, London, 1933, 1st edition, 1922, with an English translation by D. F. Pears and B. McGuinness, London, 1961.

[Yamasaki and Sano 2016] S. Yamasaki and K. Sano. Constructive embedding from Extensions of Logics of Strict Implication into Modal Logics. In: S. C-M. Yang et al. (eds.), *Structural Analysis of Non-Classical Logics*. Springer, pp. 223-251, 2016.

[Yamasaki and Sano 2017] S. Yamasaki and K. Sano. Proof-Theoretic Embedding from Visser's Basic Propositional Logic to Modal Logic K4 via Non-labelled Sequent Calculi. In: S. C-M. Yang et al. (eds.), *Philosophical Logic: Current Trends in Asia*. Springer, pp. 233-256, 2017.

[大西 2009] 大西琢朗.「部分構造論理と論理定項」,『哲学論叢』, 第 36 巻, pp. 140-151, 2009.

[大西 2012] 大西琢朗.「証明論的意味論と双側面説」, 京都大学, 博士論文, 2012.

[岡本 1992] 岡本賢吾.「実在性と矛盾」,『東北哲学会年報』, (8), pp. 63-65, 1992.

[岡本 1993] 岡本賢吾.「関係の存在をどう捉えるか」,『現代思想』, Vol. 21(8), pp.

290-309，1993.

[岡本 1995] 岡本賢吾.「「可能なもの」の形而上学の意義」,『ヘーゲル哲学研究』, Vol. 1995, No. 1, pp. 15-23, 1995.

[岡本 2007] 岡本賢吾.「数学基礎論の展開とその哲学」, 飯田隆編『哲学の歴史 11』, 中央公論新社, pp. 281-344, 2007.

[岡本 2013] 岡本賢吾.「様相的・時間的言語の哲学的射程（一)」,『哲学の探求』, 哲学若手研究者フォーラム, pp. 45-62, 2013.

[小野 1994] 小野寛晰.『情報科学における論理』, 日本評論社, 1994.

[鹿島 2006] 鹿島亮.「直観主義論理入門」2006 年数学基礎論サマースクール.

[古森・小野 2010] 古森雄一・小野寛晰.『現代数理論理学序説』, 日本評論社, 2010.

[坂本・坂井 1971] 坂本百大・坂井秀寿.『現代論理学』, 東海大学, 1971.

[佐野 2016] 佐野勝彦.「様相論理入門」, 菊池誠　編『数学における証明と真理—様相論理と数学基礎論—』, 共立出版, pp. 23-96, 2016.

[中畑 2011] 中畑正志.「ソクラテスそしてプラトン」, 神崎繁他編『西洋哲学史 I「ある」の衝撃からはじまる』, 講談社, pp. 195-254, 2011.

[山﨑 2013] 山﨑紗紀子.「直観主義命題論理の正規化と完全性—カリー・ハワード同型対応及び, クリプキモデルを用いて—」, 修士論文, 2013.

[山﨑 2016] 山﨑紗紀子.「命題概念および様相概念の意義再考―近年の様相同伴についての論理的研究をふまえて」,『哲学誌』, 58 号, pp. 23-53, 2016.

[吉満 2004] 吉満昭宏. C. I. ルイスと様相論理の起源.『科学哲学』, 37-1, pp. 1-14, 2004.