【学位論文審査の要旨】

１　研究の目的

Ricci 平坦な Kähler 多様体は Calabi-Yau 多様体と呼ばれ，Riemann 幾何学をはじめ数学の多様な分野において様々な角度から研究が行われている．特に，3 次元 Calabi-Yau 多様体は超弦理論との係わりから，理論物理の分野においても注目されている．Calabi-Yau 多様体M内の Lagrange 部分多様体Lに対しては，Mの複素体積形式から Lagrange 角度と呼ばれるL上の関数が定まり，Lの平均曲率ベクトル場が Lagrange 角度の勾配ベクトル場を用いて表される．特に，Lagrange 角度が一定となる Lagrange 部分多様体は平均曲率ベクトル場が零となり，特殊 Lagrange 部分多様体と呼ばれる．また，Calabi-Yau 多様体には複素体積形式の実部を取ることによりキャリブレーションが定まり, 特殊 Lagrange 部分多様体はこのキャリブレーションによってキャリブレートされる部分多様体として特徴付けられる．したがって，特殊 Lagrange 部分多様体はホモロジー類内での体積最小性という顕著な性質をもつ．1996 年に Strominger-Yau-Zaslow により，Calabi-Yau 多様体のミラー対称性が特殊 Lagrange トーラスのファイブレーションの構造として幾何学的に説明できるという予想が提唱され, 以降特殊 Lagrange 部分多様体の研究が盛んに進められている. 特殊 Lagrange 部分多様体のファイブレーションは一般に特異ファイバーを持ち, ファイブレーションの構造を理解するためには特殊 Lagrange 部分多様体上の特異点の研究が不可欠となる．2000 年代初頭に D.D. Joyce をはじめとした研究者らにより，複素 Euclid 空間内の特殊 Lagrange 部分多様体の構成と錐形特異点に関する組織的な研究が行われた. 本学位論文は，これらの先行研究の発展として，非平坦 Calabi-Yau 多様体における特殊 Lagrange 部分多様体の構成理論を与え，その幾何学的な性質を調べることを目的としている. 非平坦な Calabi-Yau 多様体として, 階数 1 のコンパクト対称空間の余接束上の Stenzel 計量と呼ばれる余等質性 1 の完備 Ricci 平坦 Kähler 計量が知られている. 本学位論文では, 特に球面の余接束内において Stenzel 計量に関する特殊 Lagrange 部分多様体を具体的に構成している.

２　研究の方法と結果

Calabi-Yau 多様体内の特殊 Lagrange 部分多様体の構成理論については運動量写像を用いた余等質性 1 の方法や余法束の方法などいくつかの手法が知られている．本学位論文では，Joyce によって導入された特殊 Lagrange 部分多様体に直交する Lie 群作用を用いた方法に着目している．この方法は，Konno により，Calabi-Yau 多様体内における Lagrange 平均曲率流の構成にも用いられている．これらの先行研究においては，Calabi-Yau 多様体へ作用する Lie 群が可換群であることを仮定している．本学位論文では，一般に可換群とは限らない Lie 群の作用にも適用できるように構成法の拡張を行っている．さらに，Lie 群作用の直交条件を，各軌道が与えられた Lagrange 部分多様体Lに直交するという条件から，軌道の和集合として与えられる部分多様体がLに直交するという条件に広げている．本学位論文で示されている特殊 Lagrange 部分多様体の構成法は次のように要約される．まず，M

を一般の Calabi-Yau 多様体とし，Lをその Lagrange 部分多様体とする．Mには Lie 群Hが作用し，その作用はMの Kähler 構造を保ち，運動量写像$\mu: M \longrightarrow \mathfrak{h}^*$を持つとする．$c$を$\mathfrak{h}^*$の中心$Z(\mathfrak{h}^*)$の元とし，$V_c$は$\mu^{-1}(c) \cap L$に含まれる部分多様体であるとする．$H$作用の固定部分群が$V_c$上で一定$K$であり，$(H/K) \times V_c$の実次元が$M$の複素次元と一致するとする．このとき，$H$ の作用が V_c 上において広義の直交条件を満たすならば，写像 $\phi: (H/K) \times V_c \longrightarrow M; (hK, p) \mapsto hp$ は Lagrange はめ込みになる．論文ではさらに，この Lagrange はめ込みϕの Lagrange 角度の表示を与えている．これにより，特にH作用がMの Calabi-Yau 構造を保ち，Lの Lagrange 角度がV_c上で一定であるならば，ϕの Lagrange 角度は一定になることが示される．よって，このときϕ の像としてMの特殊 Lagrange 部分多様体が得られる．

本学位論文の後半では，上述の構成法を適用することにより，球面の余接束内において Stenzel 計量に関する特殊 Lagrange 部分多様体を具体的に構成している．一つ目の例は，5 次元球面S^5の余接束$M = T^*S^5$において構成される．まず，S^5内の全測地的な 2 次元球面S^2の余法束$L_1 = T^{*\perp}S^2$および大円S^1の余法束$L_2 = T^{*\perp}S^1$はともに$M = T^*S^5$内の特殊 Lagrange 部分多様体になる．ここで Hopf ファイブレーション$S^5 \longrightarrow \boldsymbol{C}P^2$を与える$H = U(1)$作用を考えると，$H$の$S^5$への作用は$M = T^*S^5$への作用を誘導し，さらにこの作用は$L_1$に対して直交条件を満たし，$L_2$に対しては広義の直交条件を満たすことが示される．したがって，上述の構成法を適用することにより，$M = T^*S^5$内の特殊 Lagrange 部分多様体が得られる．ここで，$H = U(1)$は 1 次元の可換 Lie 群であることから，それぞれcをパラメータとした特殊 Lagrange 部分多様体の 1 パラメータ族を得る．二つ目の例として，6 次元球面S^6の余接束$M = T^*S^6$において，S^6内の全測地的な 2 次元球面S^2の余法束$L = T^{*\perp}S^2$をとり，$H = SO(2) \times SO(2) \times SO(3)$の$M$への標準的な作用を考える．このとき，$H$作用は$L$の一部分において直交条件を満たす．$H$は非可換群であるが，$\mathfrak{h}^*$の中心$Z(\mathfrak{h}^*)$は 2 次元であり，上述の構成法により，$M = T^*S^6$内の特殊 Lagrange 部分多様体の 2 パラメータ族が得られる．

3　審査の結果

本学位論文では，一般の Calabi-Yau 多様体において広義の直交対称性を満たす Lie 群作用を用いた特殊 Lagrange 部分多様体の構成法を与えている．特殊 Lagrange 部分多様体の構成理論に関しては既にいくつかの手法が知られているが，直交対称性を用いた研究は数少ない．特に，本論文において Calabi-Yau 多様体に作用する Lie 群の可換性の条件を外したことは大きな進展である．本論文では Joyce および Konno による先行研究を詳細に検討し，構成の手続きをいくつかのステップに分けて緻密に議論している．各ステップの命題を成立させるために十分な条件を追究することで，作用する Lie 群が非可換である場合にも成立する構成法を与えることに成功している．さらに，本論文において直交の条件を広げたことは独創的であり，この構成法の本質を深く理解することで得られた結果である．

本学位論文で与えている特殊 Lagrange 部分多様体の構成法では，いくつかの強い条件を

仮定している．このため，構成法がどの程度有効に機能するかを検証することが必要となる．本学位論文の後半では，前半で与えた構成法を用いて球面の余接束において Stenzel 計量に関する特殊 Lagrange 部分多様体を実際に構成している. ここで与えている二つの例は，それぞれ

(1) H軌道がV_cの各点においてLに直交するわけではないが，広義の直交条件を満たす例
(2) Lie 群Hが非可換である例

になっており, 本論文で与えた特殊 Lagrange 部分多様体の構成法の拡張が意味のある拡張であることを実証する例となっている.

特殊 Lagrange 部分多様体の幾何学的様相に関しては未だ解明されていないことが多く，具体例を明示的に与えることは価値がある．本論文で与えられた構成法により新たな例が提供され, 特殊 Lagrange 部分多様体およびその上の特異点に関する今後の研究の進展に寄与するものと期待される．以上の理由から本論文は博士（理学）の学位に値するものと評価する.

4　最終試験の結果

2018 年 11 月に論文審査委員と数理情報科学専攻の教員数名による予備審査会を行い，学位論文として十分な成果が得られていると評価し，最終試験の受験を承認した．最終試験として，2019 年 1 月 25 日に学位論文公聴会を開き，論文の内容に関する口頭発表と論文審査委員および数理情報科学専攻の教員による質疑応答を行った．その結果，申請論文において博士の学位論文として十分な成果が得られており，かつ申請者が自身の専門および関連分野に関して十分な学力を有するものと認め，合格と判定した.