| | |
|---|---|
| 氏　　　　名 | 落合　亮文（オチアイ　アキフミ） |
| 所　　　　属 | 理工学研究科　数理情報科学専攻 |
| 学 位 の 種 類 | 博士（理学） |
| 学 位 記 番 号 | 理工博　第 284 号 |
| 学位授与の日付 | 平成 31 年 3 月 25 日 |
| 課程・論文の別 | 学位規則第 4 条第 1 項該当 |
| 学位論文題名 | A construction of special Lagrangian submanifolds by generalized perpendicular symmetries<br>一般化された直交対称性による特殊ラグランジュ部分多様体の構成（英文） |
| 論文審査委員 | 主査　准教授　酒井　高司<br>委員　教　授　横田　佳之<br>委員　准教授　赤穂　まなぶ<br>委員　教　授　今野　宏（明治大学） |

**【論文の内容の要旨】**

Ricci 曲率が零の Kähler 多様体を Calabi-Yau 多様体と言う. Calabi-Yau 多様体は 1980 年代から素粒子物理学の中で弦理論のモデルとして注目を集め，以来数学，物理の両方面から多くの関心を注がれてきた．ミラー対称性は，初期に導かれた Calabi-Yau 多様体の著しい性質の一つである．一つの Calabi-Yau 多様体にミラーと呼ばれる対象物が存在して，シンプレクティック構造と複素構造という二つの異なる幾何構造が互いに入れ替わる形で，本質的に同じ情報を持っていることをそれは主張する．　このミラー対称性という関係の仕組みを説明するものとして，Strominger-Yau-Zaslow 予想が提案された．

Strominger-Yau-Zaslow 予想は，Calabi-Yau 多様体とそのミラーが，同一の底空間を持つ特異点付きの特殊 Lagrange トーラス・ファイブレーションによって互いに結びつくと主張する．ここで特殊 Lagrange 部分多様体とは，Calabi-Yau 多様体に定義される部分多様体の一つのクラスである．一つの見方として Strominger-Yau-Zaslow 予想は，Calabi-Yau 多様体をどのような「切り口」で見るとミラー対称性という現象が浮かび上がるかを，より端的に言えば, ミラー対称性とは上に述べた特殊 Lagrange 部分多様体ファイブレーションであるということを述べていると考えられる．その「切り口」が特殊 Lagrange 部分多様体であり, このことから特殊 Lagrange 部分多様体はミラー対称性の理解に重要な役割を果たすと考えられている．

特殊 Lagrange 部分多様体それ自体の重要性を示すもう一つの事柄としてキャリブレーション幾何の文脈がある．キャリブレート部分多様体は Harvey と Lawson [1]よって導入された，Riemann 多様体に定義される部分多様体の一つのクラスであり，ホモロジー類内で体積最小という顕著な性質を持つ．Calabi-Yau 多様体には Riemann 計量に適合する正則体積形式$\Omega$が存在し，$e^{\sqrt{-1}\theta}\,\Omega$（$\theta\in\mathbb{R}$）の実部$\Re\, e^{\sqrt{-1}\theta}\,\Omega$でキャリブレートされる部分多様体を（フェイズ$\theta$の）特殊 Lagrange 部分多様体という．よって特殊 Lagrange 部分多様体はキャリブレート部分多様体であり，ホモロジー類内で体積最小である．以上のような事柄から，特殊 Lagrange 部分多様体の構成理論，具体例の構成，特異点の研究などに関心が集まっている．

特殊 Lagrange 部分多様体を構成する典型的な手法として Joyce [3]による「モーメント・マップ・テクニック」，Harvey，Lawson [1]による「バンドル・テクニック」の二つが挙げられる．これらの手法はその後$\mathbb{C}^n$からコンパクト階数1対称空間である$S^n$と$\mathbb{C}P^n$の余接束に拡張された．コンパクト階数1対称空間$G/K$の余接束$\mathrm{T}^*G/K$には Stenzel [5]により完備 Ricci 平坦 Kähler 計量が入ることが示され，非平坦な Calabi-Yau 構造があることが知られている．上の二つの手法とは別に，Joyce [3]は直交対称性を持つ可換な群作用とモーメント写像を用いて$\mathbb{C}^n$内に特殊 Lagrange 部分多様体を構成する方法を示した：$SU(n)\ltimes\mathbb{C}^n$の可換部分群$H$で$\mathbb{C}^n$の所与の特殊 Lagrange 部分多様体$L$に直交作用するものを仮定する．$\mathfrak{h}^*$を$H$の双対 Lie 環とし，$H$作用に関するモーメント写像を$\mu : M\to\mathfrak{h}^*$で表す．このとき$H\cdot(L\cap\mu^{-1}(c))$（$c\in\mathfrak{h}^*$）が特殊 Lagrange 部分多様体になる．一方，Konno [4]は一般の Calabi-Yau 多様体$M$において, 可換 Lie 群$H$が$M$の特殊 Lagrange 部分多様体$L$に直交作用するとき，$H\cdot(L\cap\mu^{-1}(c))$が Lagrange はめ込みになり, かつその Lagrange 角度を明示的に表せることを示し，それを利用して非平坦 Calabi-Yau 多様体における Lagrange 平均曲率流の具体的構成に成功している．なお Lagrange 部分多様体$L$の Lagrange 角度が一定であることと$L$が特殊 Lagrange 部分多様体であることは同値である．Joyce が仮定した群作用の可換性は証明内で明示的に用いられるわけではなく, 群作用が$L$全体で直交することを仮定したことによる帰結として導出されるものである．一方特殊 Lagrange 部分多様体 $H\cdot(L\cap\mu^{-1}(c))$を構成するためには作用が$L\cap\mu^{-1}(c)$上で直交していれば十分であり，これは Lie 群$H$に対する可換性という仮定を外すことができる可能性を示唆している．

本論文では，Konno による Lagrange 角度の明示的な計算方法を利用して，上の直交対称性を用いた Joyce の結果を次の三点で一般化した：(g1)アンビエント空間を$\mathbb{C}^n$から一般の Calabi-Yau 多様体に拡張する，(g2)群作用の可換性を仮定しない，(g3)直交条件を緩める（広義の直交条件）．本論文の主定理は，Lagrange はめ込みを構成し，その Lagrange

角度を明示的に表示するものであり，系として特殊 Lagrange はめ込みの構成条件が示される．それらの要約は次の通りである：$M$ を連結 Calabi-Yau 多様体，$H$ を $M$ に作用する連結 Lie 群で $M$ の Kähler 構造を保ちかつモーメント写像 $\mu: M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，$L$ を $M$ の Lagrange 部分多様体とする．$c \in \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}^*$ の中心 $Z(\mathfrak{h}^*)$ から取り，$V_c \subset L \cap \mu^{-1}(c)$ を $M$ の部分多様体で $V_c$ 上固定部分群が一定 $K$ であるものとする．このとき $H$ の作用が $V_c$ に対する広義の直交作用であるならば，写像 $\phi: (H/K) \times V_c \to M$ で $\phi(hK, p) = hp$ で定義されるものは Lagrange はめ込みであり，その Lagrange 角度 $\theta$ は明示的に表示される．特に上の条件に加えて $H$ 作用が $M$ の Calabi-Yau 構造を保ち，$L$ の Lagrange 角度が $V_c$ 上一定ならば，$\phi$ は特殊 Lagrange はめ込みである．

本論文ではさらに，この結果に基づく特殊 Lagrange 部分多様体の具体的な構成を球面 $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ の余接束 $\mathrm{T}^*S^n$ において行った．真に広義の直交作用(g3)による構成の例として Hopf ファイブレーションの群作用 $H = U(1)$ による場合，非可換群の作用(g2)による構成の例として $H = SO(2) \times SO(2) \times SO(3)$ による場合をそれぞれ示した．Hashimoto と Sakai [2]は $SO(p) \times SO(q)$ $(p + q = n+1)$ 不変な $\mathrm{T}^*S^n$ 内の全ての特殊 Lagrange 部分多様体を構成し，それらが余等質性1であることを示した．本論文内の $SO(2) \times SO(2) \times SO(3)$ による例において特殊 Lagrange 部分多様体は $2(= \dim Z(\mathfrak{h}^*))$ パラメーター族で得られ，この作用が構成された特殊 Lagrange 部分多様体に余等質性 2 で作用していることが直接に確かめられる．

参考文献：

[1]R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47-157.

[2]K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagragian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere*, Tohoku Math. J. (2) **64** (2012), no. 1, 141-169.

[3]D. D. Joyce, *Special Lagrangian $m$-folds in □$^m$ with symmetries*, Duke Math. J. **115** (2002), no.1, 1-51.

[4]H. Konno, *Lagrangian mean curvature flows and moment maps*, to appear in Geom Dedicata (2018), DOI: 10.1007/s10711-018-0331-8.

[5]M. B. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), 151-163.