【学位論文審査の要旨】

１　研究の目的

本論文は，多様体上の微分同相写像に関する離散力学系の研究である．主な目的は，構造不安定な微分同相写像に対し，新しい位相共役不変量を構成することである．このような不変量をモジュラスという．本研究で対象としているのは，サドル型不動点に同伴する 3 次ホモクリニック接触を持つ 2 次元微分同相写像のモジュライおよび，サドル焦点に同伴する 2 次ホモクリニック接触を持つ 3 次元微分同相写像のモジュライである．構造不安定な微分同相写像は現在の力学系の中心的な研究対象である．このような微分同相写像の分類のためにはモジュラスは不可欠である．

２　研究の方法と結果

Mを可微分多様体，$\mathrm{Diff}^r(M)$ を M 上のC^r級微分同相写像からなる空間とする．$\mathrm{Diff}^r(M)$ の要素 f が**構造安定**であるとは，f の $\mathrm{Diff}^r(M)$ における近傍 $N(f)$ が存在し，$N(f)$ の任意の要素 g が f と位相共役になることをいう．したがって，fが構造不安定であれば，fのどのような近傍にもfとは位相共役でない $\mathrm{Diff}^r(M)$ の要素が必ず存在する．それゆえ，fの近傍における位相共役類の分類が必要となる．その指標となるものが，**モジュラス**（位相共役不変量）である．

M 上の微分同相写像f でサドル型不動点p_1，p_2を持つものを考える．p_1の安定多様体$W^s(p_1)$と p_2の不安定多様体$W^u(p_2)$ の共通部分は，それが横断的でないときには**接触**とよばれる．q が異なるサドル型不動点 p_1，p_2 に同伴する接触であるとき，q を**ヘテロクリニック接触**という．一方，q が同じ不動点p に同伴する接触であるとき，q を p の**ホモクリニック接触**という．

本論文の第 1 章では，力学系の基本的な概念や先行研究につて説明している．第 2 章が本論文の主要部分であり，2 次元微分同相写像のモジュライの研究である．Mを 2 次元可微分多様体とし，f をサドル型不動点p をもつC^3 級微分同相写像とする．また，p に同伴する n $(n \geq 2)$ 次のホモクリニック接触qを持つとする．n が偶数のときq を**片側接触**，n が奇数のときは**両側接触**という．構造安定である微分同相写像はヘテロクリニック接触やホモクリニック接触を持たない．一方，テロクリニック接触やホモクリニック接触を持つ微分同相写像は，構造不安定な微分同相写像の典型例である．

2 次元微分同相写像の場合，J. Palis (1978) はヘテロクリニック 2 次接触を持つ微分同相写像について，$\dfrac{\log|\gamma_1|}{\log|\mu_2|}$ がモジュラスであることを証明した．ここで，γ_1，μ_2 はそれぞれサドル型不動点 p_1，p_2 の縮小固有値と拡大固有値である．その後，R. Poshumus (1989) は，ホモクリニック 2 次接触をもつ場合にも Palis と同様の結果が成立することを証明した．さらに，そのモジュラスが無理数のときは，サドル型不動点の縮小固有値と拡大固有値がモジュライとなることを証明した．しかし，彼らの手法は片側接触の特性を本質的に利用

しているので，これを 3 次接触のような両側接触の場合に適用することは不可能である．

本学位論文申請者は, 3次ホモクリニック接触を持つ2次元微分同相写像のモジュライを, 適当な開条件の下で考察し，2 次接触の場合と同様の結果が成立することを証明した．ホモクリニック接触をもつ 2 次元微分同相写像の研究は，Palis が開始してから 40 年ほど経っている．しかし，その間に得られた結果はすべて片側接触に関するものであり，両側接触を持つ微分同相写像のモジュライに関する結果は，次の定理が最初のものである．

定理 1. f_0，f_1 を閉曲面 M 上の微分同相写像とし, p_0，p_1 をそれぞれのサドル型不動点とする．また，q_0，q_1 をそれぞれ p_0，p_1 に同伴するホモクリニッ 3 次接触で，次の条件をみたすものとする．ただし，$i = 0, 1$ とする．

- p_i の十分小さな近傍 $U(p_i)$ 上で f_i は線形化できる．
- f_0，f_1 は $h(p_0) = p_1$，$h(q_0) = q_1$ をみたす M 上の同相写像 h によって位相共役になる．

γ_i，μ_i を $0 < |\gamma_i| < 1 < |\mu_i|$ をみたす $Df_i(p_i)$ の固有値とする．また，$|\mu_i| = 1 + \varepsilon_i$ とおく．$\varepsilon_0, \varepsilon_1$ がどちらも十分に小さく，f_i が p_i に関してある種の適合条件をみたすとき，次が成り立つ．

(1) $\dfrac{\log|\gamma_0|}{\log|\mu_0|} = \dfrac{\log|\gamma_1|}{\log|\mu_1|}$.

(2) さらに $\dfrac{\log|\gamma_0|}{\log|\mu_0|}$ が無理数ならば，等式 $\gamma_0 = \gamma_1$，$\mu_0 = \mu_1$ が成立する．

ここで f_i の p_i に関する適合条件とは，サドル型不動点 p_i の不安定多様体 $W^u(p_i)$ と安定多様体 $W^s(p_i)$ の $U(p_i)$ における位置関係を決めるための条件である．

第 3 章では，3 次元多様体上の微分同相写像 f で不動点 p に同伴するホモクリニックリニック 2 次接触 q を持つものを考察している．特に，その不動点 p における微分 $Df(p)$ が虚数の拡大固有値と実数の縮小固有値をもつとき，p は**サドル焦点**とよばれる．本論文では次の定理を証明した．

定理 2. f_0，f_1 を 3 次元多様体 M 上の微分同相写像とし，p_0，p_1 をそれぞれのサドル焦点とする．また，q_0，q_1 をそれぞれ p_0，p_1 に同伴するホモクリニック 2 次接触で，次の条件をみたすものとする．ただし，$i = 0, 1$ とする．

- p_i の十分小さな近傍 $U(p_i)$ 上で f_i は線形化できる．
- p_i は虚数数の拡大固有値 $e^{\pm\sqrt{-1}\theta_i}$ と実数の縮小固有値 γ_i を持つ．
- f_0，f_1 は $h(p_0) = p_1$，$h(q_0) = q_1$ をみたす M 上の同相写像 h によって位相共役になる．

このとき，次が成り立つ．

(1) $\dfrac{\log|\gamma_0|}{\log|\mu_0|} = \dfrac{\log|\gamma_1|}{\log|\mu_1|}$.

(2) $\theta_0 = \theta_1 \mod 2\pi$または$\theta_0 = -\theta_1 \mod 2\pi$.

定理 3. 定理 2 の仮定に加え，$\theta/2\pi$ が無理数であるとする．このとき，次が成り立つ．
(1) $\gamma_0 = \gamma_1$.
(2) 制限写像 $h|_{W^u_{loc}(p_0)}: W^u_{loc}(p_0) \to W^u_{loc}(p_1)$ は一意的に決まる線形共形写像である．

3　審査の結果

定理 1 が対象としている両側ホモクリニック接触を持つ 2 次元微分同相写像に対するモジュライの存在は，本学位論文申請者の結果が最初のものである．その証明のため，申請者は両側接触に適用できる独自の手法を開発した．片方の微分同相写像の持つ微細な特徴に注目し，写像を使った作用を繰り返し適用することにより，その特徴を増幅させた．この結果を利用して，位相共役写像によって保存される性質が得られた．申請者は，この性質を使って，定理 1 の条件をみたす微分同相写像がモジュライを持つことを証明した．定理 2, 3 が対象としている 3 次微分同相写像のモジュライの研究はこれまでもあったが，Y. Nishizawa (2008) の結果を利用した本論文の証明法は全く新しいものである．特に，折り畳み曲線と呼ばれる不安定多様体上の曲線列を定義し，その極限として得られる直線分が，位相共役写像により他方の微分同相写像の不安定多様体上にある直線分に写されることを証明した．これにより，位相共役写像が，ある種の直線分を保存するという不思議な性質を持っていることが分かった．応用として，位相共役写像の不安定多様体への制限が，定理 3 (2) のような剛性を持っていることも証明できた．

本学位論文申請者はこの主題に関連した研究を続けており，離散力学系へのさらなる貢献が期待できる．以上の理由により，本論文は博士（理学）の学位に十分値するものと判断した．

4　最終試験の結果

最終試験は，本学の学位規則に従い平成 31 年 1 月 7 日に公開で行われた．40 分間の研究結果の発表後，10 分間の質疑応答が行われた．終了後，数理科学専攻（数理情報科学専攻）において判定会議を行った結果，合格と判定された．