氏　　　　名	橋本　忍（ハシモト　シノブ）
所　　　　属	理工学研究科　数理情報科学専攻
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	理工博　第 283 号
学位授与の日付	平成 31 年 3 月 25 日
課程・論文の別	学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題名	Moduli of diffeomorphisms with homoclinic tangencies ホモクリニック接触を持つ微分同相写像のモジュライ（英文）
論文審査委員	主査　教　授　相馬　輝彦 委員　教　授　横田　佳之 委員　准教授　酒井　高司 委員　教　授　桐木　紳（東海大学理学部）

【論文の内容の要旨】

学位論文要旨（博士（理学））

論文著者名　橋本　忍

論文題名：Moduli of diffeomorphisms with homoclinic tangencies
（邦題）：ホモクリニック接触を持つ微分同相写像のモジュライ（英文）

研究の背景

本論文は多様体上の微分同相写像の離散力学系に関する研究である．多様体上の微分同相写像による反復作用を考える．2 つの微分同相写像 f, g に対して，f の反復による軌道と g の反復による軌道で本質的に同じ力学的挙動をもつものが一対一に対応するとき，f と g は**位相共役**であるという．本研究の動機は，与えられた微分同相写像 f と位相共役な微分同相写像にはどのようなものがあるか，という問題である．

多様体 M 上の微分同相写像全体の空間における f の近傍 $\mathcal{N}(f)$ で，$\mathcal{N}(f)$ の任意の要素 g が f と位相共役となるようなものが存在するとき，f は**構造安定**であるという．f に任意に小さい摂動を加えることにより，f とは位相共役ではない微分同相写像 f' が得られるならば，f は構造不安定である．

異なる 2 つのサドル型不動点 p_1, p_2 に対して，q が p_1 の安定多様体 $W^s(p_1)$ と p_2 の不安定多様体 $W^u(p_2)$ の非横断的共通点であるとき，q は **heteroclinic 接触**とよばれる．サドル型不動点 p に対して，q が p の安定多様体 $W^s(p)$ と不安定多様体 $W^u(p)$ の非横断的共通点であるとき，q は **homoclinic 接触**とよばれる．接触 q の十分小さな近傍において，安定多様体が不安定多様体上の n $(n \geq 2)$ 次関数のグラフとして表されるとき，q を n **次接触**という．n が偶数のときは片側接触，n が奇数のときは両側接触という．構造安定である微分同相写像は heteroclinic 接触や homoclinic 接触を持たない．一方，構造不安定な微分同相写像の典型的な例は heteroclinic 接触や homoclinic 接触を持つ．構造不安定な微分同相写像 f に対して，$g \in \mathcal{N}(f)$ が f と位相共役かどうかを決定するために位相不変量は不可欠である．このような位相不変量を **moduli** という．

多様体 M は $\dim M = 2$ であるとする．このとき，Palis [1] は heteroclinic 2 次接触をもつ微分同相写像について，$\dfrac{\log|\lambda_1|}{\log|\mu_2|}$ の値が modulus になることを証明した．ここで，λ_1，μ_2 は 2 つのサドル型不動点 p_1, p_2 それぞれの縮小固有値と拡大固有値である．その後，Poshumus [2] は homoclinic 2 次接触をもつ場合にも Palis と同様の結果が成立することを証明した．さらに，その modulus が無理数であるならば，サドル型不動点の縮小固有値と拡大固有値が共に moduli となることを示した．しかし，

彼らの手法は片側接触の位相的性質を本質的に利用しているので，これを 3 次接触のような両側接触の場合に適用することは不可能である．

主結果

本論文では homoclinic 接触を持つ微分同相写像の moduli を研究する．第 1 章では基礎となる定義や諸概念，研究の動機について述べる．第 2 章では閉曲面上の微分同相写像の moduli について，第 3 章では 3 次元多様体上の微分同相写像の moduli についての研究結果を紹介する．

第 2 章の主結果は次の定理である．この定理の主張は，2 次接触の場合と同様の結果が 3 次接触の場合にも成立することである．Homoclinic 接触をもつ 2 次元微分同相写像の moduli の研究は，Palis が始めてから 40 年ほど経っている．しかし，本学位申請者が知る限り，現在までに得られた結果は，そのすべてが片側接触に関するものであり，両側接触を持つ微分同相写像の moduli に関しては，次の結果が最初のものである．

定理 1. f_0, f_1 を閉曲面 M 上の微分同相写像とし，p_0, p_1 をそれぞれのサドル型不動点とする．また，q_0，q_1 をそれぞれ p_0，p_1 に同伴する homoclinic 3 次接触で，次の条件をみたすものとする．ここで $i = 0, 1$ とする．

- p_i の十分小さな近傍 $U(p_i)$ 上で f_i は線形化できる．
- f_0，f_1 は $h(p_0) = p_1$，$h(q_0) = q_1$ をみたす M 上の同相写像 h を介して位相共役である．

λ_i，μ_i を $0 < |\lambda_i| < 1 < |\mu_i|$ をみたす $Df(p_i)$ の固有値とする．また，$|\mu_i| = 1 + \varepsilon_i$ とおく．これらの ε_i が十分に小さく，f_i が p_i に関してある種の adaptable condition をみたすならば，次が成り立つ．

(1) $\dfrac{\log|\lambda_0|}{\log|\mu_0|} = \dfrac{\log|\lambda_1|}{\log|\mu_1|}$.

(2) さらに $\dfrac{\log|\lambda_0|}{\log|\mu_0|}$ が無理数ならば，$\lambda_0 = \lambda_1$，$\mu_0 = \mu_1$ が成立する．

ここで f_0 の p_0 に関する adaptable condition とは，サドル型不動点 p_0 の不安定多様体 $W^u(p_0)$ と安定多様体 $W^s(p_0)$ の $U(p_0)$ における位置関係に関する条件である．この位置関係は，q_0 の近傍における f_0^N の局所座標表示に現れる係数の符号と μ_0，λ_0 の符号の組合せによって決定される．ただし，N は $f_0^N(q_0) \in U(p_0)$ をみたす自然数

とする．組合せの総数は 16 通りであるが，そのうちの 9 通りが adaptable condition をみたす．

第 3 章では，3 次元多様体上の homoclinic 2 次接触を持つ微分同相写像で，その不動点 p における微分 $Df(p)$ が虚数の拡大固有値と実数の縮小固有値をもつものについて研究する．このような不動点は**サドル焦点**とよばれる．

次の 2 つの定理では，上記のような 3 次元多様体上の微分同相写像に対し，前述の定理 1 と同様の結果が成立することを主張している．

定理 2. f_0, f_1 を 3 次元多様体 M 上の微分同相写像とし，p_0, p_1 をそれぞれのサドル焦点とする．また，q_0，q_1 をそれぞれ p_0，p_1 に同伴する homoclinic 2 次接触で，次の条件をみたすものとする．ここで $i = 0, 1$ とする．

- p_i の十分小さな近傍 $U(p_i)$ 上で f_i は線形化できる．
- p_i は複素数の拡大固有値 $r_i e^{\pm\sqrt{-1}\theta_i}$ $(\theta_i \neq 0 \mod \pi)$ と正の実数の縮小固有値 λ_i を持つ．
- f_0，f_1 は $h(p_0) = p_1$，$h(q_0) = q_1$ をみたす M 上の同相写像 h を介して位相共役である．

このとき，次が成り立つ．

(1) $\dfrac{\log \lambda_0}{\log r_0} = \dfrac{\log \lambda_1}{\log r_1}$.

(2) $\theta_0 = \theta_1 \mod 2\pi$ または $\theta_0 = -\theta_1 \mod 2\pi$.

定理 3. 定理 2 の仮定に加え，$\theta_0/2\pi$ が無理数であると仮定する．このとき，次が成り立つ．

(1) $\lambda_0 = \lambda_1$ かつ $r_0 = r_1$.

(2) 制限写像 $h|_{W^u_{\mathrm{loc}}(p_0)} : W^u_{\mathrm{loc}}(p_0) \to W^u_{\mathrm{loc}}(p_1)$ は一意的に決まる線形共形写像である．

参考文献

[1] J. Palis, A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability, *Dynamical systems*, Vol. III–Warsaw, pp. 335–346, Astérisque, No. 51, Soc. Math. France, Paris, 1978.

[2] R. A. Posthumus, Homoclinic points and moduli, *Ergodic Theory Dynam. Sys.* **9** (1989), no. 2, 389–398.