首都大学東京大学院理工学研究科

物理学専攻修士論文

ダイクォーク模型における重いバリオンの励起エネルギー及びダイクォークの性質

隈川 健斗

指導教員 安田 修

平成 31 年 1 月 10 日

概要

近年、ハドロン物理ではチャームクォークやボトムクォークといった重いクォークを含むハドロンが実験的に発見されており、エキゾチックハドロンといった現在のクォーク模型では説明が困難なハドロンも発見されているため、単純なハドロン内部構造を見直す必要がある。内部構造の候補としてマルチクォーク構造やハドロン分子構造等があげられるが、特に、重いクォークを 1 つ含むバリオンでは、2 つの軽いクォークがダイクォークとしてふるまい、クォーク・ダイクォークの束縛状態として記述されることが期待されているように、ダイクォークの存在や性質に注目が集まっている。

QCD の基本的かつ重要な性質として、QCD においてクォークやグルーオンがカラー電荷を持つことがあげられる。カラー電荷は SU(3) の基本表現で表されるが、理解のため光の三原色から"赤色"、"青色"、"緑色"として呼ばれている。しかし、クォークやグルーオンは単体では観測されず、カラー電荷が"白色"の状態のみでしか観測されない。これは、クォークの閉じ込め現象を説明するものである。この"白色"の状態はクォークと反クォークで構成するメソンと、クォーク 3 つで構成されるバリオンがあげられる。

ダイクォークはバリオン内の 2 つのクォークの仮想的な状態で表すことができる複合粒子であり、バリオンをクォーク・ダイクォーク描像で見ることができる。ここでダイクォークのカラー電荷について考えると、バリオン全体で"白色"である必要があり、クォークのカラー電荷は対称である $\mathbf{3}$ であるので、"白色"にするためにはダイクォークのカラー電荷を反対称である $\bar{\mathbf{3}}$ を取る必要がある。これは、クォーク ($\mathbf{3}$) と反クォーク ($\bar{\mathbf{3}}$) で構成されるメソンのカラー構造と同じである。

本研究では、上で記述したカラー近似よりダイクォークを点粒子のように扱う Point-like model と、ダイクォークに量子的な広がりを持たせた Sizable model の 2 つのモデルを考える。Point-like model ではメソンと同じカラー構造を取ることから、重いクォーコニウムをよく再現するポテンシャルを用いて計算を行う。その際、ポテンシャルパラメータをチャーモニウムの実験値から決め、この値を用いてチャームクォークを 1 つ含むバリオン Λ_c の励起エネルギーを計算する。すると、同じカラー構造で仮定をしているにもかかわらず、Λ_c 粒子の実験値を再現することはできなかった。

Point-like model の改善策として考えた Sizable model では、ダイクォークの広がりパラメータ β を Λ_c 粒子の 1p 軌道の励起エネルギーを再現するように求めた。このとき、パラメータは $\beta = 1.0$[fm] となり、この結果からダイクォークの平均二乗直径は 1.2[fm] 程度という計算結果が得られた。

この両模型のパラメータを求めた後、ヘビークォークを 1 つ含む他のバリオン (Λ_h ,Ξ_h ,Σ_h ,${\Xi_h}'$,Ω_h) についてダイクォーク質量と励起エネルギーの計算を行い、実験値と比較することを系統的に見た。また、最近発見されたチャームクォークを 2 つ持つバリオン Ξ_{cc} についても計算を行い、励起スペクトルの予言を行った。

目 次

第1章　導入

1.1　ハドロン

ハドロンは、クォークとグルーオンで構成される複合粒子である [1, 2]。ハドロンを構成するクォーク間では、グルーオンを介することによって強い相互作用をする。また、ハドロンは大きく分けてバリオンとメソンに分けることができる。バリオンとはクォーク3つで構成され全角運動量が半整数を持つフェルミオンであり、メソンとはクォークと反クォークで構成され全角運動量が整数であるボソンである。例として、バリオンには陽子や中性子などがあり、メソンには湯川秀樹氏が予言したパイオンなどがあげられる。
これらのハドロンを分類するために、1964年に Gell-Mann と Zweig によって現在のクォークモデルが提唱された。クォークモデルではハドロンの種類を同定する量子数があり、その量子数はクォークが担っている。その量子数として、全角運動量 J、パリティ対称性 P で表現できる J^P と、フレーバー量子数と呼ばれる量子数がある。フレーバー量子数には、アイソスピン I、アイソスピン第三成分 I_3、チャーム C、ストレンジネス S、トップ T、ボトム B' といった量子数があげられる。これらの量子数とは別に、バリオンとメソンを見分ける量子数としてバリオン数 B がある。バリオン数が1の場合バリオンであり、0の場合はメソンである。表1.1にクォークと量子数の関係をまとめる。

表 1.1: クォークの量子数。反クォーク $\bar{q}$ は反対の符号の量子数を持つ。

クォーク	電荷 Q	I	I_3	C	S	T	B'	B
u	$+2/3$	$1/2$	$+1/2$	0	0	0	0	$+1/3$
d	$-1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0	0	0	$+1/3$
c	$+2/3$	0	0	$+1$	0	0	0	$+1/3$
s	$-1/3$	0	0	0	-1	0	0	$+1/3$
t	$+2/3$	0	0	0	0	$+1$	0	$+1/3$
b	$-1/3$	0	0	0	0	0	-1	$+1/3$

これらの量子数を用いてハドロンを分類すると以下のようになる。

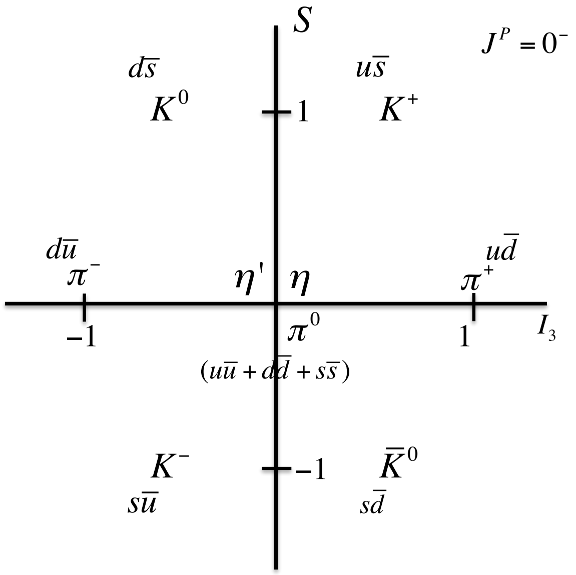


図 1.1: 擬スカラーメソン 8 重項の分類。

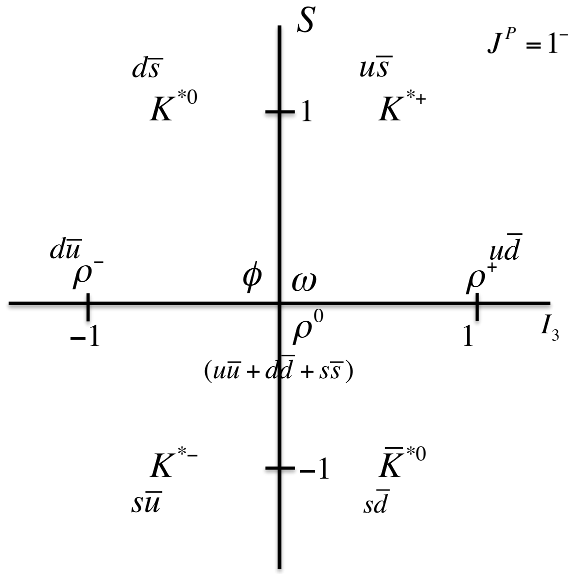


図 1.2: ベクターメソン 8 重項の分類。

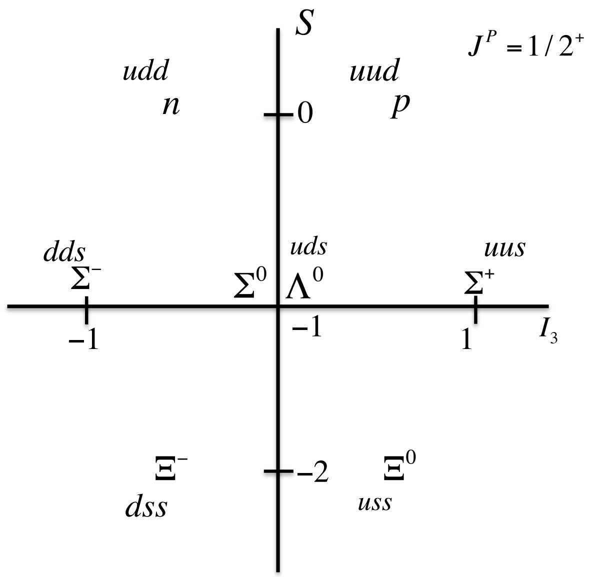


図 1.3: バリオン 8 重項の分類。

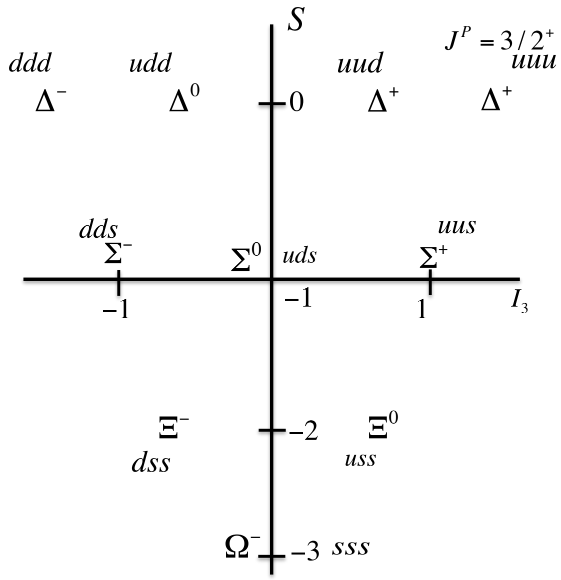


図 1.4: バリオン 10 重項の分類。

しかし、近年ではクォークモデルでは説明できないようなハドロン (テトラクォーク、ペンタクォークなど) の存在の候補が発表されているため、クォークモデルに基づいた単純なハドロン内部構造について見直す必要があり、様々な議論がされている。

1.2 QCD

量子色力学 (QCD) は、標準模型のうち強い相互作用を記述する場の量子論である。クォークやグルーオンは、ゲージ群 SU(3) に基づくカラー電荷と呼ばれる量子数を持つ。ディラック場のクォーク $q(x)$ とゲージ場であるグルーオン A_μ が相互作用する QCD ラグランジアン密度は次のように記述できる [3, 4]。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q \tag{1.1}$$

ただし、SU(3) ゲージ場の強さは

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_{\mathrm{s}}[A_\mu, A_\nu], \tag{1.2}$$

共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_{\mathrm{s}}A_\mu \tag{1.3}$$

である。g_{s} は強い相互作用のゲージ結合定数である。SU(3) ゲージ場 A_μ を SU(3) の生成子 $T^a (a = 1, 2, \cdots, 8)$ を用いて

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{8} A_\mu^a T^a \tag{1.4}$$

として、(1.2) を T^a で展開すると

$$G_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{8}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_{\mathrm{s}}\sum_{b,c=1}^{8} f^{bca}A_\mu^b A_\nu^c\right)T^a \tag{1.5}$$

となる。このとき

$$[T^b, T^c] = i\sum_{a=1}^{8} f^{bca}T^a \tag{1.6}$$

の関係を用いており、f^{bca} は SU(3) の構造定数である。ディラック場であるクォーク q はカラーの添字 $(i = 1, 2, 3)$ を持つ。また、ゲージ場 A_μ^a は SU(3) の随伴表現の添字 $(a = 1, 2, \cdots, 8)$ を持つ。

この添字で示す通り、クォークは SU(3) の基本表現であるカラー $\mathbf{3}$ を作り、反クォークはカラー $\bar{\mathbf{3}}$ をとる。わかりやすく $\mathbf{3}$ を光の三原色である"赤色"、"青色"、"緑色"と呼び、それに伴い $\bar{\mathbf{3}}$ を光の三原色の"補色"として対応させる。カラーを持たない状態を光の三原色の考えを借りて"白色"と呼び、そのときの基本表現は $\mathbf{1}$ である。また、グルーオンもカラー $\mathbf{8}$ を持ち、これは"白色"を除く"三色"と"補色"の 8 つの状態がある。この、クォークの持つカラーはゲージ粒子であるグルーオンを介して行われ、これが強い相互作用の元となっている。

QCD は高エネルギー領域 (近距離領域) のとき、相互作用が弱くなるという性質を持つ。この性質を漸近的自由性という。漸近的自由性のため、低エネルギー領域 (遠距離領域) では相互作用が強くなり摂動論を用いることができない。このため、低エネルギー領域では摂動論では記述できない非摂動論的現象が現れる。低エネルギー QCD の非摂動論的現象として、クォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れがあげられる。今研究では特に、カラー電荷に関わるクォークの閉じ込めについて述べる。

クォークの閉じ込めとは、カラー電荷を持つクォークを単体で取り出すことができない現象である。これはカラー電荷によるものであり、カラー電荷が"色"を持った状態では観測されず、"白色"となるカラー 1 重項の状態でしか観測されない。実際、実験的に観測されているのはメソンやバリオンといったカラー 1 重項のハドロンのみしか観測されていない。ここで、メソンとバリオンをカラー表現で表す。

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{1.7}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \tag{1.8}$$

例として、メソンの線形の閉じ込めポテンシャルについて考えていく。低エネルギー QCD では、グルーオン場はクォーク・反クォーク間でカラーを媒介するストリングを作る。この距離を引き離すことで非常に大きなエネルギーを与えても、クォークを単体で取り出すことはできず、その間の真空から新たにクォーク・反クォークの対生成が起こり新しいメソンが 1 つ作られる。これは、引き離す距離を伸ばすよりも、クォーク・反クォークの対生成して 2 つの"白色"であるメソンになる方がエネルギー的に得であるからである。

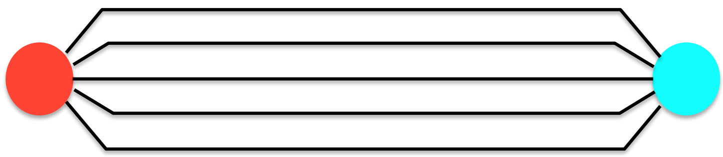


図 1.5: クォーク・反クォーク間の線形の閉じ込めポテンシャルのストリングの概形。

第2章　ダイクォーク模型

今研究では、2つのダイクォーク模型を考える。1つ目は、ダイクォークを点粒子のように扱うPoint-like model[5]、2つ目はダイクォークにサイズを取り入れるSizable modelである[7]。なお、ここではスピン-軌道相互作用やスピン-スピン相互作用といった微細構造については考えずQCDのカラー近似のみを用いることによって、これらのモデルにおけるバリオンの大域的構造を見る。

2.1　ダイクォーク

ダイクォークはバリオン中の2つのクォークが仮想的な結合状態をする粒子であり、3つ目のクォークと強い相互作用をする単一の粒子として扱われる[8]。このようなバリオンのモデルはクォーク・ダイクォークモデルと呼ばれており、ハドロン構造を解明する候補の1つとしてあげられている。ダイクォークは2つのクォークの相対座標を変数としてとり、この変数はクォークモデルではρモードに対応している。
ダイクォークのカラー表現は、クォーク2つで構成しているので[1]

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\bar{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6} \tag{2.1}$$

である。ここでバリオンはQCDより"白色"、すなわちカラー1重項($\mathbf{1}$)でなければならず、ダイクォークのカラーが対称である$\mathbf{6}$の場合、クォーク$\mathbf{3}$とのカラー表現は

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{6}=\mathbf{8}\oplus\mathbf{10} \tag{2.2}$$

となり、カラー1重項を作ることができない。ダイクォークのカラーが反対称である$\bar{\mathbf{3}}$の場合では

$$\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8} \tag{2.3}$$

となり、カラー1重項がでてくるので、ダイクォークのカラーは反対称$\bar{\mathbf{3}}$と仮定する。

今研究では、2つのクォークと1つのチャーム(c)やボトム(b)といったヘビークォークで構成されるバリオンについて考える。このとき、ヘビークォークでない2つのクォークでダイクォークを構成していることを仮定し、ヘビークォークとダイクォークの2体系として議論を進める。
ダイクォークを構成するクォークをq_1、q_2として、ダイクォークの波動関数を

$$\Psi(q_1,q_2)=\Psi_{\rm color}\Psi_{\rm flavor}\Psi_{\rm spin} \tag{2.4}$$

と記述する。$\Psi_{\rm color}$はダイクォークのカラー、$\Psi_{\rm flavor}$はダイクォークを構成するクォークのフレーバー、$\Psi_{\rm spin}$はダイクォークのスピン関数である。

はじめに、ダイクォークのカラーから議論をする。先ほど示したように、バリオンやメソンはQCDにおいて、カラー1重項である必要がある。したがって、ダイクォークのカラーは反対称である$\bar{\mathbf{3}}$と仮定する必要がある。
次に、ダイクォークのスピンやフレーバーについて考える。ダイクォークを構成している2つのクォークは、フェルミ粒子であることからPauliの排他原理より波動関数の積(2.4)は反対称である必要がある。ダイクォークのカラーは反対称であることが仮定より決まっているため、ダイクォークのスピンとフレーバーの組み合わせは以下の通りとなる。

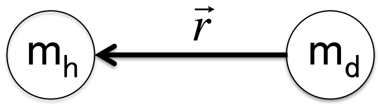
表 2.1: ダイクォークの内部自由度の組み合わせ。

	ダイクォークスピン	カラー	フレーバー
スカラーダイクォーク	反対称 (0)	反対称 ($\bar{3}$)	反対称 ($\bar{3}$)
ベクトルダイクォーク	対称 (1)	反対称 ($\bar{3}$)	対称 (6)

2.2 Point-like model

2.2.1 ハミルトニアン

Point-like modelでは、今回考えるバリオン内のダイクォークの相対座標の変数を0、すなわち質量を持つ点粒子として仮定し、右図のようなヘビークォーク(以下クォークと記述)とダイクォークの2体系として考えていく。[5]
はじめに、クォークとダイクォークの質量、位置、運動量を



$$\begin{aligned} \text{クォーク} &: (m_h, \vec{r}_1, \vec{p}_1) \\ \text{ダイクォーク} &: (m_d, \vec{r}_2, \vec{p}_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

とする。また、クォーク・ダイクォーク間のポテンシャルを$V_{3\bar{3}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$とすると、この系のハミルトニアン$\hat{H}$は

$$\hat{H} = m_h + m_d + \frac{\vec{p}_1^2}{2m_h} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_d} + V_{3\bar{3}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{2.6}$$

と記述できる。
この系のハミルトニアン$\hat{H}$を重心系と相対系に分離する。ここで、この系の重心座標$\vec{R}$、全質量M、相対座標$\vec{r}$と換算質量μを次のように定義する。

$$\vec{R} = \frac{m_h\vec{r}_1 + m_d\vec{r}_2}{M} \tag{2.7}$$

$$M = m_h + m_d \tag{2.8}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{2.9}$$

$$\mu = \frac{m_h m_d}{m_h + m_d} \tag{2.10}$$

(2.7)∼(2.10) を用いてクォークとダイクォークのそれぞれの位置を重心相対系で表すと

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_d}{M}\vec{r} \tag{2.11}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_h}{M}\vec{r} \tag{2.12}$$

となる。また、重心系と相対系それぞれの運動量を次のように定義する。

$$\vec{p}_R = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \tag{2.13}$$

$$\vec{p}_r = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \tag{2.14}$$

(2.13)、(2.14) を用いて、運動量 $\vec{p}_j$ を重心相対系で表すと

$$\begin{aligned}\vec{p}_j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}_j}\frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_j}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \\ &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}_j}\vec{p}_R + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_j}\vec{p}_r \qquad (j = 1, 2)\end{aligned} \tag{2.15}$$

と記述できるため、重心相対系でのクォークとダイクォークそれぞれの運動量は

$$\vec{p}_1 = \frac{m_h}{M}\vec{p}_R + \vec{p}_r \tag{2.16}$$

$$\vec{p}_2 = \frac{m_d}{M}\vec{p}_R - \vec{p}_r \tag{2.17}$$

である。
以上より、(2.16)、(2.17) を (2.6) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\vec{p}_1^2}{2m_h} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_d} &= \frac{1}{2m_h}\left(\frac{m_h^2}{M^2}\vec{p}_R^2 + \frac{2m_h}{M}\vec{p}_R\cdot\vec{p}_r + \vec{p}_r^2\right) + \frac{1}{2m_d}\left(\frac{m_d^2}{M^2}\vec{p}_R^2 - \frac{2m_d}{M}\vec{p}_R\cdot\vec{p}_r + \vec{p}_r^2\right) \\ &= \frac{\vec{p}_R^2}{2M} + \frac{\vec{p}_r^2}{2\mu}\end{aligned} \tag{2.18}$$

となるので、ハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = m_h + m_d + \frac{\vec{p}_R^2}{2M} + \frac{\vec{p}_r^2}{2\mu} + V_{3\bar{3}}(\vec{r}) \tag{2.19}$$

と重心系と相対系に分離できる。重心系のハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{cm}}$、相対系のハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{rel}}$ と定義すると、(2.19) は

$$\hat{H}_{\mathrm{cm}} = \frac{\vec{p}_R^2}{2M} \tag{2.20}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{rel}} = m_h + m_d + \frac{\vec{p}_r^2}{2\mu} + V_{3\bar{3}}(\vec{r}) \tag{2.21}$$

と分けることができる。

今研究では励起状態のエネルギーについてみるため、重心系については考えず相対系のハミルトニアン (2.21) を用いて計算を進める。計算を行う際、(2.21) の極座標変換を行う必要がある。

相対座標 $\vec{r}$ の大きさを $|\vec{r}| = \sqrt{{x_r}^2 + {y_r}^2 + {z_r}^2} = r$ と定義する。はじめに、運動量の二乗を極座標変換すると

$$\begin{aligned} \vec{p}_r^2 &= -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {z_r}^2} \right) \\ &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \right] \end{aligned} \tag{2.22}$$

となる。ここで、軌道角運動量演算子の二乗を $\hat{L}^2$ と定義する。$\hat{L}^2$ は

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \tag{2.23}$$

と記述でき、両辺を $-\hbar^2$ で割ると

$$-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{2.24}$$

という関係式を得られる。(2.23) を (2.22) に代入すると

$$\vec{p}_r^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \tag{2.25}$$

となる。これを今回用いるハミルトニアン (2.21) に代入すると

$$\hat{H}_{\mathrm{rel}} = m_h + m_d - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V_{3\bar{3}}(r) \tag{2.26}$$

となる。

2.2.2 波動関数

今回考えるモデルでのバリオンの全角運動量 $\mathbf{J}$ を軌道角運動量 $\mathbf{L}$、ダイクォークのスピン角運動量 $\mathbf{S}_{\mathrm{Diquark}}$、クォークのスピン角運動量 $\mathbf{S}_{\mathrm{Quark}}$ であらわすと

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_{\mathrm{Diquark}} + \mathbf{S}_{\mathrm{Quark}} \tag{2.27}$$

である。しかし今研究では、クォーク・ダイクォークのスピン-軌道相互作用やスピン-スピン相互作用については考えず、バリオンのカラー近似のみを考慮している。そのため、励起エネルギーについて見ていく今研究で一番”よい”量子数は軌道角運動量 $\mathbf{L}$ である。したがって、今回は波動関数を

$$|\mathbf{\Psi}\rangle = |S\rangle + |P\rangle + |D\rangle + \cdots \tag{2.28}$$

$$|\mathbf{L}\rangle = |\ell\rangle_L |R\rangle \tag{2.29}$$

のように分けて考える。
ここで、ハミルトニアン (2.26) にある $\hat{L}^2$ の項について考える。軌道角運動量量子数で書ける状態 $|\ell\rangle$ による $\hat{L}^2$ の固有値は

$$\hat{L}^2|\ell\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|l\rangle \tag{2.30}$$

である。ℓ はバリオンの相対座標の軌道角運動量量子数である。ここでは $\ell = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、s,p,d,$\cdots$ 軌道としていく。

2.2.3 有効ポテンシャル

Point-like model ではダイクォークを点粒子として考えており、クォーク・ダイクォークの 2 体系である。また、このモデルでのバリオンについてはメソンのカラー構造と同じであると考えており、今研究ではカラー近似のみを考えているため、この仮定からメソンと同じポテンシャルを用いて考える事ができる。
メソンのポテンシャルは

$$V_{3\bar{3}}(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{r}\hbar c + kr + V_0 \tag{2.31}$$

で再現される事が現象論的に知られている。α_{s} は強い相互作用によるクーロン項のパラメータ、k は閉じ込め項の string tention と呼ばれるパラメータ、V_0 はポテンシャルのフィットパラメータである。今研究では、励起エネルギーについて注目して計算を行うため、V_0 の寄与については考慮せずに進める。
したがって、今回未知であるポテンシャルパラメータは α_s と k の 2 つである。このパラメータをメソンであるチャーモニウム ($c\bar{c}$)、ボトニウム ($b\bar{b}$) の実験値から求める。この時、チャームクォークの質量 m_c、ボトムクォークの質量 m_b はそれぞれ

$$m_c = 1.5\left[\mathrm{GeV/c^2}\right] \qquad m_b = 4.0\left[\mathrm{GeV/c^2}\right] \tag{2.32}$$

として計算を行う。その結果、各々のパラメータの値は

$$\alpha_{\mathrm{s}} = 0.4 \qquad k = 0.9\,[\mathrm{GeV/fm}] \tag{2.33}$$

のとき実験値を再現する事ができた [5]。このモデルの仮定として、今回考えるバリオンのカラー構造はメソンと同様のカラー構造であるので、このパラメータ値を用いればバリオンの実験値に対しても再現性を示すはずである。

このポテンシャル (2.31) を有効ポテンシャルとする。今回考える相対座標系の動径方向の Schrödinger 方程式は (2.26) より

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\hat{L}_\lambda^2}{2\mu r^2} + V_{3\bar{3}}(r)\right]R(r) = E_{\mathrm{rel}}R(r) \tag{2.34}$$

ここで、$R(r) = \chi(r)/r$ とすると

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hat{L}_\lambda^2}{2\mu r^2} + V_{3\bar{3}}(r)\right]\chi(r) = E_{\mathrm{rel}}\chi(r) \tag{2.35}$$

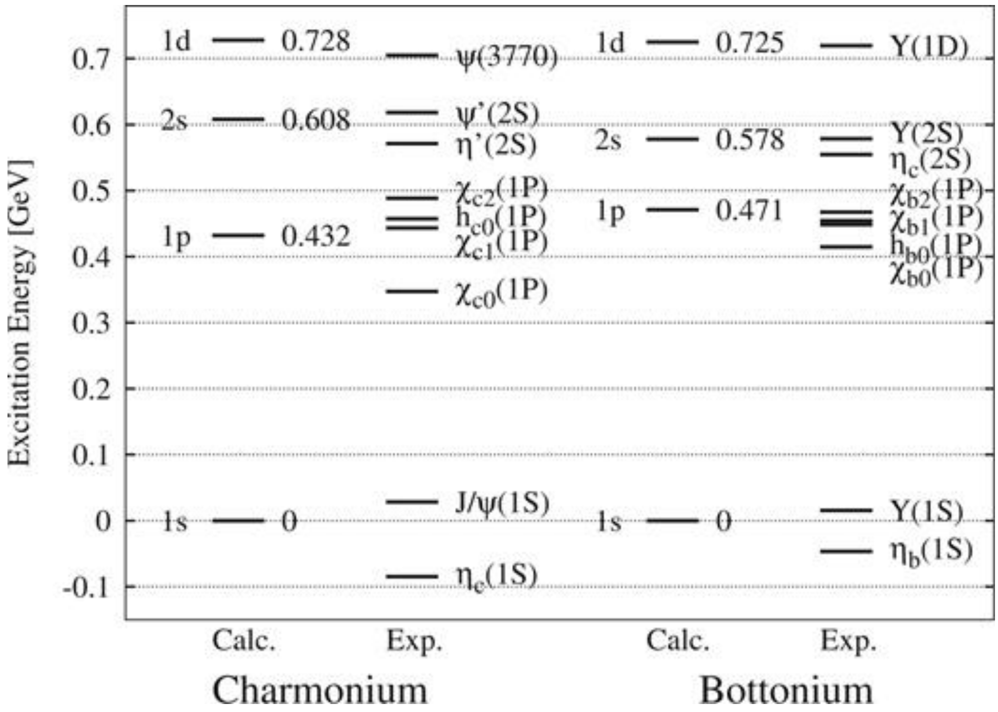


図 2.1: クォーコニウムを用いて、実験値を再現するようにポテンシャルパラメータ α_s、k を決めた。[5] より引用。

である。今回の実験値の再現性の確認として、チャーモニウムと対応させるためにチャームクォークを 1 つ含む Λ_c 粒子を用いる。その際、ダイクォークの質量は

$$m_d = 0.5[\mathrm{GeV/c^2}] \tag{2.36}$$

として計算を行う。図 2.2 は Λ_c 粒子の励起スペクトルの計算値と実験値の比較である。左から $k = 0.9[\mathrm{GeV/fm}]$ での計算値、$k = 0.5[\mathrm{GeV/fm}]$ での計算値、実験値となっている。$k = 0.9[\mathrm{GeV/fm}]$ の計算値と実験値を比較してみると、カラー構造が同じであることから用いたパラメータにもかかわらず、実験値を再現するような励起スペクトルを見る事はできなかった。そこで、実験値の 1p 軌道の励起スペクトル ($\Lambda_c(2595)1/2^-$,$\Lambda_c(2625)3/2^-$) を再現するようなパラメータ k の値を探してみる。このとき、1p 軌道 ($\Lambda_c(2595)1/2^-$,$\Lambda_c(2625)3/2^-$) のスピン加重平均をとって計算値に対する基準とする。Λ_c 粒子の場合、ダイクォークのスピンは 0 であるので、(2.27) は

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_{\mathrm{Quark}} \tag{2.37}$$

となる。(2.37) を両辺二乗すると

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^{\mathbf{2}}_{\mathrm{Quark}} + \mathbf{2}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{Quark}}) \tag{2.38}$$

より

$$2(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{Quark}}) = \mathbf{J^2} - \mathbf{L^2} - \mathbf{S}^{\mathbf{2}}_{\mathrm{Quark}} \tag{2.39}$$

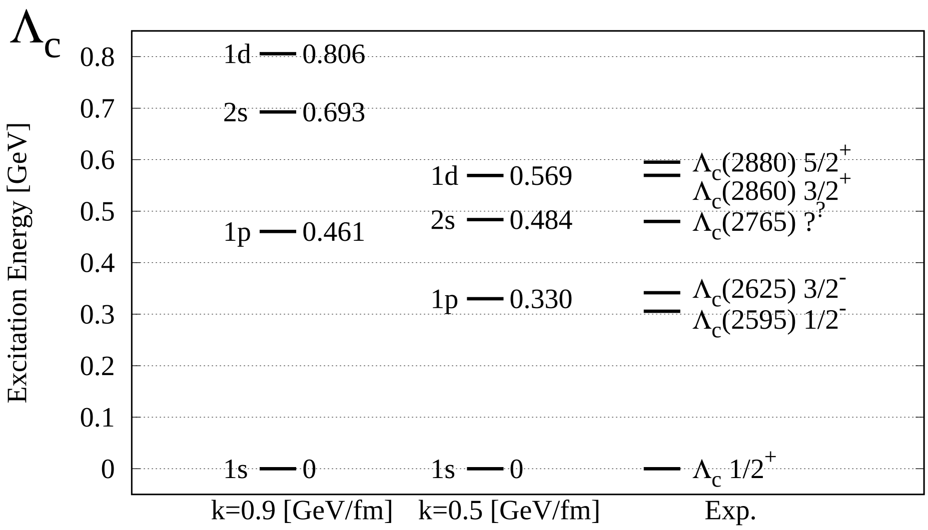


図 2.2: Point-like model による Λ_c の励起スペクトルの計算値と実験値の比較。クォーコニウムで求めたポテンシャルパラメータでの計算値では実験値を再現できなかった。実験値を再現するようにパラメータを変えたところ、k の値が約 1/2 倍の時に再現することがわかった。実験値は [6] より引用。

である。これを用いて、スピン-軌道相互作用の行列要素を計算する。1p 軌道の軌道角運動量量子数は $\ell = 1$、クォークのスピンは $s = 1/2$ であるので

$$2\langle \mathbf{J}, \mathbf{L}, \mathbf{S}_{\text{Quark}} | \mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_{\text{Quark}} | \mathbf{J}, \mathbf{L}, \mathbf{S}_{\text{Quark}} \rangle = J(J+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) = \begin{cases} -2 & (J = 1/2) \\ 1 & (J = 3/2) \end{cases} \tag{2.40}$$

となる。したがって、1p 軌道のスピン加重平均の励起エネルギーの総和を

$$E_{\text{ave}} = \frac{2}{3} E_{3/2^-} + \frac{1}{3} E_{1/2^-} \tag{2.41}$$

と取れば、摂動論的にスピン-軌道相互作用の影響を取り除くことができる。これを用いると、スピン-軌道相互作用の影響を取り除いた時の 1p 軌道の励起エネルギーは

$$E_{\text{ave}} \simeq 0.330[\text{GeV}] \tag{2.42}$$

であるので、この値を再現するパラメータ k の値を探すと、$k = 0.5[\text{GeV/fm}]$ の時に (2.42) を再現するようなスペクトルが確認できた。またそのとき、他の励起スペクトルについても実験値を再現するような励起スペクトルを確認できた。

2.2.4 励起スペクトルの質量依存性

今、ダイクォークやチャームクォークの質量はそれぞれ $m_d = 0.5[\text{GeV/c}^2]$、$m_c = 1.5[\text{GeV/c}^2]$ を用いて計算を行っており、その結果実験値を再現するようなポテンシャル

パラメータは

$$\alpha_{\mathrm{s}} = 0.4 \qquad k = 0.5[\mathrm{GeV/fm}] \tag{2.43}$$

となる事がわかった。しかし、今回はカラー近似のみを用いているので、カラーに依るポテンシャルパラメータ k の値は不変である事が望ましい。今計算では、ダイクォークやヘビークォークの質量を自ら与えた値を用いているが、質量の値を変えることで $k = 0.9[\mathrm{GeV/fm}]$ のまま実験値のスペクトルを再現する事ができるかどうかを確認する。
ここでは、$\alpha_{\mathrm{s}} = 0.4$ として仮定し、k については 0.9、0.5 の両方で計算を行う。今回も Λ_c 粒子で考えるため、考えるダイクォークはスピン 0 の ud ダイクォークである。カイラル対称性の自発的破れから獲得されるアップクォーク (u) やダウンクォーク (d) の質量はおよそ $m_u = m_d = 0.3[\mathrm{GeV/c^2}]$ であるため、考えられるダイクォークの質量は

$$m_d = 0.3 \sim 0.6 \quad [\mathrm{GeV/c^2}] \tag{2.44}$$

である。また、考えられるチャームクォークの質量は

$$m_c = 1.27 \sim 1.6 \quad [\mathrm{GeV/c^2}] \tag{2.45}$$

である。この値を (2.10) に代入すると、今回考えられる換算質量 μ の値は

$$\mu = 0.2 \sim 0.5 \quad [\mathrm{GeV/c^2}] \tag{2.46}$$

である。この換算質量の範囲で Λ_c の 1p 軌道の実験値を再現するかに注目して $k = 0.9, 0.5$ のときの計算を行う。

図 2.3 をみると、$k = 0.9[\mathrm{GeV/fm}]$ のとき、予想される換算質量の範囲では Λ_c の実験値を再現するような質量の組み合わせはない事がわかった。同様に $k = 0.5[\mathrm{GeV/fm}]$ のときについても計算を行うと、実験値を再現するような質量の組み合わせがある事が計算結果からわかった。したがって、$k = 0.9$ で実験値を再現するようなスペクトルが現れなかったのは質量に依るものではない事がわかった。
質量依存性に関連して、α_{s} 依存性についても見る。α_{s} の範囲は、ポテンシャル (2.31) の

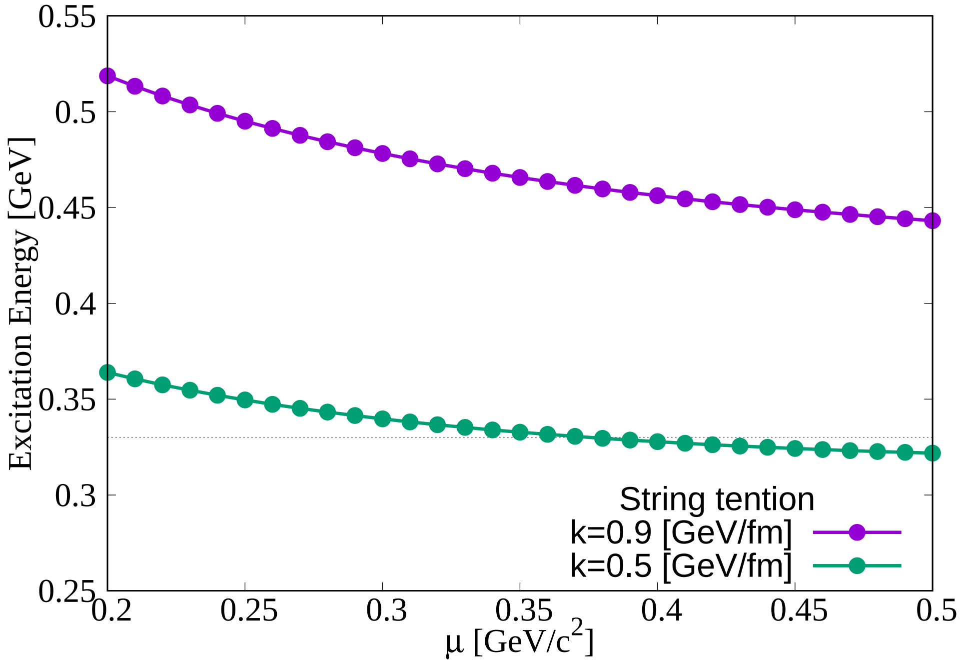


図 2.3: 励起スペクトルの質量依存性。換算質量を変えたとき、$k = 0.9[\mathrm{GeV/fm}]$ での計算値では Λ_c の 1p 軌道の実験値を再現できないことを確認した。破線は Λ_c の 1p 軌道の実験値のスピン加重平均をとったものである。

符号を考慮すると

$$0 \leq \alpha_{\mathrm{s}} \tag{2.47}$$

である。このとき、$k = 0.9[\mathrm{fm}]$、チャームクォークとダイクォークの質量をそれぞれ $m_c = 1.5[\mathrm{GeV/c^2}]$、$m_d = 0.5[\mathrm{GeV/c^2}]$ として計算する。先ほどと同様に、Λ_c 粒子の 1p 軌道の実験値を再現できるか注目して計算を行う。図 2.4 では、横軸を α_{s}、縦軸を励起エネルギーとした。α_{s} の範囲を

$$0 \leq \alpha_{\mathrm{s}} \leq 0.55 \tag{2.48}$$

として計算を行ったが、1p 軌道の実験値 0.330[GeV] を再現するような α_{s} は $k = 0.9$ では見つからなかった。

これより、Point-like model ではポテンシャルパラメータを

$$\alpha_{\mathrm{s}} = 0.4 \quad k = 0.5[\mathrm{GeV/fm}] \tag{2.49}$$

として計算を行う。

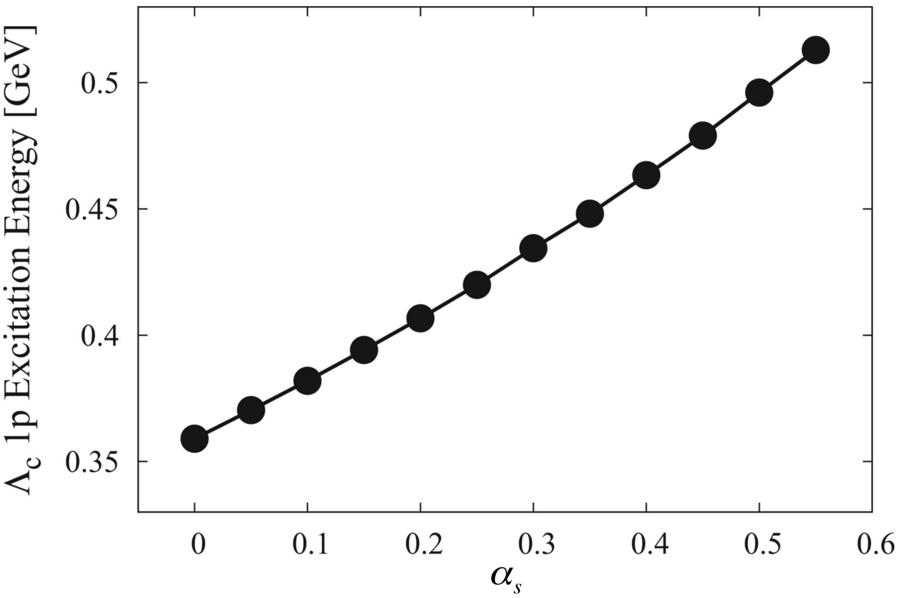


図 2.4: 励起スペクトルの $\alpha_{\rm s}$ 依存性。$\alpha_{\rm s}$ を変えたとき、$k = 0.9$[GeV/fm] での計算値では Λ_c の 1p 軌道の実験値を再現できないことを確認した。[5] より引用。

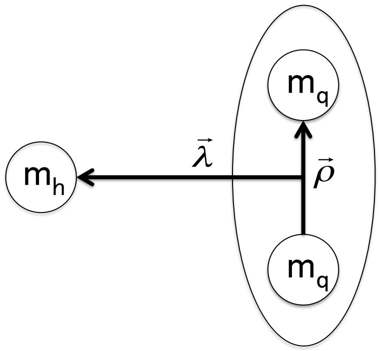
2.3 Sizable model

2.3.1 ハミルトニアン

ここでは [7] に基づいて議論を行う。ダイクォークを点粒子として扱った Point-like model とは別に、ダイクォークの相対座標の変数 ρ が有限な値を持つものとして考えた Sizable model について考えていく。ダイクォークにサイズを取り入れた理由として、Point-like model ではカラーに依るパラメータ k の値が、同じカラー構造をとるクォーコニウムで求めた値から約 1/2 倍にしなければ実験値を再現できなかった。しかし、今研究ではカラー近似で考えているため、パラメータ k は不変量であると考えており、[9] でもダイクォークは 1fm 程度のサイズを持つことを示唆している。したがって、ダイクォークサイズはその改善策として取り入れたものである。

Point-like model と異なる点は、大きさを考慮した事による有効ポテンシャルの考え方とダイクォークの持つ回転エネルギーについて考慮する点である。また、ダイクォークはガウス分布のような確率分布であることを仮定する。

このモデルについてもクォーク・ダイクォークの 2 体系として考えていくが、ダイクォークにサイズを取り入れているためポテンシャルはヘビークォークとダイクォークを構成するそれぞれのクォークに働くことを考慮する。
はじめに、それぞれのクォークの質量、位置、運動量を



$$\begin{aligned} \text{ヘビークォーク} &: (m_h, \vec{r}_1, \vec{p}_1) \\ \text{クォーク 1} &: (m_q, \vec{r}_2, \vec{p}_2) \\ \text{クォーク 2} &: (m_q, \vec{r}_3, \vec{p}_3) \end{aligned} \tag{2.50}$$

とする。また、クォーク-クォーク間のポテンシャルを

$$V_{33}(|\vec{r_i} - \vec{r_j}|) \qquad i, j = 1, 2, 3 \ \ , \ i \neq j \tag{2.51}$$

とすると、この系のハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = m_h + 2m_q + \frac{\vec{p_1}^2}{2m_h} + \frac{\vec{p_2}^2}{2m_q} + \frac{\vec{p_3}^2}{2m_q} + V_{Qq}(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|) + V_{qq}(|\vec{r_2} - \vec{r_3}|) + V_{Qq}(|\vec{r_3} - \vec{r_1}|) \tag{2.52}$$

と記述できる。ポテンシャルの記述方法として、V_{33} のようにクォークのフレーバーを用いて表しているが、この節に限り V_{Qq} のようにクォークそのもので記述する。このとき、Q をヘビークォーク、q をダイクォークを構成するクォークである。
この系の重心座標を $\vec{R}$、ダイクォークを構成している 2 つのクォークの相対座標を $\vec{\rho}$、ダイクォークの中心とヘビークォークとの相対座標を $\vec{\lambda}$ とすると、それぞれ

$$\vec{R} = \frac{m_h \vec{r_1} + m_q \vec{r_2} + m_q \vec{x_3}}{M} \tag{2.53}$$

$$\vec{\rho} = \vec{r_2} - \vec{r_3} \tag{2.54}$$

$$\vec{\lambda} = \vec{r_1} - \frac{1}{2}(\vec{r_2} + \vec{r_3}) \tag{2.55}$$

である。ただし、全質量 M、ダイクォークの質量 m_d は

$$M = 2m_q + m_h \tag{2.56}$$

$$m_d = 2m_q \tag{2.57}$$

である。
それぞれのクォークの位置を $\vec{R}$、$\vec{\rho}$、$\vec{\lambda}$ で表すと

$$\vec{r_1} = \vec{R} + \frac{m_d}{M}\vec{\lambda} \tag{2.58}$$

$$\vec{r_2} = \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{m_h}{M}\vec{\lambda} \tag{2.59}$$

$$\vec{r_3} = \vec{R} - \frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{m_h}{M}\vec{\lambda} \tag{2.60}$$

と表せる。また、それぞれのクォーク間の相対距離については

$$|\vec{r_1}-\vec{r_2}| = \left|\vec{\lambda}-\frac{1}{2}\vec{\rho}\right| \tag{2.61}$$

$$|\vec{r_2}-\vec{r_3}| = \vec{\rho} \tag{2.62}$$

$$|\vec{r_3}-\vec{r_1}| = \left|\vec{\lambda}+\frac{1}{2}\vec{\rho}\right| \tag{2.63}$$

となる。
(2.15) のように重心相対系で運動量 $\vec{p_j}$ を表すと

$$\begin{aligned}\vec{p_j} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\vec{r_j}} &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{r_j}}\frac{\partial}{\partial\vec{R}}+\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\vec{r_j}}\frac{\partial}{\partial\vec{\rho}}+\frac{\partial\vec{\lambda}}{\partial\vec{r_j}}\frac{\partial}{\partial\vec{\lambda}}\right)\\ &= \frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{r_j}}\vec{p_R}+\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\vec{r_j}}\vec{p_\rho}+\frac{\partial\vec{\lambda}}{\partial\vec{r_j}}\vec{p_\lambda} \qquad\qquad (j=1,2,3)\end{aligned} \tag{2.64}$$

と表せるため、それぞれのクォークの運動量は

$$\vec{p_1} = \frac{m_h}{M}\vec{p_R}+\vec{p_\lambda} \tag{2.65}$$

$$\vec{p_2} = \frac{m_q}{M}\vec{p_R}+\vec{p_\rho}-\frac{1}{2}\vec{p_\lambda} \tag{2.66}$$

$$\vec{p_3} = \frac{m_q}{M}\vec{p_R}-\vec{p_\rho}-\frac{1}{2}\vec{p_\lambda} \tag{2.67}$$

である。これらを用いると、ハミルトニアン (2.52) は

$$\hat{H} = m_h+2m_q+\frac{\vec{p_R}^2}{2M}+\frac{\vec{p_\rho}^2}{2m_\rho}+\frac{\vec{p_\lambda}^2}{2m_\lambda}+V_{Qq}\left(\left|\vec{\lambda}-\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right)+V_{qq}(\vec{\rho})+V_{Qq}\left(\left|\vec{\lambda}+\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right) \tag{2.68}$$

となる。ただし、この時の換算質量 m_ρ、m_λ は

$$m_\rho = \frac{m_d}{4} \tag{2.69}$$

$$m_\lambda = \frac{m_d m_h}{M} \tag{2.70}$$

である。Point-like model のときと同様にハミルトニアン (2.68) を重心系と相対系に分けると

$$\hat{H}_{\mathrm{cm}} = \frac{\vec{p_R}^2}{2M} \tag{2.71}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{rel}} = m_h+2m_q+\frac{\vec{p_\rho}^2}{2m_\rho}+\frac{\vec{p_\lambda}^2}{2m_\lambda}+V_{Qq}\left(\left|\vec{\lambda}-\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right)+V_{qq}(\vec{\rho})+V_{Qq}\left(\left|\vec{\lambda}+\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right) \tag{2.72}$$

と分離できる。
このモデルでも、相対系のハミルトニアン (2.72) のみを用いて進めていく。ここで、ヘビークォーク Q とクォーク q の相互作用 Qq よりもダイクォークを構成するクォーク間の

相互作用 qq の方が強いと仮定する。これより、ハミルトニアン (2.72) をダイクォークについてある定数 ρ で解き、Point-like model の時と同様に極座標変換を行うと (2.72) は

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{rel}} =& m_h + m_d + \frac{\vec{L}_\rho^2}{2m_\rho \rho^2} - \frac{\hbar^2}{2m_\lambda}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\lambda \\ &+ \frac{\vec{L}_\lambda^2}{2m_\lambda \lambda^2} + V_{Qq}\left(\left|\vec{\lambda} - \frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right) + V_{Qq}\left(\left|\vec{\lambda} + \frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right)\end{aligned} \tag{2.73}$$

となる。ここで、$\frac{\vec{L}_\rho^2}{2m_\rho\rho^2}$ はダイクォークの回転エネルギーであり、$E_{\mathrm{rot}} = \frac{\vec{L}_\rho^2}{2m_\rho\rho^2}$ と置き換える。

2.3.2 波動関数

ここで考えているモデルのバリオンの全角運動量 $\mathbf{J}$ をダイクォークの軌道角運動量 $\mathbf{L}_\rho$、バリオンの相対方向の軌道各運動量 $\mathbf{L}_\lambda$、ダイクォークのスピン角運動量 $\mathbf{S}_{\mathrm{Diquark}}$、クォークのスピン角運動量 $\mathbf{S}_{\mathrm{Quark}}$ であらわすと

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{L}_\rho + \mathbf{L}_\lambda + \mathbf{S}_{\mathrm{Diquark}} + \mathbf{S}_{\mathrm{Quark}} \\ &= \mathbf{L} + \mathbf{S}\end{aligned} \tag{2.74}$$

である。ここで、$\mathbf{L}$ は全軌道角運動量、$\mathbf{S}$ は全スピン角運動量であり、それぞれ

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_\rho \otimes \mathbf{L}_\lambda \tag{2.75}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\mathrm{Diquark}} \otimes \mathbf{S}_{\mathrm{Quark}} \tag{2.76}$$

と、それぞれの角運動量の合成として書き表す。そのとき、ℓ を全軌道角運動量量子数とし、$\ell = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、s,p,d,$\cdots$ 軌道とする。このモデルに関してもクォーク・ダイクォークのスピン-軌道相互作用やスピン-スピン相互作用については考えずに計算を行うので、一番良い量子数は全軌道角運動量 $\mathbf{L}$ であり、波動関数は

$$|\mathbf{\Psi}\rangle = |S\rangle + |P\rangle + |D\rangle + \cdots \tag{2.77}$$

$$|\mathbf{L}\rangle = |\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle_L |R\rangle \tag{2.78}$$

のように書き表す。ここで、ℓ_ρ、ℓ_λ はダイクォークとバリオンそれぞれの軌道角運動量量子数である。また、ハミルトニアン (2.73) にある $\hat{L}_\rho^2$、$\hat{L}_\lambda^2$ の項について考えると、軌道角運動量量子数で書ける状態 $|\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle$ によるそれぞれの固有値は

$$\hat{L}_\rho^2 |\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle = \hbar^2 \ell_\rho(\ell_\rho + 1)|\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle \tag{2.79}$$

$$\hat{L}_\lambda^2 |\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle = \hbar^2 \ell_\lambda(\ell_\lambda + 1)|\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle \tag{2.80}$$

である。
ダイクォークを構成している 2 つのクォークは、フェルミ粒子であることから Pauli の排他原理より波動関数の積は反対称である必要があり、表 2.1 のような量子数の取り方をす

る必要がある。このモデルではこれらの波動関数の積 (2.4) に加えて、ダイクォークの空間部分に関する波動関数 Ψ_{space} についても考慮する必要がある。つまり、ダイクォークの軌道角運動量量子数 ℓ_ρ についても考慮する必要があり、クォークがフェルミ粒子であることより、波動関数の積は反対称である必要があるので、ℓ_ρ は

$$\ell_\rho = 0, 2, 4 \cdots \tag{2.81}$$

と対称である必要がある。したがって、各軌道それぞれの状態は

$$|S\rangle = |0,0\rangle_S + |2,2\rangle_S + \cdots \tag{2.82}$$

$$|P\rangle = |0,1\rangle_P + |2,1\rangle_P + |2,2\rangle_P + \cdots \tag{2.83}$$

$$|D\rangle = |0,2\rangle_D + |2,0\rangle_D + |2,1\rangle_D + |2,2\rangle_D + \cdots \tag{2.84}$$

と書き表せる。各軌道それぞれ合成の軌道角運動量量子数 $\ell = 0, 1, 2 \cdots$ となるような量子数 $\ell\rho$、ℓ_λ の組み合わせを線形結合しているが、今研究では簡単のため各軌道それぞれ最低次の項を考える。すなわち、各軌道において考えていく固有状態は

$$|S\rangle = |0,0\rangle_S \tag{2.85}$$

$$|P\rangle = |0,1\rangle_P \tag{2.86}$$

$$|D\rangle = |0,2\rangle_D + |2,0\rangle_D \tag{2.87}$$

である。d 軌道に関しては、ℓ_ρ、ℓ_λ それぞれの基底状態について考え、これらの状態の混ざり合いを解くため 2 つの状態を用いる。
(2.78) の角度部分の固有状態は

$$|\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle_L = |\ell_\rho m_\rho \ell_\lambda m_\lambda\rangle \tag{2.88}$$

とも表現できる。この時、m_ρ、m_λ はそれぞれダイクォークの磁気量子数と相対方向の磁気量子数である。Clebsch-Gordan 係数も含めて書くと、固有状態は

$$|\ell_\rho, \ell_\lambda\rangle_L = \sum_{m_\rho, m_\lambda} |\ell_\rho m_\rho \ell_\lambda m_\lambda\rangle\langle \ell_\rho m_\rho \ell_\lambda m_\lambda | LM\rangle \tag{2.89}$$

と書き表すことができる。この記述に沿って (2.85)∼(2.87) を書くと

$$|S\rangle = |0000\rangle \tag{2.90}$$

$$|P\rangle = |0010\rangle \tag{2.91}$$

$$|D\rangle = |0020\rangle + |2000\rangle \tag{2.92}$$

である。

2.3.3 有効ポテンシャル

このモデルの有効ポテンシャルを求めていく。まず、このモデルのハミルトニアン (2.73) のポテンシャルは、1 つのグルーオン交換より

$$
\begin{aligned}
V(\vec{\rho},\vec{\lambda}) &= V_{33}\left(\left|\vec{\lambda}-\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right)+V_{33}\left(\left|\vec{\lambda}+\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[V_{3\bar{3}}\left(\left|\vec{\lambda}-\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right)+V_{3\bar{3}}\left(\left|\vec{\lambda}+\frac{1}{2}\vec{\rho}\right|\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.93}
$$

である。ポテンシャルパラメータに関しては、今研究を通してカラー近似のみを用いて計算を行っており、k は不変量であると考えているため、k の値は変えずに計算を行いたい。したがって、このモデルでのポテンシャルパラメータは Point-like model で求めた

$$
\alpha_{\mathrm{s}} = 0.4 \qquad k = 0.9[\mathrm{GeV/fm}] \tag{2.94}
$$

と仮定して計算を行う。

ここで、あるダイクォークのサイズ ρ での有効ポテンシャルは、波動関数 (2.79) をかけると

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{eff}}(\lambda;\rho) &= \langle \mathbf{L}^{'}|\mathbf{V}(\tilde{\rho},\tilde{\lambda})|\mathbf{L}\rangle \\
&= \langle R^{'}|_L\langle \ell_\rho^{'},\ell_\lambda^{'}|V(\vec{\rho},\vec{\lambda})|\ell_\rho,\ell_\lambda\rangle_L|R\rangle \\
&= \langle R|\underline{\int d\Omega_\rho d\Omega_\lambda\left[Y_{\ell_\rho^{'}}^{m_\rho^{'}}(\Omega_\rho)Y_{\ell_\lambda^{'}}^{m_\lambda^{'}}(\Omega_\lambda)V(\hat{\rho},\vec{\lambda})[Y_{\ell_\rho}^{m_\rho}(\Omega_\rho)Y_{\ell_\lambda}^{m_\lambda}(\Omega_\lambda)\right]}|R\rangle
\end{aligned} \tag{2.95}
$$

である。ここで、Y_ℓ^m は球面調和関数、m_ρ、m_λ はそれぞれダイクォークと相対座標の磁気量子数である。ダイクォークにサイズを取り入れる Sizable model ではポテンシャルが角度依存性を持つので、はじめに下線で引いた角度方向の積分を行う。そのとき、Wigner の 3j 記号を用いることによって角度方向の積分を解くことができる。3j 記号は、Clebsch-Gordan 係数を用いて

$$
\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \frac{(-)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1 j_2 m_1 m_2|JM\rangle \tag{2.96}
$$

のように表される係数である。

ポテンシャル (2.93) のクーロン項と線形項の距離を一般的な変数で表すとき

$$
v(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \tag{2.97}
$$

$$
v(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = |\vec{r}_1-\vec{r}_2| \tag{2.98}
$$

とする。また、α を r_1 と r_2 のなす角としてこのポテンシャルのルシャンドル展開を行うと

$$
v(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \sum_{\ell=0}^{\infty} v_\ell(r_1,r_2)P_\ell(\cos\alpha) \tag{2.99}
$$

と表せる。その際、(2.97)、(2.98) は

$$v_\ell(r_1,r_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{r_>}\left(\dfrac{r_<}{r_>}\right)^\ell & v=\dfrac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\\ r_>\left[\dfrac{1}{2\ell+3}\left(\dfrac{r_<}{r_>}\right)^{\ell+2}-\dfrac{1}{2\ell-1}\left(\dfrac{r_<}{r_>}\right)^\ell\right] & v=|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\end{cases} \tag{2.100}$$

となる。このとき、$r_>$ ($r_<$) は $|\vec{r}_1|$ または $|\vec{r}_2|$ のどちらか一方より大きい (小さい) 距離と定義する。また、球面調和関数の性質は

$$\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\alpha)=\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_\ell^{m*}(\Omega_1)Y_\ell^m(\Omega_2) \tag{2.101}$$

$$Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)=(-)^mY_\ell^m(\theta,\phi) \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}&\int d\Omega Y_{\ell_1}^{m_1}(\Omega)Y_{\ell_2}^{m_2}(\Omega)Y_{\ell_3}^{m_3}(\Omega)\\ &=\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix}\ell_1&\ell_2&\ell_3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_1&\ell_2&\ell_3\\m_1&m_2&m_3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.103}$$

と記述できる。ここで、$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ の立体角をそれぞれ Ω_1、Ω_2 とすると、(2.101) より (2.99) は

$$v(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\sum_{\ell=0}^{\infty}v_\ell(r_1,r_2)\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_\ell^{m*}(\Omega_1)Y_\ell^m(\Omega_2) \tag{2.104}$$

となる。
$v(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$ の角度方向の状態 (2.88) の行列要素は

$$\begin{aligned}&\langle\ell_1'm_1'\,\ell_2'm_2'|v(\vec{r}_1-\vec{r}_2)|\ell_1m_1\,\ell_2m_2\rangle\\ &=\sum_{\ell=0}^{\infty}v_\ell(r_1,r_2)\sum_{m=-\ell}^{\ell}\langle\ell_1'm_1'|C_\ell^{m*}(\Omega_1)|\ell_1m_1\rangle\langle\ell_2'm_2'|C_\ell^m(\Omega_2)|\ell_2m_2\rangle\end{aligned} \tag{2.105}$$

と計算できる。ただし、このとき行列要素を

$$C_\ell^m(\Omega)=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_\ell^m(\Omega) \tag{2.106}$$

と定義する。行列要素には以下のような関係式が成り立つ。

$$\langle\ell'm'|C_L^{M*}|\ell m\rangle = (-)^M\langle\ell'm'|C_L^{-M}|\ell m\rangle \tag{2.107}$$

$$\langle\ell'm'|C_L^{M}|\ell m\rangle = (-)^{m'+m}\langle\ell m|C_L^{M}|\ell'm'\rangle \tag{2.108}$$

行列要素 C_ℓ^m を (2.103) を用いて $3j$ 記号で表すと

$$\langle\ell'm'|C_L^M|\ell m\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\int d\Omega Y_{\ell'}^{m'*}(\Omega)Y_\ell^m(\Omega)Y_L^M(\Omega) \tag{2.109}$$

$$= (-)^{-m'}\sqrt{(2\ell'+1)(2\ell+1)}\begin{pmatrix}\ell'&\ell&L\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell'&\ell&L\\-m'&m&M\end{pmatrix} \tag{2.110}$$

と記述できる。以上の計算を行うことにより、あるダイクォークのサイズ ρ による有効ポテンシャル (2.95) について求めることができる。
このモデルではダイクォーク内のクォーク間の距離を Gauss 分布のように広がっていると仮定しているため、このポテンシャルを全てのダイクォークサイズについて足し合わせ、ダイクォークを構成するクォークの確率密度である Gauss 分布関数の二乗を畳み込むことによってこのモデルの有効ポテンシャルとする。変数を $\lambda \to r$ とすると、有効ポテンシャルは

$$\tilde{V}_{\rm eff}(r;\beta) = \int V_{\rm eff}(r;\rho) G_i^2(\beta,\rho)\rho^2 d\rho \qquad (i=1,2) \tag{2.111}$$

と書ける。ここで、β はダイクォークの広がりを表すパラメータである。
このとき用いる Gauss 分布関数だが、d 軌道の波動関数 (2.92) からダイクォークの基底状態 $\ell_\rho = 0$ と第 2 励起状態 $\ell_\rho = 2$ について考える必要がある。基底状態の Gauss 分布関数は

$$G_1(\beta,\rho) = C_1 \exp\left(\frac{-\rho^2}{2\beta^2}\right) \tag{2.112}$$

である。また、第 2 励起状態の Gauss 分布関数は

$$G_2(\beta,\rho) = C_2 \rho^2 \exp\left(\frac{-\rho^2}{2\beta^2}\right) \tag{2.113}$$

である。それぞれの Gauss 分布関数の規格化を行うと、規格化定数 ${C_1}^2$、${C_2}^2$ は

$$(C_1)^2 = \frac{4}{\beta^3\sqrt{\pi}} \qquad (C_2)^2 = \frac{16}{15\beta^7\sqrt{\pi}} \tag{2.114}$$

となる。
また、ダイクォークの平均二乗直径を基底状態の Gauss 分布関数を用いて表すと

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{2}}\beta \tag{2.115}$$

である。
　以上より、有効ポテンシャル (2.111) としたときのハミルトニアン (2.73) は

$$\hat{H}_{\rm rel} = m_h + m_d + E_{\rm rot} - \frac{\hbar^2}{2m_\lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\vec{L}_\lambda^2}{2m_\lambda r^2} + \tilde{V}_{\rm eff}(r;\beta) \tag{2.116}$$

である。ここで、ダイクォークの回転エネルギーについて調和振動子の考えより見積もりたい。
3 次元調和振動子のエネルギー $E_{\rm HO}$ は

$$E_{\rm HO} = \left(2n + \ell + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \tag{2.117}$$

である。このとき n は主量子数、ℓ は軌道角運動量量子数であり、ダイクォークの量子数に対応すると $n \to n_\rho$、$\ell \to \ell_\rho$ である。今研究では励起スペクトルについて考えており、またダイクォークの励起状態については考慮しないので、今回考える回転エネルギーは

$$E_{\rm rot} = \ell_\rho \hbar\omega \tag{2.118}$$

である。また、調和振動子との関係 (A.3) から

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{m_\rho \beta^2} \tag{2.119}$$

と記述できる。したがって、今回扱う回転エネルギー E_{rot} は

$$\ell_\rho = 0, \quad E_{\mathrm{rot}} = 0 \tag{2.120}$$

$$\ell_\rho = 2, \quad E_{\mathrm{rot}} = \frac{2\hbar^2}{m_\rho \beta^2} \tag{2.121}$$

である。

次に、状態の混ざり合いについて考慮する必要がある。このモデルでは、d 軌道の 2 つの状態が混ざり合う可能性があるので、2×2 行列で考える。解いていく式は

$$\begin{bmatrix} \langle 0020|\hat{H}_{\mathrm{rel}}|0020\rangle & \langle 0020|\hat{H}_{\mathrm{rel}}|2000\rangle \\ \langle 2000|\hat{H}_{\mathrm{rel}}|0020\rangle & \langle 2000|\hat{H}_{\mathrm{rel}}|2000\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}\langle 0020|0020\rangle & E_{12}\langle 0020|2000\rangle \\ E_{21}\langle 2000|0020\rangle & E_{22}\langle 2000|2000\rangle \end{bmatrix} \tag{2.122}$$

である。ここで、E_{ij} はそれぞれの項のエネルギーである。

(2.122) より、対角項のバリオンの相対座標系の動径方向の Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_\lambda}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\hat{L}_\lambda^2}{2m_\lambda r^2} + \tilde{V}_{\mathrm{eff}}(r,\beta) + E_{\mathrm{rot}} \right] R(r) = E_{ii}R(r) \tag{2.123}$$

ここで、$R(r) = \chi(r)/r$ とすると

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_\lambda}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hat{L}_\lambda^2}{2m_\lambda r^2} + \tilde{V}_{\mathrm{eff}}(r,\beta) + E_{\mathrm{rot}} \right] \chi(r) = E_{ii}\chi(r) \tag{2.124}$$

である。また、非対角項のエネルギーに関しては、角度依存性を持っているのが有効ポテンシャルの項のみなので

$$E_{ij} = \int r^2 dr R^*(r)\tilde{V}_{\mathrm{eff}}(r;\beta)R(r) \tag{2.125}$$

となる。混ざり合いを解くには、これらのエネルギーを計算したあと対角化をすることによって解決する。

Sizable model に関しても、Point-like model と同様に Λ_c 粒子を用いてダイクォークサイズの広がりパラメータ β を決定する。このとき、ダイクォークとチャームクォークの質量は $m_d = 0.5[\mathrm{GeV/c^2}]$、$m_c = 1.5[\mathrm{GeV/c^2}]$ を用いる。

図 2.5 では、左から Λ_c 粒子の励起スペクトルの計算値、実験値である。実験値の 1p 軌道の励起スペクトル ($\Lambda_c(2595)1/2^-$,$\Lambda_c(2625)3/2^-$) を再現するようにダイクォークの広がりを表すパラメータ β を探していくと、$\beta = 1.0[\mathrm{fm}]$ のときに 1p 軌道の励起スペクトルを再現した。他の実験値についても計算値で再現できるかみると、Λ_c 粒子の励起スペクトルの候補である $\Lambda_c(2765)?^?$ については再現できる計算値は見つからなかった。

パラメータが $\beta = 1.0$[fm] と求めることができたので、ダイクォークの平均 2 乗直径を (2.115) から求めると

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \simeq 1.22[\mathrm{fm}] \tag{2.126}$$

である。これは、ダイクォークの直径は 1fm 程度の大きさを持つと予想されていること [9] についても矛盾のない結果である。
したがって、Sizable model ではダイクォークの広がりパラメータ $\beta = 1.0$[fm] として計算を行う。

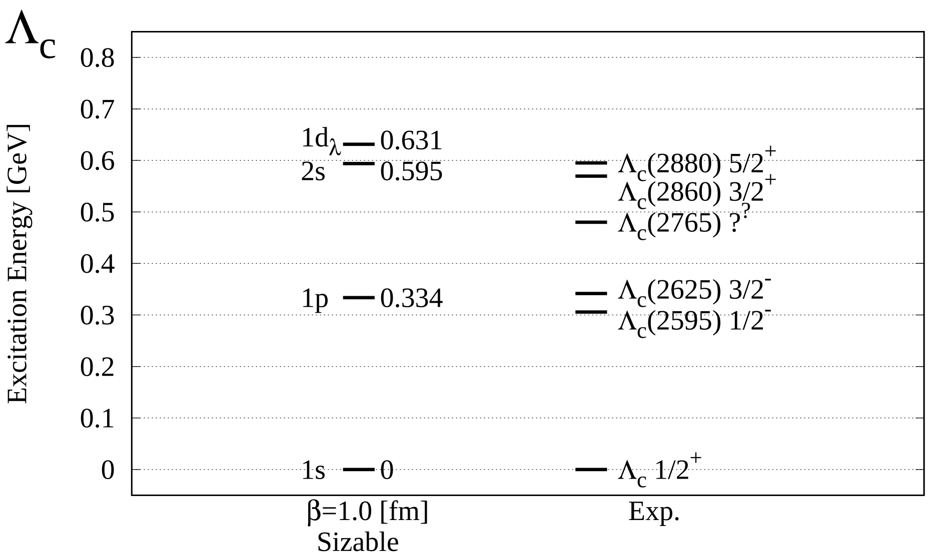


図 2.5: Sizable model による Λ_c の励起スペクトルの計算値と実験値の比較。1p 軌道の実験値を再現するには、ダイクォークの広がりパラメータが $\beta = 1.0$[fm] であることがわかった。実験値は [6] より引用。

第3章　その他のバリオン

前章で説明した2つのモデルを用いて、ヘビークォークを1つ持つ他のバリオン$(\Xi_h, \Sigma_h, \Xi'_h, \Omega_h)$の励起エネルギーの計算をし、それぞれ比較をすることで、系統的に見ることを行った。はじめに、バリオン内のダイクォークの質量をΛ_cのダイクォークの質量$(m^0_{ud} = 0.5[\mathrm{GeV/c^2}])$を基準として求めた。この求めたダイクォーク質量の値を用いて、それぞれのバリオンについて2つのモデルで計算し実験値との比較を行った。このとき、チャームクォーク質量m_c、ボトムクォーク質量m_bを

$$m_c = 1.5[\mathrm{GeV/c^2}] \qquad \mathrm{m_b} = 4.0[\mathrm{GeV/c^2}] \tag{3.1}$$

として計算を行った。また、最近発見されたチャームクォークを2つ含むバリオンΞ_{cc}についても計算を行った。

3.1　ダイクォーク質量の決定

今回、ダイクォークはスピンやフレーバーについてはクォークの入れ替えによる反対称性から決めることができているが、質量の値に関しては未知の値である。Λ_cのダイクォーク質量m^0_{ud}も決まっていない値ではあったが、今研究では$m^0_{ud} = 0.5[\mathrm{GeV/c^2}]$と仮定してそれぞれのモデルのパラメータを決定した。他のバリオンのダイクォーク質量に関しても実験値を再現するように選ぶことも可能ではあるが、系統的に見るという観点から今回はせず、Λ_cのダイクォーク質量の値を基準として他のダイクォーク質量の値を決めた [10]。ダイクォークはそれぞれフレーバーとアイソスピンで区別することができ、それらを以下の表3.1のように書き表す。

表 3.1: ヘビークォークを1つ含むバリオンとそのダイクォーク質量の表現。

バリオン	Λ_h	Ξ_h	Σ_h	Ξ'_h	Ω_h
ダイクォーク質量 $m^{\mathrm{Isospin}}_{\mathrm{Flavor}}$	m^0_{ud}	$m^{\frac{1}{2}}{}_{us}$	m^1_{qq}	$m^{\frac{1}{2}}{}_{us}$	m^0_{ss}

ここで、ハミルトニアン(2.26)、(2.116)よりバリオンの全質量Mは

$$M = m_h + m_c + E_{\mathrm{rel}} + V_0 \tag{3.2}$$

と書ける。ここで、E_{rel}はバリオンの相対座標系の動径方向のSchrödinger方程式を解いた時のエネルギーである。他のバリオンのダイクォーク質量の値を決めるのに、それぞれ

の 1s 軌道のエネルギースペクトルと λ_c との差から求める。
1s 軌道のバリオンの質量差は (3.2) より

$$\Delta M_{1\mathrm{s}} = (m_d - {m_{ud}}^0) + (E_{1\mathrm{s}} - E_{1s}^{\Lambda_c}) \tag{3.3}$$

である。このとき m_h、V_0 については同じ値として仮定しているため、それぞれ相殺されるので考慮しない。ポテンシャルパラメータ α_s, k は Point-like model では

$$\text{Point-like} : \alpha_\mathrm{s} = 0.4 \qquad k = 0.5[\mathrm{GeV/fm}], \tag{3.4}$$

Sizable model では

$$\text{Sizable} : \alpha_\mathrm{s} = 0.4 \qquad \mathrm{k} = 0.9[\mathrm{GeV/fm}] \tag{3.5}$$

を用いる。まず、Point-like model でのダイクォーク質量を (3.3) から計算し、表 3.2 でまとめた。

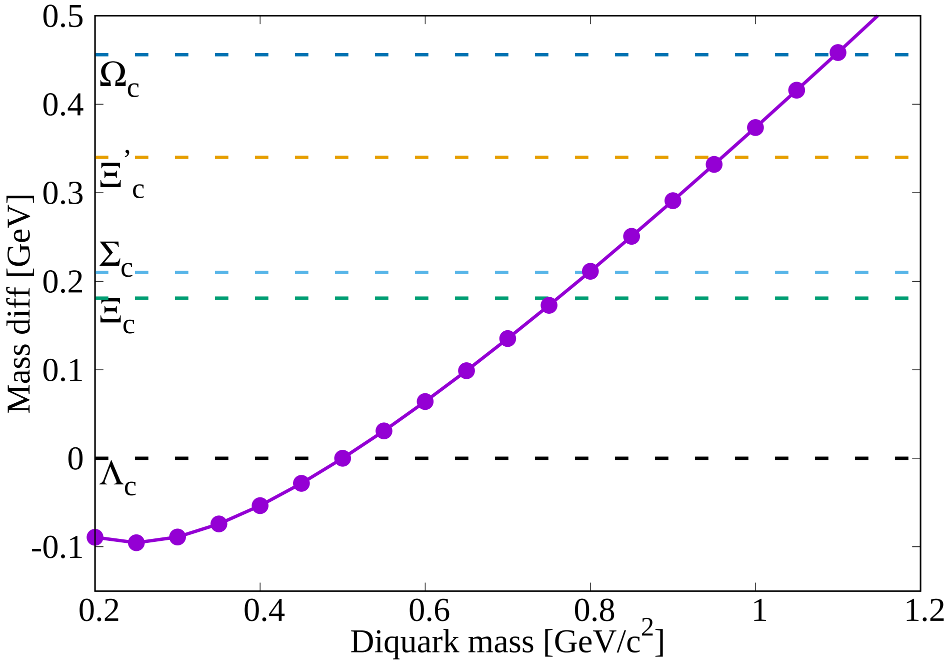


図 3.1: Point-like model によるダイクォーク質量の決定。横軸をダイクォーク質量 m_d、縦軸はバリオンの質量差 $\Delta M_{1\mathrm{s}}$ である。破線はそれぞれのバリオンの 1s 軌道の実験値から Λ_c の 1s 軌道の実験値を引いたものである。

次に、Sizable model でのダイクォーク質量を (3.3) から計算し、表 3.3 でまとめた。
2 つのモデルで求めたダイクォーク質量の値を比較するとそれぞれ数十 MeV 程度と、モデルによる質量の変化はなかった。

表 3.2: Point-like model によるバリオン毎のダイクォーク質量値。

バリオン (m^I_{qq})	ダイクォーク質量 (GeV/c^2)	バリオン (m^I_{qq})	ダイクォーク質量 (GeV/c^2)
Λ_c (m^0_{ud})	0.500	Σ_c (m^1_{qq})	0.798
Ξ_c ($m^{\frac{1}{2}}{}_{us}$)	0.761	Ξ'_c ($m^{\frac{1}{2}}{}_{us}$)	0.955
		Ω_c (m^0_{ss})	1.097

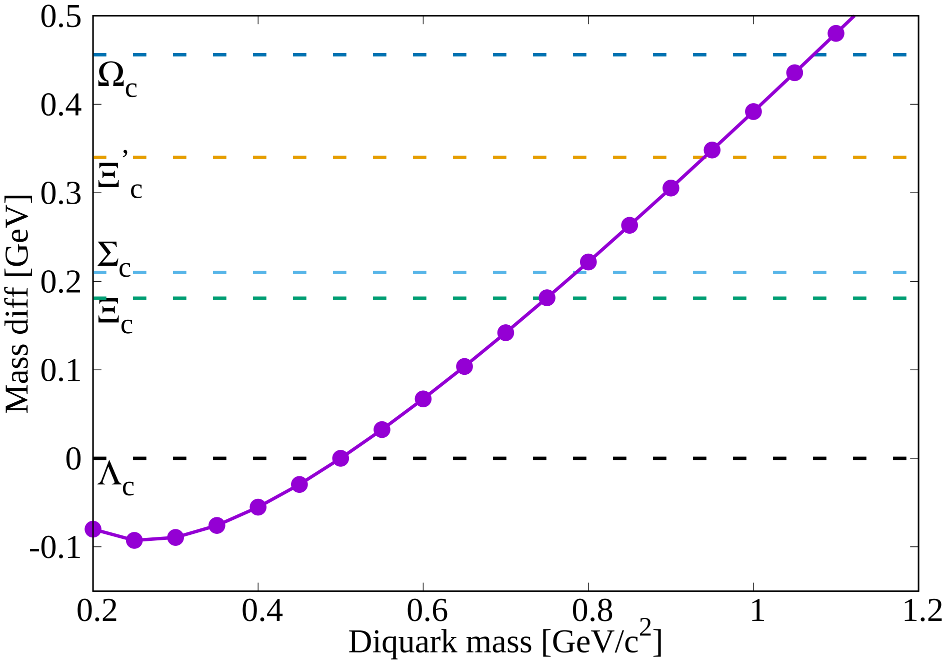


図 3.2: Sizable model による質量差とダイクォーク質量の決定。

表 3.3: Sizable model によるバリオン毎のダイクォーク質量値。

バリオン (m^I_{qq})	ダイクォーク質量 (GeV/c^2)	バリオン (m^I_{qq})	ダイクォーク質量 (GeV/c^2)
Λ_c (m^0_{ud})	0.500	Σ_c (m^1_{qq})	0.786
Ξ_c ($m^{\frac{1}{2}}{}_{us}$)	0.750	Ξ'_c ($m^{\frac{1}{2}}{}_{us}$)	0.936
		Ω_c (m^0_{ss})	1.073

3.2 チャームクォークを1つ含むバリオン

求めたダイクォーク質量の値を用いて励起エネルギーを計算する。$\Lambda_c, \Xi_c, \Sigma_c, \Xi'_c, \Omega_c$ を２つのクォーク・ダイクォーク模型での励起エネルギーの計算値と実験値との比較は下図の通りである。
モデルのパラメータを求める際に用いた Λ_c では、実験値の 1p 軌道の励起スペクトルを再現するようにしてパラメータを決定したため、計算値が合うことは自明である。他の励起スペクトルについて、特に $\Lambda_c(2765)?^?$ についてみると、Point-like model では、$k=$ 0.5[GeV/fm] での計算値で実験値を再現できることがわかった。一方、Sizable model では $\Lambda_c(2765)?^?$ を再現するような計算値がなかった。また 2 つのモデルによって計算した励起スペクトルについて比較すると、Sizable model では 2s 軌道と $1d_\lambda$ 軌道に注目してみると縮退しているように見え、Point-like model のスペクトルとは明らかに異なる振る舞いをすることがわかった。これより、Point-like model の改善策として取り入れたダイクォークのサイズは、パラメータ k について無関係であることがわかった。
続いて、他のバリオン $(\Xi_c, \Sigma_c, \Xi'_c, \Omega_c)$ について見る。すべてのパラメータは Λ_c 粒子から決めているため、これら 4 つのバリオンの励起スペクトルに関してはこれらのモデルでの予言された値となっている。その上で計算値と実験値の励起スペクトルを比較すると、現在観測されている励起スペクトルに関してはおおよそ再現することができた。また、Λ_c で見られた 2s 軌道の特徴的な違いも確認することができた。したがって、カラー近似のみで仮定したこの 2 つのダイクォーク模型は、ヘビークォークを 1 つ持つバリオンの励起スペクトルを再現することができた。

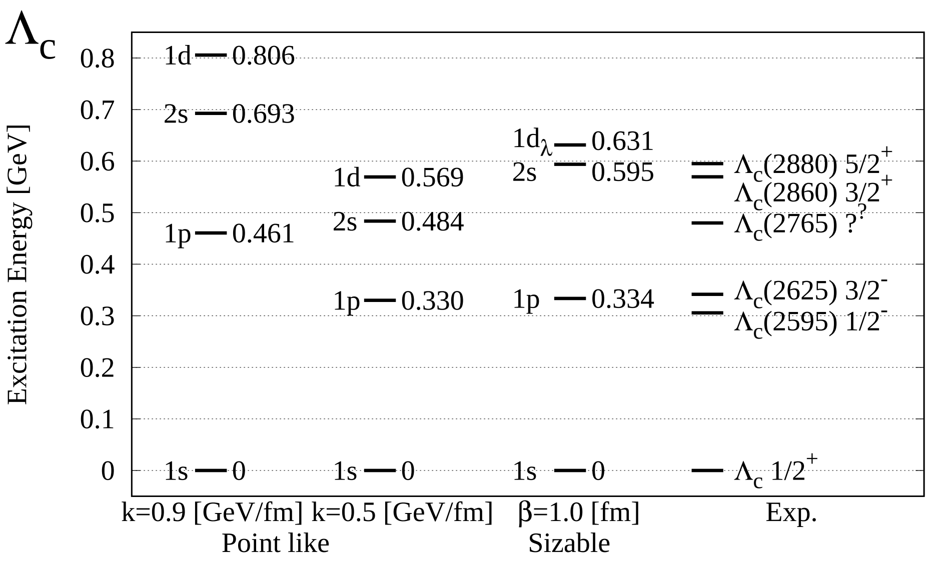


図 3.3: Λ_c の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

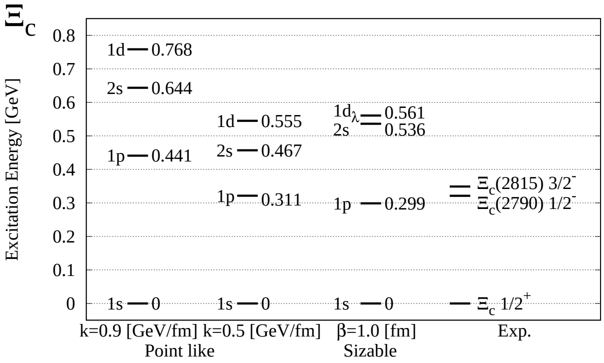


図 3.4: Ξ_c の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

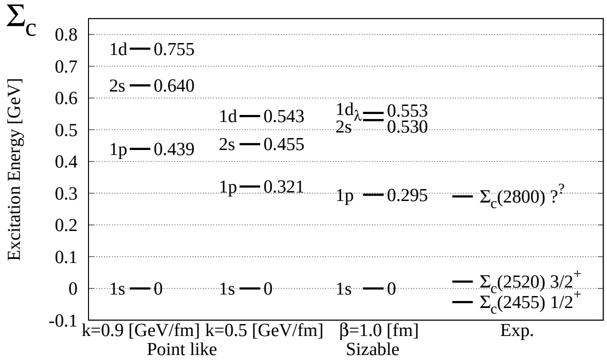


図 3.5: Σ_c の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

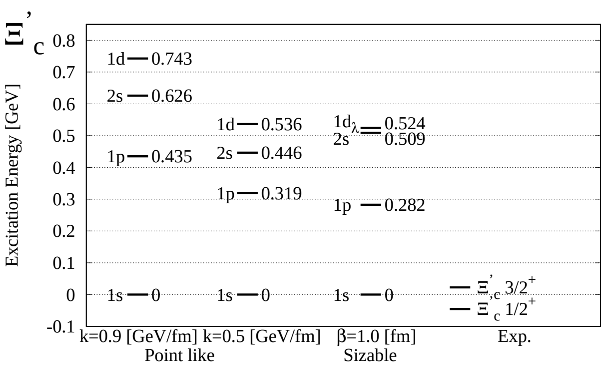


図 3.6: Ξ'_c の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

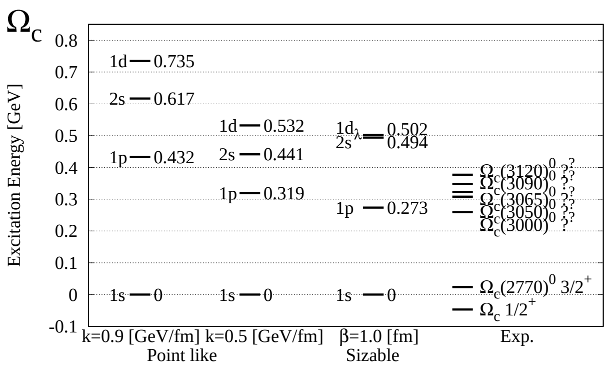


図 3.7: Ω_c の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

表 3.4: チャームクォークを 1 つ含むバリオンの励起エネルギーの計算値と実験値の比較。括弧内の粒子は未確定のものである。Λ_c の 1p 軌道実験値のスピン平均を取ったものを基準にして、計算値を求めた。単位は [GeV]。

全軌道角運動量 **L**	バリオン	実験値	計算値 (Point-like) $k=0.5$[GeV/fm]	計算値 (Sizable) $\beta=1.0$[fm]
1s	$\Lambda_c(2286)1/2^+$	0	0	0
1p	$\Lambda_c(2595)1/2^-$	0.306	0.330	0.334
	$\Lambda_c(2625)3/2^-$	0.342		
2s	$\left(\Lambda_c(2765)?^?\right)$	0.480	0.484	0.595
1d	$\Lambda_c(2860)3/2^+$	0.570	0.569	0.631
	$\Lambda_c(2880)5/2^+$	0.595		
1s	$\Xi_c 1/2^+$	0	0	0
1p	$\Xi_c(2790)1/2^-$	0.330	0.311	0.299
	$\Xi_c(2815)3/2^-$	0.349		
2s			0.467	0.536
1d			0.555	0.561
1s	$\Sigma_c(2455)1/2^+$	-0.043	0	0
	$\Sigma_c(2520)3/2^+$	0.022		
1p	$\left(\Sigma_c(2800)?^?\right)$	0.290	0.321	0.295
2s			0.455	0.530
1d			0.543	0.553
1s	$\Xi_c{}' 1/2^+$	-0.045	0	0
	$\Xi_c{}' 3/2^+$	0.023		
1p			0.319	0.282
2s			0.446	0.509
1d			0.536	0.524
1s	$\Omega_c 1/2^+$	-0.047	0	0
	$\Omega_c(2770)^0 3/2^+$	0.024		
1p	$\left(\Omega_c(3000)^0 ?^?\right)$	0.259	0.319	0.273
	$\left(\Omega_c(3050)^0 ?^?\right)$	0.308		
	$\left(\Omega_c(3065)^0 ?^?\right)$	0.323		
	$\left(\Omega_c(3090)^0 ?^?\right)$	0.348		
	$\left(\Omega_c(3120)^0 ?^?\right)$	0.377		
2s			0.441	0.494
1d			0.532	0.502

3.3　ボトムクォークを 1 つ含むバリオン

続いて、ボトムクォークを 1 つ含むバリオン ($\Lambda_b, \Xi_b, \Sigma_b, \Xi_b', \Omega_b$) についての励起エネルギーを計算した。この計算の際、チャームクォークで考えたダイクォークのアイソスピンやフレーバーは変わっていないため、チャームクォークで求めたダイクォーク質量の値を用いて計算を行った。2 つのダイクォーク模型の計算値とそれぞれのバリオンの実験値の比較は下図の通りである。
ボトムクォークを 1 つ含むバリオンの実験値が少ない為、おおよその軌道について比較を行うことが難しく予言の値が大部分を占めているが、Λ_b の 1p 軌道に注目すると、2 つのモデルの計算値で実験値を再現するようなスペクトルがあった。また、2 つのモデルの間に 2s 軌道において特徴的な違いがあるといった、チャームクォークを 1 つ含むバリオンの計算値と似た結果を得られた。チャームクォークを 1 つ含むバリオンの励起スペクトルと異なる点としては、Sizable model の計算値に関して、ダイクォーク質量が重くなるにつれて励起スペクトルが全体的に下がることが顕著に見られた点があった。

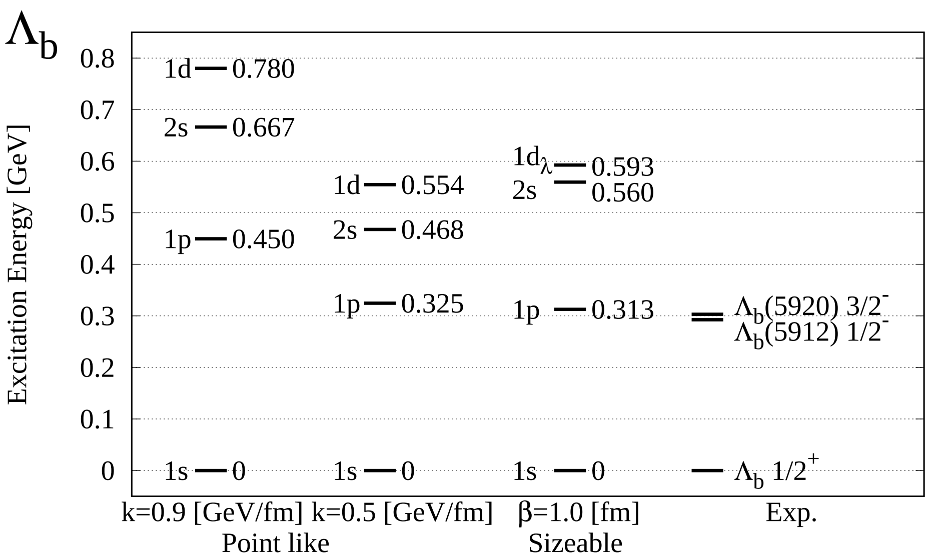


図 3.8: Λ_b の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

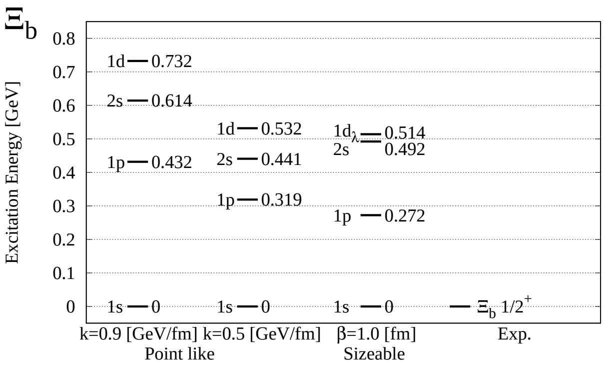


図 3.9: Ξ_b の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

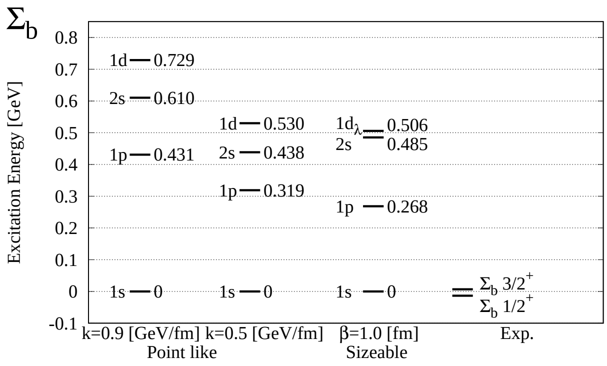


図 3.10: Σ_b の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

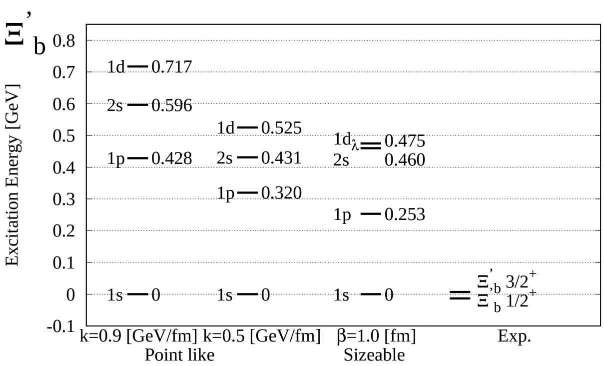


図 3.11: Ξ'_b の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

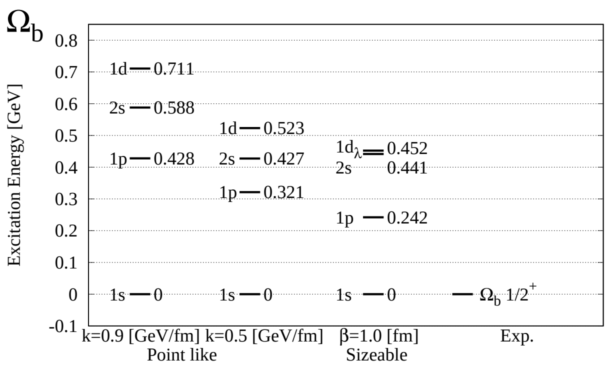


図 3.12: Ω_b の計算値と実験値の比較。実験値は [6] より引用。

表 3.5: ボトムクォークを 1 つ含むバリオンの励起エネルギーの計算値と実験値の比較。単位は [GeV]。

全軌道角運動量 **L**	バリオン	実験値	計算値 (Point-like) $k = 0.5$[GeV/fm]	計算値 (Sizable) $\beta = 1.0$[fm]
1s	$\Lambda_b 1/2^+$	0	0	0
1p	$\Lambda_b(5912)1/2^-$ $\Lambda_b(5920)3/2^-$	0.293 0.303	0.325	0.313
2s			0.468	0.560
1d			0.554	0.593
1s	$\Xi_b 1/2^+$	0	0	0
1p			0.319	0.272
2s			0.441	0.492
1d			0.532	0.514
1s	$\Sigma_b 1/2^+$ $\Sigma_b 3/2^+$	-0.013 0.007	0	0
1p			0.319	0.268
2s			0.438	0.485
1d			0.530	0.506
1s	$\Xi_b{}' 1/2^+$ $\Xi_b{}' 3/2^+$	-0.014 0.007	0	0
1p			0.320	0.253
2s			0.431	0.460
1d			0.525	0.475
1s	$\Omega_b 1/2^+$	0	0	0
1p			0.321	0.242
2s			0.427	0.441
1d			0.523	0.452

3.4 レッジェ軌跡

ハドロンの質量を M、全スピンを J としたとき、経験的に

$$J \propto M^2 \tag{3.6}$$

のような関係があることが知られている。この軌跡 (3.6) はレッジェ軌跡と呼ばれている。例として、ポテンシャルを $V(r) = kr$ と仮定して考えて (3.6) を導く。運動量 p、光速 c、クォークの質量 m_q とすると、これらのエネルギーは

$$E = \sqrt{p^2c^2 + {m_q}^2c^4} \tag{3.7}$$

と書ける。今回は m_q の値は限りなく小さいものと考えると、(3.7) は

$$E = pc \tag{3.8}$$

となる。これらハドロンの全エネルギー H は

$$H = E + V(r) = pc + kr, \tag{3.9}$$

ここで古典的にスピン J を運動量で表すと

$$J = pr \tag{3.10}$$

であるので、これを用いると (3.9) は

$$H = \frac{Jc}{r} + kr \tag{3.11}$$

である。エネルギーが最小のとき、軌道は安定することから

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -Jcr^{-2} + k = 0 \tag{3.12}$$

したがって

$$r = \sqrt{\frac{Jc}{k}} \tag{3.13}$$

である。これを (3.11) に代入して整理すると

$$H = 2\sqrt{Jck} \tag{3.14}$$

となる。ここで、ハドロンの質量は

$$Mc^2 = H = 2\sqrt{Jck}, \tag{3.15}$$

したがって、(3.6) のように

$$J = \frac{c^3}{4k}M^2 \tag{3.16}$$

といった比例関係が見える。
改めて、M と J の関係を比例定数 α、切片 α_0 を用いて表すと

$$J = \alpha M^2 + \alpha_0 \tag{3.17}$$

となる。ここで、比例定数 α とポテンシャルパラメータ k の関係について注目しながら見ていく。
バリオンの質量は (3.2) を用いて求める。このとき、V_0 を Λ_c の 1s 軌道から求めると

$$\mathrm{Point-like,k=0.5[GeV/fm]} : V_0 = -0.054 \quad \mathrm{[GeV]} \tag{3.18}$$

$$\mathrm{Sizable} : V_0 = -0.565 \quad \mathrm{[GeV]} \tag{3.19}$$

となった。この値を他のバリオンにも適用して比例定数を求めた。

表 3.6: それぞれのダイクォークモデルにおける比例定数の値。

バリオン	ダイクォークモデル	α [GeV^{-2}]	α_0	ダイクォークモデル	α [GeV^{-2}]	α_0
Λ_c	Point like,k=0.5	0.684	-3.109	Sizable	0.609	-2.679
Ξ_c	Point like,k=0.5	0.670	-3.121	Sizable	0.650	-2.992
Σ_c	Point like,k=0.5	0.665	-3.691	Sizable	0.653	-3.610
Ξ'_c	Point like,k=0.5	0.645	-3.986	Sizable	0.662	-4.122
Ω_c	Point like,k=0.5	0.625	-4.249	Sizable	0.666	-4.604
Λ_b	Point like,k=0.5	0.359	-7.125	Sizable	0.335	-6.544
Ξ_b	Point like,k=0.5	0.364	-7.807	Sizable	0.378	-8.171
Σ_b	Point like,k=0.5	0.363	-8.387	Sizable	0.382	-8.894
Ξ'_b	Point like,k=0.5	0.359	-8.698	Sizable	0.399	-9.819
Ω_b	Point like,k=0.5	0.353	-8.951	Sizable	0.411	-10.638

経験的には傾きは 1.0[GeV^{-2}] であることが知られているが、結果と比較するとチャームクォークを含むバリオンに関してはおよそ半分、ボトムクォークを含むバリオンに関しては半分以下の傾きとなることがわかった。

3.5 ダブルチャームバリオン Ξ_{cc}

近年、ダブルチャームバリオン Ξ_{cc} が発見された [11] ので、これについて簡単に励起スペクトルの予言を行った。
Ξ_{cc} のクォーク構成は qcc となっている。今計算では、ダイクォークを 2 つのチャームクォークで構成されていると仮定し、計算を行った。クォークの質量は、陽子の質量が約 0.9[GeV/c^2] で、構成クォークが uud なので、1 つのクォーク質量 m_q を 0.3[GeV/c^2] と見積もり、ダイクォーク質量はここまでの計算でチャームクォークの質量を $m_c = 1.5$[GeV/c^2]

として考えていたことから、単純に 2 倍して m_d は 3.0[GeV/c^2] と仮定して計算を行う。したがって

$$m_q = 0.3[\mathrm{GeV/c^2}] \qquad \mathrm{m_d} = 3.0[\mathrm{GeV/c^2}] \tag{3.20}$$

とする。また、今回考える系ではダイクォーク質量がクォーク質量よりも重く点粒子のように考えられる為、Point-like model と仮定して計算する。
Point-like model の相対座標系の動径方向の Schrödinger 方程式 (2.35) から励起エネルギーを計算すると、下図のようになった。

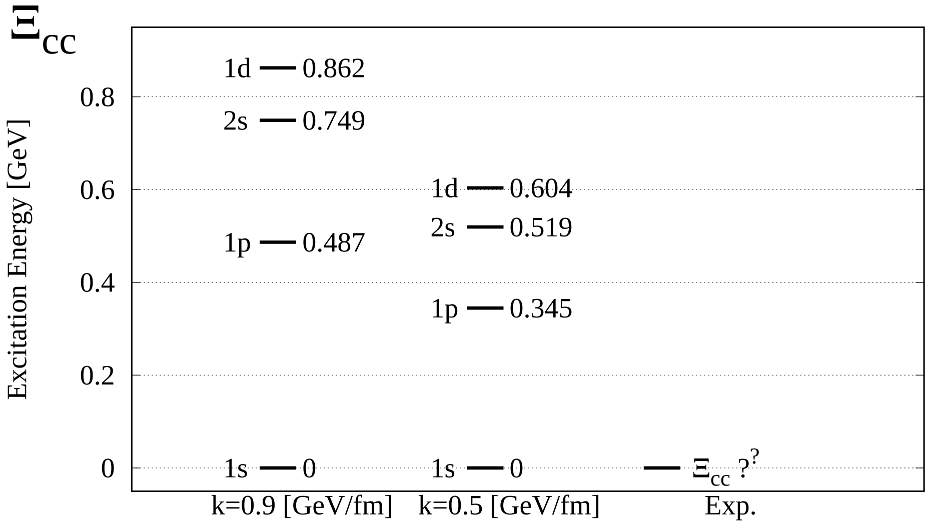


図 3.13: ダブルチャームバリオン Ξ_{cc} の励起スペクトルの計算値。

第4章　結論・まとめ

本研究では、ハドロン内のクォークやグルーオンに働く強い相互作用を記述する QCD で現れるカラー自由度に特に注目して、2 つのクォーク・ダイクォークモデルを考え、その模型を用いて重いクォークを 1 つ含むバリオンについて計算を行い、実験値と比較を行った。
まず、クォーク・ダイクォークモデルの 2 体系で考えたとき、ダイクォークのカラー波動関数について考える必要があった。クォークのカラーは $\mathbf{3}$ であり、ダイクォークのカラーは $\bar{\mathbf{3}}$、$\mathbf{6}$ の 2 通りが考えられるが、ハドロン内のカラーは 1 重項である”白色”でなくてはならないため、ダイクォークのカラーは $\bar{\mathbf{3}}$ と仮定した。ダイクォークのスピンやフレーバーについても考える必要があるが、ダイクォークを構成するクォークはフェルミオンであり、入れ替えに対して反対称であるためこれらの組み合わせは表 2.1 である。
Point-like model についてはダイクォークを点粒子として考え、そのときカラー構造はメソンと同じ構造であるためメソンを再現する有効ポテンシャル (2.31) を用いてバリオンの励起エネルギーの計算を行った。その際ポテンシャルパラメータ α_{s}、k を決める必要があったため、メソンであるクォーコニウムを再現するようにパラメータを求めた。このパラメータを用いて、Λ_c 粒子についてメソンと同じカラー構造で考えているこのモデルで計算を行ったところ、クォーコニウムで求めたポテンシャルパラメータでは Λ_c 粒子の実験値を再現することができず、実験値を再現するようにポテンシャルパラメータを変えたところ有効ポテンシャルの線形項、つまり string tention と呼ばれる k のおよそ半分の値でなければ再現できないことがわかった。
つづいて、ダイクォークにサイズを持たせる Sizable model では、ダイクォークの空間波動関数について考える必要があった。今、前提としてカラー、スピン、フレーバーで反対称を作っており、クォークの入れ替えよりこれらの積は反対称である必要があるため、空間波動関数は対称、つまりダイクォークの軌道角運動量量子数 ℓ_ρ は偶数のみを取らなければいけないことがわかる。これを考慮し、ダイクォークのクォーク分布について Gauss 分布関数を用いて表して、Λ_c 粒子の 1p 軌道の実験値を再現するような計算値となるダイクォークの広がりパラメータ β を決めたところ、$\beta = 1.0$[fm]、つまりダイクォークの平均二乗直径 $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \simeq 1.22$[fm] のときに再現することがわかった。
以上のように決めたそれぞれのパラメータ α_{s}、k、β を用いて他の重いクォークを 1 つ含むバリオンについて 2 つのモデルを用いて計算、比較をしていくのだが、他のダイクォークのアイソスピンやフレーバーが異なるため、それぞれのバリオン内のダイクォーク質量を求める必要があった。ダイクォーク質量の決め方として、Λ_c 粒子のダイクォーク質量 ${m_{ud}}^0 = 0.5$[GeV/c^2] を基準として 1s 軌道のバリオンの質量差からそれぞれのバリオンのダイクォーク質量を各モデルごとで求めると、表 3.2、表 3.3 のような値となった。
これらのダイクォーク質量を用いてそれぞれのバリオンについて計算、比較を行ったとこ

ろ、2 つのモデルにおいて補正項を含まずカラー近似のみの計算であるにもかかわらず、思いバリオンの励起エネルギーに関してはおおよそ実験値を再現することができた。しかし、Sizable model の 2s 軌道の計算値に関しては、Point-like model の計算値と比べると特徴的な違いを見ることができた。
最後に、ダブルチャームバリオン Ξ_{cc} についても、ダイクォークを 2 つのチャームクォークで構成され、点粒子のように仮定して計算を行った。

本研究の結果は、テトラクォークやペンタクォークといったエキゾチックハドロンに対して、ハドロン内部構造を議論する際の有用な手掛かりになると考えている。現状ではどちらのクォーク・ダイクォークモデルが正しいかは判断しがたいが、これらの議論を進展させるためには、$\Lambda_c(2765)$?[7] など、未だスピンパリティがわかっていない励起スペクトルを解明することが重要であると考えている。また、この議論は理論・実験分野が共同となって原子核ハドロン物理学を進展させる議論になると私は考える。

謝辞

本修士論文を作成するにあたり、多くの方々に協力していただきました。ここで謝辞を述べさせていただきます。

はじめに、指導教官の東京工業大学原子核ハドロン物理学研究室 慈道大介教授には、個別のゼミを通じて研究全般にわたり熱心な指導、本研究に関する指摘をしていただきました。また、研究以外の場でも非常に楽しいお話をしていただきました。心からお礼を申し上げます。また、同研究室の方々との議論は大変有意義でした。

最後に、ここまで私を育ててくれた両親と祖父母に感謝します。

付 録A 数学公式

A.1 固有状態

s 軌道の固有状態を Clebsch-Gordan 係数を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
|0,0\rangle_S &= |00\,00\rangle & \text{(A.1)}\\
|2,2\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(|2\,{-2}\,2\,{+2}\rangle - |2\,{-1}\,2\,{+1}\rangle + |20\,20\rangle - |2\,{+1}\,2\,{-1}\rangle + |2\,{+2}\,2\,{-2}\rangle\right), & \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

p 軌道は

$$
\begin{aligned}
|0,1\rangle_P &= |00\,10\rangle & \text{(A.3)}\\
|2,1\rangle_P &= \sqrt{\frac{3}{10}}|2\,{-1}\,1\,{+1}\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|20\,10\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}|2\,{+1}\,1\,{-1}\rangle & \text{(A.4)}\\
|2,2\rangle_P &= \sqrt{\frac{2}{5}}|2\,{-2}\,2\,{+2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{10}}|2\,{-1}\,2\,{+1}\rangle + \sqrt{\frac{1}{10}}|2\,{+1}\,2\,{-1}\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|2\,{+2}\,2\,{-2}\rangle & \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

d 軌道は

$$
\begin{aligned}
|0,2\rangle_D &= |00\,20\rangle & \text{(A.6)}\\
|2,0\rangle_D &= |20\,00\rangle & \text{(A.7)}\\
|2,1\rangle_D &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,{+1}\,1\,{-1}\rangle - |2\,{-1}\,1\,{+1}\rangle\right) & \text{(A.8)}\\
|2,2\rangle_D &= \sqrt{\frac{2}{7}}|2\,{-2}\,2\,{+2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{14}}|2\,{-1}\,2\,{+1}\rangle - \sqrt{\frac{2}{7}}|20\,20\rangle \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{14}}|2\,{+1}\,2\,{-1}\rangle + \sqrt{\frac{2}{7}}|2\,{+2}\,2\,{-2}\rangle & \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

である。

A.2 3j 記号

今回用いた具体的な 3j 記号は

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{15}}, \tag{A.10}
$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{A.11}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{35}}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{35}} \tag{A.12}$$

である。

行列要素は (2.106) と定義しており、3j 記号で改めて記述すると

$$\langle \ell' m' | C_L^M | \ell m \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \int d\Omega Y_{\ell'}^{m'*}(\Omega) Y_\ell^m(\Omega) Y_L^M(\Omega) \tag{A.13}$$

$$= (-)^{-m'} \sqrt{(2\ell'+1)(2\ell+1)} \begin{pmatrix} \ell' & \ell & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \ell & L \\ -m' & m & M \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

と記述できる。

このとき、行列要素を具体的に計算すると

$$\langle 00 | C_L^M | 00 \rangle = \delta_{L0}\delta_{M0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \delta_{L0}\delta_{M0} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned} \langle 10 | C_L^M | 10 \rangle &= 3\delta_{M0} \left\{ \delta_{L0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_{L2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \delta_{M0} \left(\delta_{L0} + \frac{2}{5}\delta_{L2} \right) \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\langle 20 | C_L^M | 00 \rangle = \sqrt{5}\delta_{L2}\delta_{M0} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \delta_{L2}\delta_{M0} \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned} \langle 20 | C_L^M | 20 \rangle &= -5\delta_{M0} \left\{ \delta_{L0} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_{L2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &+ (-5)\delta_{M0}\delta_{L4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \delta_{M0} \left(\delta_{L0} + \frac{2}{7}\delta_{L2} + \frac{2}{7}\delta_{L4} \right) \end{aligned} \tag{A.18}$$

である。

この行列要素を用いてポテンシャルのそれぞれの項を具体的に計算する。はじめに、クーロン項は

$$\langle 0000 | \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} | 0000 \rangle = \frac{1}{r_>} \langle 00 | C_0^0 | 00 \rangle^* \langle 00 | C_0^0 | 00 \rangle = \frac{1}{r_>} \tag{A.19}$$

$$\langle 0010|\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}|0010\rangle = \frac{1}{r_>}\langle 00|C_0^0|00\rangle^*\langle 10|C_0^0|10\rangle = \frac{1}{r_>} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0020|\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}|0020\rangle &= \sum_{L=0}^{\infty}\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\sum_{M=-L}^{L}\langle 00|C_L^M|00\rangle^*\langle 20|C_L^M|20\rangle \\
&= \sum_{L=0}^{\infty}\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\delta_{L0}\left(\delta_{L0}+\frac{2}{7}\delta_{L2}+\frac{2}{7}\delta_{L4}\right) \\
&= \frac{1}{r_>}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
\langle 2000|\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}|2000\rangle &= \sum_{L=0}^{\infty}\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\sum_{M=-L}^{L}\langle 20|C_L^M|20\rangle^*\langle 00|C_L^M|00\rangle \\
&= \sum_{L=0}^{\infty}\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\left(\delta_{L0}+\frac{2}{7}\delta_{L2}+\frac{2}{7}\delta_{L4}\right)\delta_{L0} \\
&= \frac{1}{r_>}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0020|\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}|2000\rangle &= \sum_{L=0}^{\infty}\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\sum_{M=-L}^{L}\langle 20|C_L^M|00\rangle^*\langle 20|C_L^M|00\rangle \\
&= \sum_{L=0}^{\infty}\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\frac{1}{\sqrt{5}}\delta_{L2}\frac{1}{\sqrt{5}}\delta_{L2} \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{r_>}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2,
\end{aligned} \tag{A.23}$$

また、線形項は

$$\langle 0000||\vec{r}_1-\vec{r}_2||0000\rangle = r_>\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right]\langle 00|C_0^0|00\rangle^*\langle 00|C_0^0|00\rangle = r_>\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right] \tag{A.24}$$

$$\langle 0010||\vec{r}_1-\vec{r}_2||0010\rangle = r_>\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right]\langle 00|C_0^0|00\rangle^*\langle 10|C_0^0|10\rangle = r_>\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right] \tag{A.25}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle 0020||\vec{r}_1-\vec{r}_2||0020\rangle \\
&= r_> \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^L \left[\frac{1}{2L+3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - \frac{1}{2L-1}\right] \sum_{M=-L}^{L} \langle 00|C_L^M|00\rangle^* \langle 20|C_L^M|20\rangle \\
&= r_> \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^L \left[\frac{1}{2L+3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - \frac{1}{2L-1}\right] \delta_{L0}\left(\delta_{L0} + \frac{2}{7}\delta_{L2} + \frac{2}{7}\delta_{L4}\right) \\
&= r_> \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle 2000||\vec{r}_1-\vec{r}_2||2000\rangle \\
&= r_> \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^L \left[\frac{1}{2L+3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - \frac{1}{2L-1}\right] \sum_{M=-L}^{L} \langle 20|C_L^M|20\rangle^* \langle 00|C_L^M|00\rangle \\
&= r_> \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^L \left[\frac{1}{2L+3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - \frac{1}{2L-1}\right] \left(\delta_{L0} + \frac{2}{7}\delta_{L2} + \frac{2}{7}\delta_{L4}\right)\delta_{L0} \\
&= r_> \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle 0020||\vec{r}_1-\vec{r}_2||2000\rangle \\
&= r_> \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^L \left[\frac{1}{2L+3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - \frac{1}{2L-1}\right] \sum_{M=-L}^{L} \langle 20|C_L^M|00\rangle^* \langle 20|C_L^M|00\rangle \\
&= r_> \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^L \left[\frac{1}{2L+3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - \frac{1}{2L-1}\right] \frac{1}{\sqrt{5}}\delta_{L2}\frac{1}{\sqrt{5}}\delta_{L2} \\
&= -\frac{1}{5}r_> \left[\frac{1}{3}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^4\right]
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

となる。

A.3 調和振動子として見積もった場合の回転エネルギー

3 次元調和振動子の動径方向の波動関数は

$$
R(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \tag{A.29}
$$

と仮定することができる。このとき、ξ は無次元にする必要があるため、変数変換を行う必要がある。変数変換は

$$
\xi = \sqrt{\frac{m_d\omega}{\hbar}}\rho \tag{A.30}
$$

である。
一方、この波動関数 (A.29) と今回考える Gauss 分布関数 (2.112) は同じであるので

$$\xi = \frac{\rho}{\beta} \tag{A.31}$$

となる。したがって

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{m_d \beta^2} \tag{A.32}$$

となる。

参考文献

[1] Alessandro Bettini, *Introduction to Elementary Particle Physics Second Edition*, Cambridge univarsity press, 2012.

[2] B. Povh, K. Rith, C. Scholz and F. Zetsche, 柴田 利明 訳, 『素粒子・原子核物理入門』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997 年.

[3] Franz Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, A Wiley-Interscience Publication, 1999.

[4] 坂本 眞人, 『場の量子論』, 裳華房, 2014 年.

[5] Daisuke Jido and Minori Sakashita, PTEP, 2016 (2016) no.8, 083D02.

[6] Particle data group.

[7] Kento Kumakawa and Daisuke Jido, PTEP, 2017 (2017) no.12, 123D01.

[8] D. B. Lichtenberg, W. Namgung, E. Predazzi and J. G. Wills, Phys. Rev. Lett. 48, 1653.

[9] Shotaro Imai and Hideo Suganuma, J. Mod. Phys. 7, 790 (2016).

[10] Kento Kumakawa and Daisuke Jido, inpreparation.

[11] LHCb collaboration, LHCb-PAPER, 2017-018.

[12] D. Ebert, R.N. Faustov and V.O. Galkin, Phys. Rev. D 72, 034026 (2008).

[13] D. Ebert, R.N. Faustov and V.O. Galkin, Phys. Lett. B 659 (2008) 612-620.

[14] T. Yoshida, E. Hiyama, A. Hosaka, M. Oka and K. Sadato, Phys. Rev. D 92, 114029 (2015).

[15] E. Hernández, J. Nieves and J.M. Velasco, Phys. Lett. B 666 (2008) 150-154.

[16] Martin J. Savage and Mark B. Wise, Phys. Lett. B 248 (1990) 177-180.

[17] D. Ebert, R.N. Faustov and V.O. Galkin, Phys. Rev. D 84, 014025 (2011).

[18] Zalak Shah et al., Chi. Phys. C 40 No.12, 123102 (2016).

[19] G. R. Goldstein and J. Maharana, Il Nuovo Cimento A, vol. 59, issue 4, pp. 393-411.