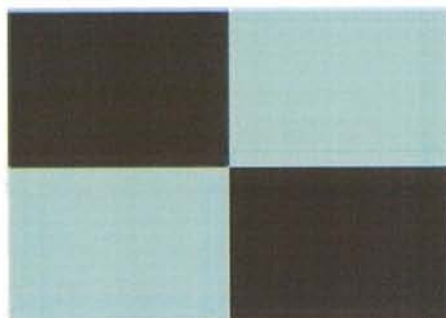


入出力データを用いた分散評価に基づくデータ駆動型制御器設計法  
ー制御不変量の推定を用いた外乱モデルの同定ー

指 導 教 員

増 田 士 朗



首都大学東京大学院

システムデザイン研究科 システムデザイン専攻 経営システムデザイン学域

(平成29年度)

---

1 6 8 9 2 5 3 4

---

横 山 司



## 目次

1	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究目的	2
1.3	本論文の構成	2
2	データ駆動型制御器調整法	4
2.1	モデル参照制御問題	4
2.2	Iterative Feedback Tuning	5
2.3	Virtual Reference Feedback Tuning	5
2.4	Fictitious Reference Iterative Tuning	6
3	閉ループ定値制御データを用いた制御器設計法	7
3.1	システムの記述	7
3.2	最小分散制御	8
3.3	一般化最小分散制御	9
3.4	データ駆動型最小分散制御	10
3.4.1	分散評価に基づく外乱抑制 FRIT 法を用いた制御器とモデルの同時更新	10
3.4.2	外乱の動特性が未知の場合のデータ駆動型最小分散制御	12
3.5	分散評価に基づく制御不変量の推定を用いたデータ駆動型制御器調整法	13
3.5.1	制御不変量の推定方法	14
3.5.2	制御不変量の推定を用いた外乱モデルの伝達関数の計算	15
3.5.3	分散評価に基づくデータ駆動型制御器調整法	16
3.5.4	制御不変量の推定を利用したデータ駆動型 PID ゲイン調整法	17
3.5.5	制御性能評価を考慮したデータ駆動型制御器調整法	18
3.6	不安定な Box-Jenkins モデルにおける制御不変量の推定方法	19
3.6.1	出力信号の時系列解析における問題点	19
3.6.2	外乱モデルの伝達関数の条件利用した制御不変量の推定方法	20
3.7	制御対象のむだ時間の推定	20
3.8	閉ループ定値制御データを用いた制御器設計法の課題	21
4	システム同定	22
4.1	ARX モデルの可同定性	22
4.2	ARMAX モデルの可同定性	23
4.3	Box-Jenkins モデルの可同定性	24
5	数値例	26
5.1	定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法	26
5.1.1	シミュレーション設定	26
5.1.2	制御不変量の推定を利用したデータ駆動型最小分散制御	26
5.1.3	制御不変量の推定を利用したデータ駆動型 PID ゲイン調整法	29
5.1.4	制御性能評価を考慮したデータ駆動型制御器調整法	32
5.2	外乱モデルの推定精度	35
6	結論	36



# 1 序論

## 1.1 研究背景

近年、制御系から得られる入出力データを用いて制御器を設計するというデータ駆動型制御器調整法が注目を集めている。従来の制御対象の数学モデルによるモデルベース制御に比べて、データ駆動型制御は制御器の設計における事前情報が少ないことが利点である。また、設計者が望む制御仕様に基いて制御器を求めるので、制御対象のモデリングが困難である場合に有効である。一方で、制御仕様は制御対象の次数よりも低次元化された参照モデルで表現されることが多く、制御器によって実現可能な制御仕様であることを保証していないので、求められた制御器が制御系を不安定化させたり、制御性能の劣化等を引き起こす可能性がある。

モデルベース制御器設計法の代替手法として、閉ループ系が設計者の望む応答になるように制御器を調整する手法が数多く考案されている。データ駆動型制御器調整法の先駆けとして、制御器の調整の毎に入出力データを繰り返し取得することで理想的な制御器を得るという Iterative Feedback Tuning (IFT) [1] がある。この手法はモデルベースにおける制御器の評価関数をデータ駆動型の評価関数で近似的に表現することで制御器の調整を可能としている。IFT における問題点として、制御器の調整毎に入出力データを取得する必要がある。この問題点を解決するために、Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) [2] や Fictitious Reference Iterative Tuning (FRIT) [3] が提案されている。これらは一回の入出力データの取得で制御器の調整が可能なので、制御器設計におけるコストが IFT よりも優れていると言える。これらの手法に基いて、制御対象が非最小位相である条件に対応した VRFT[4] も提案されている。さらに、多入出力系において、雑音を考慮した Fictitious Correlation-based Tuning (FCbT) [5] や出力にむだ時間を持つ制御対象を考慮した FRIT[6] などもある。上記のような理論研究だけではなく、実際に産業界では E-FRIT[7] として、モデル不要な PID 調整法として応用されている。

従来の VRFT や FRIT では入出力データを得る際に制御対象や閉ループ系に外部励振信号を印加する必要があった。サーボ系は目標値変更により出力を追従させるような制御が行われるので、目標値変更による外部励振信号が発生するが、プロセス制御では目標値を一定に保つような定値制御が行われることがある。したがって、定値制御における入出力データを用いたデータ駆動型制御器調整法の拡張が必要であった。また、定値制御では制御対象の他に外乱モデルを考慮しなければならない。定値制御における外乱として確定外乱を想定したものとして FRIT を拡張した外乱抑制 FRIT 法（確定外乱）[8] がある。確定外乱としてインパルス状やステップ状の外乱が想定される。この手法では、確定外乱の形状は既知であるが、その大きさが未知であるとき、その大きさを最適化変数としてデータ駆動型の評価関数に組み込んでいる。したがって、外乱の推定も含んだ制御器の調整であると考えられる。

外乱が確率的な信号と想定する定値制御データでは、外乱モデルが既知である条件下で FRIT に基づいた手法として外乱抑制 FRIT[9] が考案された。ここで、外乱モデルは伝達関数で表され、外乱信号は外乱モデルに白色雑音を印加したものを想定する。この手法では、制御対象が経年変化や外部的要因によってノミナルモデルと大きく特性が異なり、本来の制御性能が発揮できない状況を考慮している。外乱抑制 FRIT では定値制御データを用いて変動後の制御対象の最小分散制御を達成できるような制御器に調整を行う。そして、理想的な最小分散制御器が得られた場合、同時に制御対象の数学モデルも得られることが分かっている。また、その他の定値制御データを用いた手法として、一般化最小分散評価に基づいたデータ駆動型一般化最小分散制御（Data-driven Generalized Minimum Variance Control 以下、D-GMVC と略す）[10] も提案されている。D-GMVC は VRFT や FRIT と異なり、参照モデルを必要としない。また、制御目的が外乱抑制であるので、制御性能の評価は入力と出力の分散で行う。D-GMVC は制御対象と外乱モデルの伝達関数を求めることにより、



最小分散制御器を獲得していることから、システム同定との関連も考察されている [11]。D-GMVC の拡張として、外乱モデルの多項式が既知である条件の下で、PID ゲイン調整 [12] を提案している。

## 1.2 研究目的

本研究では主に定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法に着目し、制御不変量の推定を用いた外乱モデルの同定と制御器のパラメータに関する評価関数を導出する。制御不変量は制御性能のベンチマークとして使われている [13]。定値制御は制御目的が一定であるような場合に用いられ、プロセス制御で行われることが多い。また、プロセス制御では制御系にむだ時間が含まれることがあり、制御不変量が存在する。制御不変量はフィードバック不変なので、フィードバック制御器によって補償することができない。従来法の D-GMVC は制御対象と外乱モデルの伝達関数の係数を最適化変数として制御器を求めているので、それらの次数が既知であるという条件が重要である。制御対象と外乱モデルの次数はシステム同定においても重要であり、次数のミスマッチによって制御性能に影響を与える可能性がある。本手法では制御対象の次数が未知である場合に設計者が望む閉ループ応答を形成する制御器を得る。さらに、制御不変量の推定から外乱モデルの伝達関数を同定できる条件を明らかにし、制御器に関するデータ駆動型の評価関数に用いる。

定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法は以下の条件を考慮する必要がある。

- (1) 外乱モデルの伝達関数と次数構造。
- (2) 制御対象の伝達関数と次数構造。
- (3) 制御対象のむだ時間。
- (4) 制御系の数学モデル。

(1) は定値制御においてどのような外乱を想定するかというものであり、通常その数学モデルが与えられることはない。(2) はデータ駆動型制御器調整法のなかで伝達関数そのものが既知とはしないが、次数構造が既知である条件下で提案される手法もある。従来の手法では外乱モデルが既知であることや、制御対象と外乱モデルを同定することによって制御器の獲得を行っている。また、制御対象の伝達関数そのものを既知とすることはしないが、次数構造が既知である条件で提案される手法もある。(3) は定値制御データからむだ時間を推定することは困難であるため、既知とすることもあるが、制御不変量とデータ駆動型の評価関数を最小化するパラメータが唯一である場合においてむだ時間の推定が可能である手法も提案された [11]。(4) は制御対象と外乱モデルの伝達関数がどの時系列モデルを取るかということである。モデルの簡便性から ARMA (Autoregressive Moving Average) モデルを用いたり、モデルの表現の幅を広げるために、BJ (Box-Jenkins) モデルが用いられられたりする。本研究では、BJ モデルにおいて制御対象が不安定系のときに生じる問題について考察を行った。これは、不安定系において出力信号から制御不変量の推定を行うことはできないが、制御不変量と外乱モデルの関係から推定が可能となることを提案する。

## 1.3 本論文の構成

本論文は以下のような全 6 章から構成される。第 1 章において、本研究の背景や目的について述べた。第 2 章では、データ駆動型制御器調整法として代表的な手法を簡潔に説明する。第 3 章では、閉ループ定値制御データを用いた制御器設計法について詳細に述べる。初めに、離散時間系のシステムに対して定値制御を行う際に有効とされる最小分散制御と一般化最小分散制御について述べる。続いて、定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法の先駆けとなった、データ駆動型最小

分散制御を説明する。さらに，制御系に存在する制御不変量に着目した手法を述べる。第4章では，データ駆動型制御器調整法と対比されるシステム同定について簡単に述べる。第5章では，第3章で提案した各種法について数値シミュレーションを通して有効性を確認する。最後に，第6章では本研究のまとめと課題について述べる。

## 2 データ駆動型制御器調整法

本章では、初めにモデルベース制御であるモデル参照制御問題について述べる。データ駆動型制御器調整法の評価関数はモデル参照制御問題の評価関数を入出力データを用いて近似することが特徴のひとつである。つぎに、データ駆動型制御器調整法である IFT, VRFT, FRIT について簡潔に述べる。

### 2.1 モデル参照制御問題

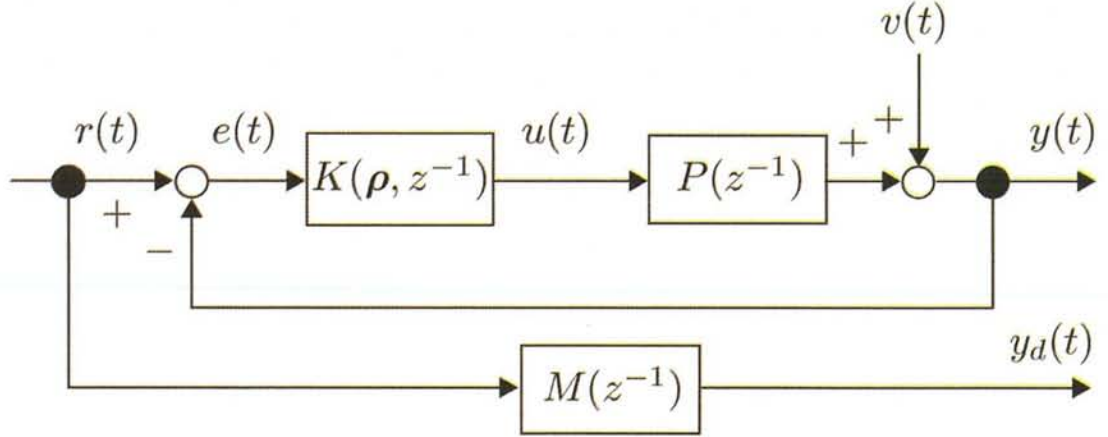


Fig. 2.1.1: Block diagram of the reference model control system

システムが線形離散時間伝達関数を用いて Fig. 2.1.1 で表されるとする。  $r(t)$  は目標値信号であり、  $u(t)$ ,  $y(t)$  はそれぞれ入力信号と出力信号を表す。  $e(t)$  は  $r(t)$  と  $y(t)$  の偏差信号であり、  $v(t)$  は外乱信号を表す。また、制御対象を  $P(z^{-1})$  で表し、  $K(\rho, z^{-1})$  は変数ベクトル  $\rho$  によって調整可能な制御器である。ここで、引数である  $z^{-1}$  は信号に単位遅延を与える演算子であり、適宜省略する。目標値追従制御では、設計者が望む閉ループ特性  $M(z^{-1})$  を達成するような制御器を求めるために、制御対象の数学モデル  $P$  が与えられなければならない。つまり、

$$M(z^{-1}) = \frac{P(z^{-1})K(\rho^*, z^{-1})}{1 + P(z^{-1})K(\rho^*, z^{-1})} \quad (2.1)$$

を満たす制御器  $K(\rho^*)$  を求めることである。このとき、  $y(t)$  と設計者が望む出力信号  $y_d(t)$  が、

$$y(t) = y_d(t) \quad (2.2)$$

となる。モデルベースの評価関数を  $J_{MR}(\rho)$  を次式で定義する。

$$J_{MR}(\rho) = \left\| M - \frac{PK(\rho)}{1 + PK(\rho)} \right\|_2^2 \quad (2.3)$$

ここで、  $\|\cdot\|_2$  は  $\mathcal{H}_2$  ノルムを表す。制御対象が既知であるとき、  $J_{MR}(\rho)$  を最小化する制御器は、(2.1) 式より、

$$K(\rho^*) = \frac{M}{(1 - M)P} \quad (2.4)$$

となる。ここで、  $J_{MR}(\rho)$  を最小化する変数ベクトルを  $\rho_{opt}$  とする。データ駆動型制御器調整法では、  $J_{MR}(\rho)$  をデータを用いて近似的に表すことにより、データ駆動型の評価関数を最適化するパ



ラメータの根拠となっている。(2.1)式において、参照モデル  $M$  は通常未知である制御対象  $P$  を含んでいるので、 $K(\rho^*) \neq K(\rho_{opt})$  となる。しかし、 $J_{MR}(\rho)$  の近似された評価関数を最小化することにより、 $K(\rho_{opt})$  は  $K(\rho^*)$  を  $\mathcal{H}_2$  ノルムの上で近似していると考えられる。

## 2.2 Iterative Feedback Tuning

Iterative Feedback Tuning (IFT) [1] は、特別な実験を行って得た入出力データを用いて、入出力データの制御器のパラメータに関する勾配ベクトルを入出力データで表現し、制御器を調整する手法である。データ駆動型の評価関数を導出するために、以下の信号を定義する。

$$y(\rho, t) = \frac{PK(\rho)}{1 + PK(\rho)}r(t) + \frac{1}{1 + PK(\rho)}v(t) \quad (2.5)$$

上式は制御器  $K(\rho)$  を実装したときの出力である。その出力と理想的な出力  $y_d$  との偏差を  $\tilde{y}(\rho, t)$  とすると、

$$\tilde{y}(\rho, t) = y(\rho, t) - y_d(t) \quad (2.6)$$

となる。また、制御器  $K(\rho, z^{-1})$  による入力  $u(\rho, t)$  は、

$$u(\rho, t) = \frac{K(\rho)}{1 + PK(\rho)}r(t) - \frac{K(\rho)}{1 + PK(\rho)}v(t) \quad (2.7)$$

となる。データ駆動型の評価関数を  $J(\rho)$  とする。

$$J(\rho) = E \left[ \{L_y(z^{-1})\tilde{y}(\rho, t)\}^2 + \lambda \{L_u(z^{-1})u(\rho, t)\}^2 \right] \quad (2.8)$$

ここで、 $L_y(z^{-1})$ ,  $L_u(z^{-1})$  は設計者が設定するフィルターである。また、 $\lambda$  は正数であり評価関数に対する入力のペナルティとなっている。 $J(\rho)$  を最小化するパラメータ  $\rho$  を求めるために、評価関数を  $\rho$  で偏微分し、ガウス・ニュートン法を用いて、繰り返し最適計算を行う。ガウス・ニュートン法は非線形最適化計算の一つである。 $i$  回目の更新で導出されるパラメータを  $\rho_i$  とすると、 $i+1$  回目では

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma \left( \frac{\partial^2 J(\rho_i)}{\partial \rho_i \partial \rho_i^T} \right)^{-1} \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho_i} \quad (2.9)$$

となる。IFT では、(2.9) 式を入出力データで表現するので、繰り返し計算を行う毎に入出力データを取る必要がある。

## 2.3 Virtual Reference Feedback Tuning

Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) [2] は、一回の実験で得た開ループにおける入出力データを用いて制御器を調整する手法である。VRFT では仮想参照信号  $\bar{r}(t)$  を参照モデルの逆システムを用いて、

$$\bar{r}(t) = M^{-1}y(t) \quad (2.10)$$

と定義する。 $\bar{r}(t)$  と  $y(t)$  との偏差を  $e(t)$  とすると、

$$e(t) = \bar{r}(t) - y(t) \quad (2.11)$$

となり、これらを用いてデータ駆動型の評価関数を  $J(\rho)$  とすると、

$$J(\rho) = E \left[ \{L(z^{-1})u(t) - K(\rho)L(z^{-1})e(t)\}^2 \right] \quad (2.12)$$

となる。ここで、 $L(z^{-1})$  はプレフィルタであり、(2.3) 式に  $J(\rho)$  を近づけるために、

$$L(z^{-1}) = (1 - M) M \frac{1}{\Phi_u} \quad (2.13)$$

が提案されている。ここで、 $\Phi_u$  は入力  $u(t)$  のパワースペクトル密度である。(2.12) 式の最適化において、制御器の伝達関数の分子多項式のみをパラメータ化したものを用いると、線形最適化となるので最小二乗法で解くことができる。

制御対象が非最小位相である場合、制御対象の零点はフィードバック不変であるので、閉ループ系のステップ応答は逆応答を持つ。このとき、参照モデルも制御対象の零点を持つことが望ましい。この問題に対して、参照モデルの分子多項式をパラメータ化することで、制御対象の零点の同定と共に制御器の最適化も行う手法が提案されている [4]。また、(2.13) 式以外のフィルタとして、入力データに基づく FIR フィルタ [14] が提案されている。

## 2.4 Fictitious Reference Iterative Tuning

Fictitious Reference Iterative Tuning (FRIT) [3] は、一回の実験で得た閉ループステップ応答データを用いて制御器を調整する手法である。パラメータ化された制御器と入出力データを用いて、疑似参照信号  $\tilde{r}(\rho, t)$  を定義する。閉ループステップ応答データは、

$$y(t) = \frac{PK(\rho_0)}{1 + PK(\rho_0)} r(t) \quad (2.14)$$

$$u(t) = \frac{K(\rho_0)}{1 + PK(\rho_0)} r(t) \quad (2.15)$$

と表される。ここで、 $\rho_0$  は初期制御器のパラメータである。疑似参照信号は次のように定義される。

$$\tilde{r}(\rho, t) = K^{-1}(\rho)u(t) + y(t) \quad (2.16)$$

FRIT の評価関数は、疑似参照信号 (2.16) 式を用いて、つぎのように定義できる。

$$J(\rho) = E \left[ \{y(t) - M\tilde{r}(\rho, t)\}^2 \right] \quad (2.17)$$

(2.17) 式の右辺は

$$\begin{aligned} y(t) - M\tilde{r}(\rho, t) &= y(t) - M(K^{-1}(\rho)u(t) + y(t)) \\ &= (1 - M)y(t) - MK^{-1}(\rho)u(t) \\ &= (1 - M - MK^{-1}(\rho)P^{-1})y(t) \\ &= \frac{1 - K(\rho^*)K^{-1}(\rho)}{1 + PK^*}y(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

と計算できる。よって、(2.17) 式を最小化する  $K(\rho)$  は、

$$\begin{aligned} 1 - K(\rho^*)K^{-1}(\rho) &= 0 \\ K(\rho) &= K(\rho^*) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。したがって、(2.17) 式を最小化することで、所望の制御性能を持つ制御器が得られる。また、評価関数の構成において、制御器の逆数が用いられるため、制御器の伝達関数は可逆であり、その零点は安定でなければならない。そのような制約の下で、(2.17) 式の  $\rho$  に関する最適化において、PID 制御器のような分子多項式にパラメータを持つような制御器を選ぶと、非線形最適化問題となる。これは評価関数がパラメータに関して線形ではないためである。この問題に対して、制御器調整を最小二乗法に基づいて最適化する FRIT の拡張も提案されている [15]。

### 3 閉ループ定値制御データを用いた制御器設計法

本章では、閉ループ定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法を詳細に述べる。定値制御データは外部励振信号を制御系に印加しない状況下で得られるので、従来のデータ駆動型制御器調整法とは異なるアプローチが必要となる。これは、調整に用いる入出力データの性質がデータ駆動型の評価関数の構成に影響を与えるためである。本章の構成として、モデルベース制御の手法である最小分散制御と一般化最小分散制御について述べる。これらの手法は、出力や入力の分散値を最小化することを目的としているので、定値制御で有効である。次に、データ駆動型の最小分散制御について述べる。これは、定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法の先駆けとなった研究 [9] である。次に、制御不変量に着目した各手法について述べる。制御不変量は定値制御における出力信号の時系列解析によって推定することができる。制御不変量の推定を用いて外乱モデルを同定し、その外乱モデルをデータ駆動型の評価関数に組み込む。

#### 3.1 システムの記述

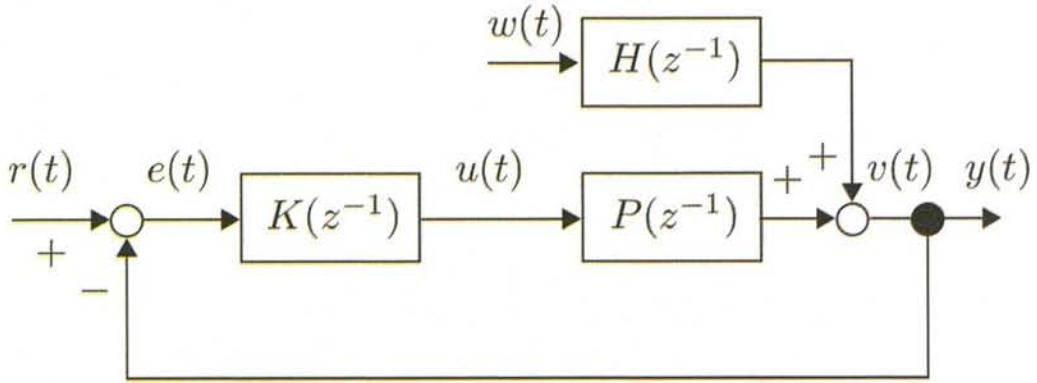


Fig. 3.1.1: Block Diagram of the controlled system

制御目的は Fig. 3.1.1 で表現される閉ループシステムにおいて、入力や出力の分散値を抑制するような制御器  $K(z^{-1})$  を求めることである。Single-Input Single-Output (SISO) の線形離散時間モデルであるシステムを対象とする。制御対象を  $P(z^{-1})$ 、外乱モデルを  $H(z^{-1})$  で表し、入力信号を  $u(t)$ 、出力信号を  $y(t)$ 、白色雑音を  $w(t)$  とする。ここで、 $w(t)$  は平均 0、分散  $\sigma^2$  である。これらを用いて、入出力の関係は次のようになる。

$$y(t) = P(z^{-1})u(t) + H(z^{-1})w(t) \quad (3.1)$$

$k$  を制御対象のむだ時間として、(3.1) 式を Box-Jenkins モデルで表現すると、以下のようになる。

$$y(t) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} w(t) \quad (3.2)$$

ここで、 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 、 $C(z^{-1})$  および  $D(z^{-1})$  は次式で与えられる多項式である。

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a} \quad (3.3)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b} \quad (3.4)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c} \quad (3.5)$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_{n_d} z^{-n_d} \quad (3.6)$$



ここで、 $n_a, n_b, n_c, n_d$  は整数であり、それぞれ多項式  $A, B, C, D$  の次数を表す。また、制御対象と外乱モデルの伝達関数は、

$$P(z^{-1}) = \frac{z^{-k}B}{A} \quad (3.7)$$

$$H(z^{-1}) = \frac{C}{D} \quad (3.8)$$

となる。また、 $C$  と  $D$  は安定多項式であるとする。ここで、安定多項式とは、多項式の根全てが単位円内に存在することである。

### 3.2 最小分散制御

Box-Jenkins モデルにおける最小分散制御器を導出する。最小分散制御は次の評価関数  $J_{MVC}$  を最小化する制御則を求めることである。

$$J_{MVC} = E \left[ \{y(t+k)\}^2 \right] \quad (3.9)$$

ここで、 $E[\cdot]$  は数学的期待値を表す。制御則を求めるにあたり、(3.10) 式でディオファントス方程式を定義する。

$$C = DE + z^{-k}F \quad (3.10)$$

多項式  $E(z^{-1}), F(z^{-1})$  はそれぞれ

$$E(z^{-1}) = 1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \cdots + e_{k-1} z^{-(k-1)} \quad (3.11)$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots + f_{n_f} z^{-n_f} \quad (3.12)$$

である。ここで、多項式  $F$  の次数  $n_f$  は、 $E, F$  が (3.10) 式の一意解となるように決定する。

$$n_f = \max\{n_d - 1, n_c - k\} \quad (3.13)$$

次に、時刻  $t+k$  における出力を時刻  $t$  以前の信号と時刻  $t+1$  以後の信号に分離する。

$$\begin{aligned} y(t+k) &= \frac{B}{A}u(t) + \frac{C}{D}w(t+k) \\ &= \frac{B}{A}u(t) + \left(E + \frac{z^{-k}F}{D}\right)w(t+k) \\ &= \frac{B}{A}u(t) + \frac{F}{D}w(t) + Ew(t+k) \\ &= \frac{B}{A}u(t) + \frac{F}{D} \left( \frac{D}{C}y(t) - z^{-k} \frac{BD}{AC}u(t) \right) + Ew(t+k) \\ &= \frac{F}{C}y(t) + \frac{BC - z^{-k}BF}{AC}u(t) + Ew(t+k) \\ &= \frac{F}{C}y(t) + \frac{BDE}{AC}u(t) + Ew(t+k) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$w(t+k)$  は未知の白色雑音なので、時刻  $t$  における出力の  $k$  ステップ最適予測値  $\hat{y}(t+k|t)$  を  $y(t)$ ,  $u(t)$  を用いて、

$$\hat{y}(t+k|t) = \frac{F}{C}y(t) + \frac{BDE}{AC}u(t) \quad (3.15)$$

と表すことができる。 $\hat{y}(t+k|t)$  は時刻  $t$  までの入出力データで構成される。ここで、(3.14) 式を  $\hat{y}(t+k|t)$  を用いて表すと、

$$y(t+k) = \hat{y}(t+k|t) + Ew(t+k) \quad (3.16)$$

となる．(3.16) 式を (3.9) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} J_{MVC} &= E \left[ \{\hat{y}(t+k|t) + Ew(t+k)\}^2 \right] \\ &= E \left[ \{\hat{y}(t+k|t)\}^2 \right] + 2E [\hat{y}(t+k|t)Ew(t+k)] + E \left[ \{Ew(t+k)\}^2 \right] \\ &= E \left[ \{\hat{y}(t+k|t)\}^2 \right] + \|E\|_2^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

と計算できる．ここで， $\sigma^2$  は白色雑音  $w(t)$  の分散であることに注意する．また，計算の過程で以下の式を用いた．

$$E [\hat{y}(t+k|t)Ew(t+k)] = 0 \quad (3.18)$$

(3.18) 式は時刻  $t$  までの入出力データで構成される信号  $\hat{y}(t+k|t)$  と，時刻  $t+1$  から時刻  $t+k$  までの白色雑音から構成される有色雑音  $Ew(t+k)$  は無相関であるという意味である． $J_{MVC}$  を最小化する制御入力は，

$$\hat{y}(t+k|t) = 0 \quad (3.19)$$

を満たすものである．上式を  $u(t)$  について解くと，

$$u(t) = -\frac{AF}{BDE}y(t) \quad (3.20)$$

が得られる．よって最小分散制御器  $K_{MVC}$  は

$$K_{MVC} = -\frac{AF}{BDE} \quad (3.21)$$

となる．最小分散制御器を実装した閉ループシステムの相補感度関数  $T_{MVC}$  と感度関数  $S_{MVC}$  は，

$$T_{MVC} = z^{-k} \frac{F}{C} \quad (3.22)$$

$$S_{MVC} = \frac{DE}{C} \quad (3.23)$$

となる．したがって，最小分散制御では相補感度関数と感度関数は制御対象のむだ時間と外乱モデルの伝達関数から構成されることがわかる．ここで， $J_{MVC}$  の最小値を  $\bar{J}_{MVC}$  とすると，

$$\bar{J}_{MVC} = \|E\|_2^2 \sigma^2 \quad (3.24)$$

となる．

### 3.3 一般化最小分散制御

最小分散制御では，出力の分散の最小化が目的であるが<sup>3</sup>，入力分散は考慮していない．また，最小分散制御では，制御対象が最小位相系のみを対象として，むだ時間が既知でないと制御を行うことができないという問題がある．本節では，Box-Jenkins モデルにおける一般化最小分散制御器を導出する．一般化出力  $\phi(t+k)$  を

$$\phi(t+k) = y(t+k) + Qu(t) \quad (3.25)$$

と定義する．ここで，多項式  $Q$  は設計者が決定するパラメータである．通常は一般化出力は， $\phi(t+k) = Q_1 y(t+k) + Q_2 u(t)$  と表されるが<sup>3</sup>，簡単のため  $Q_1 = 1$ ， $Q_2 = Q$  とし，議論を行う．一般化最小分散制御における評価関数を  $J_{GMVC}$  を

$$J_{GMVC} = E \left[ \{\phi(t+k)\}^2 \right] \quad (3.26)$$



と定義する。制御則は (3.26) 式を最小化するものである。 (3.16) 式を用いて  $\phi(t+k)$  を計算すると、

$$\phi(t+k) = \hat{y}(t+k|t) + Qu(t) + Ew(t+k) \quad (3.27)$$

となり、 $J_{GMVC}$  は、

$$J_{GMVC} = E \left[ \{\hat{y}(t+k|t) + Qu(t)\}^2 \right] + E \left[ \{Ew(t+k)\}^2 \right] \quad (3.28)$$

と計算できる。よって、 $J_{GMVC}$  を最小化する制御入力は、

$$\hat{y}(t+k|t) + Qu(t) = 0 \quad (3.29)$$

を満たさなければならない。 (3.15) を用いて、

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k|t) + Qu(t) &= \frac{F}{C}y(t) + \frac{BDE}{AC}u(t) + Qu(t) \\ &= \frac{F}{C}y(t) + \frac{BDE + ACQ}{AC}u(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

と計算できることから、最適な制御入力は、

$$u(t) = -\frac{AF}{BDE + ACQ}y(t) \quad (3.31)$$

となる。したがって、 $J_{GMVC}$  を最小化する制御器  $K_{GMVC}$  は、

$$K_{GMVC} = \frac{AF}{BDE + ACQ} \quad (3.32)$$

と表すことができる。 $K_{GMVC}$  を閉ループシステムに実装したときの相補感度関数  $T_{GMVC}$  と感度関数  $S_{GMVC}$  は、

$$T_{GMVC} = z^{-k} \frac{F}{BC + ACQ} \quad (3.33)$$

$$S_{GMVC} = \frac{BDE + ACQ}{BC + ACQ} \quad (3.34)$$

ここで、 $J_{GMVC}$  の最小値  $\bar{J}_{GMVC}$  は、

$$\bar{J}_{GMVC} = \|E\|_2^2 \sigma^2 \quad (3.35)$$

となる。

### 3.4 データ駆動型最小分散制御

本節では、閉ループ定値制御データから最小分散制御器のパラメータを調整する手法について述べる。

#### 3.4.1 分散評価に基づく外乱抑制 FRIT 法を用いた制御器とモデルの同時更新

ここで、以下の仮定を設ける。

仮定 3.1 多項式  $C(z^{-1})$ ,  $D(z^{-1})$  は次数構造と係数は既知である.

仮定 3.2 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  の次数構造は既知であるが係数は未知である.

仮定 3.3 むだ時間  $k$  は既知である.

仮定 3.4 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  は既約である.

仮定 3.5 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  はモニックである.

仮定 3.6 多項式  $B(z^{-1})$  は安定多項式である.

仮定 3.6 は, 多項式  $B$  は制御対象の分子であり, 最小分散制御器  $K_{MVC}$  の分母に存在するので, 不安定極と不安定零点とのキャンセルを起こし, 閉ループが内部不安定となるのを防ぐためである.

閉ループ定値制御データは Fig. 3.1.1 において,  $r(t) = 0$  として得られるものとする, 以下のようになる.

$$y(t) = \frac{H}{1 + PK} w(t) \quad (3.36)$$

$$u(t) = -\frac{KH}{1 + PK} w(t) \quad (3.37)$$

この入出力データを用いて制御器を調整するために, FRIT 法で用いられる擬似参照信号  $\tilde{r}(\rho, t)$  [3] を利用する. 擬似参照信号は制御器をパラメータ化して, 以下のように定義される.

$$\tilde{r}(\rho, t) = K^{-1}(\rho)u(t) + y(t) \quad (3.38)$$

$\rho = \begin{bmatrix} \rho_N^T & \rho_D^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{1 \times (p+q)}$ ,  $\rho_N = [\rho_{N(1)} \dots \rho_{N(p)}]^T \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ ,  $\rho_D = [\rho_{D(1)} \dots \rho_{D(q)}]^T \in \mathbb{R}^{1 \times q}$ , とすると, 調整可能な制御器は

$$K(\rho, z^{-1}) = \frac{\rho_{N(1)} + \rho_{N(2)}z^{-1} + \dots + \rho_{N(p)}z^{-p+1}}{1 + \rho_{D(1)}z^{-1} + \dots + \rho_{D(q)}z^{-q}} \quad (3.39)$$

となる. パラメータ化した制御器をシステムに実装したときの相補感度関数  $T(\rho)$  と感度関数  $S(\rho)$  は,

$$T(\rho) = \frac{PK(\rho)}{1 + PK(\rho)} \quad (3.40)$$

$$S(\rho) = \frac{1}{1 + PK(\rho)} \quad (3.41)$$

となる. これらを用いて  $y(\rho, t)$  を計算すると,

$$\begin{aligned} y(\rho, t) &= T(\rho)\tilde{r}(\rho, t) + S(\rho)v(t) \\ &= \frac{PK(\rho)}{1 + PK(\rho)} (K^{-1}(\rho)u(t) + y(t)) + S(\rho)v(t) \\ &= \frac{P}{1 + PK(\rho)} u(t) + T(\rho)y(t) + S(\rho)v(t) \\ &= S(\rho)(y(t) - v(t)) + T(\rho)y(t) + S(\rho)v(t) \\ &= (T(\rho) + S(\rho))y(t) \\ &= y(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる。これは、任意の制御器  $K(\rho)$  を用いて得られる擬似参照信号を利用することで、初期出力を再現できるということである。したがって、得られた出力データ  $y(t)$  と参照モデル  $T(\rho^*)$  に擬似参照信号を通した信号が近づくようなパラメータベクトル  $\rho$  を求めることを可能にする。ここで、 $\rho^*$  は最小分散制御器のパラメータを表すものとする。次に、 $y(t)$  と  $T(\rho)\tilde{r}(\rho, t)$  の偏差を  $e(\rho, t)$  とすると、

$$e(\rho, t) = y(t) - T(\rho)\tilde{r}(\rho, t) \quad (3.43)$$

となる。上式を用いて、データ駆動型の評価関数を  $J_D(\rho)$  とすると、

$$J_D(\rho) = E[\{e(\rho, t)\}^2] \quad (3.44)$$

で定義する。外乱の伝達関数が既知であることから、 $T(\rho^*)$  と  $S(\rho^*)$  は既知となる。ここで、 $T(\rho^*) = T_{MVC}$ 、 $S(\rho^*) = S_{MVC}$  であることに注意する。よって、 $e(\rho, t)$  は、

$$e(\rho, t) = y(t) - z^{-k} \frac{F}{C} \tilde{r}(\rho, t) \quad (3.45)$$

と表現できる。パラメータ化された制御器は、制御対象の次数構造が既知であることから、

$$K(\rho) = \frac{A(\rho)F}{B(\rho)DE} \quad (3.46)$$

と表現することができる。したがって、制御対象のパラメータ化と制御器のパラメータ化が対応していることが分かる。これらを用いて  $e(\rho, t)$  を計算すると、

$$\begin{aligned} e(\rho, t) &= y(t) - z^{-k} \frac{F}{C} \left( \frac{B(\rho)DE}{A(\rho)F} u(t) + y(t) \right) \\ &= \frac{C - z^{-k}F}{C} y(t) - z^{-k} \frac{B(\rho)DE}{A(\rho)C} u(t) \\ &= \frac{DE}{C} y(t) - z^{-k} \frac{B(\rho)DE}{A(\rho)C} u(t) \\ &= \frac{DE}{C} \left( y(t) - z^{-k} \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

が得られる。ここで、 $J_D(\rho)$  の最小値を考える (3.42) 式より、 $e(\rho^*, t)$  は、

$$\begin{aligned} e(\rho^*, t) &= S(\rho^*)v(t) \\ &= \frac{DE}{C} \frac{C}{D} w(t) \\ &= Ew(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

となるので、 $J_D(\rho^*)$  は、

$$J_D(\rho^*) = \|E\|_2^2 \sigma^2 \quad (3.49)$$

となる。これは、 $J_{MVC}$  の最小値である  $\tilde{J}_{MVC}$  と一致する。つまり、データ駆動型の評価関数である  $J_D(\rho)$  を最小化することにより、制御器の調整を可能とする。

### 3.4.2 外乱の動特性が未知の場合のデータ駆動型最小分散制御

(3.46) 式より、パラメータ化された制御器  $K(\rho)$  は、制御対象と外乱モデルの伝達関数の次数構造が既知であることから、

$$K(\rho) = \frac{A(\rho)F(\rho)}{B(\rho)D(\rho)E(\rho)} \quad (3.50)$$

とおくことができる。  $K(\rho)$  の構造が (3.50) 式のように、パラメータ化された多項式の積で記述されているので、(3.47) 式のような計算を行うことができる。したがって、(3.47) 式を利用して、  $e(\rho, t)$  は、

$$\begin{aligned} e(\rho, t) &= y(t) - z^{-k} \frac{F(\rho)}{C(\rho)} \left( \frac{B(\rho)D(\rho)E(\rho)}{A(\rho)F(\rho)} u(t) + y(t) \right) \\ &= \frac{D(\rho)E(\rho)}{C(\rho)} \left( y(t) - z^{-k} \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

と計算される。ここで、制御対象と外乱モデルの伝達関数をパラメータ化したものをそれぞれ、  $P(\rho)$ 、  $H(\rho)$  とすると、

$$P(\rho) = z^{-k} \frac{B(\rho)}{A(\rho)} \quad (3.52)$$

$$H(\rho) = \frac{C(\rho)}{D(\rho)} \quad (3.53)$$

となり、これらを用いて、(3.51) 式を整理すると、

$$e(\rho, t) = E(\rho)H^{-1}(\rho) (y(t) - P(\rho)u(t)) \quad (3.54)$$

が得られる。また、(3.54) 式は一段予測誤差  $\varepsilon(\rho, t)$  [19] に  $E(\rho)$  を作用させたものとなる。  $\varepsilon(\rho, t)$  は、システム同定の予測誤差法において用いられ、次の式で定義する。

$$\varepsilon(\rho, t) = H^{-1}(\rho) (y(t) - P(\rho)u(t)) \quad (3.55)$$

また、予測誤差法の評価関数は以下の式で定義される。

$$J_e = E [\{\varepsilon(\rho, t)\}^2] \quad (3.56)$$

したがって、外乱モデルの動特性を未知とした場合のデータ駆動型の評価関数は予測誤差法の評価関数に近いものが得られることが分かる。これは、制御対象と外乱モデルの伝達関数の次数構造が既知であるという仮定から、予測誤差法と類似したと考えられる。また、最小分散制御器は制御対象と外乱モデルから一意に決定されるので、制御対象と外乱モデルの動特性を同定するというシステム同定の目的と入出力データを用いて最小分散制御器を求める手法が結果的に近いものとなったと推測される。

### 3.5 分散評価に基づく制御不変量の推定を用いたデータ駆動型制御器調整法

本節では、先行研究 [16] の内容とその課題の解決と理論的な拡張について述べる。3.4.1 項では、外乱モデルの動特性が完全に既知の条件の下で制御器の調整を行った。しかし、外乱モデルの動特性が既知であるということは現実的ではない。したがって、本節では外乱モデルの動特性が未知の場合の制御器調整法を提案する。その中で、制御不変量の推定を用いて外乱モデルの伝達関数を推定し、制御器に関する評価関数を導出する。また、ここでの制御目的は、VRFT や FRIT と同様にして設計者が与える参照モデルを達成する制御器の獲得であるとする。ここで、以下の仮定を設ける。

仮定 3.7 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  の次数構造と係数は未知である.

仮定 3.8 多項式  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  の次数構造は既知であるが係数は未知である.

仮定 3.9 むだ時間  $k$  は既知である.

仮定 3.10 外乱モデルの多項式の次数は  $n_c = n_d = n$  とし,  $k \geq 2n + 1$  を満たすとする.

仮定 3.11 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  は既約である.

仮定 3.12 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  はモニックである.

仮定 3.13 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  は安定多項式である.

### 3.5.1 制御不変量の推定方法

出力信号  $y(t)$  を用いて, 制御不変量  $E(z^{-1})$  を推定する. 定値制御における出力信号は,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{H}{1 + PK} w(t) \\ &= \frac{ACY}{D(AZ + z^{-k}BX)} w(t) \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる. ここで, 制御器  $K$  を多項式  $X$ ,  $Y$  を用いて,

$$K = \frac{X}{Y} \quad (3.58)$$

とした. ここで, 伝達関数  $G$  を

$$\begin{aligned} G &= \frac{H}{1 + PK} \\ &= \frac{ACY}{D(AZ + z^{-k}BX)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

とする. そして,

$$y(t) = Gw(t) \quad (3.60)$$

となるような伝達関数を時系列解析によって推定する. これは,  $w(t)$  の白色雑音の性質から推定することができる. 推定された伝達関数  $\hat{G}$  を多項式  $N$ ,  $M$  を用いて,

$$\hat{G} = \frac{N}{M} \quad (3.61)$$

と表し,  $\hat{G}$  を  $\hat{G}$  の  $k-1$  次までのインパルス応答モデル  $\Gamma$  に分解すると,

$$\frac{N}{M} = \Gamma + z^{-k} \frac{\Lambda}{M} \quad (3.62)$$

と計算することができる. ここで,  $\Gamma$  は

$$\Gamma = 1 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \cdots + \gamma_{k-1} z^{-(k-1)} \quad (3.63)$$



となる。ここで、伝達関数  $G$  の  $k-1$  次までのインパルス応答は、

$$\begin{aligned}
G &= \frac{H}{1+PK} \\
&= H \left( 1 - \frac{PK}{1+PK} \right) \\
&= H - \frac{PKH}{1+PK} \\
&= E + \frac{z^{-k}F}{D} - \frac{PKH}{1+PK} \\
&= E + z^{-k} \left( \frac{F}{D} - \frac{PKH}{1+PK} \right)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

となり、多項式  $E$  と一致する。したがって、 $E$  は制御器  $K$  に依らない値となるので、制御不変量と呼ばれる。また、 $\hat{G} = G$  ならば、 $\Gamma = E$  となるので、出力信号  $y(t)$  から制御不変量を推定することができる。

### 3.5.2 制御不変量の推定を用いた外乱モデルの伝達関数の計算

(3.10) 式を再掲する。

$$C = DE + z^{-k}F \tag{3.65}$$

最小分散制御では、ディオファントス方程式を多項式  $C, D$  が既知である条件の下で多項式  $E, F$  を求めた。ここで、多項式  $E$  が既知である条件の下で多項式  $C, D$  を求めることを考える。仮定 3.10 より、 $C, D$  の未知の係数の数は  $2n$  となる。したがって、 $k \geq 2n+1$  のとき、係数比較法により多項式  $F$  に無関係な方程式の数が  $2n$  以上となり、 $C, D$  の係数を一意に決めることができる。実際に制御不変量  $E$  から外乱モデルの多項式を解く。 $C, D$  の未知パラメータである係数を

$$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \tag{3.66}$$

$$\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \tag{3.67}$$

と表現する。また、既知である制御不変量  $E$  の係数を

$$\mathbf{v}_1 = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \tag{3.68}$$

$$\mathbf{v}_2 = [e_{n+1} \ e_{n+2} \ \dots \ e_{2n}]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \tag{3.69}$$

と表現する。これらを用いて、(3.65) 式を係数比較法を用いて解くと、

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}_1 - \Gamma_1 \Gamma_2^{-1} \mathbf{v}_2 \tag{3.70}$$

$$\mathbf{d} = -\Gamma_2^{-1} \mathbf{v}_2 \tag{3.71}$$

となる。ここで、行列  $\Gamma_1, \Gamma_2$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ e_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n-1} & e_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{3.72}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} e_n & e_{n-1} & \dots & e_1 \\ e_{n+1} & e_n & \dots & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{2n-1} & e_{2n-2} & \dots & e_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{3.73}$$

となる。次に、行列  $\Gamma_2$  は正則行列であることを示す。

**定理 3.1** 既約な多項式  $C, D$  から得られる制御不変量  $E$  の係数を (3.73) 式のように並べた行列  $\Gamma_2$  は正則である。

**証明 1** 次の厳密にプロパーな伝達関数  $H_1$  のマルコフパラメータを考える。

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{C}{D} - 1 \\ &= e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \cdots + e_{2n} z^{-2n} + \cdots \end{aligned} \quad (3.74)$$

上式より、 $H_1$  のマルコフパラメータは多項式  $E$  の係数である。また、 $C, D$  が既約な多項式であることから、 $H_1$  の分子多項式の  $C - D$  と分母多項式は  $D$  は既約である。よって、 $H_1$  に対する最小実現の状態方程式の次数は  $n$  となる。また、 $H_1$  のマルコフパラメータを用いて作られるハンケル行列  $H_\nu \in \mathbb{R}^{n \times n}$  の行列式は、

$$\begin{aligned} \det H_\nu &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ e_2 & e_3 & \cdots & e_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & e_{n+1} & \cdots & e_{2n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^\alpha \det \Gamma_2 \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & (\text{if } n \text{ is odd,}) \\ \frac{n}{2} & (\text{if } n \text{ is even.}) \end{cases} \quad (3.76)$$

となる。ここで、 $H_1$  の次数が  $n$  であることから  $H_\nu$  は正則行列であることに注意する。よって、 $\Gamma_2$  は正則行列となる。  $\square$

以上より、制御不変量  $E$  から外乱モデルの伝達関数  $H$  が計算可能である。

### 3.5.3 分散評価に基づくデータ駆動型制御器調整法

$G$  の推定値  $\hat{G}$  から制御不変量  $E$  を計算し、 $H$  の推定値  $\hat{H}$  を得られたとする。これらを用いて入出力信号に対するフィルタ  $L_1, L_2$  を構成する。

$$L_1 = \hat{G}^{-1} - \hat{H}^{-1} \quad (3.77)$$

$$L_2 = \hat{H}^{-1} \quad (3.78)$$

つぎに、制御器の調整可能なパラメータ  $\rho = \begin{bmatrix} \rho_N^\top & \rho_D^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{1 \times (p+q)}$ ,  $\rho_N = [\rho_{N(1)} \cdots \rho_{N(p)}]^\top \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ ,  $\rho_D = [\rho_{D(1)} \cdots \rho_{D(q)}]^\top \in \mathbb{R}^{1 \times q}$ , とすると、調整可能な制御器は

$$K(\rho) = \frac{\rho_{N(1)} + \rho_{N(2)} z^{-1} + \cdots + \rho_{N(p)} z^{-p+1}}{1 + \rho_{D(1)} z^{-1} + \cdots + \rho_{D(q)} z^{-q}} \quad (3.79)$$

となる。(3.79) 式を用いて定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整に関する評価関数  $J(\rho)$  を (3.80) 式で定義する。

$$J(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (S^* K(\rho) L_1 y(t) + T^* L_2 u(t))^2 \quad (3.80)$$

ここで、 $N$  は入出力信号のデータ数を表し、 $S^*$ 、 $T^*$  は設計者が所望する感度関数と相補感度関数であり、理想的な制御器  $K(\rho^*)$  を用いて、

$$S^* = \frac{1}{1 + PK(\rho^*)} \quad (3.81)$$

$$T^* = \frac{PK(\rho^*)}{1 + PK(\rho^*)} \quad (3.82)$$

と表現できる。ここで、入出力信号に  $\hat{G} = G$ 、 $\hat{H} = H$  のときのフィルタを施したときの信号はそれぞれ、

$$\begin{aligned} L_1 y(t) &= (G^{-1} - H^{-1})y(t) \\ &= \frac{PK}{1 + PK} w(t) \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} L_2 u(t) &= H^{-1}u(t) \\ &= -\frac{K}{1 + PK} w(t) \end{aligned} \quad (3.84)$$

となる。次に、(3.80) 式について、 $G = \hat{G}$ 、 $H = \hat{H}$  のとき、評価関数の誤差  $\varepsilon(\rho, t)$  は、(3.81) 式、(3.82) 式を用いて

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho, t) &= S^* K(\rho) L_1 y(t) + T^* L_2 u(t) \\ &= \frac{PK_0(K(\rho) - K(\rho^*))}{(1 + PK(\rho^*))(1 + PK_0)} w(t) \end{aligned} \quad (3.85)$$

と計算できる。 $J(\rho)$  を最小化する  $\rho$  は  $\rho = \rho^*$  となるが、制御対象  $P$  の次数構造は未知であるので、与えられた制御器構造  $K(\rho)$  の中に  $K(\rho^*)$  が存在するとは限らない。したがって、(3.80) 式を最小化する制御器  $K(\rho)$  は、 $K(\rho^*)$  の低次元化された制御器であると考えられる。

#### 3.5.4 制御不変量の推定を利用したデータ駆動型 PID ゲイン調整法

(3.79) 式は制御器を一般的な形で与えたが、実際の現場では PID 制御器が用いられることが多い。本項では、速度型 PID 制御器のゲイン調整について述べる。定値制御では以下のように定義される。

$$\Delta u(t) = -K_p \left( \frac{T_s}{T_i} + \Delta + \frac{T_d}{T_s} \Delta^2 \right) y(t) \quad (3.86)$$

ここで、 $\Delta = 1 - z^{-1}$ 、 $K_p$  は比例ゲイン、 $T_i$  は積分時間、 $T_d$  は微分時間、 $T_s$  はサンプリング時間を表す。また、パラメータベクトル  $\rho = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^T$  を用いてパラメータ化された制御器  $K(\rho)$  を

$$K(\rho) = \frac{\rho_1 + \rho_2 z^{-1} + \rho_3 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (3.87)$$

とする。このとき、PID ゲインとパラメータベクトル  $\rho$  の関係は、

$$\rho_1 = K_p \left( 1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) \quad (3.88)$$

$$\rho_2 = -K_p \left( 1 + 2 \frac{T_d}{T_s} \right) \quad (3.89)$$

$$\rho_3 = K_p \frac{T_d}{T_s} \quad (3.90)$$

となる。制御器の調整では  $\rho$  を最適化変数として求め、PID ゲインを計算する。

PID ゲインを求めるにあたり、参照モデルを決定する必要がある。PID 制御器の設計法 [17] は制御対象の部分的な情報を用いて行うべきである。出力データに着目した手法として、Ziegler-Nichols のステップ応答法や限界感度法が知られているが、参照モデルを指定する制御器設計の方が融通性に優れる。しかし、定値制御データを用いて参照モデルを決める場合、制御目的が最小分散制御であれば外乱モデルの多項式とむだ時間で参照モデルが決定されるが、一般化最小分散制御や入出力信号の  $\mathcal{H}_2$  ノルムの最小化を達成するときの相補感度関数や感度関数を予め決定することはできない。したがって、参照モデルはステップ応答データなどによって時定数、むだ時間、逆応答の有無が明らかになってから指定することが望ましい。また、制御性能が劣化する前における制御対象の事前情報から参照モデルを決定することも可能であるので、定値制御データを用いて参照モデルを指定することは可能である。

### 3.5.5 制御性能評価を考慮したデータ駆動型制御器調整法

本稿では、制御性能評価に基づいて参照モデルを調整する手法を提案する。従来のデータ駆動型制御器調整法は、調整後の制御器を実際のシステムに実装するまで制御性能を評価されていなかった。このため、ひとつの参照モデルに対して制御器を得るという構造になっている。本手法では複数の参照モデルを用意し、対応する制御器の制御性能を定値制御データを用いて推定することを考える。

定値制御における制御器の制御性能指標  $J_1(\rho)$  を (3.91) 式で定義する。

$$J_1(\rho) = \lambda_1 \left\| \frac{H}{1 + PK(\rho)} \right\|_2^2 + \lambda_2 \left\| \frac{KH}{1 + PK(\rho)} \right\|_2^2 \quad (3.91)$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2$  は 0 以上の実数であるとする。(3.91) 式は定値制御における入力と出力の分散値に重みを付けて和を取ったものである。(3.91) 式は最適レギュレータ問題のように、制御入力に制限を設けて制御性能を評価するものである。例えば、 $\lambda_2 = 0$  とすれば、最小分散制御の評価関数と等価になり、 $\lambda_2$  が大きい値をとれば、制御入力として大きな値を取ることは許されない。

次に、目標値  $r(t)$  に対する制御器の制御性能指標  $J_2(\rho)$  を (3.92) 式で定義する。

$$J_2(\rho) = \lambda_3 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( r(t) - \frac{PK(\rho)}{1 + PK(\rho)} r(t) \right)^2 + \lambda_4 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{K(\rho)}{1 + PK(\rho)} r(t) \right)^2 \quad (3.92)$$

ここで、 $\lambda_3, \lambda_4$  は 0 以上の実数であるとする。(3.92) 式は、目標値に対する出力信号の偏差の分散と入力の分散に重みを付けて和を取ったものである。次に全体の制御性能指標を  $J(\rho)$  とし、(3.93) 式で定義する。

$$J(\rho) = J_1(\rho) + J_2(\rho) \quad (3.93)$$

$J(\rho)$  を最小化するパラメータ  $\rho$  を解析的に解くことは困難であり、制御性能評価を行うには制御器を実装し、入出力データを得なければならない。

ここで、 $J(\rho)$  を参照モデル  $T^*$  と (3.80) 式の最適化によって得られた  $K(\rho^*)$  で近似する。ここで、 $\rho^*$  は (3.80) 式を最小化するパラメータである。この最適化によって得られた制御器を実装すると、相補感度関数と感度関数は

$$T(\rho^*) = T^* \quad (3.94)$$

$$S(\rho^*) = S^* \quad (3.95)$$

となるので、 $J_1(\rho^*)$  を

$$J_1(\rho) = \lambda_1 \left\| S^* \hat{H} \right\|_2^2 + \lambda_2 \left\| S^* K(\rho^*) \hat{H} \right\|_2^2 \quad (3.96)$$



と近似し,  $J_2(\rho^*)$  を

$$J_2(\rho^*) = \lambda_3 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r(t) - T^* r(t))^2 + \lambda_4 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (S^* K(\rho^*) r(t))^2 \quad (3.97)$$

と近似することができる。ここで,  $\rho^*$  は参照モデル  $T^*$  によって変化するので, 任意の参照モデルにたいして,  $J(\rho^*)$  を計算することができる。

### 3.6 不安定な Box-Jenkins モデルにおける制御不変量の推定方法

本節では Box-Jenkins モデルにおいて制御対象が不安定極を持つものを対象とする。制御対象の不安定極の影響により, 出力信号の時系列解析が真のモデルを推定できないことを示し, 新しい推定方法を提案する。次に, 本節におけるモデルの仮定を設ける。

仮定 3.14 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  の次数構造と係数は未知である。

仮定 3.15 多項式  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  の次数構造は既知であるが係数は未知である。

仮定 3.16 むだ時間  $k$  は既知である。

仮定 3.17 外乱モデルの多項式の次数は  $n_c = n_d = n$  とし,  $k \geq 2n + 1$  を満たすとする。

仮定 3.18 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  は既約である。

仮定 3.19 多項式  $A(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  はモニックである。

仮定 3.20  $A(z^{-1})$  は不安定多項式である。

仮定 3.21  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  及び  $D(z^{-1})$  は安定多項式である。

#### 3.6.1 出力信号の時系列解析における問題点

定値制御における白色雑音から出力信号までの伝達関数  $G$  は,

$$\begin{aligned} G &= \frac{H}{1 + PK} \\ &= \frac{ACY}{D(A Y + z^{-k} B X)} \end{aligned} \quad (3.98)$$

となり,  $A$  が不安定多項式であるので,  $G$  は非最小位相系となる。ここで, 多項式  $A$  を安定多項式  $A_1$  と不安定多項式  $A_2$  に分解すると,

$$A = A_1 A_2 \quad (3.99)$$

と表現できる。ここで,  $A$  がモニックな多項式であり,  $A_1$ ,  $A_2$  をモニックな多項式とすると, 一意に  $A$  は分解される。

次に多項式  $A$  の相反多項式を考える。多項式  $A$  の相反多項式  $A^*$  は

$$A^* = a_{n_a} + a_{n_a-1} z^{-1} + \cdots + a_2 z^{-(n_a-1)} + a_1 z^{-n_a} \quad (3.100)$$



となり、相反多項式の性質として、次のようなものがある。

[相反多項式の性質]

1.  $\alpha$  が  $A$  の根であるならば、 $\alpha^{-1}$  は  $A^*$  の根となる。

ここで、非最小位相である伝達関数  $G$  を出力信号の時系列解析によって推定すると、推定される伝達関数  $\hat{G}$  は、

$$\hat{G} = \frac{A_1 A_2^* C Y}{D(A Y + z^{-k} B X)} \quad (3.101)$$

となる。 $A_2^*$  は不安定多項式  $A_2$  の相反多項式であるので、 $A_2^*$  は安定多項式となり、 $\hat{G}$  は最小位相である伝達関数となる。したがって、白色雑音から出力信号までの伝達関数を推定する場合、推定される伝達関数は最小位相として推定される。

### 3.6.2 外乱モデルの伝達関数の条件利用した制御不変量の推定方法

Box-Jenkins モデルにおける外乱モデルの伝達関数が最小位相であることを利用して、制御不変量の推定を行う。前項で述べた通り、伝達関数  $G$  の推定値  $\hat{G}$  は最小位相として推定されるので、 $\hat{G}$  の非最小位相系に対する制御不変量を計算し、制御不変量に基づく外乱モデルの伝達関数が最小位相となる制御不変量が真の制御不変量となる。

$G$  の推定において、推定されるモデルの分子多項式と分母多項式の次数を  $n$  とする。このとき、 $\hat{G}$  の次数が  $n$  の非最小位相系の数  $N$  は、

$$N = 2^{n-1} \quad (3.102)$$

となる。この  $N$  個の中の  $i$  番目の伝達関数を  $G_i$  とすると、 $G_i = G$  となる  $i$  が存在する。したがって、 $G_i$  に対する制御不変量  $E_i$  を用いて計算される外乱モデルの伝達関数  $H_i$  が最小位相系であれば、 $H_i$  が真の外乱モデルの伝達関数  $H$  の候補となる。しかし、最小位相となる  $H_i$  が複数存在する可能性があるといった問題や  $G$  の推定されるモデルの次数の決め方といった問題がある。

## 3.7 制御対象のむだ時間の推定

閉ループ系内のむだ時間を推定する方法として、入出力データのパワースペクトル密度関数を評価し制御対象の次数とむだ時間を獲得する方法が提案されている [18]。その他にも、制御不変量の推定を利用したものがある [11]。本節では、3.5.1 節の多項式  $E$  の推定を利用して、制御対象のむだ時間の推定を行う。異なる制御器を二組用いて出力は、

$$y_1(t) = \frac{H}{1 + PK_1} w_1(t) \quad (3.103)$$

$$y_2(t) = \frac{H}{1 + PK_2} w_2(t) \quad (3.104)$$

と表すことができる。この出力データから、

$$\frac{N_1}{M_1} = \frac{H}{1 + PK_1} \quad (3.105)$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{H}{1 + PK_2} \quad (3.106)$$

となるような、多項式  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $M_2$  及び,  $N_2$  を推定する. 上記を用いて, むだ時間より大きな整数を  $l$  とすると,

$$\frac{N_1}{M_1} = \hat{\Gamma} + z^{-l} \frac{\Lambda_1}{M_1} \quad (3.107)$$

$$\frac{N_2}{M_2} = \bar{\Gamma} + z^{-l} \frac{\Lambda_2}{M_2} \quad (3.108)$$

となり, 多項式  $\hat{\Gamma}$ ,  $\bar{\Gamma}$  は,

$$\hat{\Gamma} = 1 + \hat{\gamma}_1 z^{-1} + \hat{\gamma}_2 z^{-2} + \cdots + \hat{\gamma}_{l-1} z^{-(l-1)} \quad (3.109)$$

$$\bar{\Gamma} = 1 + \bar{\gamma}_1 z^{-1} + \bar{\gamma}_2 z^{-2} + \cdots + \bar{\gamma}_{l-1} z^{-(l-1)} \quad (3.110)$$

と表すことができる. ここで, 多項式  $E$  は制御不変量であり, 制御器によらずに一意に決まるので, (3.109) 式と (3.110) 式の左辺の  $l = k - 1$  次までの項が一致する. つまり,

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i & (i = 1, 2, \dots, k-1) \\ \hat{\gamma}_i \neq \bar{\gamma}_i & (i = k, k+1, \dots, l-1) \end{cases} \quad (3.111)$$

となる. よって,  $l$  の値を制御対象のむだ時間よりも大きい値にすれば, むだ時間を推定することができる. 制御器  $K_1$  と  $K_2$  の周波数特性が近い場合,  $\hat{\gamma}_i \approx \bar{\gamma}_i$  となるので, 制御器  $K_1$  と  $K_2$  の周波数特性は異なるものが望ましい.

### 3.8 閉ループ定値制御データを用いた制御器設計法の課題

本章では, 閉ループ定値制御データを用いた設計法を提案した. 3.4 節では, データ駆動型最小分散制御を述べ, 制御目的が最小分散制御に限られることや結果的にデータ駆動型の評価関数が予測誤差法の評価関数と類似することが分かった. 3.5 節以降では, 制御不変量に着目したデータ駆動型制御器調整法や制御不変量の推定における問題点について述べた.

データ駆動型制御器調整法は部分的に制御対象や外乱モデルの情報を既知として理論研究が行われているが, 実応用を考慮して実問題に即して課題の解決を図るべきである. 本手法においては, 外乱モデルの多項式の次数と制御対象のむだ時間に条件を設けることで, 制御不変量から外乱モデルが同定できるようになっている. 実際の外乱モデルは次数構造が未知であるので, 次数構造を含めて手法が提案されるべきである.

## 4 システム同定

システム同定は制御対象の数学モデルを推定するものであり、モデルベース制御における制御機設計の最初のステップであるといえる。線形システムのシステム同定は数多く研究され整備されている [19]。中でもシステム同定における式誤差規範と出力誤差規範の相違 [20] はパラメータ推定法を行う上で重要である。本章では、制御器の次数と制御対象のむだ時間の関係が可同定性とどのような関係があるかを明らかにする。先行研究 [21] ではサンプリング時間の影響を含めて理論が展開されているが、今回は次数のみに着目して考察を行う。多項式  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$ ,  $D(z^{-1})$  をパラメータ化したものを以下で定義する。

$$A(z^{-1}, \theta_A) = 1 + \theta_1^A z^{-1} + \dots + \theta_{n_A}^A z^{-n_A} \quad (4.1)$$

$$B(z^{-1}, \theta_B) = \theta_1^B z^{-1} + \dots + \theta_{n_B}^B z^{-n_B} \quad (4.2)$$

$$C(z^{-1}, \theta_C) = 1 + \theta_1^C z^{-1} + \dots + \theta_{n_C}^C z^{-n_C} \quad (4.3)$$

$$D(z^{-1}, \theta_D) = 1 + \theta_1^D z^{-1} + \dots + \theta_{n_D}^D z^{-n_D} \quad (4.4)$$

また、制御対象のむだ時間は  $k$  とする。上式の  $n_A$ ,  $n_B$ ,  $n_C$ ,  $n_D$  は各多項式の次数と各パラメータの数である。また、むだ時間に関して、 $n_k$  を

$$n_k = k - 1 \quad (4.5)$$

とする。パラメータの真値を  $\theta_A^*$  のように表記する。さらに、 $\theta$  はパラメータ全体の集合を表すものとする。

定値制御データを用いた閉ループ同定について考察を行うので、制御器による入出力関係を

$$u(t) = -\frac{X}{Y}y(t) \quad (4.6)$$

とする。ここで、多項式  $X$ ,  $Y$  の次数を  $n_X$ ,  $n_Y$  とする。予測誤差法の評価関数  $J(\theta)$  を予測誤差  $\varepsilon(t, \theta)$  を用いて、

$$J(\theta) = E \left[ \varepsilon(t, \theta)^2 \right] \quad (4.7)$$

と定義する。入出力データを用いて (4.7) 式を最小化するパラメータが  $\theta = \theta^*$  のとき、可同定であると呼ぶ。さらに、 $\theta_A = \theta_A^*$  かつ  $\theta_B = \theta_B^*$  のとき、制御対象が可同定である。そして、 $\theta_C = \theta_C^*$  かつ  $\theta_D = \theta_D^*$  のとき、外乱が可同定である。以降では簡略化のために、適宜  $z^{-1}$  を省略する。

### 4.1 ARX モデルの可同定性

ARX モデルによる入出力関係は、

$$y(t) = z^{-k} \frac{B}{A} u(t) + \frac{1}{A} w(t) \quad (4.8)$$

となる。白色雑音から出力までの関係は、

$$y(t) = \frac{Y}{AY + z^{-k}BX} w(t) \quad (4.9)$$

となる。ここで、予測誤差は、

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= A(\theta_A) \left( y(t) - z^{-k} \frac{B(\theta_B)}{A(\theta_A)} u(t) \right) \\ &= \frac{A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X}{AY + z^{-k}BX} w(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。よって、 $J(\theta)$  を最小化する  $\theta$  は、

$$A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X = AY + z^{-k}BX \quad (4.11)$$

を満たす必要がある。上式の係数比較によって得られる方程式の数  $n$  は、

$$n = \max(n_A + n_Y, n_B + n_X + n_k) \quad (4.12)$$

となる。パラメータの数は  $n_A + n_B$  であるので、方程式の数とパラメータの数の差は、

$$\max(n_Y - n_B, n_X + n_k - n_A) \quad (4.13)$$

となる。よって、

$$\max(n_Y - n_B, n_X + n_k - n_A) \geq 0 \quad (4.14)$$

を満たすとき、可同定となる。

## 4.2 ARMAX モデルの可同定性

ARMAX モデルによる入出力関係は、

$$y(t) = z^{-k} \frac{B}{A} u(t) + \frac{C}{A} w(t) \quad (4.15)$$

となる。白色雑音から出力までの関係は、

$$y(t) = \frac{CY}{AY + z^{-k}BX} w(t) \quad (4.16)$$

となる。ARMAX モデルにおける予測誤差は、

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= \frac{A(\theta_A)}{C(\theta_C)} \left( y(t) - z^{-k} \frac{B(\theta_B)}{A(\theta_A)} u(t) \right) w(t) \\ &= \frac{A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X}{AY + z^{-k}BX} \frac{C}{C(\theta_C)} w(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。したがって、 $J(\theta)$  を最小化する  $\theta$  は、

$$(A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X)C = (AY + z^{-k}BX)C(\theta_C) \quad (4.18)$$

を満たす必要がある。ARX モデルのときと同様にして、(4.18) 式を係数比較法によって立てられる方程式の数  $n$  は、

$$n = \max(n_A + n_Y + n_C, n_B + n_C + n_X + n_k) \quad (4.19)$$

となる。パラメータの数は  $n_A + n_B + n_C$  であるので、方程式の数とパラメータの数の差は、

$$\max(n_Y - n_B, n_X + n_k - n_A) \quad (4.20)$$

となる。よって、

$$\max(n_Y - n_B, n_X + n_k - n_A) \geq 0 \quad (4.21)$$

を満たすとき、可同定となる。

ここで、制御不変量の推定を利用した外乱モデルの同定を考える。ARMAX モデルにおいて、制御対象  $P$  と外乱モデル  $H$  は、

$$P = z^{-k} \frac{B}{A} \quad (4.22)$$

$$H = \frac{C}{A} \quad (4.23)$$



となる。また、ディオファントス方程式は、

$$C = AE + z^{-k}F \quad (4.24)$$

となる。ここで、多項式  $E$  の次数は  $k-1$  次であり、多項式  $F$  の次数は、

$$n_F = \max(n_A - 1, n_C - k) \quad (4.25)$$

となる。(4.24) 式について  $E$  を既知としたときに、 $A$ 、 $C$  を一意に解くことができるための  $E$  の次数は、

$$n_E \geq n_A + n_C \quad (4.26)$$

となり、このときむだ時間が満たすべき条件は、

$$k \geq n_A + n_C + 1 \quad (4.27)$$

となる。ここで、 $k = n_A + n_C + 1$  のとき、(4.21) 式に  $k$  を代入すると、

$$\max(n_Y - n_B, n_X + n_C) \geq 0 \quad (4.28)$$

となり、 $n_C \geq 0$  より、制御器の次数によらず、可同定となる。また、制御不変量から外乱モデルを同定を行うと、多項式  $A$ 、 $C$  が得られる。したがって、(4.17) 式において、 $B(\theta_B)$  の最適化を行えばよいので、制御器の次数によらず多項式  $B$  を得ることができる。

### 4.3 Box-Jenkins モデルの可同定性

Box-Jenkins モデルによる入出力関係は、

$$y(t) = z^{-k} \frac{B}{A} u(t) + \frac{C}{D} w(t) \quad (4.29)$$

となる。白色雑音から出力までの関係は、

$$y(t) = \frac{ACY}{D(AY + z^{-k}BX)} w(t) \quad (4.30)$$

となる。Box-Jenkins モデルにおける予測誤差は、

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= \frac{D(\theta_D)}{C(\theta_C)} \left( y(t) - z^{-k} \frac{B(\theta_B)}{A(\theta_A)} u(t) \right) w(t) \\ &= \frac{A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X}{AY + z^{-k}BX} \frac{A}{A(\theta_A)} \frac{C}{C(\theta_C)} \frac{D(\theta_D)}{D} w(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる。したがって、(4.7) 式を最小化する  $\theta$  は、

$$(A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X) ACD(\theta_D) = (AY + z^{-k}BX) A(\theta_A)C(\theta_C)D \quad (4.32)$$

を満たさなければならない。ここで、(4.32) 式は  $\theta$  に関して非線形方程式となる。したがって、パラメータの数と係数比較法による方程式の数を比較するような議論は困難である。

次に、制御不変量の推定を利用した外乱モデルの同定を Box-Jenkins モデルの同定に用いる。ここで、(4.4) 式の次数について、 $n_C = n_D = n$  として、議論を行う。3.5.2 項で述べたように、制御不変量から外乱モデルを同定することができるための条件は、

$$k \geq 2n + 1 \quad (4.33)$$



であった。このとき、制御不変量から外乱モデルを同定したと仮定すると、(4.32) 式は、 $C(\theta_C^*) = C$ 、 $D(\theta_D^*) = D$  となる。そこで、(4.32) 式は、

$$(A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X)A = (AY + z^{-k}BX)A(\theta_A) \quad (4.34)$$

となる。(4.34) 式において、 $A$  と  $AY + z^{-k}BX$  が互いに素な多項式であると仮定すると、

$$A(\theta_A) = A \quad (4.35)$$

$$A(\theta_A)Y + z^{-k}B(\theta_B)X = AY + z^{-k}BX \quad (4.36)$$

を同時に満たさなければならない。(4.35) 式により制御対象の分母多項式  $A$  が同定できるので、(4.36) 式において  $B(\theta_B) = B$  となる。

以上より、Box-Jenkins モデルにおいて、制御不変量から外乱をモデルを同定を行った場合、制御対象の可同定条件は制御器の次数条件に依存しない。

## 5 数値例

本章では、3章で提案した手法の有効性を MATLAB(2016a) の数値シミュレーションによって確認する。

### 5.1 定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法

#### 5.1.1 シミュレーション設定

システムが Box-Jenkins モデルで表現され、モデルが線形離散時間伝達関数であるとする。(3.2) 式で表現される Box-Jenkins モデルの各多項式を次のように表す。

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_l z^{-l} \quad (5.1)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad (5.2)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n} \quad (5.3)$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_n z^{-n} \quad (5.4)$$

また、多項式の係数をベクトルを用いて、

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_l]^T \in \mathbb{R}^{l \times 1} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m]^T \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (5.8)$$

とする。

#### 5.1.2 制御不変量の推定を利用したデータ駆動型最小分散制御

本項では、初期制御器  $K_0$  によって安定化された閉ループから取得される定値制御データを用いて、最小分散制御器を獲得することを目的とする。制御対象と外乱モデルの多項式の係数が以下のように与えられるとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [-3.1, 4.1, -2.9, 1.1, -0.19]^T \\ \mathbf{b} &= [0.73, -1.32, 0.72, -0.09]^T \\ c_1 &= -0.75 \\ d_1 &= -0.95 \end{aligned} \quad (5.9)$$

また、制御対象のむだ時間が  $k = 3$  とし、既知であるとする。このとき、制御不変量  $E$  は、

$$E = 1 + 0.2z^{-1} + 0.19z^{-2} \quad (5.10)$$

である。初期制御器  $K_0 = 0.3$  によって閉ループが構成され、初期入出力データが得られる。サンプリング時間  $T_s = 1.0[s]$ 、データ数  $N = 1.0 \times 10^6$  個とする。また、白色雑音の分散は  $\sigma^2 = 1$  である。Fig. 5.1.1 は  $0 \sim 200[s]$  における初期入出力データである。白色雑音は平均 0 の信号なので、入出力データも平均 0 の信号となる。この初期入出力データを用いて白色雑音から出力までの伝達関数  $G$  を分母と分子が 8 次の ARMA モデルとして、MATLAB (2016a) の関数 “armax.m” を用いて推定する Fig. 5.1.2 は真値と推定値の伝達関数  $G$  のボード線図である。Fig. 5.1.2 より伝達関数  $G$

の推定値は真値の周波数特性を獲得できたことが分かる．この推定値を用いて制御不変量を計算すると，その推定値  $\hat{E}$  は，

$$\hat{E} = 1 + 0.2029z^{-1} + 0.1915z^{-2} \quad (5.11)$$

となった．この  $\hat{E}$  の係数を用いて外乱モデルの多項式を計算すると，

$$\hat{c}_1 = -0.7408 \quad (5.12)$$

$$\hat{d}_1 = -0.9437 \quad (5.13)$$

となった．このとき，真値と推定値における外乱モデルの伝達関数  $H$  のボード線図は Fig. 5.1.3 となる．ここで，調整可能な制御器を (3.79) 式で表現し， $p = 3$ ， $q = 2$  として，(3.80) 式を最小化する  $\rho$  を求める．ここで， $T^*$ ， $S^*$  は最小分散制御を達成するときの相補感度関数と感度関数なので，外乱モデルの多項式とむだ時間から決定されることに注意する．また，‘cmaes.m’ ([http://www.lri.fr/~hansen/cmaes\\_inmatlab.html](http://www.lri.fr/~hansen/cmaes_inmatlab.html)) を用いて最適化計算を行う．最適化計算によって得られた制御器は，

$$K(\rho) = \frac{0.2420 - 0.3129z^{-1} + 0.1713z^{-2}}{1 - 0.7728z^{-1} - 0.07077z^{-2}} \quad (5.14)$$

となった．また，真値における最小分散制御器は  $p = 6$ ， $q = 6$  となるので，最適化計算によって低次元化された制御器を求めることとなる．真値と調整後の制御器のボード線図は Fig. 5.1.4 となる．

次に，制御性能を入出力の分散値で比較する．初期制御器，調整後の制御器，最小分散制御器の定値制御における入出力信号の分散値は Table 5.1.1 となった．

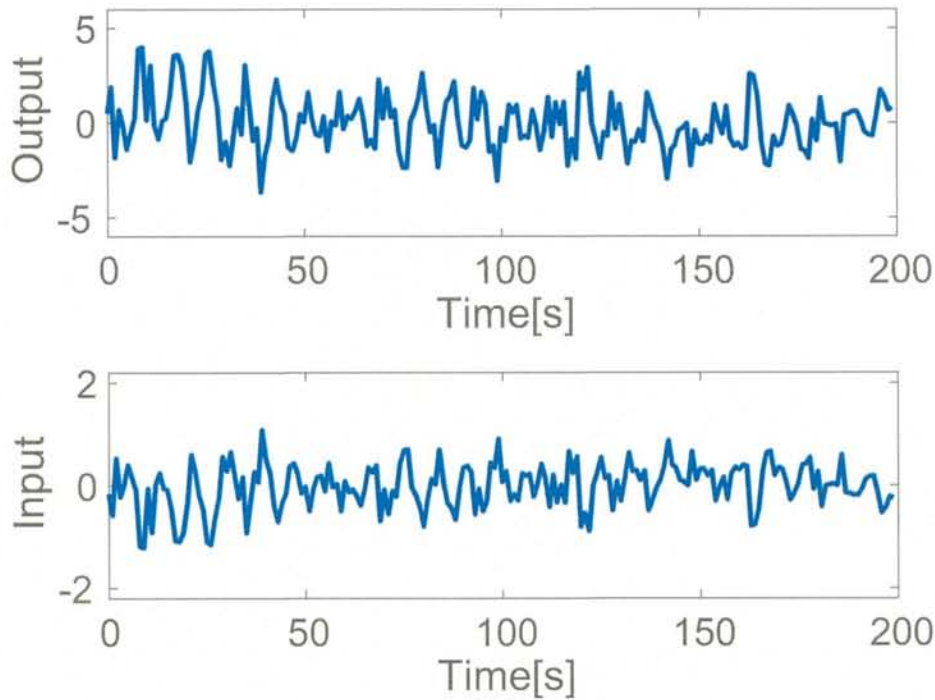


Fig. 5.1.1: Initial output and initial input

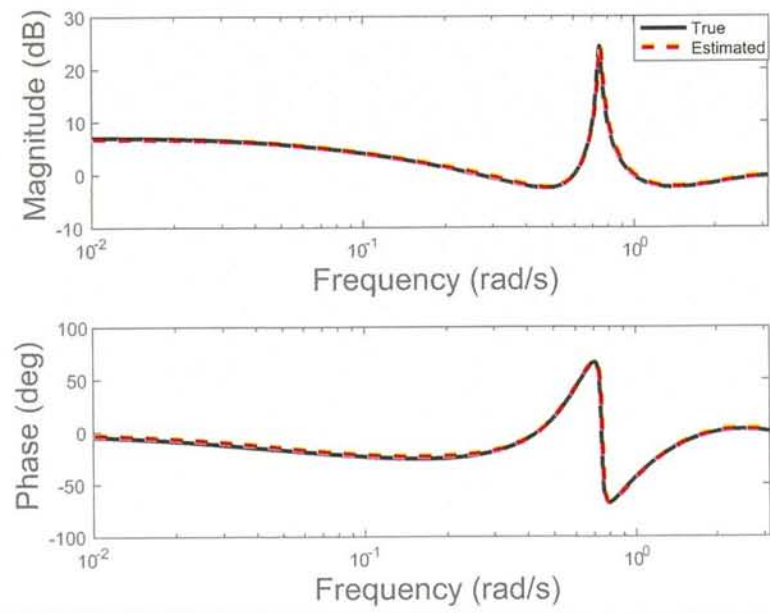


Fig. 5.1.2: Bode plots of the true and estimated transfer function  $G$

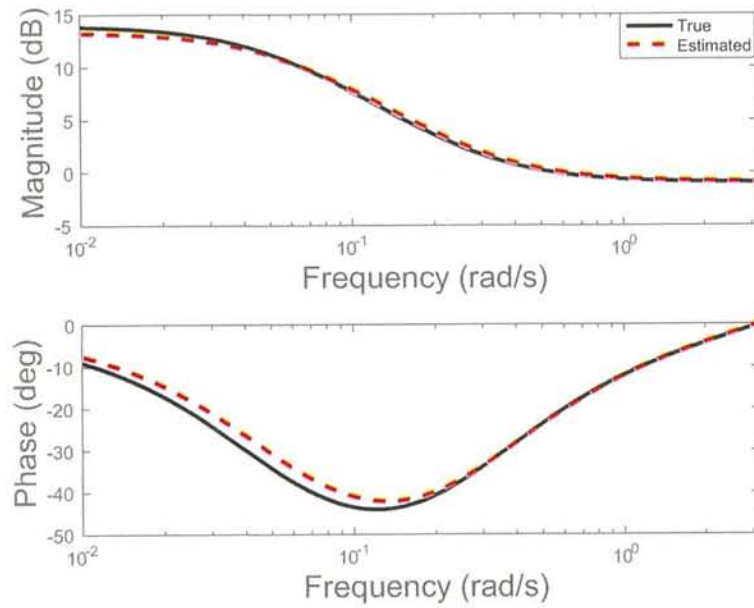


Fig. 5.1.3: Bode plots of the true and estimated transfer function  $H$



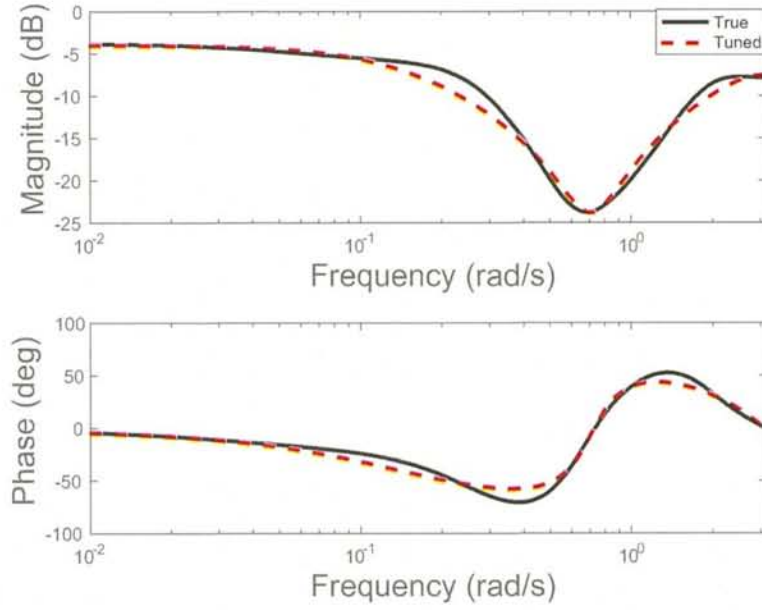


Fig. 5.1.4: Bode plots of the true and estimated controller

Table 5.1.1: Variance of regulatory controlled data

	output	input
Initial	3.2320	0.2909
Tuned	1.0793	0.1068
True	1.0761	0.1141

### 5.1.3 制御不変量の推定を利用したデータ駆動型 PID ゲイン調整法

本項では、定値制御データを用いて速度型の PID のパラメータを調整することを考える。制御対象と外乱モデルの多項式の係数が以下のように与えられるとする。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= [-0.1008, -0.0731, 0.5169, -0.0349]^T \\
 \mathbf{b} &= [0.5305, 0.1617, 0.2628 - 0.0807]^T \\
 \mathbf{c} &= [-0.6502, 0.2612]^T \\
 \mathbf{d} &= [-0.8563, 0.5520]^T
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

また、むだ時間は  $k = 5$  とし、外乱モデルの次数とむだ時間は既知である。このとき、制御不変量  $E$  は

$$E = 1 + 0.2061z^{-1} - 0.1143z^{-2} - 0.2117z^{-3} - 0.1181z^{-4} \tag{5.16}$$

である。また、初期データのデータ数は  $N = 1.0 \times 10^6$  とする。初期制御器のパラメータは、

$$\boldsymbol{\rho}_0 = [0.4, -0.4, 0]^T \tag{5.17}$$

とする。出力信号を用いて、伝達関数  $G$  の推定を分母と分子がともに 10 次の ARMA モデルとして行った。推定された  $G$  を用いて、制御不変量を計算すると、

$$\hat{E} = 1 + 0.2074z^{-1} - 0.1121z^{-2} - 0.2124z^{-3} - 0.1176z^{-4} \quad (5.18)$$

となった。 $\hat{E}$  の係数を用いて外乱モデルの多項式を計算すると、

$$\begin{aligned} \hat{c} &= [-0.6440, 0.2749]^T \\ \hat{d} &= [-0.8515, 0.5636]^T \end{aligned} \quad (5.19)$$

となった。次に、参照モデル  $T^*$  はむだ時間を持つ 2 次遅れ系とし、次の式で与える。

$$T^* = z^{-5} \frac{0.01567 + 0.06521z^{-1}}{1 - 0.6502z^{-1} + 0.2612z^{-2}} \quad (5.20)$$

(3.80) 式を最小二乗法を用いて解いた結果、

$$\rho = [0.0104, 0.0093, 0.0338]^T \quad (5.21)$$

が得られた。定値制御における初期制御器と調整後の制御器による入出力データは Fig. 5.1.5 のようになり、その分散値は Table 5.1.2 となった。また、初期制御器、参照モデル、調整後の制御器によるステップ応答データは Fig. 5.1.6 となる。一般的に定値制御において、入力と出力の分散値はトレードオフの関係にある。これは、制御器の性能を高めることで制御入力の分散値が上昇するが、出力信号の分散値が抑えられるということである。一方で、今回の問題設定において制御対象が安定系ならば、開ループ制御を行うことができるので、制御器を  $K = 0$  とした場合の出力信号の分散値は外乱モデルだけで決定される。このとき、出力信号の分散の理論値は、

$$E[\{y(t)\}^2] = \|H\|_2^2 \quad (5.22)$$

となる。また、出力信号の理論的な最小値は、

$$E[\{y(t)\}^2] = \|E\|_2^2 \quad (5.23)$$

となる。このときの制御は最小分散制御と呼ばれるが、制御対象や外乱モデルによって非常に大きな制御入力が必要とすることがある。調整によって得られた制御器の性能が望んだ結果にならない場合、参照モデルを見直す必要がある。これは、(3.80) 式の構成において設計者が指定する参照モデル  $T^*$  の影響度が大きいためである。また、入出力信号のフィルタや外乱モデルの精度も影響を与える。Table 5.1.2 より、調整後の制御器による入出力データの分散値の改善ができた。入力の分散値の改善が大きくなっていることから、経済的なコストの改善も見込まれる。また、Fig. 5.1.6 では初期制御器によるステップ応答は理想的な応答に対して定常偏差が残っている。

Table 5.1.2: Variance of regulatory PID controlled data

	output	input
Initial	1.2257	0.1961
Tuned	1.1407	0.0384

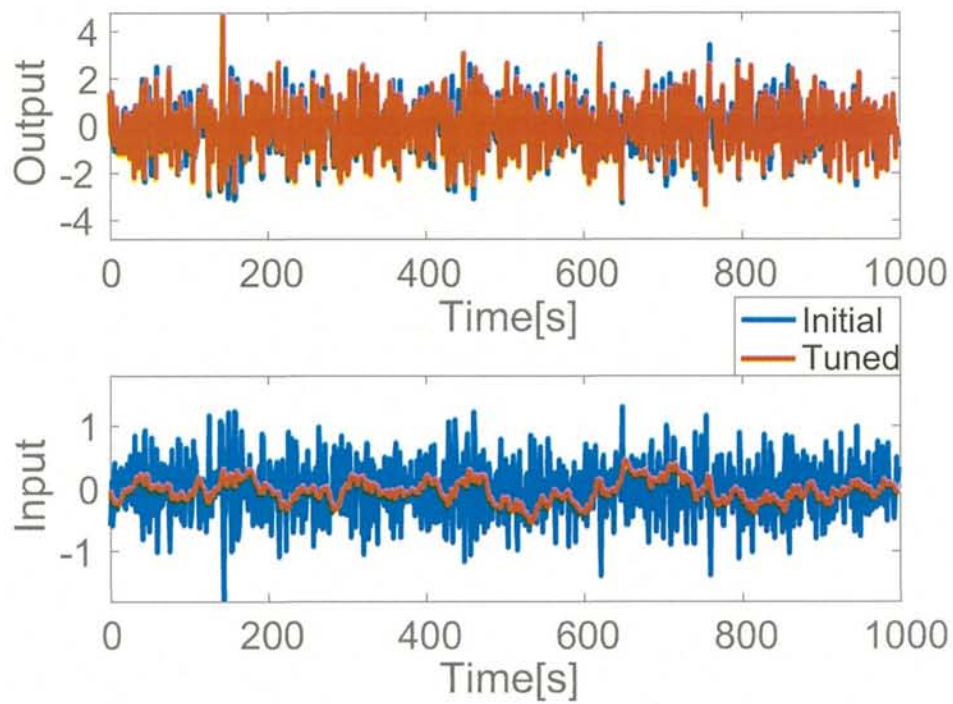


Fig. 5.1.5: Initial output and initial input or tuned output and tuned input

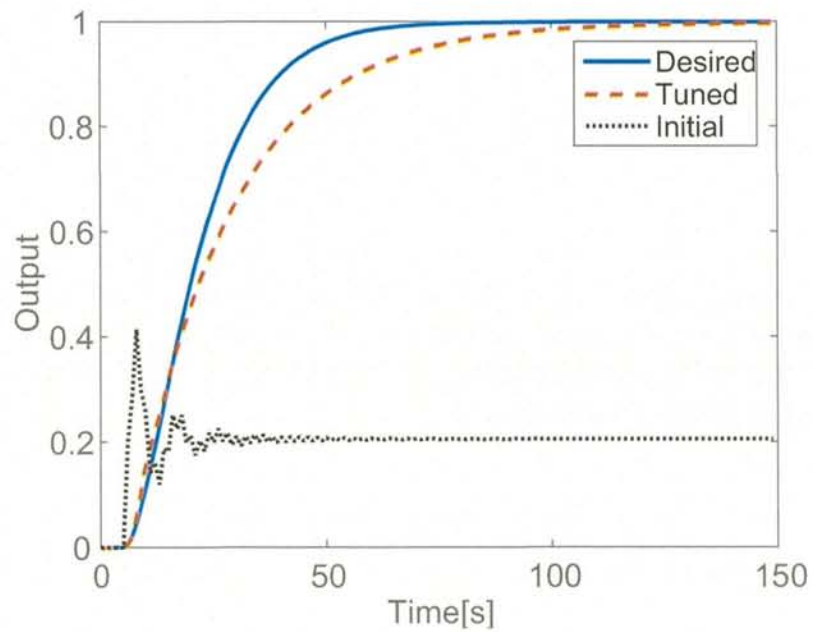


Fig. 5.1.6: Step response

#### 5.1.4 制御性能評価を考慮したデータ駆動型制御器調整法

本項では、複数の参照モデルにたいして、(3.93) 式を定値制御データを用いて評価する。制御対象と外乱モデルの多項式の係数が以下のように与えられるとする。

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.9538 \\ b &= [0.0281, 0.0092]^T \\ c &= [-0.6502, 0.2612]^T \\ d &= [-0.8563, 0.5520]^T \end{aligned} \quad (5.24)$$

また、むだ時間は  $k = 5$  とし、外乱モデルの次数とむだ時間は既知である。参照モデルの候補は E-FRIT[7] で提案されている二項係数標準系にむだ時間を加えた伝達関数として、離散化を行ったものを用いる。ここで、参照モデル  $M$  は連続時間系の伝達関数であり、

$$M = \frac{1}{(\tau s + 1)^n} e^{-L_M s} \quad (5.25)$$

と定義する。 $L_M$  はむだ時間であり、 $\tau$  は

$$\tau = \frac{T_{99}}{4.4n^{0.6}} \quad (5.26)$$

と設定される。 $T_{99}$  は希望する整定時間 (99% 応答)、 $n$  は参照モデルの次数である。シミュレーションでは  $T_{99}$  を変化させた参照モデル  $M$  を離散化した  $T^*$  を用いる。実際に  $T_{99}$  を 60 から 5 刻みで 155 まで変化させた 20 個の参照モデル  $T^*$  について (3.93) 式の推定を行う。定値制御データのデータ数は  $2.0 \times 10^6$  個として制御器の最適化に用いる。また、調整を行う制御器は速度型の PID 制御器とする。(3.93) 式的设计パラメータである重み値は、

$$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] = [1, 10, 10, 60] \quad (5.27)$$

とした。目標値に対する制御性能指標では、目標値をステップ状の信号として、初期値 0 から 150 までのデータ数で評価を行う。Fig. 5.1.7 は推定値と真値の制御性能指標である。推定値では、 $T_{99} = 90$  のとき、最小値 8.5307 を取るが、真値では、 $T_{99} = 95$  のとき最小値 7.6251 を取った。制御性能指標を最小化する  $T_{99}$  が推定値と真値とで異なるが、全体的な傾向は一致している。Fig. 5.1.8 は定値制御における出力の分散値であり、Fig. 5.1.9 は定値制御における入力分散値である。出力の分散値も全体の傾向が一致し、入力の分散値では正確に推定ができた。Fig. 5.1.10 は目標値と目標値に対応する出力の偏差の分散値である。目標値がステップ信号なので、出力はステップ応答となる。この分散値が小さければ小さいほど、目標値追従性能が高いと言える。Fig. 5.1.11 は目標値に対応する出力の分散値であり、目標値追従制御を行うときの入力のパワーといえる。目標値に対する制御性能指標も推定値は真値の傾向を獲得できた。



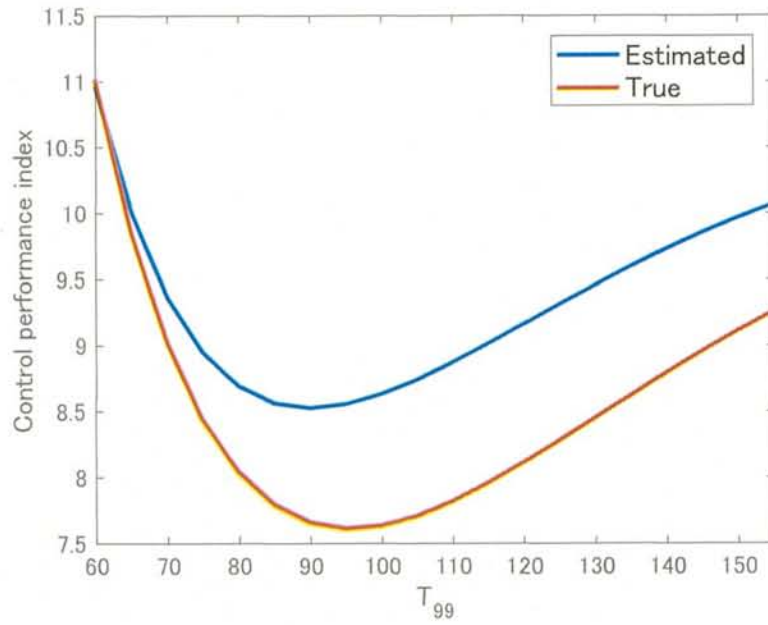


Fig. 5.1.7: Control performance index of estimated and true

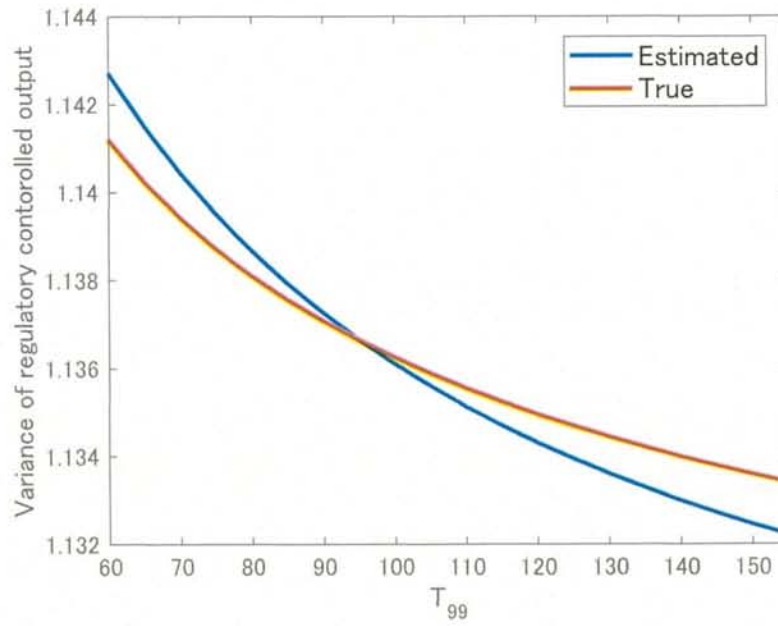


Fig. 5.1.8: Variance of regulatory controlled output of estimated and true

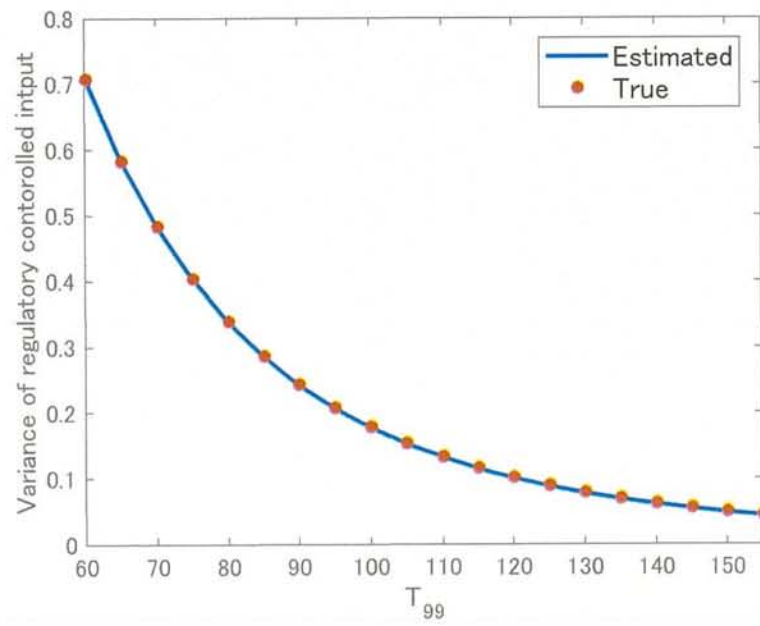


Fig. 5.1.9: Variance of regulatory controlled input of estimated and true

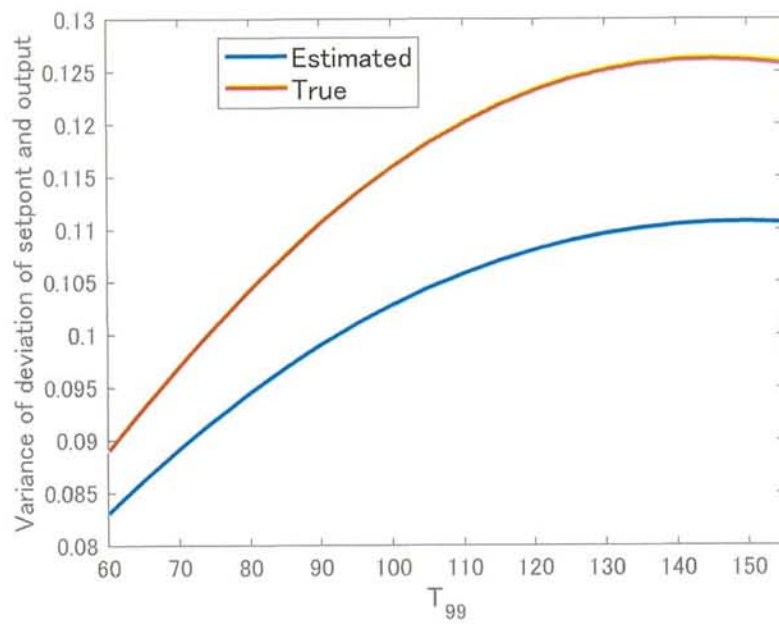


Fig. 5.1.10: Variance of deviation of setpoint and output of estimated and true

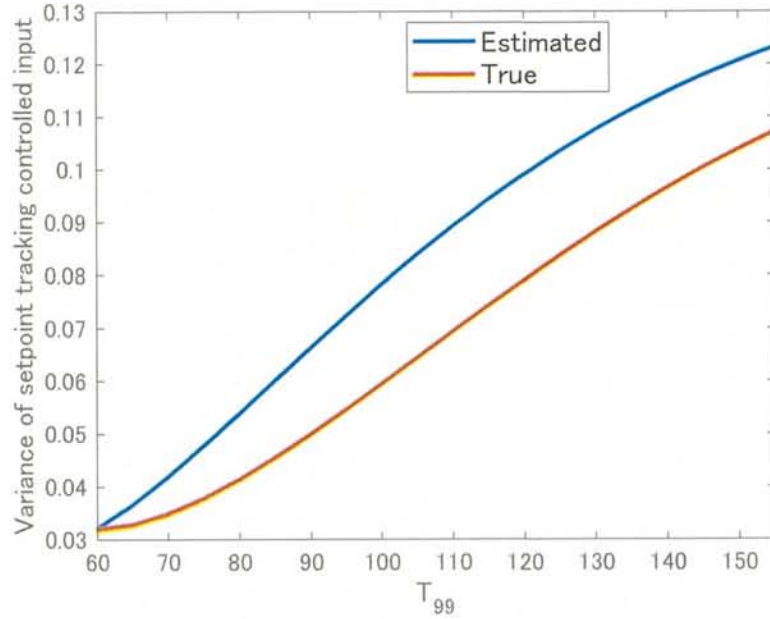


Fig. 5.1.11: Variance of setpoint tracking controlled input of estimated and true

## 5.2 外乱モデルの推定精度

本節では、MATLAB の関数である “bj.m” を用いた外乱モデルの推定と制御不変量の推定を用いた外乱モデルの計算の推定精度の違いを数値シミュレーションによって検証する．“bj.m” は Box-Jenkins モデルを同定するための関数であり、推定するモデルの次数とむだ時間を指定しなければならない．今回は次数が既知という条件下で比較を行う．数値例は (5.9) 式とし、データ数は  $2.0 \times 10^6$  とする．50 回シミュレーションを繰り返し、推定された外乱モデルの多項式の係数の統計量は、Table 5.2.3 となった．提案法の方が “bj.m” よりも推定精度が良いことがわかる．Box-Jenkins モデルのシステム同定は非線形最適化であり、求まったパラメータが最小値をとることを保証しない．つまり、局所最適に陥る可能性がある．また、提案方の “armax.m” を用いて白色雑音から出力信号までの伝達関数である  $G$  を推定しているが、この関数もまた非線形最適化を行っている．しかし、“bj.m” は制御対象と外乱モデルの伝達関数を同時に求めるのに対して、“armax.m” は ARX モデルの同定であるので、ある意味で制御対象だけを求めることであると言い換えることができる．この観点から推定精度の違いが表れたと推測できる．

Table 5.2.3: The mean parameter value for different methods

	$c_1$	$d_1$
bj.m	$-0.7129 \pm 0.0267$	$-0.9160 \pm 0.0251$
proposed	$-0.7485 \pm 0.0162$	$-0.9553 \pm 0.0148$

## 6 結論

本研究では制御系が Box-Jenkins モデルで与えられるシステムから得られる定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法を提案した。出力信号に含まれる制御不変量と外乱モデルの伝達関数との関係を明らかにし、制御不変量の推定を用いて外乱モデルを計算できることを示した。この推定された外乱モデルをデータ駆動型の評価関数に組み込み、その評価関数を最適化する制御器を実装することで制御性能の改善が期待できる。また、制御対象が不安定系の場合、定値制御データである出力信号の時系列解析によって制御不変量を求めることはできない。この問題に対して、外乱モデルの伝達関数が最小位相であるという性質から、時系列解析によって得られた伝達関数の非最小位相系に対する制御不変量を計算し、得られた制御不変量から推定される外乱モデルが最小位相であるかどうかを検証することで真の制御不変量が得られることを提案した。

制御には制御理論と実応用の二つからなり、制御理論の根底には数学や物理といった普遍性があり、実用用には対象とするプロセス固有の問題の解決を行わなければならない [22]。しばしば制御理論は現実との乖離がみられることがあり、実応用における問題が存在する。データ駆動型制御器調整法はモデル予測制御と同様に実応用における問題を解決を図るものとして登場した。白色雑音によって駆動される定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法は理論研究と数値シミュレーションによる有効性の確認にとどまっている。計算機科学の進歩によって高度なシミュレーションが可能になったが、実機による実験は欠かせない。定値制御データを用いたデータ駆動型制御器調整法は主にプロセス制御で有効性が期待されるが、実応用の障壁となる課題をいくつか考えられる。初めに、制御器調整のためのデータ数がステップ応答と比べ非常に多いという問題がある。



## 参考文献

- [1] H. Hjalmarsson, M. Gevers, S. Gunnarsson, and O. Lequin: Iterative feedback tuning: Theory and applications, *IEEE Control System Magazine*, Vol.18, pp. 26-41 (1998)
- [2] M.C. Campi, A.Lecchini, and S.M. Savaresi: Virtual Reference Feedback Tuning: A Direct Method for the Design of Feedback Controllers, *Automatica*, Vol. 38, pp. 1337-1346 (2002)
- [3] 相馬, 金子, 藤井: 一回の実験データに基づく制御器パラメータチューニングの新しいアプローチ, - Fictitious Reference Iterative Tuning の提案 -, システム制御情報学会論文誌, Vol. 17, No. 12, pp. 528-536 (2004)
- [4] L. Campestrini, D. Eckhard, M. Gevers, and A.S. Bazanella: Virtual Reference Feedback Tuning for non-minimum phase plants, *Automatica*, Vol. 47, No. 8, pp. 1778-1784 (2011)
- [5] 若山, 弓場井, 平井: 一組の閉ループ実験データによる相関関数を利用した多変数制御器調整, 計測自動学会論文集, Vol. 43, No. 5, pp. 391-399 (2007)
- [6] 奥谷, 金子, 山本: FRIT を用いた多入出力むだ時間系に対するスミス保証機のチューニング出力にむだ時間を持つ場合, システム制御学会論文集, Vol. 28, No. 2, pp. 58-65 (2015)
- [7] 加納, 小河, 田坂, 高橋, 滝波, 吉井, 大寶, 増田: モデル不要 PID 調整法 E-FRIT の開発と実用化, 計測と制御, Vol. 50, No. 12, pp. 1076-1079 (2011)
- [8] 増田 士朗: 外乱によって生成された入出力データを外乱抑制 FRIT 法, 自動制御連合講演会論文集, 第 53 回自動制御連合講演会 (2010)
- [9] 馬原, 増田: 分散評価に基づく外乱抑制 FRIT 法を用いた制御器とモデルの同時更新, 計測自動制御学会論文集, Vol. 51, No. 7, pp. 1-7 (2015)
- [10] K. Ando, S. Masuda, and M. Kano: Data-driven generalized minimum variance regulatory control, *2014 European Control Conference (ECC)*, pp. 418-423 (2014)
- [11] 植松, 増田: 一般化最小分散評価に基づく閉ループ同定とむだ時間の推定, 計測自動制御学会論文集, Vol. 52, No. 6, pp. 330-337 (2016)
- [12] 横山, 増田: 一般化最小分散評価に基づく定値制御データからのデータ駆動型 PID ゲイン調整, 第 2 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム (2015)
- [13] L. Desborough and T. Haris: Performance assessment measures for univariate feedback control, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 70, No. 6, pp. 1186-1197 (1992)
- [14] 松井, 綾野, 増田, 中野: FIR フィルタによる VRFT のためのプレフィルタの実現, 電気学会論文誌 C (電子・情報・システム部門誌), Vol. 137, No.7 (2017)
- [15] 金子, 吉田, 松本, 藤井: 1 回の閉ループ実験データを用いた最小二乗法に基づく制御器パラメータチューニング, システム制御情報学会論文誌, Vol. 18, No. 11, pp. 400-409 (2005)
- [16] 横山, 増田: 分散評価に基づく制御不変量の推定を用いたデータ駆動型制御器調整法, 電気学会制御研究会資料, CT 2017 (66-77), pp. 9-14 (2017)
- [17] 北森 俊行: PID 制御システムの設計論, 計測と制御, Vol. 19, No. 4, pp.382-391 (1980)

- [18] 大浦, 花崎, 秋月: 閉ループ系の同定におけるむだ時間の推定, 電気学会論文誌 C (電子・情報・システム部門誌), Vol. 115, No. 7, pp. 887-892 (1995)
- [19] 片山 徹: システム同定入門, 朝倉書店 (1994)
- [20] 富田, A.A.H. Damen, P. Vam den Hof: システム同定における式誤差規範 (EEM) と出力誤差規範 (OEM) の相違, 計測自動制御学会論文集, Vol. 22, No. 1, pp. 50-55 (1986)
- [21] Y.A.W. Shardt and B. Huang: Closed-loop identification with routine operating data: Effect of time delay and sampling time, *Journal of Process Control*, Vol. 27, pp. 22-35 (2015)
- [22] 北村 章: 制御工学の産業応用 (応用, < 特集 > 初学者のための図解でわかる制御工学), システム／制御／情報, Vol. 56, No. 6, pp. 313-318 (2012)