現代論理学と論理結合子

—— ファジー理論との対比から ——

竹　内　　　泉

1　序論

本稿は論理学の哲学についての研究である．本稿では現代論理学に於ける論理結合子の意義を指摘することを目的とする．

本稿では現代論理学の論理体系であるファジー論理について，ファジー理論と対比して説明する．ファジー論理とファジー理論では紛らわしいので，ファジー多値論理とファジー制御理論という用語を用いる．

ファジー多値論理を応用したのがファジー制御理論であるという説明がある．これは単なる誤解である．ファジー制御理論はファジー多値論理に触発されて作られた理論であるが，ファジー多値論理をファジー制御理論の中に見出だすことは出来ない．その両者の違いには論理結合子が本質的な役割を果たすので，それを指摘することによって，現代論理学に於ける論理結合子の意義の指摘としたい[1,2]．

本稿ではファジー多値論理とは，真偽値が [0, 1] 区間の実数値を取るものであって，論理結合子の解釈が以下の式に従うものを言う．（文献 1）

1　ファジーの語は屡々「ファジィ」と記される．小文字が拗音を表すのではなく長音を表すという記法は日本語の記法としては確かにあるが，本稿では標準的な外来語の長音の記法として定着している長棒を用いる記法を用いた．

2　ソフトウェア業界では計算方法，アルゴリズムのことを「ロジック」と呼ぶ．ソフトウェアを用いた製品に「ファジィロジック」と銘されたものがあるが，それは，本稿に云うファジー多値論理のことではなく，ファジー制御理論による計算方式という意味である．

$[[\,P \supset Q\,]] = \min\{1, 1 - [[\,P\,]] + [[\,Q\,]]\}$
$[[\,P \wedge Q\,]] = \max\{0, [[\,P\,]] + [[\,Q\,]] - 1\}$
$[[\,\neg P\,]] = 1 - [[\,P\,]]$

これに似たものにハイティング代数がある．真偽値が [0, 1] 区間の実数値であって論理結合子の解釈がハイティング代数であるような論理体系もまた別に存在する．

ファジー制御理論とは，ファジー制御に使われる理論を言う．（文献 2）

2　含意

含意とは，推論規則「P である．P ⊃ Q である．故に Q である」に現れる「⊃」のことである．この推論規則は現代論理学では含意の除去規則と呼ばれる [3].

2. 1　現代論理学の含意

現代論理学では含意は論理結合子である．現代論理学では論理結合子の意味は，推論規則との関係によって語られる．含意の導入規則とは，P から Q が得られる時に P ⊃ Q を推論することであり，含意の除去規則とは，P ⊃ Q と P から Q を推論することである．

現代論理学では，論理式と論理式を含意記号で繋ぐとそれはまた論理式となる．P と Q と P ⊃ Q は同格の論理式である．P ⊃ Q と R から新しい論理式 (P ⊃ Q) ⊃ R を得ることが出来る．一方で, 日常言語に於いて「ならば」の先件部が入れ子になっているような使用は高等数学以外では滅多に見当たらない．

限られた数の論理結合子によって，幾らでも大きな論理式を作ることが出来る，というのは論理結合子の重要な機能である．一般に，現代論理学

3　この推論規則は「モダスポネンス」や「三段論法」などと呼ばれることもあるが，これらは伝統論理学からの借用語である．伝統論理学の推論規則と区別するために，本稿では伝統論理学からの借用語は用いない．

の研究では，限られた規則を再帰的に適用していくことにより，幾らでも大きな対象を構成していく，ということがよくある．現代論理学に於ける標準的な論理体系では，論理式は原子論理式から論理結合子を再帰的に適用して作られ，証明図は論理式に対し推論規則を再帰的に適用して作られる．こうして，幾らでも大きい論理式や証明図を構成することが出来る．

含意で繋ぐ前のものと含意で作られたものが同格の論理式であることは，現代論理学の大きな特徴である．日常言語での「ならば」の使用は現代論理学の含意とは甚だ異なる現象を示す．日常の言語使用では「ならば」は暗黙の情報の遮蔽を伴なうものであり，その分析は命題論理の中には収まらず，述語論理や様相論理を要する[4]．（文献 3）

伝統論理学では，含意とは繋辞である．繋辞で繋ぐ前のものと繋辞で作られたものとは同格ではない．繋辞は名辞と名辞を繋いで文を作るものである．名辞と文とは同格ではない．名辞は現代論理学では属性あるいは単項述語に相当し，文は現代論理学では命題あるいは論理式に相当する．

例えば，伝統論理学に於ける「人ならば哺乳類である」という文を現代論理学で書くとこのようになる．まず，「…は人である」を表す述語を P ( ) と書き，「…は哺乳類である」を表す述語を Q ( ) と書く．すると，先の文は

$$\forall x \, (P\,(x) \supset Q\,(x))$$

という論理式となる．

4 論理結合子は現代論理学を深く象徴するものである為，現代論理学を十分に理解した上でなければ実感できない．数理論理学者は日常言語の「ならば」を考察することがないので，何故これが言及に値するか分からないかも知れない．しかし，この論理結合子の性質は論理学の初等段階に於いては屡々誤解されている．本論で後に日常言語や伝統論理学の含意が紹介されるが，論理学の教師までもが，現代論理学の含意と日常言語や伝統論理学の含意を混同している．

2.2 ファジー多値論理の含意

ファジー多値論理は現代論理学の一分野であり，含意で繋ぐ前のものと含意で作られたものとは同格の論理式となる．

ファジー多値論理では，含意は真偽値によって定義されている．

$$[[\,P \supset Q\,]] = \min\{1, 1 - [[\,P\,]] + [[\,Q\,]]\}$$

この定義の意味するものを以下に説明する．

含意は連言の随伴である．この随伴の意味を，古典論理と直観主義論理の双方に於いて説明する．

古典論理では，含意は連言と否定に還元される．即ち，P ⊃ Q は¬（P ∧¬ Q）に還元される．

ファジー多値論理でも，連言と否定に関する真偽値の計算規則から以下の等式が成り立つ．

$$[[\,P \supset Q\,]] = [[\,\neg\,(P \wedge \neg\,Q)\,]]$$

即ち，含意と連言と否定に関する真偽値の計算規則は含意を連言と否定に還元する仕方と整合的である．

直観主義論理その他多くの論理体系では，含意は連言と否定に還元されない．直観主義論理での含意の本質は演繹定理である．本稿では演繹定理とは両向きの演繹定理のことを指す．即ち以下の両者を含む．

順方向：Γ，P から Q が演繹されるならば，Γから P ⊃ Q が演繹される

逆方向：Γから P ⊃ Q が演繹されるならば，Γ，P から Q が演繹される

一般的には，この順方向の定理のみを演繹定理と呼んでいる．逆方向の演繹定理は，適当な前提の許で，含意の除去規則と同値である．

ファジー多値論理の含意は真偽値で定義されているが，健全かつ完全な演繹体系を通して，演繹定理と関係付けることが出来る.

ファジー多値論理の付値に対して健全かつ完全な演繹体系があり，以下が成り立つ.（文献 1）

以下は同値である.

任意の原子論理式への付値 e に対して $[[\ \wedge\Gamma\ ]]e \leqq [[\ P\ ]]e$

Γ から P が演繹される

この同値性を使うと，演繹定理は次のように翻訳される.

以下は同値である.

任意の原子論理式への付値 e に対して $[[\ (\wedge\Gamma)\ \wedge P\ ]]e \leqq [[\ Q\ ]]e$

任意の原子論理式への付値 e に対して $[[\ \wedge\Gamma\ ]]e \leqq [[\ P \supset Q\ ]]e$

連言に関する真偽値の計算規則

$$[[\ P \wedge Q\ ]] = \max\{\ 0, [[\ P\ ]] + [[\ Q\ ]] - 1\ \}$$

の許でこの同値性が成り立つには，含意に関する真偽値の計算規則は

$$[[\ P \supset Q\ ]] = \min\{\ 1, 1 - [[\ P\ ]] + [[\ Q\ ]]\ \}$$

でなければならない.

これにより，含意に関する真偽値の計算規則は演繹定理と整合的であることが示された.

ファジー多値論理の含意に関する真偽値の計算規則の意味は以上のように説明される.

2. 3 ファジー制御理論の含意

ファジー制御理論では，含意とは，ファジー推論の為の関係の記述である．含意によって繋がれる先件と後件は状態記述の為のファジー属性であり，含意によって作られるものは推論の為のファジー関係である[5]．この両者は同格ではなく，またどちらも論理式ではない．

ファジー制御理論は制御理論であり，推論は必ず，観測結果から制御命令の方へという向きを持っている．但し下流から上流へ情報を逆流させる場合もある[6]．以下に，「暑いので扇風機を廻す」という例を用いる．観測結果は「暑さ」であり，制御命令は「扇風機を廻せ」である．例の簡素さの為に，観測結果は一種類であり，観測結果と制御命令の間には一段しか推論が無い例を取り上げるが，一般には観測結果は複数あり，またその間に多くの段階の推論が存在する．

ファジー推論には各技術者の工夫が込められる所であり，様々な式が用いられる．本稿では代表的なもののみを紹介する．（文献 2)

ファジー制御理論で含意を用いたファジー推論は，屢々このような式で与えられる．

$$\mu_{B'}(y) = \sup_x \min\{\mu_{A'}(x),\ \mu_{A\supset B}(x, y)\}$$

ここで $\mu_{A\supset B}(x,y)$ は $\mu_A(x)$ と $\mu_B(y)$ から定まる式である．この式がよく用いられる．

$$\mu_{A\supset B}(x, y) = \min\{1, 1 + \mu_B(y) - \mu_A(x)\}$$

5 ここで言うファジー属性やファジー関係は，「ファジー集合」と呼ばれることもある．しかし，この語は避けた．「ファジー集合」という用語を使わなかったことによって，集合論を連想させないという効用もある．ファジー制御理論では，「ファジー集合」の「要素」となるもの，即ちメンバーシップ函数の定義域が何であるかは，後に本論に議論のあるように，直感的に明らかではない．全体集合が不明である所での部分集合を論ずるというのは集合論の精神からは甚だ遠い．

6 「フィードバック」などと呼ばれる．

式中の函数 μ_A, μ_B, $\mu_{A'}$, $\mu_{B'}$ は全て，ファジー属性の帰属函数の返り値を返す函数である．即ち値域は [0, 1] 区間である．$\mu_{A \supset B}$ はファジー関係の返り値を返す函数であり，これも値域は [0, 1] 区間である．

この式は「Aなので B」という推論の式である．例えば，A は「暑い」であり，B は「扇風機を廻す」であり，この式は「暑いので扇風機を廻す」という推論を表す．

この $\mu_{A \supset B}(x, y)$ を定義する $\min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\}$ という式はファジー多値論理の含意の式

$$[\![P \supset Q]\!] = \min\{1, 1 - [\![P]\!] + [\![Q]\!]\}$$

と同じ形をしている．ファジー多値論理とファジー制御理論が似ているのはここのみである．

このファジー推論の意味は何か[7]．

まず，変数 x の変域は何か．これは，事態の候補の中で，ファジー属性Aの値が等しいものを纏め，実数などの名前を付けたものである．ファジー属性の値が等しいもの全てを纏めている必要はない．理論的には事態の候補そのものを x の値としてもよい．しかし高等数学と違って，ファジー制御理論の射程の範囲内では，事態の候補は計算の対象とはならない．計算の対象とする為には実数などの名前が必要である．そこで，事態の候補を纏めて，それに実数などの名前を付ける．変数 x の値はその名前となった実数である．ファジー属性の値そのものを x の値としてもよい．寧ろ数学的にはその方が見通しがよい場合が多い．

函数 μ_A は何か．$\mu_A(x)$ は，x と名付けられた事態の候補に於けるファジー属性 A の値である．ファジー属性そのものの値を x の値とした場合には，μ_A は恒等函数となる．

変数 y の変域もまた同様に，事態の候補の中でファジー属性 B の値が等しいものを纏め，実数などの名前を付けたものである．μ_B はその事態

7　ファジー制御理論の普通の教科書にはこの意味は書いていない．これは，ファジー制御理論の教科書の目的が，その本質的な意味を探ることではなく，計算方法を示すことであるからである．

の候補に於けるファジー属性Bの値である．xとμ_Aの場合と同様，yの値はファジー属性Bの値そのものであり，μ_Bは恒等函数であるとしてもよい．

函数$\mu_{A \supset B}$の引数（x, y）とは即ち，事態の候補の中でファジー属性Aの値とBの値両方が等しいものを纏めたものである．纏めたものは空であるかも知れない．例えば，AならばBと言っているのであるから，μ_A (x) = 1，μ_B (y) = 0となるようなxとyに対しては，(x, y)と名付けられる事態は無い．このような空の事態の集まりに付けられた名前であっても，引数の空間の中に入れておく．

では函数$\mu_{A'}$と$\mu_{B'}$とは何か．$\mu_{A'}$ (x)は，xと名付けられた事態が起こり得るかどうか，というファジー属性の値である．xと名付けられた事態が起こり得るならば，$\mu_{A'}$ (x) = 1であり，起こり得ないならば，$\mu_{A'}$ (x) = 0である．これは確率ではない．確率と比較するならば，起こる確率が無視出来ない位に大きい正の数ならば，$\mu_{A'}$ (x) = 1である．起こる確率が無視出来る程0に近いならば，$\mu_{A'}$ (x) = 0である．0 < $\mu_{A'}$ (x) <1とは，その中間の状態であるということである．$\mu_{B'}$ (y)も同様に，yと名付けられた事態が起こり得るかどうか，というファジー属性の値である．

では，この「AなのでB」という推論はこの式によって如何に行なわれるか．以下に先の具体例によって説明する．

Aは「暑い」というファジー属性であり，Bは「扇風機を廻す」というファジー属性である．

xとyの値は事態を纏めたものに付ける名前である．名前の付け方には幾つか候補がある．まず一つ目を説明する．

xの値は気温の摂氏温度を取り，気温が摂氏x度であるような事態を纏めたものを表す．yの値は回転数であり，扇風機の回転数がyであることが必要な事態を纏めたものを表す．

μ_Aとμ_Bは以下のような函数である．

$\mu_A(x) = 0 \quad ; x \leqq 20$

$\mu_A(x) = (x-20)/10 \quad ; 20 < x \leqq 30$

$\mu_A(x) = 1 \quad ; x > 30$

$\mu_B(y) = y/2000 \quad ; 0 < y \leqq 2000$
$\mu_B(y) = 1 \quad ; y > 2000$

さて，函数$\mu_{A'}$が

$\mu_{A'}(1) = 1 ; x = 30$
$\mu_{A'}(x) = 0 ; x \neq 30$

であった時，即ち気温は摂氏30度だけが起こりえて，それ以外とはなり得ない時はどうであろうか．計算すると

$\mu_{B'}(y) = y / 2000 ; 0 < y \leqq 2000$
$\mu_{B'}(y) = 1 \quad ; y > 2000$

となる．即ちyの値は2000となることは起こり得るが，0とはなり得ない，という結論を得る．おおまかに言えば，気温が30度なら2000回転で扇風機を廻せ，という結果である．

次に，函数$\mu_{A'}$が

$\mu_{A'}(x) = 0 \quad ; x \leqq 20$
$\mu_{A'}(x) = (x-20) / 5 ; 20 < x \leqq 25$
$\mu_{A'}(x) = (30-x) / 5 ; 25 < x \leqq 30$
$\mu_{A'}(x) = 0 \quad ; x > 30$

であった時，即ち気温は摂氏25度となることは起こり得るが，20度以下や30度以上とはなり得ない，という時はどうであろうか．計算すると

$\mu_{B'}(y) = (y + 2000) / 3000 ; y \leqq 1000$
$\mu_{B'}(y) = 1 \quad ; y > 1000$

となる．即ちyの値は1000以上となることは起こり得る，という結論を

得る．おおまかに言えば，気温が摂氏25程度ならば，1000回転またはそれ以上で扇風機を廻せ，という結果である．

次に，函数 $\mu_{A'}$ が

$$\mu_{A'}(x) = 1 \qquad ; x \leqq 20$$
$$\mu_{A'}(x) = (30 - x) / 10 ; 20 < x \leqq 30$$
$$\mu_{A'}(x) = 0 \qquad ; x > 30$$

であった時，即ち気温は摂氏20度とはなり得るが，30度にはなり得ない，という時はどうであろうか．計算すると

$$\mu_{B'}(y) = 1$$

となる．即ちyはどんな値にもなり得る，という結論を得る．おおまかに言えば，涼しい時はこの推論は何も実質的なものを結論しない，ということである．節電の為には，「涼しければ扇風機を廻すな」という推論を入れておくのがよいであろう．

xとyの決め方の，また別の例を説明する．

xの値は気温の摂氏温度に従って以下のように定める．

$x = 0$ の時，xが表す事態は気温摂氏20度以下の事態
$0 < x < 1$ の時，xが表す事態は気温摂氏 $10x + 20$ 度の事態
$x = 1$ の時，xが表す事態は気温摂氏30度以下の事態

yの値は必要な扇風機の回転数従って以下のよう定める．

$x < 1$ の時，xが表す事態は扇風機の回転数が $2000x$ 必要な事態
$x = 1$ の時，xが表す事態は扇風機の回転数が2000以上必要な事態

そして，μ_A と μ_B は恒等函数と定める．

すると，第一の例の場合と同じような推論を行なうことが出来る．

ファジー推論は以上のように行なわれる．ファジー属性 A と B は事態を記述するものであるのに対し，ファジー関係 A ⊃ B は，ファジー推論の為の規則の記述である．A ⊃ B から別の規則（A ⊃ B）⊃ C によって C が推論されるということは起こらない．

ファジー推論にはファジー属性とファジー関係は登場するが，論理式は一切登場しない．

2.4 ハイティング代数の含意

真偽値の範囲が [0, 1] 区間であるようなハイティング代数では含意の解釈をこのように定める．

$$[[P \supset Q]] = 1 \quad ; [[P]] \leqq [[Q]]$$
$$[[P \supset Q]] = [[Q]] ; [[P]] > [[Q]]$$

ファジー推論に於いても，含意の解釈をこのように定めることもある．

$$\mu_{A \supset B}(x, y) = 1 \quad ; \mu_A(x) \leqq \mu_B(y)$$
$$\mu_{A \supset B}(x, y) = \mu_B(y) ; \mu_A(x) > \mu_B(y)$$

ファジー制御理論では，ファジー推論に於いてファジー多値論理の計算式とハイティング代数の計算式のどちらを採用することもあり得る．ファジー推論に於いてどのような式を選ぶかは，それを適用した制御が成功するかどうかによって決まる．

一方で，現代論理学の含意は連言の随伴である．ファジー多値論理とハイティング代数とで含意の式の形が異なるのは，連言が冪等であるか否かを反映したものである．ファジー多値論理の含意がそのように他の論理結合子との関係で決定されているのに対し，ファジー制御理論の含意は実用的な観点から決定される．ファジー多値論理とファジー制御理論の唯一の類似点は含意の式の形であったが，実はこの類似性は何ら特権的なものではなく，単に偶然だったのである．

3 連言

連言は，含意と比べると，現代論理学と伝統論理学や日常言語とで地位がそれ程異なるということはない．伝統論理学や日常言語でも，連言で結ばれる前のものと連言で作られたものは同格である．

しかし，ファジー多値論理とファジー制御理論とでは大きな違いがある．特に，ファジー多値論理では連言の冪等性は一般には成り立たないが，ファジー制御理論では一般的な連言は冪等である．

3.1 現代論理学と連言

現代論理学では，古典論理や直観主義論理の連言は冪等である．

線形論理では連言が二つあり，加法的連言は冪等であるが，乗法的連言は冪等ではない．線形論理は証明に於ける仮定の消費を反映した論理と見做される．乗法的連言の自己連言，即ち同じ論理式同士の連言を取ったものは，同じ仮定を2ヶ消費することを表す．仮定を1ヶ消費するのと2ヶ消費するのは区別される．

3.2 ファジー多値論理の連言

ファジー多値論理では，連言はこの式によって定義される．

$$[[P \wedge Q]] = \max\{0, [[P]] + [[Q]] - 1\}$$

連言の冪等性は一般には成り立たない．即ち，$[[P]]$ が0または1ではない限り，$[[P]] = [[P \wedge P]]$ とはならない．

ファジー多値論理は線形論理と同様，何らかの理由により冪等でない連言が必要な場面で用いられる[8]．

この連言の式の形は，連言の交換則，結合則，反冪等性等の理論的要請と，式の形の単純さとから次のように演繹される．

8　例えば文献4では，一般化された再帰的定義を扱うために連言の冪等性を排除している．

[0, 1] 区間上の二項演算 * が以下を充たすと仮定する.

交換則：　$x*y = y*x$
結合則：　$(x*y)*z = x*(y*z)$
反冪等性：$0 < x < 1 \Rightarrow x*x \neq x$
連続性：　$x*y$ は x と y に対し連続
単調性：　$x \leqq y \Rightarrow x*z \leqq y*z$
1 の中立性：$x*1 = x$
非整域性：$\exists x, y.\ x \neq 0\ \&\ y \neq 0\ \&\ x*y = 0$

この時，ある単調増大全単射 f: [0, 1] → [0, 1] があって以下が成り立つ.

$$f(x*y) = \max\{0, f(x) + f(y) - 1\}$$

即ち * はファジー多値論理の連言と共軛である.

3.3 ファジー制御理論の連言

ファジー制御理論の連言とはファジー属性とファジー属性からファジー属性を作る計算である．ファジー制御理論では目的に応じて様々な連言が用いられる．ここでは連言を二つ挙げる.

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$
$$\mu_{A \times B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$

前者は最も一般的な連言であり，冪等である．これはハイティング代数の連言と式の形は等しい.

後者の式は形の上ではファジー多値論理の連言と同じ形をしている．しかしその内実は大きく異なる.

後者の連言は，ファジー制御の中で，例えば次のように使われる.

ある部屋の暖房を温度計二つで制御しようとしている．温度計の片方を

a と呼び，もう片方を b と呼ぼう．事態 x に於ける温度計 a の摂氏温度を Ta (x) と書き，温度計 b の摂氏温度を Tb (x) と書く．μ_A と μ_B をこのように定義する．

$\mu_A(x) = 0$; $Ta(x) \leqq 10$
$\mu_A(x) = (Ta(x) - 10)/10$; $10 < Ta(x) \leqq 20$
$\mu_A(x) = 1$; $Ta(x) > 20$
$\mu_B(x) = 0$; $Tb(x) \leqq 10$
$\mu_B(x) = (Tb(x) - 10)/10$; $10 < Tb(x) \leqq 20$
$\mu_B(x) = 1$; $Tb(x) > 20$

ファジー属性 A の意味は「温度計 a に於いて暖い」であり，ファジー属性 B の意味は「温度計 b に於いて暖い」である．

工学的には，x は Ta (x) と Tb (x) の順序対であるとするのがよいであろう．即ち，x = (ta, tb), Ta (x) = ta，Tb (x) = tb とするのがよい．

そうして，このような制御をする．

$\mu_{A \times B}(x) > 0$ ならば，暖房を入れない．
$\mu_{A \times B}(x) = 0$ ならば，暖房を入れる．

これは直感的には，「温度計 a に於いて暖く，かつ，温度計 b に於いて暖い，ということが少しでも言えるならば暖房を入れず，そうでなければ暖房を入れる」という意味である．

すると結果として

Ta (x) が 10° 以下，または Tb (x) が 10° 以下，または
Ta (x) と Tb (x) の平均が 15° 以下であるような x では
暖房を入れ，
そうでないような x では暖房を切る．

という制御となる．

温度計１ヶでは誤差があるかも知れない，また，部屋全体の温度を反映していないかも知れない，という虞れがある場合には，複数の温度計で温度を計って平均を取るので，この制御は有効である．

このように，この連言

$$\mu_{A \times B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$

は，一つの入力では信頼性に足りない時に，複数の入力によって信頼性を上げる為に使われる．同じ入力同士の連言，即ち自己連言を取るようなことはしない．よってこの連言に対しては冪等か否かという問題は発生しない．敢えて言うならば，同じ入力を分岐させてまた合流させても，その情報の意味が変わることはないので，冪等であると言うことは出来る．

意味論的な自己連言はある意味で冪等であるが，形式的に自己連言を取ることは出来る．即ち，$\mu_A(x)$ に対して $\mu_{A \times A}(x)$ という函数を作ることは出来る，その意味付けを次に議論する．

3. 4　ファジー制御理論の自己連言とファジー多値論理

ファジー制御理論では，ファジー属性に時に「とても」，即ち程度の強化を意味する修飾詞を付けることがある．ここではそれを m と書こう．mA の定義は，これもまた目的により様々であるが，時にこの定義が用いられる．

$$\mu_{mA}(x) = \max\{0, 2\mu_A(x) - 1\}$$

これは，例えばこのような場合に使われる．B の測定の信頼性が A の測定の信頼性の２倍である場合を考える．この場合には，A の測定値が 0.9 だった場合の事態の程度は B で言えば測定値が 0.8 である場合と同程度であろう，ということが言える．このような場合には $\mu_A(x)$ と $\mu_B(x)$ を同等に比較するのは好ましくなく，$\mu_{mA}(x)$ と $\mu_B(x)$ を比較するのがよい．

この μ_{mA} (x) は形としては $\mu_{A \times A}$ (x) に等しい．即ち，ファジー制御理論で形式的に自己連言を取ったものは，程度の強化という意味になる．

このような観測を基に，ファジー多値論理の自己連言は程度の強化という意味を持つ，と主張する向きもあろう．しかし，それは早計ではないだろうか．

ファジー制御理論での連言 A × B や程度の強化 mA の妥当性は，それを使って行なわれた制御の成否によって裏付けられる．一方で，ファジー多値論理の連言は，反冪等性や理論の単純さ等の，純粋に理論的な要請から決定されている．両者の意味論の，式の形が同一であるのは単なる偶然に過ぎない．それを恰も本質的な意味のように煽り立てるのは強弁でしかない．

4 論理式以外を扱う現代論理学

現代論理学で，論理式以外のものを扱う理論を無視することは出来ない．

型理論はその一例である．型理論の代表例である単純型付ラムダ計算では，論理式に相当するものは，ラムダ項 M がラムダ項 N に簡約される，という式であり，また，ラムダ項 M が型 T によって型付けされる，という式である．単純型付ラムダ計算の主要な登場人物はラムダ項と型であって，論理式ではなく，よって，論理結合子は登場しない．しかし，単純な規則によって幾らでも複雑な表現を生成できる，という現代論理学の特徴は備えている．

ファジー制御理論は現代論理学の一対象ではないが，現代論理学の一対象であるファジー多値論理から触発されて生まれた．逆に，ファジー理論に触発されて新たな現代論理学が生まれることは大いにあり得るし，またそれは歓迎されることである．それは論理式以外のものを扱うものであるかも知れない．しかしそれは，ファジー制御理論とファジー多値論理の違いも分からずに混同された侭の状態からは生まれないであろう．

5　結論

これまでの議論によって，ファジー制御理論と対比することで現代論理学の特徴を観ることが出来た．

まず一つ目は，現代論理学では含意は論理結合子であるということである．即ち，含意は論理式と論理式を繋いで論理式を作るものであり，含意を取る前の論理式と含意を取った後の論理式は同格である．一方でファジー制御理論では，含意はファジー属性からファジー関係を得るものであり，含意を取る前と含意を取った後は同格ではない．

次に二つ目は，現代論理学では論理結合子の意味は，推論規則や他の論理記号との関係，及び理論の単純さ，といった純粋に理論的な要請で決定される，ということである．一方でファジー制御理論では，含意や連言の意味は，制御の成功のため，という実用的な目的によって決定される．一見してファジー多値論理とファジー制御理論で式の形が同じであっても，それは偶然である．

以上二つがファジー制御理論と対比した現代論理学の特徴である．

謝辞

矢田部俊介氏と岡本賢吾氏との間の議論は本稿の動機付けとなった．ここに深く感謝したい．また，査読者からの有益な助言に感謝したい．

参考文献

1「Metamathematics of Fuzzy Logic」Petr Hajek, Kluwer Academic Publishers, 1998 年

2「ファジィ数学入門」山下元，須田宏，森北出版，1997 年

3「様相論理の文脈解釈」竹内泉，「科学哲学」36 巻 2 号 135 ～ 150 頁，2004 年

4「大きな数としての超準数：超準数と厳格有限主義」矢田部俊介，「科学哲学科学史研究」6 巻 1 ～ 15 頁，2012 年