

【学位論文審査の要旨】

1 研究の目的

論文題名に3回登場する「トロピカル」が表す内容には、様々な起源がある。

例えば幾何学においては、1970年代に Bergman が複素トーラス内の超曲面に対し、無限遠の漸近的挙動を表す図形「Bergman 扇」を定義した。これは座標の絶対値の対数をとったものの比の極限からなる集合であり、多面体複体になる。この操作は現代では「トロピカル化」と呼ばれるものの一種である。また組合せ論的データで複素多様体を与えるトーリック幾何学でも同様の操作で角付き多様体を得られることが小田らにより見いだされていた。その後、Kapranov らは、極限を取る前の「アメーバ」や、絶対値の代わりに付値を用いた「非アルキメデスアメーバ」等の概念を与え、さらに Bergman 扇を定義多項式から直接計算する手法を与えた。そこでは、通常の加法と乗法が、最大値と加法に置き換えられた「トロピカル多項式」を用いる。最大値と加法は分配法則を満たし半環になり、「トロピカル代数」と呼ばれている。

この最大値と加法（あるいは本質的に同じであるが、最小値と加法）という演算の組は、制御工学や情報数学においても研究されていた。制御工学では「MaxPlus 代数」や「dioid」などと呼ばれ、やはり 1970年代に IEEE で特集号が組まれている。この方向では標準的なテキストとして 1992年に「Synchronization and Linearity」が出版され、2006年の「Max Plus at Work」に続いており、現在でも研究が続いている。情報数学ではこの代数の第一人者として Simon が挙げられる。Pin によると、Simon がブラジルで研究していたのでフランスの研究グループが「熱帯代数」と呼んだことに「トロピカル」の名前の由来があるとされる。できるだけ和名に直すという意味では「熱帯代数」等と翻訳するのが正統であろうが、現状では専ら「トロピカル代数」等と呼ばれているため、ここでは慣用に従う。

一方で、可積分系の理論にも起源がある。差分方程式から、空間・時間に加えてさらに関数の値も離散化する超離散化の手続きがあり、例えばソリトン解の存在のような重要な性質が超離散化で保たれる例がある。超離散化の標準的な手続きとして加法と乗法を最大値と加法にそれぞれ置き換えるものがあり、ここでもトロピカル代数が現れる。のちに相空間が幾何的なトロピカル化になる場合も見いだされた。

このように、異なる分野で共通の操作が発見され、相互に関係する場合も現れてきた。そこで今世紀の初め頃、Sturmfels と Mikhalkin は、トロピカル代数に対応する代数幾何として「トロピカル幾何」という名前を創り出した。以上のようにトロピカル代数には、今後さらに異分野間で関連が付き大きく発展することが期待される。そこで伊藤氏は、将来の発展を踏まえて、トロピカル代数に関わる複数の分野にわたる総合的な研究を行うことを目的とした。

2 研究の方法と結果

本論文は導入に引き続き3つの章からなり、それぞれ異なる観点からトロピカル代数に関わる独立した研究が述べられている。各章の内容は以下の通りである。

第2章では、制御工学における工程計画問題を扱っている。いくつかの作業を組み合わせた工程を考える。作業の間には前後関係が定まっているものがあり、各作業は先行作業

がすべて終了したあと着手できるものとする。このとき、工程全体の完了までの最短時間は、各作業の完了時間に関するトロピカル多項式、すなわち最大値と加法を有限回施した式、で与えられることが示される。最短完了時間を表すトロピカル多項式には、係数がない・各変数に関して1次・どの項も他の項を割らない、という特徴があり、これらから「P多項式」が定義される。P多項式の性質だけから、クリティカルパスの遷移のしやすさが小林・小田切により定式化されている。しかしP多項式がいつでも工程計画の最短完了時間を与えるわけではなく、最短完了時間となりうる多項式(R多項式)の特徴づけがあればさらに精密な結果が得られることが期待される。

伊藤氏はP多項式の中でR多項式がもつ「項延長可能」という条件を見出した。そして項延長可能なP多項式は、項が極大クリークと対応するように単純グラフと対応付けられることを見出した。そして単純グラフの中でR多項式と対応する条件を、グラフの頂点彩色の言葉で定式化することに成功した。さらにこの対応を通じて、頂点集合における抽象複体とも対応が付き、P多項式の中でのR多項式の位置づけは整理されたと言ってよいであろう。計算量の観点からはこの方法では計算量が多く、多項式からグラフ自体を復元するような問題ではなく、グラフの何等かの性質を抽出する方向への応用が期待される。

第3章では、トロピカル幾何の研究が述べられている。代数曲線において種数は最も基本的な不変量であるが、トロピカル化で保存されるとは限らない。本研究では種数1の楕円曲線の場合を扱い、付値体上の局所自明でない楕円曲線族に対しいつでも種数1のトロピカル化を得られることを示した。その構成にはトロピカル化に用いる付値を取り替えるというアイデアを用いたことが斬新である。証明はできてみると簡単に見えるが、そもそも普通は思いつかない発想であると思われる。将来、ミラー対称性に現れるCalabi–Yau多様体の退化との類似性が追及されるかという興味を引く結果である。

第4章では、トロピカルイデアルを扱う。引き算のないトロピカル多項式半環でもイデアルは加法とスカラー倍で閉じた空でない部分集合として定義されるが、零点集合はトロピカル化で期待される多面体複体には必ずしもならない。Maclagan–Rincónは元の多項式環の引き算に凡そ対応する元の存在を追加してトロピカルイデアルを定義した。これはトロピカル化との相性は良く、零点定理が成立し、零点集合が多面体複体になるが、トロピカル化で得られるイデアル以外の例がほとんどない。またイデアルの和や共通部分を取る操作に対して閉じていないという弱点があった。

本来のGelfand–Naimark双対の観点からは、点とイデアルの対応は連続関数の代数でなされるべきという考えのもと、伊藤氏はトロピカル多項式関数半環において、トロピカルイデアルを定義し、一変数の場合にはPIDと平行した性質がそのまま成り立つことを示すことに成功した。その際、関数を表示する多項式の代表元として、経済的な表示ではなく「最大表示」を採用したことが決定的であった。

3 審査の結果

本論文では、トロピカル代数に関わる異なる3つの分野の研究をまとめている。(1)トロピカル多項式が工程計画問題の最短完了時間を表すためのグラフや抽象複体を用いた特徴付け、(2)付値を選ぶことにより楕円曲線の種数を保つトロピカル化の存在を示したこと、(3)トロピカル多項式関数半環におけるトロピカルイデアルを定式化しPIDに対応する望ま

しい性質を持つことを示したことである。

いずれの内容も、方向性として新機軸を含み、代数幾何や工程計画問題等の応用分野の発展に寄与するものである。本研究の第 2 章の内容は国際学術雑誌である *Hokkaido Math. J.* に 1 篇の単著論文として掲載が決定しており、第 3 章・第 4 章の内容もそれぞれ国際学術雑誌に投稿中である。博士後期課程在学中に 10 回の研究発表を行っている。1 年間以上英語によるセミナーを行っており英語による発表力は担保されていると考える。首都大学東京の理工教育 GP の TA や東京工芸大学の非常勤講師として教育活動にも参加し、多面的に研究活動を行った。異なる 3 つの分野にまたがり研究を行ったことは、伊藤氏が専攻分野について研究者として自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力及びその基礎となる豊かな学識を備えていることを示している。以上の理由から、本論文は学位論文として十分な内容をもつと考える。

なお、論文ファイルに対して *iThenticate* による剽窃検査を行い、問題ないことを主査が確認済みである。

4 最終試験の結果

11 月 7 日 15 時より 16 時まで非公開の予備審査を行った。それを踏まえて、1 月 24 日 16 時より 17 時まで 8 号館 610 室において口述発表を行い、口頭試問を行った。直後に数理情報科学専攻教授会メンバーと外部副査による判定会議を行った。その結果、申請者は博士（理学）の学位を得るに十分な資格を有するものと認めた。