

氏名	伊藤 孝明
所属	理工学研究科 数理情報科学専攻
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理工博 第248号
学位授与の日付	平成30年3月25日
課程・論文の別	学位規則第4条第1項該当
学位論文題名	Tropical polynomials being the minimum finishing time of project networks, genera of tropicalizations of curves, and tropical ideals プロジェクトネットワークの最短完了時間として得られるトロピカル多項式、代数曲線のトロピカル化の種数、およびトロピカルイデアルについて (英文)
論文審査委員	主査 准教授 小林 正典 委員 准教授 内田 幸寛 委員 准教授 植田 一石(東京大学大学院 数理科学研究科)

【論文の内容の要旨】

トロピカル幾何学では、以下に述べるように、幾何学的な観点からの研究、代数学的な観点からの研究、そして、応用数学的な観点からの研究が為されている。例えば Katz は、トーリック多様体の 2 つの部分多様体の交点数がそのトロピカル化の交点数に等しいことを示している([K])が、これは幾何学的な観点からの研究である。代数学的な観点からは、近年、トロピカル幾何学を代数的に基礎付ける動きがあり、2016年には Giansiracusa らによってトロピカルスキームが定義された([GG])。応用数学的な観点からの研究としては、例えば Kobayashi, Odagiri による、プロジェクトネットワークにおけるクリティカルパスの遷移についての研究が挙げられる([KO])。

このように、トロピカル幾何学では様々な観点からの研究が為されている。そこで、今後それらの総合的な研究が進むことを期待して、本論文では上述の 3 つのそれぞれの観点からの研究を行った。以下、それぞれの内容について述べる。

1. A characterization for tropical polynomials being the minimum finishing time of project networks

いくつかの作業の集まりであって、前後関係が与えられたものをプロジェクトネットワ

ークという。プロジェクトネットワークの各作業 i に作業時間 t_i が与えられたとき、プロジェクトネットワーク全体の最短完了時間は t_i のトロピカル多項式として表される。ここで、トロピカル多項式とはトロピカル半体 $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ 上の多項式である。ただし、 \oplus, \odot はそれぞれ

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \odot b = a + b$$

で定義される。

プロジェクトネットワークの最短完了時間として得られるトロピカル多項式(以下、 \mathbb{R} 多項式)は、次の性質を満たす。

- (1) 各変数について 1 次式。
- (2) 係数はすべて 0 (積の単位元)。
- (3) どの項も他の項を割り切らない。

これらを満たすトロピカル多項式を \mathbb{P} 多項式という。Kobayashi, Odagiri の [KO] における研究では、 \mathbb{R} 多項式については上記の性質のみが用いられた。そこで、 \mathbb{R} 多項式についてより詳しい性質がわかれば、それをトロピカル多様体の言葉に言い換えることで Kobayashi, Odagiri の結果をさらに精密なものにできるのではないかと考え、 \mathbb{R} 多項式の特徴付けについて研究した。

まず、すべての \mathbb{R} 多項式が **term extendability** と呼ばれる性質を持つことを示した。次に、**term extendability**を持つ \mathbb{P} 多項式全体は単純グラフと 1 対 1 に対応することを示した。これにより、 \mathbb{R} 多項式の特徴付けは対応する単純グラフの特徴付けに帰着される。最終的に、頂点彩色を用いて以下の特徴付けを得た。

定理 **term extendability** を持つ d 次 \mathbb{P} 多項式が \mathbb{R} 多項式であるための必要十分条件は、対応する単純グラフにある頂点彩色が存在して、次の条件を満たすことである：

- (0) 隣接する 2 頂点は、色が異なる、
- (1) 使用する色は c_1, \dots, c_d の d 色で、 $c_1 < \dots < c_d$ なる順序を持つ、
- (2) 3 頂点 v_1, v_2, v_3 の色が c_i, c_j, c_k のとき、 v_1 と v_2 、 v_2 と v_3 が隣接し、 $c_i < c_j < c_k$ ならば、 v_1 と v_3 は隣接する。

2. Genera of the tropicalizations of curves over an algebraic function fields of one variable

K を非アルキメデスの加法的付値を持つ体とする。トーラス $(K^\times)^n$ の部分多様体 X に対してそのトロピカル化 $\text{trop}(X)$ が定まるが、曲線をトロピカル化した際、一般には種数が保たれないことが知られている。本研究では、種数を保つトロピカル化をいかにして得るかを研究した。

トロピカル化を扱う文献では、 K の例として局所的なもの、すなわち、本質的に付値を一つしか持たないものがよく挙げられるが、本研究では K が複数の付値を持つ場合、特に、係数体が \mathbb{C} 上の 1 変数代数関数体である場合を扱った。複数の付値を用いることによりトロピカル化の族を考え、次の結果を得た。

定理 K を \mathbb{C} 上の 1 変数代数関数体とする。 E を K 上の楕円曲線とし、 E の j -不変量が定

数でないとは仮定する. このとき, K の有限次拡大 L , $E \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L$ と双有理同値な曲線 $C \subset \mathbb{P}_L^2$, L 上の付値 v が存在して, $C \cap T$ の v によるトロピカル化の種数は 1 となる. ここで, T は \mathbb{P}_L^2 の big torus である.

3. Tropical ideals in tropical polynomial function semirings

まず背景として, Maclagan, Rincón による以下の研究がある([MR]). \mathbb{T} を 1. で述べたトロピカル半体とする. トロピカル多項式 f に対し, トロピカル超曲面 $V(I)$ が

$$V(f) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{w}) = -\infty \text{ or } f(\mathbf{w}) \text{ は少なくとも 2 項で最大値をとる}\}$$

によって定まる. さらに, トロピカル多項式半環 $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル I に対し, トロピカル多様体 $V(I)$ を $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$ によって定める. トロピカル多様体は多面体複体の構造を持つことが期待されるが, 一般のイデアルに対しては必ずしもそうはならない. そこで[MR]では, 特別なイデアルのクラスとして, トロピカルイデアルを定義した. そして, I がトロピカルイデアルであればトロピカル多様体 $V(I)$ は多面体複体の構造を持つことを示した.

一方, トロピカルイデアルの具体例については Maclagan らによっていくつか与えられたが, より一般の例を得ることは困難であった. 一般には, あるトロピカル多項式の倍数全体のなすイデアルですらトロピカルイデアルとはならない. また, トロピカルイデアル同士の和, 積, 共通部分がトロピカルイデアルであるとは限らず, これらの操作を用いても簡単には例は得られない.

本研究の目的は, トロピカルイデアルの定義を改良し, 生成や和, 積などの操作が許されるようにすることである. そのために, トロピカル多項式半環 $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ ではなくトロピカル多項式関数半環 $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]/\sim$ におけるトロピカルイデアルを定義した. ここで同値関係 \sim は

$$f \sim g \Leftrightarrow f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

によって定義される.

今回は特に 1 変数の場合を扱った. この場合, 多項式でなく多項式関数を扱う利点として, 任意のトロピカル多項式関数が 1 次式の積で表せることが挙げられる. 以下が本研究の主定理である.

定理 1 任意の $\varphi \in \mathbb{T}[x]/\sim$ に対し, $\langle \varphi \rangle := \{\varphi \odot \psi \mid \psi \in \mathbb{T}[x]/\sim\}$ はトロピカルイデアルである.

定理 2 任意のトロピカルイデアルは $\langle \varphi \rangle$ の形で表される.

これらの定理を用いて, さらに我々のトロピカルイデアルは共通部分を取ることにについて閉じていて, 和や積を自然に定義できることを示した.

[GG] Jeffrey Giansiracusa and Noah Giansiracusa, *Equations of tropical varieties*, Duke Mathematical Journal 165.18 (2016), pp. 3379–3433.

[K] Eric Katz, *A tropical toolkit*, Expo. Math. 27 (2009), no. 1, pp. 1–36.

[KO] Masanori Kobayashi and Shinsuke Odagiri, *Tropical geometry of PERT*, Journal

of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013B-8), *pp.* 145–149.

[MR] Diane Maclagan and Felipe Rincón, *Tropical ideals*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science proc. BC (2016), *pp.* 803–814.