

【学位論文審査の要旨】

1 研究の目的

量子トンネル効果は、古典的粒子が到達不能な領域に量子力学の確率波がしみ出す現象であり、その存在は量子力学の建設の後、程なくして認識された。粒子がポテンシャル障壁に隔てられる場合、その運動が古典力学に従うとすると、粒子は 100%の確率で障壁で反射され運動の向きを反転させるが、量子力学的な粒子は、障壁を越えた領域にゼロでない存在確率をもつ。二重井戸ポテンシャル系に見られるエネルギー分裂、すなわち、偶奇のパリティをもつ近縮退した 2 状態間に見られるエネルギー分裂などもトンネル効果の典型的な現れである。

トンネル効果は純量子論的效果であることから、通常の意味での古典力学をもってしては、近似もしくはそれを表現することはできない。しかしながら、形式的に虚数の運動量を許す、さらに一般的に、古典力学を複素領域にまで拡張すると、量子効果であるトンネル効果を古典的な粒子描像をもって捉えることが可能になる。このアイデアは、1970 年代、場の量子論と化学反応理論という、異なる分野の研究者により同時期にまた独立に提出された。トンネル効果を記述する虚数の運動量をもつ古典軌道は、その後、インスタントンという名称で広く認知され、現在、その考え方が必要とされた当初の状況を越え多方面での応用がある。

本論文の目的は、多重井戸ポテンシャル系、標準型ハミルトン系といった、これまで発見的な方法でしか複素古典力学の方法が適用されたことのなかった、もしくは、全く考察されたことのない 1 自由度の系に対して、その系統的な取り扱いの方法を提案することである。複素古典力学を用いた半古典理論の方法を 1 自由度系の場合に対して整備しておくことは、多自由度系、なかでも非可積分系でのトンネル効果の理解を進めるには避けて通ることのできないステップでもある。本論文では、特に、トンネル効果の典型的な現れであるエネルギー分裂に注目する。

2 研究の方法と結果

トンネル効果によって現れるエネルギー分裂（以下ではトンネル分裂と呼ぶ）を半古典理論をもとに考えるためには、トンネル分裂を与える半古典表式が必要となる。本論文では、Le Deunff-Mouchet により導出された半古典表式に基づいて解析を進める。複素領域を用いた半古典解析は、一定の境界条件を満たす複素古典軌道の探索と、ストークス現象と呼ばれる古典軌道の寄与・非寄与問題の処理という大きく分けて二つの行程から成る。後者は、半古典解析を複素領域で行う際に避けられない作業であるが、ここでは主として前者の問題を考える。

トンネル分裂の評価には、トンネル効果で結ばれる対称な 2 つの領域（二重井戸であれば 2 つの井戸）を繋ぐ複素軌道の古典作用積分が重要な役割を果たす。コーシーの定理より、複素積分は、被積分関数の特異点を横切らない限り積分経路の変形に対してその値を変えないことから、トンネル分裂の半古典表式に必要な古典軌道を探索する作業は、複素領域に拡張された古典軌道の特異点を特定する問題に帰着される。

本論文ではまず、多重井戸ポテンシャル系、標準型ハミルトン系の古典運動方程式の厳密解を求めることより、古典軌道の複素時間面上に現れる特異点に関する考察を行った。4次の多項式ポテンシャルをもつ1次元系については、その古典運動方程式の解は楕円関数で表され、複素時間面に格子状に配列した極をもつことは古くから知られる。ここでは、ポテンシャルが6次の多項式で与えられる系、および、Arnoldにより導入された標準型ハミルトン系に対する厳密解を構成した。前者については、楕円関数を用いた解の具体形を求め、また、後者については、もともとの運動方程式を、導入された変数に対する1階の微分方程式に帰着できることを示した。さらに、解をあらわに書き下すことができる例については、解が無限個の特異点をもつことを導いた。この事実、これらの系に位相的に独立な無限個の解が存在することを強く示唆し、トンネル分裂を与える半古典表式の適用に大きな困難をもたらす可能性があることがわかった。

以上の考察から、本論文では、トンネル分裂に寄与する古典作用積分を時間面上で考察する従来からのアプローチをやめ、古典作用積分の被積分関数（運動量）を配位空間上の変数（座標）で表すことにより、半古典解析実行に当たっての困難の回避を試みた。特に、ここで考察の対象としている、多重井戸ポテンシャル系や標準型ハミルトン系は、そのハミルトニアンが既約な多項式で与えられ、古典作用積分の被積分関数が代数関数となることから、そのリーマン面が有限種数のコンパクトな空間と同相となる。さらに、古典作用積分の積分路変形によって得られる複素閉軌道は、リーマン面上の基本群の要素とみなすことができることから、コンパクト空間のホモトピー類の要素が高々有限個になるという、位相幾何学でよく知られた事実の援用が可能となる。そしてその帰結として、半古典解析に考慮すべき複素古典軌道のトポロジーも高々有限個に収まるという事実を導くことができる。本論文では、以上の一般論を構築した上で、具体的にその手続きを1次元多重井戸ポテンシャル系および標準型ハミルトン系に対して適用し、トンネル分裂の半古典表式に必要な複素軌道の一般表式を与えた。さらに、異なる井戸間の古典作用の間に、無限遠点での留数を介した非自明な関係式が成立していることを見出した。

以上の事実をもとに、1次元多重井戸ポテンシャル系については、古典作用関数の虚部が最小となる複素古典軌道がトンネル分裂の半古典表式に支配的な寄与を及ぼすことを数値的に確認し、また、標準型ハミルトン系については、基本群の要素で与えられる各複素軌道の作用が異なる複素数値を取ることを反映して、作用関数の虚部には最小値が存在しないことを指摘した。ストークス現象に関しては、前者については、境界条件から排除される指数的増大解の除去、という従来の発見的方法が有効であることを確認したが、また、後者については、従来の方法に限界があることを示し、近年進展のある完全WKB解析の手法を取り入れる必要があることを明らかにした。

3 審査の結果

本論文は、1次元系のトンネル分裂の半古典解析を行う際、従来から行われてきた複素古典軌道を時間平面上で考える方法が、事実上、実行不可能なものであることをいくつかの系の厳密解を提示することにより示し、それに替わって、配位空間上で軌道を考え、そのリーマン面の構造を解析することが、より自然かつ単純なアプローチであることを明ら

かにした．複素半古典論を進める際に避けて通ることのできないストークス現象については，十分な対処法を得るには至らなかったものの，必要とされる複素古典軌道を系統的に列挙する方法を提示することにより，インスタントの方法では取り扱うことのできなかつたトンネル効果に対して，その理解を着実に深めることに成功した．特に，異なる井戸に対する古典量子化条件が無限遠点を介して与えられるという事実は，本論文で提案された方法の有効性を示す興味深い成果と言える．

複素領域に拡張された古典力学を用いてトンネル効果を解析するひとつの動機は，トンネル効果という現象の定性的な理解を進めることである．特に，多自由度になると，系は一般に非可積分となり，状態間遷移の問題は量子力学以前に古典力学において自明な問題ではなくなる．トンネル効果もその状況を反映し，1次元のそれとは本質的に異なったものになる可能性があるが，その理解は未だ定性的なレベルですら十分とはいえない．本論文は，直接，考察の対象にこそしていないものの，非可積分系のトンネル効果を強く意識しつつ，その理解を少しでも進めることが研究の強い駆動力となっている．実際，可積分系の詳細な解析は，非可積分系固有の現象を特定するためになくてはならない作業であり，本論文は，その点を巡っての近年の混乱を整理したという意味で，非可積分系のトンネル効果の研究にも貢献があると考えられる．

以上の理由により，本論文は博士（理学）の学位に充分値するものと判断した．

4 最終試験の結果

本学の学位規定に従って，最終試験を行った．公開の席上で論文内容の発表を行い，物理学専攻教員による質疑応答を行った．また，論文審査委員による本論文および関連分野の試問を行った．これらの結果を総合的に審査した結果，合格と判定した．