

氏 名	ヘラダ ヒロミツ 原田 浩 充
所 属	理工学研究科 物理学専攻
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	理工博 第 251 号
学位授与の日付	平成 30 年 3 月 25 日
課程・論文の別	学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題名	Riemann surfaces of complex classical trajectories and tunnelling Splitting in one-dimensional systems 複素古典軌道のリーマン面と一次元可積分系のトンネル分裂（英文）
論文審査委員	主査 教授 首藤 啓 委員 教授 堀田 貴嗣 委員 教授 森 弘之

【論文の内容の要旨】

本学位論文は、一次元可積分系のトンネル分裂の半古典理論について考察したものである。トンネル効果は、古典粒子がエネルギー障壁などによって到達し得ない領域へ遷移を起こす量子力学的現象である。たとえば一次元対称二重井戸型ポテンシャル系では、ポテンシャルの極大点より低いエネルギーを持つ古典粒子はエネルギー障壁を越える事ができず、左右の井戸に束縛された運動をする。一方の量子力学では、左右の井戸に局在した波束がトンネル効果によって結合し、偶奇性をもつペアとなってエネルギー固有状態を構成する。この偶奇性のペアのエネルギー固有値はわずかに分裂しており、このエネルギーの分裂の大きさ（以下、トンネル分裂）を用いて、波束がエネルギー障壁を越えるトンネル確率を評価することができる。

一次元の系では、力学的全エネルギーが第一積分となることから、系は常に可積分となる。一次元系の古典粒子の位相空間上の軌道はトーラス上に束縛され、その運動は高々周期的となる。しかし一般に多次元の系では、十分な数の保存量が存在せず、系は非可積分となる。非可積分系ではカオスの運動が生じ、位相空間はカオス領域と準周期運動領域が混合したものになる。このような混合位相空間を持つ非可積分系のトンネル分裂は、単純な可積分系のそれと比較して劇的に増大することが知られており、その原因は、**Chaos-assisted tunnelling (CAT)**及び**Resonance-assisted tunnelling (RAT)**と呼ばれる機構によって説明されてきた。前者は位相空間中のカオス領域、後者は非線形共鳴を介してトンネル効果が助長され、トンネル分裂が増大することを主張するものである。カオスや

非線形共鳴は、非可積分系特有の位相空間の構造であり、CAT や RAT は、背景の古典力学の特性が量子力学に反映されて起こるトンネル効果と考えられている。

一方、非可積分系のトンネル分裂を議論する際に比較対象に用いられる可積分系は単純な可積分系に限られ、これまでの非可積分系のトンネル分裂は、単純な可積分系との比較においてのみ議論されてきた。しかしながら、すべての可積分系が、単純な可積分系と同等の振る舞いを示す明確な根拠はなく、仮に、非可積分系のトンネル分裂と同様な性質をもつ可積分系が存在したとすれば、CAT もしくは RAT 機構は根本から再考を迫られることになる。本学位論文では、この点を巡って半古典理論に基づく解析および考察を行った。

半古典理論は量子力学の古典的解釈を与える唯一の方法である。経路積分表示された伝搬関数の鞍点近似によって得られるトンネル分裂の半古典表式には、しかるべき境界条件を満たす古典軌道の作用関数が必要となる。作用関数は古典軌道を積分経路とする運動量の積分である。特にトンネル効果の半古典理論では、古典的に到達不可能な領域への遷移を問題にするため、複素領域まで拡張した古典力学に従う軌道が重要な意味を担う。二重井戸型ポテンシャル系ではそのような軌道は虚時間発展の運動方程式を解く事によって得られ、インスタントン解として知られている。

半古典理論として我々の実行すべき事は主に二つある。一つは境界条件を満たす異なる作用を持つ複素古典軌道を列挙する事、もう一つは、鞍点近似実行の際に発生する複素古典軌道の寄与・非寄与問題、すなわち、ストークス現象を処理することである。本学位論文では、主に第一ステップの古典軌道の列挙について議論する。

先行研究においては、半古典理論に必要な複素軌道のトポロジーを考察するために、複素軌道の時間平面上の特異点を見つけ出し、特異点に基づいたトポロジーの分類が行われてきた。ここではその妥当性を吟味するため、まず最初に、簡単な1次元系の厳密解を構成することにより、運動方程式の解の時間平面上での特異点の性質を調べた。その結果、たとえ多項式をポテンシャルにもつ単純な系であっても、解には無限個の特異点が現れ、それに付随する古典軌道も無限種類あることがわかった。これは、インスタントン法、並びにそれを拡張した、運動方程式の解を直接扱う従来のアプローチの実行には一般に大きな困難が伴うことを意味する。

この困難を回避するため、本学位論文では、作用積分の被積分関数（運動量）を配位空間の変数（座標）で表し、その関数に表れる特異点と付随するリーマン面の構造を考察する。対象とするハミルトニアンを既約な多項式に限ると、作用積分の被積分関数をはじめ、任意の力学量は代数関数に属し、そのリーマン面は有限種数のコンパクトな空間と同相になる。一方、作用関数の積分路変形によって得られる複素閉軌道はリーマン面上の基本群の要素とみなすことができることから、コンパクト空間の基本群の要素が高々有限個になるという、位相幾何学でよく知られた事実を用いることにより、半古典理論に考慮すべき

複素古典軌道が有限種類の要素で書き下せることが帰結される．本論文では，以上の議論を，一次元対称多重井戸型ポテンシャル系および標準型ハミルトン系に対して適用し，トンネル分裂の半古典表式に必要な複素軌道の列挙に成功した．さらに，基本群の考え方をを用いることの副産物として，異なる井戸間の古典作用の間に，無限遠点での留数を介した非自明な関係式が成立していることがわかった．

ストークス現象の処理については，トンネル効果の記述として不適切な指数的増大解の除去をもって当たり，その有効性を検証した．一次元対称多重井戸ポテンシャル系に関しては，作用関数の虚部が最小となる複素古典軌道がトンネル分裂の半古典表式に支配的な寄与を及ぼすことが確認され，ここで用いたストークス現象に対する対処法が有効に働くことがわかった．一方，標準型ハミルトン系については，基本群の要素で与えられる各複素軌道の作用が異なる複素数値を取ることを反映し，作用関数の虚部には最小値が存在しない．そのため，ここで用いたストークス現象の処理法では半古典理論に必要な軌道を一意に定めることができないことを指摘した．また，先行研究で排除されていた複素軌道の中に，トンネル分裂再現に必要な軌道が含まれている可能性があること数値的に見出し，標準型ハミルトン系のトンネル分裂に対する従来の理解を更新した．

本学位論文は，一次元系のトンネル分裂の半古典解析を行う際，従来から行われてきた複素古典軌道を時間平面上で考える方法は，事実上，実行不可能なものであること，その代わりに，配位空間上で軌道を考え，そのリーマン面の構造を解析することからアプローチすることが妥当かつ有効であることを主張するものである．その一方，半古典近似を実行するときに不可避なストークス現象については，未だ十分な対処法を得られるには至らなかった．CAT もしくは RAT による機構が非可積分系特有の現象であることを明言するためにも，今後の研究の解析が強く望まれる．