氏　　　　名	ヒラノ　ユウキ 平野　雄貴
所　　　　属	理工学研究科　数理情報科学専攻
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	理工博　第 223 号
学位授与の日付	平成 29 年 3 月 25 日
課程・論文の別	学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題名	Derived factorization categories of gauged Landau-Ginzburg models ゲージ化ランダウ・ギンツブルグ模型の導来因子化圏（英文）
論文審査委員	主査　准教授　上原　北斗 委員　准教授　小林　正典 委員　准教授　戸田　幸伸(東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構)

【論文の内容の要旨】

ゲージ化ランダウ・ギンツブルグ模型（以下，ゲージ化 LG 模型と呼ぶ）とは，スキーム X と，X に作用する代数群 G と，G の指標 χ と，χ-半不変な X 上の正則関数 W からなるデータ $(X,\chi,W)^G$ である．Positselski 氏は，LG 模型 $(X,\chi,W)^G$ に対し，導来因子化圏 $\mathrm{Dcoh}_G(X,\chi,W)$ を導入した．導来因子化圏は三角圏の構造を持ち，対象は $(X,\chi,W)^G$ の因子化と呼ばれる以下のデータからなる:

$$F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} F_1(\chi)$$

ここで，F_i は G-同変な X 上の連接層で，α,β は等式 $\beta\circ\alpha = W\cdot\mathrm{id}$，$\alpha(\chi)\circ\beta = W\cdot\mathrm{id}$ を満たす G 不変な準同型写像である．導来因子化圏はスキーム上の連接層の導来圏や Eisenbud 氏が導入した行列因子化の圏の一般化になっている．

2. 主結果

この学位論文は著者の導来因子化圏に関する二本の論文[H1],[H2]の結果をまとめたものである．それぞれの主結果について以下で述べる．なお，以下では全ての多様体は複素数体上で考えることとする．

- [H1]の主結果

[H1]では以下で述べるように、与えられた代数多様体の導来同値 $\mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\,X_1)\cong\mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\,X_2)$ に対し，自然な仮定の下，ゲージ化 LG 模型 $(X_1,\chi,W_1)^G$ と $(X_2,\chi,W_2)^G$ の導来因子化圏が同値

になることを示した．

Gを簡約な線形代数群とし，X_1とX_2をGの作用を持つ滑らかな擬射影的代数多様体とする．χをGの指標とし，W_iを χ-半不変なX_i上の正則関数とする．ZをW_1とW_2のファイバー積とする．対象$P^G \in \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}^G Z)$に対し，$P \in \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\, Z)$を$P^G$の忘却関手による像とする．$P$がコンパクトな台をつと仮定すると，$P$は積分関手と呼ばれる関手

$$\Phi_P : \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\, X_1) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\, X_2)$$

を誘導する．この時，次が成り立つ．

<u>定理 1（[H1]の主結果）</u>　積分関手Φ_Pが同値ならば，P^Gから誘導される導来因子化圏の間の積分関手

$$\overline{\Phi_{P^G}} : \mathrm{Dcoh}_G(X_1, \chi, W_1) \to \mathrm{Dcoh}_G(X_2, \chi, W_2)$$

も同値である．

Segal 氏は[S]において，二つのゲージ化 LG 模型$(X_1, \chi, W_1)^G$と$(X_2, \chi, W_2)^G$に対し，X_1とX_2が双有理同値なカラビ・ヤウ多様体で，G-作用やW_iが同型な領域で可換ならば，それらの導来因子化圏は同値になると予想した．X_1とX_2が双有理同値な3次元カラビ・ヤウ多様体の場合に, Bridgeland 氏による導来同値の結果と上の定理1を合わせることで、適切なG-作用とG-不変切断W_iに対して導来因子化圏の同値を得る．これは上で述べた Segal 氏による予想の部分的な解決を与えるものである．

- **[H2]の主結果**

行列因子化の理論は，コーエン・マッコーレー環上の極大コーエン・マッコーレー加群 (以下, CM 加群と呼ぶ) の表現論の研究において重要な応用を与え，特に, [K]で証明されたクネーラーの周期性は単純特異点型の多項式が定める超曲面上の CM 加群の研究において重要な応用を与えるものである. [H2] ではこのクネーラーの周期性を次のように一般化した

<u>定理 2（[H2]の主結果）</u>　Xを滑らかな擬射影的代数多様体とし，GをXに作用する簡約線形代数群とする．EをG-同変局所自由層とし，G-不変正則切断$s \in \Gamma(X, E^\vee)^G$のゼロスキームを$Z(s)$とする．$\chi$を G の指標とし，$W$を$\chi$-半不変な$X$上の正則関数で，$Z(s)$への制限$W|_{Z(s)}$が平坦であるものとする. $\mathrm{V}(E(\chi))$を$E(\chi)$から定まるX上のG-ベクトル束とすると，sは $\mathrm{V}(E(\chi))$ 上の χ-半不変な正則関数Q_sを誘導する．この時，三角圏としての同値

$$\mathrm{Dcoh}_G(Z(s), \chi, W|_{Z(s)}) \cong \mathrm{Dcoh}_G(\mathrm{V}(E(\chi)), \chi, q^*W + Q_s)$$ が成り立つ．

上の定理 2 において，$X=\mathbb{C}^n$，$G=0$ とし，EをXの構造層で定め，$s: X\to X\times\mathbb{C}^1$を$s(x_1,\ldots,x_n):=x_n$で定まる切断とすると，クネーラーの周期性が系として従う．さらに，定理 2 においてGが1次元代数トーラスでXに自明に作用し，$W=0$かつ$\chi=\mathrm{id}$ の場合は Shipman 氏と Isik 氏らによりすでに証明されており，(定理 2) は彼らの結果のアナロジーにもなっている．また，(定理 2) と[BFK]による VGIT 理論を応用することで，[O]における Orlov 氏の半直交分解の結果の一般化を得た.

参考文献

[BFK]　M. Ballard, D. Favero and L. Katzarkov, Variation of geometric invariant theory quotients and derived categories, arXiv:1203.6643, to appear in J. Reine. Angew. Math.

[H1]　Y. Hirano, Equivalences of derived factorization categories of gauged Landau-Ginzburg models, Adv. Math. 306 (2017), 200-278.

[H2]　Y. Hirano, Derived Knörrer periodicity and Orlov’s theorem for gauged Landau-Ginzburg models, to appear in Compos. Math.

[K]　H. Knörrer, Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I, Invent. Math. 88 (1987), 153-164.

[O]　D. Orlov, Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 503-531, Progr. Math., 270, Birkh äuger Boston, Inc., Boston, MA, (2009).

[S]　E. Segal, Equivalence between GIT quotients of Landau-Ginzburg B-models, Comm. Math. Phys. 304 (2011), no. 2, 411-432.