『経営と制度』第 15 号
2017年 3月　15－42頁

【論文】

実現ボラティリティとその周辺

小池　祐太 *

Abstract

This article surveys recent studies on the realized volatility, which have been extremely developed in the past two decades. Some related functions implemented in the R package yuima are briefly presented as well.

概要

本稿では，ここ 20 年ほどの間に急速に進歩した実現ボラティリティと呼ばれる統計量に関する研究について，最近の結果を概観する．また，R 言語のパッケージの 1 つである yuima パッケージの関連機能についても簡単に触れる．

1　実現ボラティリティ

$\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, P)$ を確率基底とする．金融資産の日内の (対数) 価格過程 $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ が, 確率微分方程式

$$\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t \tag{1}$$

で与えられるとする．ここに, μ_t, σ_t は càdlàg な $\mathbf{F}$-適合過程, W_t は $\mathcal{B}$ 上の標準 Wiener 過程である．このとき, X の 2 次変動

$$IV = \int_0^1 \sigma_s^2 \mathrm{d}s$$

は累積ボラティリティ(*integrated volatility*, IV) あるいは累積分散 (*integrated variance*) と呼ばれ, X の日次のボラティリティを表す指標の 1 つと考えられている．ボラティリティの重要性は古くから認識されているため (例えば [11] 参照), この量を X の日内の観測データから推定することは応用上重要である．いま, X の高頻度観測データ $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ が与えられているとする．ここに, $t_i = i/n$ である．このとき, 次で定義される統計量

*　首都大学東京 大学院社会科学研究科 経営学専攻 助教、統計数理研究所 外来研究員、CREST JST

$$RV(X)^n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i^n X)^2, \qquad \Delta_i^n X = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$$

は実現ボラティリティ(*realized volatility*, RV) あるいは実現分散 (*realized variance*) と呼ばれ, IV の一致推定量となることが古典的な確率解析の理論において古くから知られている:

$$RV(X)^n \to^p IV \qquad (n \to \infty).$$

高頻度データの枠組みで, RV を日次ボラティリティの推定量として使用することが提案され始めたのは, 90 年代後半の研究 Foster and Nelson [60] および Andersen and Bollerslev [13, 14] にさかのぼる. 一致性の次に興味があるのは推定量の収束レートと推定誤差の漸近分布であるが, $RV(X)^n$ は最適収束レート $n^{-1/2}$ と漸近混合正規性をもつことが知られている (Jacod [86] 参照):

$$\sqrt{n}(RV(X)^n - IV) \to^{d_s} \sqrt{2\int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s}\ \zeta \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

ここに, d_s は安定収束を意味し, ζ は $\mathcal{F}$ と独立な標準正規確率変数である. 上の収束は, まず始めにやや強めの正則条件のもとで Zhang [151] や Barndorff-Nielsen and Shephard [28] で論じられ, その後 Barndorff-Nielsen et al. [21] や Jacod [85, 86] において正則条件が弱められた.

安定収束 (2) は, σ の非退化性の下で, スチューデント化した統計量の漸近正規性

$$\frac{\sqrt{n}(RV(X)^n - IV)}{\sqrt{2\int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s}} \to^d \ N(0,1) \qquad (n \to \infty).$$

を意味する. 従って, 漸近分散 $2\int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s$ の推定量を構成することができれば, 信頼区間の推定が行える. Barndorff-Nielsen and Shephard [28] では, $2\int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s$ の推定量として, *realized quarticity* (RQ) と呼ばれる統計量

$$RQ(X)^n = n\sum_{i=1}^{n} (\Delta_i^n X)^4$$

を導入した. $RQ(X)^n$ は $3\int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s$ の一致推定量となるので,

$$\frac{\sqrt{n}(RV(X)^n - IV)}{\sqrt{\frac{2}{3}RQ(X)^n}} \to^d \ N(0,1) \qquad (n \to \infty) \tag{3}$$

が成り立つ.

1.1　YUIMA における関連機能

YUIMA とは, R 言語のパッケージ **yuima** のことを指す．**yuima** をインストールするには, R のコンソール上で

```
install.packages("yuima")
```

を実行すればよい．

yuima では, 上の解析を実行するために関数 `mpv` が用意されている．なお, `mpv` は次節で説明する MultiPower Variation の略である．

解析を行う前に, まずデータを yuima オブジェクトにする必要がある．いま, 観測値 `x0`,...,`xn` と対応する観測時刻 `t0`,...,`tn` が与えられているとする．上の状況では `xi` $= X_{t_i}$, `ti` $= i/n$ である．まず, これらを zoo オブジェクトに変換する:

```
z <- zoo(c(x0,...,xn),c(t0,...,tn))
```

zoo オブジェクトは, 時系列データのような (狭義) 増加列で順序づけられたベクトルを R で扱うためのものである．**yuima** には, zoo オブジェクトを yuima オブジェクト (正確には `yuima data-class` のオブジェクト) に変換するための関数 `setData` が用意されている:

```
x <- setData(z)
```

このようにして, 観測データに対応する yuima オブジェクト `x` が得られる．

次に解析に進む．RV は,

```
mpv(x,r=2)
```

で計算できる．また, RQ は

```
3*mpv(x,r=4)
```

で計算できる．従って, 例えば IV の推定値の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間の下限と上限は, それぞれ

```
mpv(x,r=2)-sqrt(2*mpv(x,r=4))*qnorm(1-α/2)/sqrt(n),
mpv(x,r=2)+sqrt(2*mpv(x,r=4))*qnorm(1-α/2)/sqrt(n)
```

で与えられる．

2　ジャンプ

2.1　マルチパワーバリエーション

Barndorff-Nielsen and Shephard [29] では, $RQ(X)^n$ の一般化として, 実現パワーバリエーション (*realized power variation*, RPV) と呼ばれる統計量

$$RPV^{[r]}(X)^n = n^{1-\frac{r}{2}} \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i^n X|^r, \qquad r \geq 0$$

を導入した．この統計量は, $n \to \infty$ のとき $\mu_r \int_0^1 |\sigma_s|^r \mathrm{d}s$ に確率収束する．ここに, μ_r は標準正規確率変数の絶対値の r 次モーメントである．Barndorff-Nielsen and Shephard [30] では, RPV の更なる一般化として, 実現バイパワーバリエーション (*realized bipower variation*, BPV) と呼ばれる統計量

$$BPV^{[r_1,r_2]}(X)^n = n^{1-\frac{r_1+r_2}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta_i^n X|^{r_1} |\Delta_{i+1}^n X|^{r_2}, \qquad r_1, r_2 \geq 0$$

を導入した．この統計量は, $n \to \infty$ のとき $\mu_{r_1}\mu_{r_2} \int_0^1 |\sigma_s|^{r_1+r_2} \mathrm{d}s$ に確率収束する．特に, $BPV^{[1,1]}(X)^n$ は $\mu_1^2 IV$ に収束する (この場合だけを特にバイパワーバリエーションと呼ぶことも多い)．RV と BPV の違いは, X がジャンプを伴って観測されるときに現れる．いま, 観測データとして $X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ の代わりに $Y_{t_0}, Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}$ が与えられているとする．ここに,

$$Y_t = X_t + J_t, \qquad J_t = \sum_{k=1}^{N_t} c_k \tag{4}$$

であり, N_t は単純点過程, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は 0 でない確率変数の列である．このとき, よく知られているように, RV について

$$RV(Y)^n \to^p IV + \sum_{k=1}^{N_1} c_k^2 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つ．一方で, BPV については,

$$BPV^{[1,1]}(X)^n \to^p \mu_1^2 IV \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つことを Barndorff-Nielsen and Shephard [30] は示した． これは, $|\Delta_i^n X| = O_p(n^{-1/2})$ に対して $\sum_{i=1}^n |\Delta_i^n J| = O_p(1)$ であることに起因する．従って,

$$RV(Y)^n - \mu_1^{-2} BPV^{[1,1]}(Y)^n$$

はジャンプの 2 乗の総和 $\sum_{k=1}^{N_1} c_k^2$ の一致推定量となる．彼らの方法が画期的なのは, ジャンプ部分に分布の仮定をおかず, かつチューニングパラメータを必要とせずに, ジャンプの情報を得ることができる点であった．彼らは更に, Barndorff-Nielsen and Shephard [31] において, $N_t \equiv 0$ の場合に $\sqrt{n}(RV(Y)^n - \mu_1^{-2} BPV^{[1,1]}(Y)^n)$ に対する安定型中心極限定理を導出することで, 標本 $\omega \in \Omega$ が与えられた際に, 帰無仮説 $N_1(\omega) = 0$ に対して対立仮説 $N_1(\omega) \geq 1$ を検定する手法を提案した．具体的には, $N_1 = 0$ と条件付けた際, 適当な正則条件の下で

$$\frac{\sqrt{n}(RV(Y)^n - \mu_1^{-2} BPV^{[1,1]}(Y)^n)}{\sqrt{\vartheta \int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s}} \xrightarrow{d} N(0,1) \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つことを利用する．ここに, $\vartheta = \pi^2/4 + \pi - 5$ である．従って, ここでも問題は $\int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s$ の推定となる．今の場合 $\frac{1}{n} RQ(Y)^n \to^p \sum_{k=1}^{N_1} c_k^4$ $(n \to \infty)$ となってしまうので, RQ

は使えない．この問題の解決策として, Barndorff-Nielsen and Shephard [30] は, BPV の更なる一般化である実現マルチパワーバリエーション (*realized multipower variation*, MPV)

$$MPV^{[r_1,\dots,r_m]}(Y)^n = n^{1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} r_k} \sum_{i=1}^{n-m+1} |\Delta_i^n Y|^{r_1} \cdots |\Delta_{i+m-1}^n Y|^{r_m}, \qquad r_1,\dots,r_m \geq 0$$

を導入した．$\max\{r_1,\dots r_m\} < 2$ ならば,

$$MPV^{[r_1,\dots,r_m]}(Y)^n \to^p \mu_{r_1} \cdots \mu_{r_m} \int_0^1 |\sigma_s|^{r_1+\cdots+r_m} \mathrm{d}s \qquad (n \to \infty)$$

が証明できる．従って, 例えば $MPV^{[1,1,1,1]}(Y)^n \to^p \mu_1^4 \int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s$ が成り立つから, 帰無仮説の下で検定統計量

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(RV(Y)^n - \mu_1^{-2} BPV(Y)^n)}{\sqrt{\vartheta \mu_1^{-4} MPV^{[1,1,1,1]}(Y)^n}}$$

は漸近的に標準正規分布に従い, 対立仮説の下では正の無限大に発散する．よって, 有意水準を α とすると, z_α を標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点として, $T_n > z_\alpha$ ならば帰無仮説が棄却されることになる．この検定統計量は非常に簡便なため, 数多くの実証研究がある．例えば Huang and Tauchen [81] 参照.

このような応用を背景として, MPV に対する極限定理の研究が盛んに行われてきた. Barndorff-Nielsen et al. [21] では, 連続セミマルチンゲールの BPV に対する極限定理が詳しく述べられている．Infinite activity jump を持つセミマルチンゲールの MPV に対する極限定理については, Barndorff-Nielsen et al. [22], Woerner [148], Jacod [85] および Vetter [145] 等で研究されている．また, ジャンプ部分の推定という観点からは, 極限にジャンプが残る場合の極限定理も重要である．そのような研究は Jacod [85] および Veraart [143] 等でなされている．この場合, 漸近分布が混合正規分布とはならない場合が生じる (Vetter [145] で与えられた極限定理でもそのような状況が起こる)．Aït-Sahalia and Jacod [5] では, この結果を用いて上述の Barndorff-Nielsen & Shephard 検定より精密なジャンプの有無の検定手法を提案した．一方で, MPV は RPV に比べて有効性の面で劣るため, その点を改善する試みも多くなされている．Andersen et al. [18] では MinRV と MedRV という IV の推定量が提案されている．MedRV の長所は, (有限個の) ジャンプの存在下でも漸近混合正規性をもち (BPV はこの性質を必ずしももたない; Vetter [145] 参照), かつ同じ性質をもつ $MPV^{[\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}]}(Y)^n$ よりも小さい漸近分散をもつことである．これらの推定量は Christensen et al. [44] において *quantile-based realized variance* (QRV) へと一般化され, 対応する極限定理が整備された．Christensen and Podolskij [47] は *realized range-based multipower variation* という統計量を導入し, その有効性について論じている．Nagata [123] はリターンの絶対値に基づく IV の推定量 (*two-step realized volatility*) を提案して, BPV よりも有効性の面で優れていることを示している．Mykland et al. [121] は *blocked multipower variation* という統計量について論じている.

2.2　閾値法

前節で説明したマルチパワー法とは別に, ボラティリティの推定の際にジャンプの影響を除去する方法としてよく知られているものに, 閾値法というものがある．この方法は, Mancini [113] と Shimizu [137] によって独立に導入された．アイディアは次のようなものである．いま, n が十分大きければ $|\Delta_i^n X|$ に比べて $|\Delta_i^n J|$ ははるかに大きいので, 区間 $[(i-1)/n, i/n]$ においてYがジャンプしているならば, $|\Delta_i^n Y|$ は大きな値をとるはずである．そこで, ある正の閾値 ρ_n を定めて, $(\Delta_i^n Y)^2 > \rho_n$ となるような i はジャンプを含むとして取り除くことにする．そのような i は有限個となるはずだから, 漸近的には推定量に影響を与えないはずである．よって, 統計量

$$TRV(Y)^n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i^n Y)^2 1_{\{(\Delta_i^n Y)^2 \leq \rho_n\}} \tag{5}$$

はIVの一致推定量となることが期待される．統計量(5)は閾値実現ボラティリティ(*threshold realized volatility*, TRV)と呼ばれる．連続局所マルチンゲールのBrown運動による表現定理とBrown運動の連続率に関するLévyの定理から, 確率1で

$$\limsup_{\delta \to +0} \sup_{\substack{s,u \in [0,1] \\ |s-u| \leq \delta}} \frac{|X_s - X_u|}{\sqrt{2\delta \log \frac{1}{\delta}}} \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} |\sigma_s|$$

が成り立つので, 上の議論は

$$\rho_n \to 0, \qquad \frac{n^{-1} \log n}{\rho_n} \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{6}$$

ならば正当化される．更にこの場合, $TRV(Y)^n$ は漸近混合正規性をもち, 収束レート $n^{-1/2}$ および漸近分散 $2\int_0^1 \sigma_s^4 \mathrm{d}s$ をもつことが容易に示せる．従って, 有効性の面で閾値法はマルチパワー法より優れている．閾値法の最大の問題点は, 閾値パラメータ ρ_n の選択の難しさにある．漸近的には ρ_n は条件(6)さえ満たせば何でもよいはずだが, 現実の有限標本の状況では, $TRV(Y)^n$ の推定精度は ρ_n の選択のよしあしに大きく左右されることが知られている．そのため, 閾値選択の問題は多くの文献で研究されているが (Shimizu [139] とその参考文献参照), 現在のところ標準的な方法は定まっていない．なお, TRVはinfinite activity jumpをもつセミマルチンゲールに対しても, 適当な正則条件の下でIVの一致推定量になり, かつ漸近混合正規性をもつ (Jacod [85] 参照).

閾値法はボラティリティ推定以外にも多くの応用がある．セミマルチンゲールのパスの離散観測データからその構造を調べる手法への応用として, Aït-Sahalia and Jacod [6] と Cont and Mancini [49] は連続マルチンゲール部分が0か否かの検定へ, Aït-Sahalia and Jacod [7] と Cont and Mancini [49] はジャンプ部分が有界変動をもつか否かの検定へ, Jacod and Todorov [91] はボラティリティのパスとセミマルチンゲール自身のパスが同時にジャンプしているか否かへの検定へと, それぞれ応用している．また, Aït-Sahalia and Jacod [4] および Jing et al. [93] はいわゆる Blumenthal-Getoor 指数の推定量を構成するために閾値法を用いている．一方で, Corsi et al. [50] は, ジャンプが存在する際のBPVの推定精度を改善するために, *threshold bipower variation* (およびその一般化である *threshold multipower* *variation*) という統計量を提案している.

2.3 その他の関連する話題

Lee and Mykland [107] は, BPV と極値理論を応用して, 局所的なジャンプの存在を調べるノンパラメトリック検定を提案した. Kinnebrock and Podolskij [98] は, RPV や BPV においてべき関数 $x \mapsto |x|^r$ をより一般の関数に取り換えた場合の中心極限定理について論じている. Barndorff-Nielsen et al. [24] は, 定常増分をもつ Gauss 過程の RPV に対する極限定理について論じている. Todorov and Tauchen [140] は実現 Laplace 変換 (*realized Laplace transform*) という統計量を導入し, ジャンプの存在下でも σ_t のパスの Laplace 変換の一致推定量となることを示し, かつ漸近混合正規性も示した.

マルチパワー法の概説としては [33] および [118] がある. 閾値法の概説には [138] がある. 数学的内容は, [129] に概説が, [90] に詳細がまとめられている.

2.4 YUIMA における関連機能

前節で少し触れたように, **yuima** には MPV を計算するための関数 `mpv` が用意されている. 確率過程 Y_t の離散観測データに対応する yuima オブジェクト `y` が与えられているとする. このとき, 正規化された MPV: $\mu_{r_1}^{-1} \cdots \mu_{r_m}^{-1} MPV^{[r_1,\dots,r_m]}(Y)^n$ は

`mpv(y,r=c(`r_1`,...,`r_m`))`

で計算できる. 正規化されてない MPV を計算したい場合は, 引数 `normalize` を `FALSE` にすればよい (予定):

`mpv(y,r=c(`r_1`,...,`r_m`),normalize=FALSE)`

モデル (4) において, 帰無仮説 $N_1(\omega) = 0$ に対して対立仮説 $N_1(\omega) \geq 1$ を検定する Barndorff-Nielsen & Shephard 検定は, 関数 `bns.test` で実行できる:

```
bns.test(y)
```

検定結果は "htest" クラスのオブジェクト 1 つからなる list オブジェクトとして返され, "htest" クラスのオブジェクトには検定統計量 T_n の計算結果 `statistic` と検定の p 値 (標準正規確率変数が値 T_n を超える確率) `p.value` が含まれる.

TRV を計算するには, 関数 `cce` が利用できる (予定). 閾値パラメータ ρ_n に対する TRV は

`cce(y,method="THY",threshold=`ρ_n`)$covmat`

で計算できる (`cce` や `THY` が何の略語か気になる方は, 次節を参照). **yuima** では, TRV の計算に時間変動する閾値を使用することもできる. このような閾値の有用性は Corsi et al. [50] や Mancini and Renò [115] で指摘されている. 具体的には, 推定量 (5) を次のように変更する:

$$TRV(Y)^n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i^n Y)^2 1_{\{(\Delta_i^n Y)^2 \le \rho_n^i\}}.$$

ここに, $(\rho_n^i)_{i=1}^n$ は時間変動する閾値 (閾値過程) である. 閾値過程 $(\rho_n^i)_{i=1}^n$ に対する TRV は

cce(y,method="THY",threshold=list(c(ρ_n^1,...,ρ_n^n)))$covmat

で計算できる.

3　観測の非正則性, 従属性および非同期性

3.1　非正則観測および従属観測

前節までは, 観測時刻は等間隔 ($t_i = i/n$) であった. このような観測は正則 (*regular*) 観測と呼ばれるが, 実際の金融資産の高頻度取引データが正則観測であることはまれである. 非等間隔な観測は非正則 (*irregular*) 観測と呼ばれる. この問題を回避する ad-hoc な方法として, *calender time sampling* (CTS) と呼ばれる方法がある. いま, 必ずしも等間隔でない高頻度観測データ $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ $(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1)$ が与えられたとする. このとき, 何らかの方法でデータを補完し, すべての t に対する X_t の観測データ $\hat{X}_t$ を生成する. そして, 正整数 L を 1 つ決め, 新たに $(\hat{X}_{i/L})_{i=0}^L$ を観測データとする. データ補間の方法として有名なものに前ティック法 (*previous-tick method*) $\hat{X}_t := X_{t_{\hat{i}}}$ と線形補完法 (*linear interpolation method*) $\hat{X}_t := X_{t_{\hat{i}}} + \frac{t - t_{\hat{i}}}{t_{\hat{i}+1} - t_{\hat{i}}}(X_{t_{\hat{i}+1}} - X_{t_{\hat{i}}})$ がある. 理論的正当性のためには L は n に比べてある程度小さくとる必要があり (これは次小節で説明する非同期性や次節で説明する MS ノイズの影響を回避するためでもある), 経験的には $1/L$ が 5 分から 30 分間隔に対応するように決められる (Andersen et al. [16] は 5 分 (株価データ), Andersen et al. [17] は 30 分 (為替データ) を推奨している).

非正則観測に対する理論的研究の出発点は, 古典的な確率解析の理論において古くから知られている次の事実である. いま, X はセミマルチンゲールであり, かつすべての i について t_i が停止時刻であるとする. このとき, $\max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1}) \to^p 0$ である限り, $RV(X)^n$ は X の 2 次変動 $[X, X]_1$ に確率収束する. この結果から, 少なくとも RV について一致性は問題とならない. しかし, 推定誤差の漸近分布となると事態は一転して複雑となる. まず, 観測時刻と X が独立な場合, 適当な正則条件の下で (3) が正当化されることが Barndorff-Nielsen and Shephard [32] および Mykland and Zhang [122] によって示された.

次の問題は, 観測時刻と X の独立性を緩和することである. そのような観測は従属観測と呼ばれ, [56], [74] および [132] 等でその重要性が指摘されている. 独立性が緩和できる最も簡単な例は, 正則観測をランダムに時間変更して得られるものである (Barndorff-Nielsen et al. [23] 参照). 時間変更が適切であれば, (3) はそのまま成立する. 一方で Phillips and Yu [126] は, 従属観測のうち新たな観測時刻が過去の観測にしか依存しない場合は, 適当な正則条件下で (3) が正当化できることを主張した. この条件は強可予測性という名で明示的に Hayashi and Yoshida [79] および Hayashi et al. [75] で導入され, その下で (3) が成立することが示された. しかし, 強可予測性をさらに緩和すると, (3) が成立する望みは薄くなる. 実際, [61], Fukasawa [62] と Li et al. [108] はそれぞれ独立に, ある条件下で (3) が成立しないことを見出した. なお, [75] は強可予測性の下で連続セミマルチンゲールの

RPV の漸近混合正規性を示している.

3.2 非同期観測

前節までは観測される金融資産は 1 つのみであったが, 実際の市場では複数の金融資産が取引されており, それらの共分散構造にも興味がある. この小節では, セミマルチンゲール X の高頻度観測データ $X_{t_0^N}, X_{t_1^N}, \ldots, X_{t_n^N}$ $(0 = t_0^N < t_1^N < \cdots < t_n^N = 1)$ とは別に, セミマルチンゲール Y の高頻度観測データ $Y_{s_0^N}, Y_{s_1^N}, \ldots, Y_{s_m^N}$ $(0 = s_0^N < s_1^N < \cdots < s_m^N = 1)$ が与えられているとし, X と Y の 2 次共変動 $[X, Y]_1$ を推定する問題を考える. ここに, $N \in \mathbb{N}$ は観測頻度を表すパラメータで, $N \to \infty$ の下での漸近論を考える. $[X, Y]_1$ は X と Y の累積共分散 (*cumulative covariance*, *integrated covariance*) とも呼ばれる.

$n = m$ かつ $t_i^N = s_i^N$ $(i = 1, \ldots, n)$ の場合は同期 (*synchronous*) 観測と呼ばれる. 同期観測の場合, RV の自然な一般化として, 実現共分散 (*realized covariance*, RC)

$$RC(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{t_i}^N X \Delta_{s_i}^N Y, \qquad \Delta_{t_i}^N X = X_{t_i^N} - X_{t_{i-1}^N},\ \Delta_{s_i}^N Y = Y_{s_i^N} - Y_{s_{i-1}^N}$$

が考えられる. RC は $\max_{1 \le i \le n}[(t_i^N - t_{i-1}^N) \vee (s_i^N - s_{i-1}^N)] \to^p 0$ $(N \to \infty)$ である限り一致性をもち, また漸近混合正規性に関しても RV とほぼ同様の議論が展開できる. しかし実際の高頻度データが同期観測であることはまれである. 同期観測でない観測を非同期 (*nonsynchronous*) 観測と呼ぶ. 非同期観測を解消する ad-hoc な方法は, CTS によって新たに同期観測を生成することである. しかし, CTS を生成する幅 L を N に比べて小さくとらなければ, 新たな同期観測から計算した RC は真値を過小推定することが Hayashi and Yoshida [77] によって理論的に示された. この現象は, Epps 効果の名で古くから経験的に知られていた事実と一致する (Epps [58] 参照). そのため, この ad-hoc な方法は手に入る観測データの大部分を捨てることにつながり, 当然推定精度も悪くなる.

上記のような同期化操作を経ずに, 高頻度非同期観測データから累積共分散を推定する問題に対する理論が進展したのは 2000 年代に入ってからであり, 2 つ代表的なアプローチがある. 1 つは Malliavin and Mancino [111] の提案した Fourier 解析に基づくアプローチであり, もう 1 つは Hayashi and Yoshida [77] が提案した Hayashi-Yoshida 推定量 (*Hyashi-Yoshida estimator*, HY) である. スペースの都合上ここでは HY についてのみ簡単に触れる. Fourier 解析によるアプローチについては, Malliavin and Mancino [111, 112], Malliavin et al. [110], Clément and Gloter [48], Mancino and Sanfelici [116, 117], Cuchiero and Teichmann [52] および Park et al. [124] を参照.

HY は

$$HY(X, Y) = \sum_{i,j} \Delta_{t_i}^N X \Delta_{s_j}^N Y K^{ij}, \qquad K^{ij} = 1_{\{[t_{i-1}^N, t_i^N) \cap [s_{j-1}^N, s_j^N) \neq \emptyset\}}$$

で定義される統計量で, 同期観測の場合は RC に一致する. X, Y が連続の場合, HY の一致性と漸近混合正規性は, 独立観測の場合にそれぞれ Hayashi and Yoshida [77] および Hayashi and Yoshida [78] で, 従属観測の場合にそれぞれ Hayashi and Kusuoka [76] および (強可予測性の下) Hayashi and Yoshida [79] で示されている. HY は Fourier 解析による

アプローチに比べて多くのアドバンテージをもつ．第1に, HYはチューニングパラメータを含まない．第2に, HYは最適収束レートを達成する．実は, Fourier型推定量は非同期性が大きい場合には最適収束レートを達成できないことがある; Clément and Gloter [48] およびPark et al. [124] 参照．第3に, HYはFourier型推定量に比べて計算量が少ない．これは, Fourier型推定量が大量の非等間隔離散Fourier変換を計算する必要があることによる．なお, Hoshikawa et al. [80] は数値実験及び実証研究を通してHYとFourier型推定量を比較した結果, HYの使用を推奨している．

一方で前節と同様に, X, Y がジャンプをもつ場合は, ジャンプを分離して連続マルチンゲール部分の累積共分散を推定することが興味ある問題の1つとなる．実際この問題は, 同期観測の場合にはよく研究されている．推定量の研究では, [30] がBPVを偏極等式 $[X,Y]=\frac{1}{4}([X+Y,X+Y]-[X-Y,X-Y])$ によって多次元化した *realized bipower covariation* (BPC), [114] がRCの閾値付き版である *threshold realized covariance* (TRC) を研究している．また, [41] は, 分散と相関を分離して推定することで, TRCを不偏性および有限標本でのパフォーマンスの点で改善した *realized outlyingness weighted covariation* (ROWC) という推定量を提案し, 更に [42] においてROWCを高次元でのパフォーマンスと計算コストの点で改善した *Gaussian rank covariance* (GRC) という推定量を提案した．非同期観測の場合には, [114] がHYの閾値付き版について言及しているのと, [42] が数値実験を通して, CTSによる同期化を用いた際の上記推定量のパフォーマンスの, Epps効果とデータ数の減少とのトレードオフを調べた研究がある．HYの閾値付き版は切断Hayashi-Yoshida推定量 (*truncated Hayashi-Yoshida estimator*, THY) と呼ばれ,

$$THY(X,Y;\rho_n[1],\rho_n[2])=\sum_{i,j}\Delta^N_{t_i}X\Delta^N_{s_i}YK^{ij}1_{\{(\Delta^N_{t_i}X)^2\leq\rho_n[1],(\Delta^N_{s_j}Y)^2\leq\rho_n[2]\}}$$

で定義される．ここに, $\rho_n[1]$, $\rho_n[2]$ は正の実数 (閾値パラメータ) である．もちろん, TRVのように時間変動する閾値を考えることもできる．有限個のジャンプが存在する場合のTHYの漸近混合正規性は (本質的に) [114] で示されている．ジャンプがinfinite activityの場合は, 強可予測性と適当な正則条件の下で漸近混合正規性が [99] で与えられている．極限にジャンプが残る場合のHYに対する極限定理は, 最近 [39] において導出された．

非同期観測の場合, PRVに対応する統計量の構成は自明ではないから, HYに対する分散分析は別の技法を要する．[79] はカーネル法によって漸近分散の推定量を構成している．Mykland [120] はGauss解析の立場からHYの分散分析について考察している．一方で, 次節で説明するマイクロストラクチャーノイズとHYの関連についても多くの研究がある．例えば [146] および [67] 参照．[133] は彼らの提案する市場モデルの枠組みでHYについて考察している．

なお, [150] にHYの概説がある．

3.3　YUIMAにおける関連機能

本節で紹介した推定量のうち, **yuima** に実装されているものはHY, THYおよびリード・ラグ推定量である．

d 個の確率過程 $X^1_t,\dots,X^d_t$ をそれぞれ離散観測している状況を考える．X^i_t の離散観測

データに対応する zoo オブジェクトを `xi` とする．このとき, これらの 観測データは

```
x <- setData(list(x1,...,xd))
```

によって, yuima オブジェクト `x` として **yuima** で扱えるようになる．

HY を計算するための関数として, **yuima** には `cce` が用意されている．`cce` は Cumulative Covariance Estimator の略である．

```
cce(x)
```

は共分散行列の計算結果 `covmat` と相関行列の計算結果 `cormat` からなる list オブジェクトを値として返す．具体的には, `covmat` には行列 $(HY(X^i,X^j))_{1\le i,j\le d}$ が, `cormat` には行列 $(\frac{HY(X^i,X^j)}{\sqrt{HY(X^i,X^i)}\sqrt{HY(X^j,X^j)}})_{1\le i,j\le d}$ が入っている．従って例えば, X^1 と X^2 の累積共分散の Hayashi-Yoshida 推定量は

```
cce(x)$covmat[1,2]
```

で得られる．一方, 第 i 成分に対する閾値パラメータが $\rho_n[i]$ の THY による累積共分散行列推定量

$$(THY(X^i,X^j;\rho_n[i],\rho_n[j]))_{1\le i,j\le d}$$

は,

`cce(x,method="THY",threshold=c(`$\rho_n[1]$`,...,`$\rho_n[d]$`))$covmat`

で得られる (相関行列は `covmat` を `cormat` とすれば得られる)．閾値過程を使いたいときは, 第 i 成分に対する閾値過程に対応する R のベクトルオブジェクト (あるいは zoo オブジェクト) を `rhoi` として,

```
cce(x,method="THY",threshold=list(rho1,...,rhod))$covmat
```

とすればよい.

4　マイクロストラクチャーノイズ

4.1　初期の研究

金融資産の価格過程をセミマルチンゲールでモデリングする根拠の 1 つは無裁定原理であるが (Delbaen and Schachermayer [54] 参照), 高頻度取引データに対する実証研究から, そのようなモデリングでは説明できない現象がいくつか知られている．いま, 金融資産の (対数) 価格の高頻度観測データ過程が確率過程 $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ で表されるとし, その高頻度観測データ $\mathsf{X}_{t_0},\mathsf{X}_{t_1},\dots,\mathsf{X}_{t_n}$ $(0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1)$ が与えられているとする．このとき, 正整数 K に対して観測を K ごとに取り直すことで, 新たな観測データ $\mathsf{X}_{t_0},\mathsf{X}_{t_K},\dots,\mathsf{X}_{t_{n_K K}}$ $(n_K=\lfloor n/K\rfloor)$ を得る．このような観測手法は *tick time sampling* (TTS) と呼ばれる．結果として, 1 つの観測データから RV の族

$$RV^{(K\ \mathrm{tick})} = \sum_{i=1}^{n_K} (\mathsf{X}_{t_{iK}} - \mathsf{X}_{t_{(i-1)K}})^2, \qquad K = 1, 2, \ldots$$

が得られる．いまもし X_{t_i} がセミマルチンゲールの離散観測データ, すなわちあるセミマルチンゲール X_t が存在して $\mathsf{X}_{t_i} = X_{t_i}$ となり, かつ $r_n := \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$ が十分小さければ, これらの RV の族は K が小さくなるにつれてある値 (X の 2 次変動 $[X,X]_1$ の実現値) に近づくはずである．しかし実際には, オリジナルの観測が秒単位レベルになると (これは r_n が 10^{-4} 程度の状況にあたる), 上の RV の族の値は K を小さくするにつれて, あるところを境に急激に増加していくことが知られている．このことは, K を横軸にとって上の RV の族の値をプロットすることで視覚的に明確になる．この手法は Andersen et al. [15] で提案されたもので, *volatility signature plot* (VSP) と呼ばれる．この事実は, 金融資産の対数価格過程は潜在的にはあるセミマルチンゲール X_t で駆動されているが, 実際の観測データには観測誤差がのっているというモデリングの必要性を示唆している．このような考え方は, 経済学ではマーケット・マイクロストラクチャー (MMS) 理論と呼ばれる分野において古くから認識されている (Roll [134] および Hasbrouck [72] 等参照). MMS 理論では, 観測値が潜在的なセミマルチンゲールからずれる要因として様々なものが考察されている．例えば, ビッド・アスクスプレッド (Roll [134]), 観測値の最小取引価格への丸め込み (Gottlieb and Kalay [66]) および情報の非対称性 (Glosten and Milgrom [63]) などである (Engle and Sun [57] に詳しくまとめられている)．そのため, 観測値と潜在的なセミマルチンゲールの差で表される観測誤差は, (マーケット・) マイクロストラクチャーノイズ (*microstructure noise*) と呼ばれる (以下 MS ノイズと略す)．すなわち, 時点 t_i での MS ノイズは,

$$U_{t_i} = \mathsf{X}_{t_i} - X_{t_i} \tag{7}$$

で与えられる．なお, セミマルチンゲール X は効率対数価格過程 (*efficient log-price process*) あるいは潜在対数価格過程 (*latent log-price process*) と呼ばれる．

MS ノイズを考慮したボラティリティの推定理論が整備されたのは比較的最近のことであるが, MS ノイズ自体はすでに Zhou [155] がボラティリティ推定の文脈で論じている．Zhou [155] は, モデル (7) において X が Brown 運動の非ランダム関数による時間変更, (U_{t_i}) が X と独立な平均 0 の i.i.d. 列である場合を考え, IV の不偏推定量

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta_i^n \mathsf{X})^2 + 2\frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{i+1}^n \mathsf{X} \Delta_i^n \mathsf{X} \tag{8}$$

を提案している (正確には $n/(n-1)$ をかける代わりに $[0,1]$ 区間外のデータを使用している)．ここに, $\Delta_i^n \mathsf{X} = \mathsf{X}_{t_i} - \mathsf{X}_{t_{i-1}}$ である．Zhou [155] がこのようなモデルを考察したのは, 高頻度データにおける対数価格リターンの負の自己相関を説明するためであったが, このモデルは VSP における RV の発散現象も説明できる．また, Delattre and Jacod [53] は丸め込み誤差がある場合のボラティリティの推定について論じている．

一方, MS ノイズは観測が低頻度の際は無視できることが経験的に知られている．そこで, $RV^{(K\ \mathrm{tick})}$ において K をそれなりに大きくとるか, 前節で説明したように低頻度の CTS を施してから RV を計算することで, そこそこ信頼できる IV の推定値が得られると考えられる．問題はリサンプリングをどのぐらい低頻度にとるかということであるが, 1 つのアイディアは MS ノイズの存在下で有限標本での RV と IV の平均 2 乗誤差を最小化する観

測頻度を用いることである．そのような観測頻度の数値解または解析解について研究した文献は膨大な数がある．例えば Bandi and Russell [19] とその参考文献を参照していただきたい．

次の小節からは, MS ノイズの存在下でのボラティリティ推定法に対する漸近論的観点からの研究, すなわち一致推定量の構成と, 推定誤差の収束レートおよび漸近分布に関する研究を紹介する．以下この節では, 説明の簡単のため $t_i = i/n$ とする．

4.2　サブサンプリング法

まず研究の第 1 歩として, Zhou [155] タイプの仮定の下, すなわち X が連続伊藤型セミマルチンゲールで, MS ノイズが X と独立な平均 0 の i.i.d. 列の場合に, IV の一致推定量を構成することが問題となる．前節で紹介した研究背景から自然に示唆されるアイディアとして, $RV^{(K\ \mathrm{tick})}$ において K を n に対して遅いオーダーで無限大に飛ばせば, IV の一致推定量を構成できるのではないかという考えである．しかし, この方法はバイアスを生じることが Zhang et al. [154] によって示された．また, 推定量の構成の際に大量のデータを廃棄しているため, 有効性が落ちることが予想される．Zhang et al. [154] はこの問題を解決するために, (TTS に基づく) サブサンプリング (*subsampling*) 法と呼ばれる手法を考案した．具体的には, 出発点を変えることで, RV の族

$$RV_k^{n,K} = \sum_{i:k+iK\le n} (\mathsf{X}_{t_{k+iK}} - \mathsf{X}_{t_{k+(i-1)K}})^2 \qquad (k = 0, 1, \dots, K-1)$$

が得られるので, これらの平均 $RV^{n,K} = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} RV_k^{n,K}$ を推定量として使うというアイディアである．しかし, この推定量もまだバイアスを生じる．そこで Zhang et al. [154] は, バイアスを修正した推定量

$$TSRV^n = RV^{n,K} - \frac{\overline{n}_K}{n} RV^{n,1}, \qquad \overline{n}_K = \frac{n-K+1}{K}$$

を提案した．$TSRV^n$ は K を $n^{2/3}$ のオーダーでとった際に一致性をもつ．この推定量は, 2 種類の観測頻度に基づくサブサンプリングを用いて構成されているため, *two-time scale realized volatility* (TSRV) と呼ばれる．TSRV は MS ノイズの存在下で最初に発見された IV の一致推定量である．なお, 有限標本での推定精度を改善するために, 推定量を $1-\overline{n}_K/n$ で割ることを Zhang et al. [154] は提案している．

一致性の次に問題となるのは, 推定誤差の収束レートと漸近分布である．Zhang et al. [154] は, $K \sim n^{2/3}$ の際, 適当な正則条件下で $TSRV^n$ が収束レート $n^{-1/6}$ の漸近混合正規性をもつことを示した．実は, Gloter and Jacod [64, 65] は, シンプルモデル, すなわち X が未知の分散 σ^2 をもつ Wiener 過程, U_{t_i} が未知の分散 ω^2 をもつ正規分布に従うという仮定の下で尤度解析を行い, σ の推定量の最適収束レートが $n^{-1/4}$ で最小分散が $8\sigma^3\omega^2$ であることを示していた．従って TSRV は rate-optimal ではないから, 次の問題は rate-optimal な推定量を構成することである．この問題を解決するために, Zhang [152] は使用するサブサンプリングを増やすというアイディアを提案した．すなわち,

$$\sum_{K=1}^{M} \alpha_K RV^{n,K}$$

という形の統計量を考察した．ここに, M はある正整数, $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ は一致性のための条件

$$\sum_{K=1}^{M} \alpha_K = 1, \qquad \sum_{K=1}^{M} \frac{\alpha_K}{K} = 0$$

を満たすある実数列である．これらの数値は n に依存する非ランダムな値で, M は収束レートを最適化するように決められ, α_K は MS ノイズから生じる漸近分散を最小化するように決められる．Zhang [152] は $M \sim \sqrt{n}$ としたとき上の統計量が最適収束レートを達成することを示した．なお, この場合 $\alpha_K = 12K^2/M^3 - 6K/M^2$ となる．Zhang [152] の提案した推定量は *multiscale realized volatility* (MSRV) と呼ばれ, 最初に発見された IV の rate-optimal な推定量として知られている．

ここまでは Zhou [155] に従って, MS ノイズ (U_{t_i}) は X と独立な i.i.d. 列と仮定してきた．この仮定は観測頻度が分単位程度ならばある程度信頼できるが, 秒単位の超高頻度になると非現実的であることが知られている．この事実は経験的には古くから認識されていたが, Hansen and Lunde [70] が行った精密な実証研究によって明確にされた．実際, Hansen and Lunde [70] は, 超高頻度領域において, MS ノイズが (1) 有効 (対数) 価格のリターンと (負の) 相関をもち, (2) 自己相関をもち, (3) 時間ごとに性質が変化することを指摘した．これらの性質は, 古典的な MMS 理論から示唆されることでもある (Diebold [55] および Engle and Sun [57] 参照)．従って, MS ノイズに関する仮定を緩めた際の TSRV や MSRV といった推定量の頑健性について考察することが非常に重要となってくる．Aït-Sahalia et al. [2] は MS ノイズに (弱い) 自己相関が存在する場合, すなわち (2) について考察し, TSRV や MSRV の一致性や収束レートには影響しないことを示した．一方で Kalnina and Linton [95] は (1) と (3) について考察するために, X がモデル (1) に従うとし, MS ノイズに対する次のモデルを考えた:

$$U_{t_i} = \sqrt{n}\delta(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \omega(t_i)\epsilon_{t_i}. \tag{9}$$

ここに, $\delta \geq 0$, $\omega(t)$ は非ランダムな関数で, かつ (ϵ_{t_i}) は μ, σ, W と独立な平均 0, 分散 1 の i.i.d. 列である．Kalnina and Linton [95] は, jittered TSRV と呼ばれる TSRV をわずかに修正した推定量が, このモデルの下適当な正則条件下で一致性および収束レート $n^{-1/6}$ の漸近混合正規性をもつことを示した．一方で, このモデルの下での MSRV の挙動はまだ知られていない．

Kalnina [94] は TSRV に対するリサンプリング法について考察している．また, Fan and Wang [59] はウェーブレット法によって観測データからジャンプを除去する方法を提案し, MSRV と組み合わせることで, 有限個のジャンプの存在下で IV の一致推定量を構成している．Barunik and Vacha [34] は TSRV に対するウェーブレット法について更に解析を進めている．Aït-Sahalia and Mykland [9] は TSRV に対する概説を与えている．

なお, ad-hoc な CTS に基づくサブサンプリング法は, IV の粗い推定値を得るために実証研究でよく使われる．例えば, Barndorff-Nielsen et al. [25], Shephard and Sheppard [135] および Hautsch and Podolskij [73] 参照.

4.3 カーネル法

サブサンプリング法とは別のアプローチとして, Hansen and Lunde [68, 70] は Zhou [155] の提案した推定量の修正を試みた. 上述のように, MS ノイズは自己相関をもつので, Zhou [155] の推定量 (8) は実際には不偏推定量ではない. Hansen and Lunde [68, 70] はこの問題を解消するために, 推定量 (8) を一般化した統計量

$$RV^n_{AC_H} = RAC^{n,0} + 2\sum_{h=1}^{H} \frac{n}{n-h} RAC^{n,h}, \qquad H = 1, 2, \ldots$$

を考察した. ここに, $RAC^{n,h}$ $(h = 0, 1, \ldots)$ は実現自己共分散 (*realized autocovariance*, RAC)

$$RAC^{n,h} = \sum_{i=1}^{n-h} \Delta^n_i \mathsf{X} \Delta^n_{i+h} \mathsf{X}$$

である. Hansen and Lunde [70] は, $RV^n_{AC_H}$ が (U_{t_i}) に対する適当な正則条件下で IV の不偏推定量となることを示した. 一方でこの推定量は必ずしも非負の値をとるわけではなく, 実際推定値が負の値をとる場合が相当数起こることを, Hansen and Lunde [68] は実証研究で確認した. そのため, Hansen and Lunde [68] は $RV^n_{AC_H}$ を Newey-West 型に修正した統計量

$$RV^n_{NW_H} = RAC^{n,0} + 2\sum_{h=1}^{H} \left(1 - \frac{h}{H+1}\right) RAC^{n,h}, \qquad H = 1, 2, \ldots$$

を考察した. $RV^n_{NW_H}$ は常に非負の値をとる (すなわち, 非負定値性をもつ). 更に, Hansen and Lunde [69] は適当な条件下で推定量の MSE を数値的に評価する方法を提案し, 実データを用いて $RV^n_{AC_H}$ と $RV^n_{NW_H}$ の MSE を比較した結果, $RV^n_{NW_H}$ の方がより正確な推定量であると結論付けた.

しかし一方で, Barndorff-Nielsen et al. [20] は, $RV^n_{NW_H}$ が TSRV で 'ほぼ' 近似できるが, 一致性はもたないことを示した. Barndorff-Nielsen et al. [23] は一致推定量を構成するために, *flat-top realized kernel* (FTRK) と呼ばれる統計量のクラス

$$FTRK^n_{(k)} = RAC^{n,0} + 2\sum_{h=1}^{H} k\left(\frac{h-1}{H}\right) RAC^{n,h} \tag{10}$$

を考察した. ここに, k は $k(0) = 1$, $k(1) = 0$ を満たす $[0, 1]$ 上の実関数 (カーネル関数) で, H は帯域幅 (*bandwidth*) と呼ばれるチューニングパラメータである. Bartlett カーネル $k(x) = 1 - x$ に対しては, $H \sim n^{2/3}$ のとき $FTRK^n_{(k)}$ が Zhou [155] タイプの仮定の下で IV の一致推定量となり, かつ TSRV と同じ収束レートと漸近分散の漸近混合正規性をもつことを Barndorff-Nielsen et al. [23] は示した. 更に彼らは FTRK が rate-optimal となる条件について考察した. まず彼らは, 端点での MS ノイズの影響を除去するために, *jittering* という方法を導入した. これは, 正整数 m を 1 つ選んで, 観測データ $\mathsf{X}_{t_0}, \mathsf{X}_{t_1}, \ldots, \mathsf{X}_{t_n}$ の代わりに

$$\mathsf{x}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathsf{X}_{t_i}, \qquad \mathsf{x}_{n-2m+1} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathsf{X}_{t_{n-m+i}}, \qquad \mathsf{x}_i = \mathsf{X}_{t_{i+m}}\ (i=1,\dots,n-2m)$$

を使うという方法である. jittering を行った後で $FTRK^n_{(k)}$ を構成すれば, カーネル関数 k が C^1 級で $k'(0)^2+k'(1)^2=0$ を満たすとき, $H\sim\sqrt{n}$, $m\to\infty$ ならば, $FTRK^n_{(k)}$ が Zhou [155] タイプの仮定の下収束レート $n^{-1/4}$ の漸近混合正規性をもつことを Barndorff-Nielsen et al. [23] は示した. 特に k として cubic kernel$k(x)=1-3x^2+2x^3$ をとると, $FTRK^n_{(k)}$ は MSRV と同じ漸近分布をもつ. 彼らは, シンプルモデルの下で MSRV より漸近有効なカーネル関数がとれることを指摘した. しかし, Gloter and Jacod [64, 65] の意味での最小分散を達成するものは見つけられなかった. Barndorff-Nielsen et al. [23] はこの点を解消するために, (10) を非有界な台をもつカーネル関数を許す形に拡張した. すなわち, infinite-lag FTRK

$$FTRK^n_{(k),\infty} = RAC^{n,0} + 2\sum_{h=1}^{n-1} k\left(\frac{h-1}{H}\right) RAC^{n,h}$$

を導入した. 但し, カーネル関数は C^2 級で $k(0)=1$, $k'(0)=0$, $k(x)\to 0$ $(x\to\infty)$ を満たす $[0,\infty)$ 上の実関数と仮定する. Barndorff-Nielsen et al. [23] は, $k(x)=(1+x)e^{-x}$(最適カーネルと呼ばれる) のとき $FTRK^n_{(k),\infty}$ が Gloter and Jacod [64, 65] の意味での最小分散を達成することを示した.

ここまでの説明から, 最適カーネルに対する infinite-lag FTRK が IV の推定量としてベストなように思われるかもしれない. しかし, Barndorff-Nielsen et al. [23, 26] は (infinite-lag) FTRK がいくつか望ましい性質をもっていないことを指摘した. 第 1 に, FTRK は MS ノイズが自己相関をもつと一致性をもたない. 第 2 に, FTRK は非負定値性をもたない. 第 3 に, infinite-lag FTRK は観測データ数程度の個数の RAC を計算する必要があり, 高頻度データに対しては計算コストが大きい. これらの欠点を解消するために, Barndorff-Nielsen et al. [26] は *non-flat-top realized kernel* (RK)

$$RK^n_{(k)} = RAC^{n,0} + 2\sum_{h=1}^{n-1} k\left(\frac{h}{H}\right) RAC^{n,h}$$

について考察した. Barndorff-Nielsen et al. [26] は, カーネル関数が C^2 級で $k(0)=1$, $k'(0)=0$, 非負定値性および適当な可積分性条件を満たし, かつ $H\sim n^{3/5}$, $n^{1/5}/m\to 0$ のとき, $RK^n_{(k)}$ が 4.2 節で紹介した MS ノイズの性質 (1)-(3) を許す仮定の下で収束レート $n^{-1/5}$ の漸近混合正規性をもつことを示した. またこの際, $RK^n_{(k)}$ は非負定値をもつ. Barndorff-Nielsen et al. [25, 26] は, 計算コストを減らすために有界な台をもつカーネル関数の使用を推奨し, 特に Parzan カーネルの使用を推奨した. また Barndorff-Nielsen et al. [25] は, 実際のデータに対する bandwidth パラメータの選択方法や, データクリーニングに対する推定値の反応などに関して, 詳細な実証研究を行っている.

関連研究として, 収束レートを落とさずに MS ノイズの自己相関に対する頑健性を獲得できるように realized kernel を修正する方法の研究がある. Ikeda [83] は 2 種類の bandwidth を使って RK を構成し, それらの線形結合を新たな推定量として提案している (*two scale realized kernel* と呼ばれる). また Varneskov [141] は, FTRK を一般化した統計量のクラス (generalized FTRK) を考えて新たな推定量を提案している. 一方で, Barndorff-Nielsen et al. [27] はサブサンプリング法を用いた際の FTRK の挙動について研究している (これは, Zhou [155] が推定量 (8) のサブサンプリング版を考察していたことに動機づけられている).

Realize kernel は実証研究で頻繁に使われている. 特に, ボラティリティ予測の研究で顕著である. 例えば, Shephard and Sheppard [135], Hansen et al. [71] および Watanabe [147] 等を参照.

4.4　プレ・アベレージング法

2 節で紹介したように, MS ノイズが存在しない状況で, マルチパワー法や閾値法は大成功を収めたといえる. それ故, これらの方法を MS ノイズが存在する場合にも使えるようにしたいという考えが自然に生じる. しかし, これまで説明したサブサンプリング法やカーネル法と, マルチパワー法や閾値法を組み合わせる方法はすぐには見えてこない. このギャップを埋めるために, Podolskij and Vetter [128] はプレ・アベレージング (*pre-averaging*) 法と呼ばれる方法を導入した. 直観的には, MS ノイズは平均をとれば大数の法則によって消えると期待される. 実際, サブサンプリング法でもカーネル法でも推定量の構成にはある種の (重みつき) 平均をとる操作が含まれている. そこで Podolskij and Vetter [128] はまず, 観測データの局所平均をとることで MS ノイズを除去し, その後それらのデータをあたかもノイズなしの観測データとみなして MPV タイプの統計量を構成することを提案した. 従来のサブサンプリング法やカーネル法と異なり, 推定量を構成する最後の段階で平均化操作を行うのではなく, まず始めに平均化操作を行ってしまうというのが, この方法が'プレ'・アベレージングと呼ばれる所以である. Podolskij and Vetter [128] のアイディアは Jacod et al. [87] においてより洗練された. 観測データ $\mathsf{X}_{t_0}, \mathsf{X}_{t_1}, \ldots, \mathsf{X}_{t_n}$ のプレ・アベレージングは, 平均をとる数 k_n と重み関数 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を決めたのち,

$$\overline{\mathsf{X}}_i = \sum_{p=1}^{k_n-1} g\left(\frac{1}{k_n}\right) \Delta^n_{i+p}\mathsf{X} \qquad (i = 0, 1 \ldots, n - k_n + 1)$$

として実行される. 重み関数 g は最低限区分的 C^1 級で区分的 Lipschitz な導関数 g' をもち, かつ $g(0) = g(1) = 0$ を満たすことが要求される. 考える状況次第で更に条件が課されるが, 通常は Bartlett 型窓関数 $g(x) = x \wedge (1 - x)$ が使われる. また k_n は, プレ・アベレージング後に構成した推定量 (プレ・アベレージング推定量と呼ぶことにする) が最適収束レートを達成するようにするために, ある正定数 θ に対して

$$k_n = \theta\sqrt{n} + o(n^{1/4})$$

を満たすことが要求される (4.3 節で説明した理由と同様の理由で別のオーダー条件が課されることもある; Kinnebrock and Podolskij [97] および Vetter [144] 参照). このとき, RV に対応するプレ・アベレージング推定量 (*pre-averaged realized volatility*, PRV) は

$$PRV^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-k_n+1} (\Delta^n_i \mathsf{X})^2$$

で与えられる. Zhou [155] タイプの仮定の下, 対応する大数の法則は

$$PRV^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-k_n+1} (\Delta_i^n \mathsf{X})^2$$

で与えられる．Zhou [155] タイプの仮定の下, 対応する大数の法則は

$$PRV^n \to^p \theta\psi_2 IV + \frac{\psi_1}{\theta}\omega^2$$

で与えられる．ここに, $\psi_1 = \int_0^1 g'(x)^2 \mathrm{d}x$, $\psi_2 = \int_0^1 g(x)^2 \mathrm{d}x$ で, ω^2 は MS ノイズの分散である．従って, 大数の法則 $\frac{1}{2n} RV^{n,1} \to^p \omega^2$ に注意すれば,

$$\widehat{C}^n = \frac{1}{\theta\psi_2} PRV^n - \frac{\psi_1}{2n\theta^2\psi_2} RV^{n,1}$$

は IV の一致推定量になる (もちろん $\psi_2 \neq 0$ を仮定して). Jacod et al. [87] は, 適当な正則条件下で $\widehat{C}^n$ が収束レート $n^{-1/4}$ の漸近混合正規性をもつことを示した．

始めの目的であるマルチパワー法や閾値法の応用へと戻る．MPV に対応するプレ・アベレージング推定量 (*pre-averaged multipower variation*, PMV) は

$$PMV^{[r_1,\dots,r_m],n} = n^{1-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^m r_k} \sum_{i=0}^{n-mk_n+1} |\overline{\mathsf{X}}_i|^{r_1} \cdots |\overline{\mathsf{X}}_{i+(m-1)k_n}|^{r_m}$$

で与えられる．Zhou [155] タイプの仮定の下で, 対応する大数の法則は

$$PMV^{[r_1,\dots,r_m],n} \to^p \mu_{r_1} \cdots \mu_{r_m} \int_0^1 \left(\theta\psi_2\sigma_s + \frac{\psi_1}{\theta}\omega^2\right)^{\frac{r_1+\cdots+r_m}{2}} \mathrm{d}s$$

で与えられる (Hautsch and Podolskij [73])．更に, バイパワー ($m = 2$) の場合について, Podolskij and Vetter [127] が漸近混合正規性とジャンプへの頑健性, および Barndorff-Nielsen & Shephard 型の検定について論じている． $m = 1$ の場合の PMV に対する極限定理は Jacod et al. [88] に詳しい．閾値法の応用も同様の形でなされる．Kinnebrock and Podolskij [97] および Hautsch and Podolskij [73] は信頼区間の構築に, Aït-Sahalia et al. [3] および Podolskij and Ziggel [130] はジャンプの存在の検定に, Jing et al. [92] は Blumenthal-Getoor 指数の推定に, それぞれプレ・アベレージング法とマルチパワー法・閾値法の組み合わせを応用している．

MS ノイズが自己相関をもつとき, $\widehat{C}^n$ は一致性をもたない． Hautsch and Podolskij [73] はこの問題を解消するために, PRV と RAC の線形結合を考えた．一方で, Christensen et al. [43] が非同期性と MS ノイズを同時に処理するために提案した *pre-averaged Hayashi-Yoshida estimator* (PHY) は, MS ノイズが自己相関をもつ場合も一致性をもち, かつ最適収束レートを達成する (Christensen et al. [45])．のみならず, Kalnina-Linton モデル (9) の下でも PHY は収束レート $n^{-1/4}$ の漸近混合正規性をもつことが示されている (Koike [101]).

その他の関連研究として, Christensen et al. [46] および Hautsch and Podolskij [73] はプレ・アベレージング推定量に関する詳しい実証研究を行っている．また, Christensen et al. [44] は QRV に対応するプレ・アベレージング推定量を考察している．Jacod and Mykland [89] はプレ・アベレージング法の漸近有効性を向上させるために適合型プレ・アベレージ

ング法 (*adaptive pre-averaging method*) を提案している．プレ・アベレージング法の数学的詳細は Jacod and Protter [90] の 16 章にまとめられている．

4.5　その他の関連する話題

Xiu [149] はシンプルモデルの尤度関数を最大化する推定量が, 一般の確率ボラティリティモデルの場合でも IV の一致推定量となり, かつ漸近混合正規性をもつことを示した．Xiu [149] のアプローチ (擬最尤法, *quasi-likelihood approach*) は Aït-Sahalia and Xiu [10] においてマイクロストラクチャーノイズの存在に対する Hausman 型の検定に応用されている．Aït-Sahalia and Xiu [10] では, ジャンプの存在下では Xiu [149] の推定量が 2 次変動 $[X,X]_1$ の一致推定量となり, 漸近混合正規性をもつことも示されている．

Kunitomo and Sato [105] はシンプルモデルの尤度関数に動機付けられた Separating Information Maximum Likelihood(SIML) 推定量を IV の推定量として提案している．Kunitomo et al. [104] では SIML 推定量の様々な状況下でのロバスト性が検証されている．

Reiß [131] は, $\sigma : [0,1] \to (0,\infty)$ を α-Hölder 連続関数としたとき, $\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ならば, 観測データ

$$\mathsf{X}_i = \int_0^{i/n} \sigma(s)\mathrm{d}W_s + \epsilon_i, \qquad \epsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,v), \qquad i = 1,\ldots,n \tag{11}$$

によって生成される統計的実験の列が

$$\widetilde{Y}_t = \int_0^t \sqrt{2\sigma(s)}\mathrm{d}s + (vn)^{-1/4}W_t \tag{12}$$

で定義される確率過程 $\widetilde{Y}_t$ を区間 $t \in [0,1]$ で連続観測するという統計的実験の列と (Le Cam の意味で) 漸近同等であることを示した (漸近同等の正確な定義については [131] 参照)．ここで重要なのは, 2 つの統計的実験が漸近同等であれば, 一方における推定量の漸近分散のミニマックス下界はもう一方においてもミニマックス下界になるということである ([106] の 2 章参照)．統計的実験 (12) に対する漸近分散のミニマックス下界は [82] の Theorem VII-5.4 からわかるので, 統計的実験 (11) に対する漸近分散のミニマックス下界もわかる．具体的には $8\sqrt{v}\int_0^1 \sigma(s)^3\mathrm{d}s$ で与えられる．前述したいずれのアプローチによる推定量も一般にはこのミニマックス下界を達成できないため, Reiß [131] はこのミニマックス下界を達成する推定量を, 上記の漸近同等性に動機付けられたアプローチで構成した (スペクトル法と呼ばれる)．スペクトル推定量のより一般的な確率ボラティリティモデル下での漸近混合正規性が Altmeyer and Bibinger [12] において示されている．ジャンプがある場合については Bibinger and Winkelmann [40] で議論されている．

近年, 非同期観測と MS ノイズの存在下での累積共分散推定の研究が活発である．上で説明したそれぞれのアプローチに対して, 非同期観測の際の推定量の修正方法について研究がある．サブサンプリング法については Bibinger [35, 36], Zhang [153], Bibinger and Mykland [38] を, カーネル法については Barndorff-Nielsen et al. [26], Ikeda [84], Varneskov [142] を, プレ・アベレージング法については Christensen et al. [43], Christensen et al. [45], Koike [100, 101, 103, 102] を, 擬最尤法については Aït-Sahalia et al. [1], Liu and Tang [109], Shephard and Xiu [136] を, スペクトル法については Bibinger et al. [37], Altmeyer and Bibinger [12], Bibinger and Winkelmann [40] をそれぞれ参照. また, Corsi et al. [51] は Kalman フィルターと EM アルゴリズムを利用したアプローチを, Peluso et al. [125] は Bayes 法によるアプローチをそれぞれ提案している.

全体の概説としては, [96], [119] および [8] の 7 章がある.

参考文献

[1] Aït-Sahalia, Y., Fan, J., Xiu, D. 2010. High-frequency covariance estimates with noisy and asynchronous financial data. J. Amer. Statist. Assoc. 105 (492), 1504–1517.

[2] Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A., Zhang, L. 2011. Ultra high frequency volatility estimation with dependent microstructure noise. J. Econometrics, 160, 160–175.

[3] Aït-Sahalia, Y., Jacod, J., Li, J. 2012. Testing for jumps in noisy high frequency data. J. Econometrics, 168, 207–222.

[4] Aït-Sahalia, Y., Jacod, J. 2009a. Estimating the degree of activity of jumps in high frequency data. Ann. Statist. 37, 2202–2244.

[5] ——— 2009b. Testing for jumps in a discretely observed process. Ann. Statist. 37 (1), 184–222.

[6] ——— 2010. Is Brownian motion necessary to model high-frequency data? Ann. Statist. 38 (5), 3093–3128.

[7] ——— 2011. Testing whether jumps have finite or infinite activity. Ann. Statist. 39 (3), 1689–1719.

[8] ——— 2014. High-frequency financial econometrics. Princeton University Press.

[9] Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A. 2009. Estimating volatility in the presence of market microstructure noise: A review of the theory and practical considerations. In Handbook of Financial Time Series. 577–598.

[10] Aït-Sahalia, Y., Xiu, D. 2016. A Hausman test for the presence of market microstructure noise in high frequency data. Chicago Booth Research Paper No. 16-06. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2741911.

[11] Altman, E. I., Schwartz, R. A. 1970. Common stock price volatility measures and patterns. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 4 (5), 603–625.

[12] Altmeyer, R., Bibinger, M. 2015. Functional stable limit theorems for quasi-efficient spectral covolatility estimators. Stochastic Process. Appl. 125, 4556–4600.

[13] Andersen, T. G., Bollerslev, T. 1997. Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets. Journal of Empirical Finance, 4, 115–158.

[14] ——— 1998. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. Internat. Econom. Rev. 4 (4), 885–905.

[15] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., Labys, P. 2000. Great realizations. Risk, 13, 105–108.

[16] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., Ebens, H. 2001. The distribution of realized stock return volatility. Journal of Financial Economics, 61, 43–76.

[17] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., Labys, P. 2003. Modeling and forecasting realized volatility. Econometrica, 71 (2), 579–625.

[18] Andersen, T. G., Dobrev, D., Schaumburg, E. 2012. Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation. J. Econometrics, 169, 75–93.

[19] Bandi, F. M., Russell, J. R. 2008. Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling. Rev. Econ. Stud. 75 (2), 339–369.

[20] Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., Shephard, N. 2004. Regular and modified kernel-based estimators of integrated variance: The case with independent noise. Working paper.

[21] Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E. G., Jacod, J., Podolskij, M., Shephard, N. 2006a. A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales. In Kabanov, Y., Liptser, R., Stoyanov, J. eds. From Stochastic Calculus to Mathematical Finance. Berlin, Springer Verlag, 33–69.

[22] Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N., Winkel, M. 2006b. Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps. Stochastic Process. Appl. 116, 796–806.

[23] Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., Shephard, N. 2008. Designing realised kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise. Econometrica, 76 (6), 1481–1536.

[24] Barndorff-Nielsen, O. E., Corcuera, J. M., Podolskij, M. 2009a. Power variation for Gaussian processes with stationary increments. Stochastic Process. Appl. 119, 1845–1865.

[25] Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., Shephard, N. 2009b. Realized kernels in practice: trades and quotes. Econom. J. 12, C1–C32.

[26] ——— 2011a. Multivariate realised kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading. J. Econometrics, 162, 149–169.

[27] ——— 2011b. Subsampling realised kernels. J. Econometrics, 160, 204–219.

[28] Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N. 2002. Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility. J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 64 (2), 253–280.

[29] ——— 2003. Realized power variation and stochastic volatility models. Bernoulli, 9 (2), 243–265.

[30] ——— 2004. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. Journal of Financial Econometrics, 2 (1), 1–37.

[31] ——— 2006a. Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. Journal of Financial Econometrics, 4 (1), 1–30.

[32] ——— 2006b. Power variation and time change. Theory Probab. Appl. 50 (1), 1–15.

[33] ——— 2007. Variation, jumps and high frequency data in financial econometrics. In Blundell, R., Torsten, P., Newey, W. eds. Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Ninth World Congress. Cambridge University Press.

[34] Barunik, J., Vacha, L. 2015. Realized wavelet-based estimation of integrated variance and jumps in the presence of noise. Quant. Finance, 15 (8), 1347–1364.

[35] Bibinger, M. 2011. Efficient covariance estimation for asynchronous noisy high-frequency data. Scand. J. Stat. 38, 23–45.

[36] ——— 2012. An estimator for the quadratic covariation of asynchronously observed Itô processes with noise: Asymptotic distribution theory. Stochastic Process. Appl. 122, 2411–2453.

[37] Bibinger, M., Hautsch, N., Malec, P., Reiß, M. 2014. Estimating the quadratic covariation matrix from noisy observations: local method of moments and efficiency. Ann. Statist. 42 (4), 80–114.

[38] Bibinger, M., Mykland, P. A. 2016. Inference for multi-dimensionalhigh-frequency data with an applicationto conditional independence testing. Scand. J. Stat. 43, 1078–1102.

[39] Bibinger, M., Vetter, M. 2015. Estimating the quadratic covariation of an asynchronously observed semimartingale with jumps. Ann. Inst. Statist. Math. 67 (4), 707–743.

[40] Bibinger, M., Winkelmann, L. 2015. Econometrics of co-jumps in high-frequency data with noise. J. Econometrics, 184, 361–378.

[41] Boudt, K., Croux, C., Laurent, S. 2011. Outlyingness weighted covariation. Journal of Financial Econometrics, 9 (4), 657–684.

[42] Boudt, K., Cornelissenand, J., Croux, C. 2012. Jump robust daily covariance estimation by disentangling variance and correlation components. Comput. Statist. Data Anal. 56, 2993–3005.

[43] Christensen, K., Kinnebrock, S., Podolskij, M. 2010a. Pre-averaging estimators of the ex-post covariance matrix in noisy diffusion models with non-synchronous data. J. Econometrics, 159, 116–133.

[44] Christensen, K., Oomen, R., Podolskij, M. 2010b. Realised quantile-based estimation of the integrated variance. J. Econometrics, 159, 74–98.

[45] Christensen, K., Podolskij, M., Vetter, M. 2013. On covariation estimation for multivariate continuous Itô semimartingales with noise in non-synchronous observation schemes. J. Multivariate Anal. 120, 59–84.

[46] Christensen, K., Oomen, R., Podolskij, M. 2014. Fact or friction: Jumps at ultra high frequency. Journal of Financial Economics, 114 (3), 576–599.

[47] Christensen, K., Podolskij, M. 2012. Asymptotic theory of range-based multipower variation. Journal of Financial Econometrics, 10 (3), 417–456.

[48] Clément, E., Gloter, A. 2011. Limit theorems in the Fourier transform method for the estimation of multivariate volatility. Stochastic Process. Appl. 121, 1097–1124.

[49] Cont, R., Mancini, C. 2011. Nonparametric tests for pathwise properties of semimartingales. Bernoulli, 17 (2), 781–813.

[50] Corsi, F., Pirino, D., Renò, R. 2010. Threshold bipower variation and the impact of jumps on volatility forecasting. J. Econometrics, 159, 276–288.

[51] Corsi, F., Peluso, S., Audrino, F. 2015. Missing in asynchronicity: A Kalman-EM approach for multivariate realized covariance estimation. J. Appl. Econometrics, 30, 377–397.

[52] Cuchiero, C., Teichmann, J. 2015. Fourier transform methods for pathwise covariance estimation in the presence of jumps. Stochastic Process. Appl. 125, 116–160.

[53] Delattre, S., Jacod, J. 1997. A central limit theorem for normalized functions of the increments of a diffusion process, in the presence of round-off errors. Bernoulli, 3 (1), 1–28.

[54] Delbaen, F., Schachermayer, W. 1994. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Ann. 300, 463–520.

[55] Diebold, F. X. 2006. On market microstructure noise and realized volatility. J. Bus. Econom. Statist. 24, 181–183, Discussion of [70].

[56] Engle, R. F. 2000. The econometrics of ultra-high-frequency data. Econometrica, 68 (1), 1–22.

[57] Engle, R. F., Sun, Z. 2007. When is noise not noise - A microstructure estimate of realized volatility. NYU Working paper FIN-07-047, New York University.

[58] Epps, T. W. 1979. Comovements in stock prices in the very short run. J. Amer. Statist. Assoc. 74 (366), 291–298.

[59] Fan, J., Wang, Y. 2007. Multi-scale jump and volatility analysis for high-frequency financial data. J. Amer. Statist. Assoc. 102 (480), 1349–1362.

[60] Foster, D. P., Nelson, D. B. 1996. Continuous record asymptotics for rolling sample variance estimators. Econometrica, 64 (1), 139–174.

[61] 深澤正彰 2009. 「実現ボラティリティの漸近分布について」,『統計数理』, 57 (1), 3–16.

[62] Fukasawa, M. 2010. Realized volatility with stochastic sampling. Stochastic Process. Appl. 120, 829–852.

[63] Glosten, L. R., Milgrom, P. R. 1985. Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. Journal of Financial Economics, 14, 71–100.

[64] Gloter, A., Jacod, J. 2001a. Diffusions with measurement errors. I. Local asymptotic normality. ESAIM Probab. Stat. 5, 225–242.

[65] ——— 2001b. Diffusions with measurement errors. II. Optimal estimators. ESAIM Probab. Stat. 5, 243–260.

[66] Gottlieb, G., Kalay, A. 1985. Implications of the discreteness of observed stock prices. Journal of Finance, 11 (1), 135–153.

[67] Griffin, J. E., Oomen, R. C. 2011. Covariance measurement in the presence of non-synchronous trading and market microstructure noise. J. Econometrics, 160, 58–68.

[68] Hansen, P. R., Lunde, A. 2003. An optimal and unbiased measure of realized variance based on intermittent high-frequency data. Unpublished paper.

[69] ——— 2005. A realized varaince for the whole day based on intermittent high-frequency data. Econometrica, 3 (4), 525–554.

[70] ——— 2006. Realized variance and market microstructure noise. J. Bus. Econom. Statist. 24 (2), 127–161.

[71] Hansen, P. R., Huang, Z., Shek, H. H. 2012. Realized GARCH: A joint model for returns and realized measures of volatility. J. Appl. Econometrics, 27, 877–906.

[72] Hasbrouck, J. 1993. Assessing the quality of a security market: A new approach to transaction-cost measurement. The Review of Financial Studies, 6 (1), 191–212.

[73] Hautsch, N., Podolskij, M. 2013. Pre-averaging based estimation of quadratic variation in the presence of noise and jumps: Theory, implementation, and empirical evidence. J. Bus. Econom. Statist. 31 (2), 165–183.

[74] 林高樹 2009. 「高頻度データと時間変更」,『統計数理』，57 (1)，39–65.

[75] Hayashi, T., Jacod, J., Yoshida, N. 2011. Irregular sampling and central limit theorems for power variations: The continuous case. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 47 (4), 1197–1218.

[76] Hayashi, T., Kusuoka, S. 2008. Consistent estimation of covariation under nonsynchronicity. Stat. Inference Stoch. Process. 11, 93–106.

[77] Hayashi, T., Yoshida, N. 2005. On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes. Bernoulli, 11 (2), 359–379.

[78] ——— 2008. Asymptotic normality of a covariance estimator for nonsynchronously observed diffusion processes. Ann. Inst. Statist. Math. 60 (2), 357–396.

[79] ——— 2011. Nonsynchronous covariation process and limit theorems. Stochastic Process. Appl. 121, 2416–2454.

[80] Hoshikawa, T., Nagai, K., Kanatani, T., Nishiyama, Y. 2008. Nonparametric estimation methods of integrated multivariate volatilities. Econometric Rev. 27 (1-3), 112–138.

[81] Huang, X., Tauchen, G. 2005. The relative contribution of jumps to total price variance. Journal of Financial Econometrics, 3 (4), 456–499.

[82] Ibragimov, I., Has'minskii, R. 1981. Statistical Estimation: Asymptotic Theory. Springer.

[83] Ikeda, S. S. 2015. Two-scale realized kernels: A univariate case. Journal of Financial Econometrics, 13 (1), 126–165.

[84] ——— 2016. A bias-corrected estimator of the covariation matrix of multiple security prices when both microstructure effects and sampling durations are persistent and endogenous. J. Econometrics, 193, 203–214.

[85] Jacod, J. 2008. Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales. Stochastic Process. Appl. 118, 517–559.

[86] ——— 2012. Statistics and high frequency data. In Kessler, M., Lindner, A., Sorensen, M. eds. Statistical Methods for Stochastic Differential Equations. 124 of Monographs on Statistics & Applied Probability, Chapman & Hall/CRC.

[87] Jacod, J., Li, Y., Mykland, P. A., Podolskij, M., Vetter, M. 2009. Microstructure noise in the continuous case: The pre-averaging approach. Stochastic Process. Appl. 119, 2249–2276.

[88] Jacod, J., Podolskij, M., Vetter, M. 2010. Limit theorems for moving averages of discretized processes plus noise. Ann. Statist. 38 (3), 1478–1545.

[89] Jacod, J., Mykland, P. A. 2015. Microstructure noise in the continuous case: Approximate efficiency of the adaptive pre-averaging method. Stochastic Process. Appl. 125, 2910–2936.

[90] Jacod, J., Protter, P. 2012. Discretization of Processes. Springer.

[91] Jacod, J., Todorov, V. 2010. Do price and volatility jump together? J. Appl. Probab. 20 (4), 1425–1469.

[92] Jing, B.-Y., Kong, X.-B., Liu, Z. 2011. Estimating the jump activity index under noisy observations using high-frequency data. J. Amer. Statist. Assoc. 106 (494), 558–568.

[93] Jing, B.-Y., Kong, X.-B., Liu, Z., Mykland, P. A. 2012. On the jump activity index for semimartingales. J. Econometrics, 166, 213–223.

[94] Kalnina, I. 2011. Subsampling high frequency data. J. Econometrics, 161, 262–283.

[95] Kalnina, I., Linton, O. 2008. Estimating quadratic variation consistently in the presence of endogenous and diurnal measurement error. J. Econometrics, 147, 47–59.

[96] 金谷太郎 2009. 「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズがある場合のボラティリティ推定」,『京都大学経済論叢』, 183 (2), 77–86.

[97] Kinnebrock, S., Podolskij, M. 2008a. An econometric analysis of modulated realised covariance, regression and correlation in noisy diffusion models. CREATES Research Paper 2008-23, University of Aarhus.

[98] ——— 2008b. A note on the central limit theorem for bipower variation of general functions. Stochastic Process. Appl. 118, 1056–1070.

[99] Koike, Y. 2014a. An estimator for the cumulative co-volatility of asynchronously observed semimartingales with jumps. Scand. J. Stat. 41 (2), 460–481.

[100] ——— 2014b. Limit theorems for the pre-averaged Hayashi-Yoshida estimator with random sampling. Stochastic Process. Appl. 124 (8), 2699–2753.

[101] ——— 2016a. Estimation of integrated covariances in the simultaneous presence of nonsynchronicity, microstructure noise and jumps. Econometric theory, 32, 533–611.

[102] ——— 2016b. Quadratic covariation estimation of an irregularly observed semimartingale with jumps and noise. Bernoulli, 22 (3), 1894–1936.

[103] ——— 2016c. Time endogeneity and an optimal weight function in pre-averaging covariance estimation. To appear in Statistical Inference for Stochastic Processes, DOI: 10.1007/s11203-016-9135-3.

[104] Kunitomo, N., Misaki, H., Sato, S. 2015. The SIML estimation of integrated covariance and hedging coefficient under round-off errors, micro-market price adjustments and random sampling. Asia-Pacific Financial Markets, 22, 333–368.

[105] Kunitomo, N., Sato, S. 2013. Separating Information Maximum Likelihood estimation of the integrated volatility and covariance with micro-market noise. The North American Journal of Economics and Finance, 26, 282–309.

[106] Le Cam, L., Yang, G. L. 2000. Asyrnptotics in Statistics: Some Basic Concepts. Springer, 2nd edition.

[107] Lee, S. S., Mykland, P. A. 2008. Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics. The Review of Financial Studies, 21 (6), 2535–2563.

[108] Li, Y., Mykland, P. A., Renault, E., Zhang, L., Zheng, X. 2014. Realized volatility when sampling times are possibly endogenous. Econometric Theory, 30, 580–605.

[109] Liu, C., Tang, C. Y. 2014. A quasi-maximum likelihood approach for integrated covariance matrix estimation with high frequency data. J. Econometrics, 180, 217–232.

[110] Malliavin, P., Mancino, M. E., Recchioni, M. C. 2007. A non-parametric calibration of the HJM geometry: an application of Itô calculus to financial statistics. Jpn. J. Math. 2, 55–77.

[111] Malliavin, P., Mancino, M. E. 2002. Fourier series method for measurement of multivariate volatilities. Finance Stoch. 6, 49–61.

[112] ——— 2009. A Fourier transform method for nonparametric estimation of multivariate volatility. Ann. Statist. 37, 1983–2010.

[113] Mancini, C. 2001. Disentangling the jumps of the diffusion in a geometric jumping Brownian motion. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 64, 19–47.

[114] Mancini, C., Gobbi, F. 2012. Identifying the Brownian covariation from the co-jumps given discrete observations. Econometric Theory, 28, 249–273.

[115] Mancini, C., Renò, R. 2011. Threshold estimation of markov models with jumps and interest rate modeling. J. Econometrics, 160, 77–92.

[116] Mancino, M. E., Sanfelici, S. 2008. Robustness of Fourier estimator of integrated volatility in the presence of microstructure noise. Comput. Statist. Data Anal. 52, 2966–2989.

[117] ——— 2011. Estimating covariance via Fourier method in the presence of asynchronous trading and microstructure noise. Journal of Financial Econometrics, 9 (2), 367–408.

[118] 増田弘毅 2009. 「実現多重指数変動に基づく第二特性量行列の推定」,『統計数理』, 57 (1), 17–38.

[119] McAleer, M., Medeiros, M. C. 2008. Realized volatility: A review. Econometric Rev. 27 (1-3), 10–45.

[120] Mykland, P. A. 2012. A Gaussian calculus for inference from high frequency data. Annals of Finance, 8 (2-3), 235–258.

[121] Mykland, P. A., Shephard, N., Sheppard, K. 2012. Efficient and feasible inference for the components of financial variation using blocked multipower variation. Discussion paper series 593, University of Oxford, Department of Economics.

[122] Mykland, P. A., Zhang, L. 2006. ANOVA for diffusions and Itô processes. Ann. Statist. 34 (4), 1931–1963.

[123] Nagata, S. 2012. Consistent estimation of integrated volatility using intraday absolute returns for SV jump diffusion processes. Economics Bulletin, 32 (1), 306–314.

[124] Park, S., Hong, S. Y., Linton, O. 2016. Estimating the quadratic covariation matrix for asynchronously observed high frequency stock returns corrupted by additive measurement error. J. Econometrics, 191, 325–347.

[125] Peluso, S., Corsi, F., Mira, A. 2015. A Bayesian high-frequency estimator of the multivariate covariance of noisy and asynchronous returns. Journal of Financial Econometrics, 13 (3), 665–697.

[126] Phillips, P. C. B., Yu, J. 2008. Information loss in volatility measurement with flat price trading. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University (unpublished paper).

[127] Podolskij, M., Vetter, M. 2009a. Bipower-type estimation in a noisy diffusion setting. Stochastic Process. Appl. 119, 2803–2831.

[128] ——— 2009b. Estimation of volatility functionals in the simultaneous presence of microstructure noise and jumps. Bernoulli, 15 (3), 634–658.

[129] ——— 2010. Understanding limit theorems for semimartingales: a short survey. Stat. Neerl. 64 (3), 329–351.

[130] Podolskij, M., Ziggel, D. 2010. New tests for jumps in semimartingale models. Stat. Inference Stoch. Process, 13 (1), 15–41.

[131] Reiß, M. 2011. Asymptotic equivalence for inference on the volatility from noisy observations. Ann. Statist. 39 (2), 772–802.

[132] Renault, E., Werker, B. J. 2011. Causality effects in return volatility measures with random times. J. Econometrics, 160, 272–279.

[133] Robert, C. Y., Rosenbaum, M. 2012. Volatility and covariation estimation when microstructure noise and trading times are endogenous. Math. Finance, 22 (1), 133–164.

[134] Roll, R. 1984. A simple implicit measure of the effective bid-ask spread in an efficient market. Journal of Finance, 39, 1127–1139.

[135] Shephard, N., Sheppard, K. 2010. Realising the future: Forecasting with high-frequency-based volatility (HEAVY) models. J. Appl. Econometrics, 25, 197–231.

[136] Shephard, N., Xiu, D. 2016. Econometric analysis of multivariate realised QML: estimation of the covariation of equity prices under asynchronous trading. Chicago Booth Research Paper 12-14, The University of Chicago Booth School of Business, Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2045571.

[137] Shimizu, Y. 2003. Estimation of diffusion processes with jumps from discrete observations. Master's thesis, University of Tokyo.

[138] 清水泰隆 2009. 「飛躍型確率過程に対する離散観測による閾値推定法」,『統計数理』, 57 (1), 97–118.

[139] Shimizu, Y. 2010. Threshold selection in jump-discriminant filter for discretely observed jump processes. Stat. Methods Appl. 19, 355–378.

[140] Todorov, V., Tauchen, G. 2012. The realized Laplace transform of volatility. Econometrica, 80 (3), 1105–1127.

[141] Varneskov, R. T. 2011. Generalized flat-top realized kernel estimation of ex-post variation of asset prices contaminated by noise. CREATES Research Paper 2011-31, Aarhus University.

[142] ——— 2016. Flat-top realized kernel estimation of quadratic covariation with nonsynchronous and noisy asset prices. J. Bus. Econom. Statist. 34 (1), 1–22.

[143] Veraart, A. E. 2010. Inference for the jump part of quadratic variation of Itô semimartingales. Econometric Theory, 26, 331–368.

[144] Vetter, M. 2008. Estimation methods in noisy diffusion models. Ph.D. dissertation, Faculty of Mathematics, Ruhr-University Bochum.

[145] ——— 2010. Limit theorems for bipower variation of semimartingales. Stochastic Process. Appl. 120, 22–38.

[146] Voev, V., Lunde, A. 2007. Integrated covariance estimation using high-frequency data in the presence of noise. Journal of Financial Econometrics, 5 (1), 68–104.

[147] Watanabe, T. 2012. Quantile forecasts of financial returns using realized GARCH models. Jpn. Econ. Rev. 63 (1), 68–80.

[148] Woerner, J. H. 2006. Power and multipower variation: inference for high frequency data. In Shiryaev, A. N., Grossinho, M. R., Oliveira, P. E., Esquível, M. L. eds. Stochastic Finance. Springer, 343–364.

[149] Xiu, D. 2010. Quasi-maximum likelihood estimation of volatility with high frequency data. J. Econometrics, 159, 235–250.

[150] 吉田朋広 2011.「拡散型確率過程の推定における極限定理」,『統計数理』, 59 (1), 125–140.

[151] Zhang, L. 2001. From martingales to ANOVA: Implied and realized volatility. Ph.D. dissertation, Department of Statistics, The University of Chicago.

[152] ——— 2006. Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multi-scale approach. Bernoulli, 12 (6), 1019–1043.

[153] ——— 2011. Estimating covariation: Epps effect, microstructure noise. J. Econometrics, 160, 33–47.

[154] Zhang, L., Mykland, P. A., Ait-Sahalia, Y. 2005. A tale of two time scales: determining integrated volatility with noisy high-frequency data. J. Amer. Statist. Assoc. 100 (472), 1394–1411.

[155] Zhou, B. 1996. High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates. J. Bus. Econom. Statist. 14 (1), 45–52.