修 士 学 位 論 文

正 標 数 の 体 上 の 多 項 式 環 の
安 定 ダ ー ク セ ン 自 己 同 型

指導教授　　　　　　　　　黒田　茂　教授

平成　28年　1月　7日　　提出

首都大学東京大学院

理工学研究科　　数理情報科学　　専攻

学修番号　14878312

氏　名　　黒田　基紀

学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名　黒田　基紀

論文題名：正標数の体上の多項式環の安定ダークセン自己同型

本修士論文では多項式環の自己同型について考える．k を体，$k[x_1, \dots, x_n]$ を n 変数多項式環とする．そして $k[x_1, \dots, x_n]$ の k 自己同型全体を $\mathrm{GA}_n(k)$ とおく．$\mathrm{GA}_n(k)$ の任意の元 F を $(F(x_1), \dots, F(x_n))$ と同一視して考える．そして $(x_1, \dots, ax_i + f, \dots, x_n)$ の形の自己同型を基本自己同型という．ただし i は 1 以上 n 以下の整数，a は k の可逆元，f は $k[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ の元とする．そして各成分が一次式の自己同型をアフィン自己同型といい，アフィン自己同型全体のなす群をアフィン部分群とよび $\mathrm{Aff}_n(k)$ とおく．またアフィン自己同型と基本自己同型全体で生成される $\mathrm{GA}_n(k)$ の部分群を順部分群といい $\mathrm{T}_n(k)$ とおく．$\mathrm{Aff}_n(k)$ は $\mathrm{T}_n(k)$ に含まれる．

順部分群の生成系に関する以下の Derksen [1] の定理がある．

定理 1 (Derksen)　体 k の標数が 0 のとき $\mathrm{T}_n(k) = \langle \mathrm{Aff}_n(k), (x_1 + x_2^2, x_2, \dots, x_n) \rangle$.

しかし一方で Maubach-Willems [2] は $k = \mathbb{F}_2$ のとき Derksen の定理が成り立たないことを証明し，さらに q を素数べきとしたとき $\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_q) = \langle \mathrm{Aff}_n(\mathbb{F}_q), \mathcal{E} \rangle$ となる $\mathrm{GA}_n(k)$ の有限部分集合 $\mathcal{E}$ は存在していないと予想している．このように Derksen の定理を体 k の標数が正の場合に考えるのは難しい．そこで安定ダークセン自己同型というものを定義する．その前にまずダークセン自己同型というものを定義する．

定義 2　$\mathrm{T}_n(k)$ の元 F がダークセン自己同型であるとは $\mathrm{T}_n(k) = \langle \mathrm{Aff}_n(k), F \rangle$ が成り立つときいう．

$\mathrm{T}_n(k)$ の元 F を $\mathrm{T}_{n+1}(k)$ の元 (F, x_{n+1}) と同一視することで $\mathrm{T}_n(k) \subset \mathrm{T}_{n+1}(k)$ とみなす．

定義 3　$\mathrm{T}_n(k)$ の元 F が安定ダークセン自己同型であるとは $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1}) \rangle$ が $\mathrm{T}_n(k)$ を含むときいう．

体 k の標数が正のときはダークセン自己同型が存在するか不明なので本修士論文ではどのような基本自己同型が安定ダークセン自己同型となるかについて調べた．その結果以下の定理が分かった．

定理 4 $n \geq 3$ で任意の体 k，任意の整数 $3 \leq l \leq n$ に対して基本自己同型

$$(x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \ldots, x_n)$$

は安定ダークセン自己同型である．

定理 5 $n \geq 3$ で体 k の標数が 2 でないとき基本自己同型 $(x_1 + x_2^2, x_2, \ldots, x_n)$ は安定ダークセン自己同型である．

そして最後に首都大学東京の黒田茂氏から定理 4，定理 5 を次のように一般化できることを指摘された．以下 k の標数を正とし p とおく．

定義 6 非負整数 $t_2, \ldots, t_n$ に対して単項式 $x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$ が good monomial であるとは次の条件 (1), (2) のうちいずれかを満たすときいう．
(1) ある i が存在して $t_i \not\equiv 0, 1 \pmod p$ を満たす．
(2) ある異なる i, j が存在して $t_i, t_j \equiv 1 \pmod p$ を満たす．

定理 7 $k[x_2 \ldots, x_n]$ の元 f が任意の i に対して $\deg_{x_i} f \leq \#k - 2$ を満たすとする．そのとき $(x_1 + f, x_2, \ldots, x_n)$ が安定ダークセン自己同型であることは f に少なくとも一つの good monomial が現れることの必要十分条件である．

参考文献

[1] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[2] S. Maubach and R. Willems, Polynomial automorphisms over finite fields: mimicking tame maps by the Derksen group, Serdica Math. J. **37** (2011), no. 4, 305-322 (2012).

正標数の体上の多項式環の安定ダークセン自己同型

首都大学東京理工学研究科数理情報科学専攻

黒田基紀

1 序

k を体，体 k の標数を p とする．$k[\boldsymbol{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環とする．$k[\boldsymbol{x}]$ の k 自己同型群 $\mathrm{Aut}_k k[\boldsymbol{x}]$ を $\mathrm{GA}_n(k)$ と表し，$\mathrm{GA}_n(k)$ の任意の元 F を $k[\boldsymbol{x}]^n$ の元 $(F(x_1), \ldots, F(x_n))$ と同一視する．そして合成は $G \circ H = (g_1(h_1, \ldots, h_n), \ldots, g_n(h_1, \ldots, h_n))$ と定義する．ただし $G, H \in \mathrm{GA}_n(k)$ で $G = (g_1, \ldots, g_n)$，$H = (h_1, \ldots, h_n)$ とする．

定義 1.1（アフィン自己同型） $(x_1, \ldots, x_n)A + (b_1, \ldots, b_n)$ の形の自己同型をアフィン自己同型という．ただし $A \in GL_n(k)$，$b_1, \ldots, b_n \in k$ とする．すなわちアフィン自己同型とは各成分が一次式の自己同型である．ここで特に使うアフィン自己同型を以下のように定義する．

$T_{i,a} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$,
$S_{i,b} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, bx_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$,
$R_{i,j} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$
ただし $a \in k, b \in k^{\times}, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ とする．

定義 1.2（アフィン部分群） アフィン自己同型全体のなす群を $\mathrm{Aff}_n(k)$ とおき，アフィン部分群と呼ぶ．

定義 1.3（基本自己同型） $(x_1, \ldots, x_{i-1}, ax_i + f, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ の形の自己同型を基本自己同型という．ただし $i \in \{1, \ldots, n\}$，$a \in k^{\times}, f \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ とする．

定義 1.4（順部分群） $\mathrm{Aff}_n(k)$ と基本自己同型全体で生成される $\mathrm{GA}_n(k)$ の部分群を

$\mathrm{T}_n(k)$ とおき，これを順部分群という．$\mathrm{T}_n(k)$ に属する自己同型を順自己同型という．

順部分群について $n=2$ の場合に次の定理がある．

定理 1.5（Jung-van der Kulk [1]） 任意の体 k に対して $\mathrm{T}_2(k)=\mathrm{GA}_2(k)$

$n=3$ のとき
$f_1 = x_1 - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3$
$f_2 = x_2 + (x_1x_3 + x_2^2)x_3$
$f_3 = x_3$
とし $F=(f_1,f_2,f_3)$ とおくと F は $\mathrm{GA}_n(k)$ の元である．Nagata [5] はこの F が $\mathrm{T}_3(k)$ の元でないと予想した．Shestakov-Umirvaev [6] により $p=0$ のとき F は $\mathrm{T}_3(k)$ の元でないことが証明された．一方，Smith [7] は (F,x_4) が $\mathrm{T}_4(k)$ の元であることを示した．このように，$(F,x_{n+1})\in\mathrm{T}_{n+1}(k)$ を満たす $F\in\mathrm{GA}_n(k)$ を安定順自己同型という．

以下 $n\geq 3$ の場合を考える．基本自己同型 $(x_1+x_2^2, x_2,\ldots,x_n)$ を ε とおく．すると以下の定理が成り立つ．

定理 1.6（Derksen [2]） $n\geq 3$ で $p=0$ のとき，$\mathrm{T}_n(k)=\langle \mathrm{Aff}_n(k),\varepsilon\rangle$.

Derksen の定理を Bodnarchuk [3] が次のように一般化している．$n\geq 3$ で $p=0$ のとき，アフィンでない任意の三角自己同型 F に対して $\mathrm{T}_n(k)=\langle \mathrm{Aff}_n(k),F\rangle$ が成り立つ．三角自己同型とは各 i について第 i 成分が $\alpha_ix_i+h(x_1,\ldots,x_{i-1})$ の形の自己同型である．ただし $\alpha_i\in k^\times, h(x_1,\ldots,x_{i-1})\in k[x_1,\ldots,x_{i-1}]$ とする．

一方で Maubach-Willems [4] は $k=\mathbb{F}_2$ のとき Derksen の定理の類似が成り立たないことを証明している．より一般に，$p>0$ のとき，$\Sigma_{i\geq 0}\Sigma_{j=1}^n c_{i,j}x_j^{p^i}\in k[\boldsymbol{x}]$ の形の式を p 多項式とよぶ．ただし $c_{i,j}$ は k の元である．

$$\mathrm{Add}_n(k) := \{(f_1,\ldots,f_n)\in\mathrm{GA}_n(k)\mid f_i\text{は } p \text{ 多項式 }\}$$

とおくとき Edo-Kuroda [1] により $\mathrm{T}_n(k)\not\subset\langle\mathrm{Aff}_n(k),\mathrm{Add}_n(k)\rangle$ が知られている．$p=2$ のとき ε は $\mathrm{Add}_n(k)$ の元なので $\mathrm{T}_n(k)\neq\langle\mathrm{Aff}_n(k),\varepsilon\rangle$ が分かる．

さらに Maubach-Willems [4] は k を有限体としたとき $\mathrm{T}_n(k)=\langle\mathrm{Aff}_n(k),\mathcal{E}\rangle$ を満たす $\mathrm{GA}_n(k)$ の有限部分集合 $\mathcal{E}$ は存在しないと予想している．

本論文では以下の定義を導入する．

定義 1.7（ダークセン自己同型） $\mathrm{T}_n(k)$ の元 F がダークセン自己同型であるとは $\mathrm{T}_n(k)=\langle\mathrm{Aff}_n(k),F\rangle$ が成り立つときいう．

$F \in \mathrm{T}_n(k)$ ならば，$(F, x_{n+1}) \in \mathrm{T}_{n+1}(k)$ である．そこで F を (F, x_{n+1}) と同一視することで $\mathrm{T}_n(k) \subset \mathrm{T}_{n+1}(k)$ とみなす．

定義 1.8（安定ダークセン自己同型） $\mathrm{T}_n(k)$ の元 F が安定ダークセン自己同型であるとは $\mathrm{T}_n(k) \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1}) \rangle$ が成り立つときいう．

安定ダークセン自己同型は安定順自己同型から着想をえたものである．

現在のところ体 k の標数が正のあ場合にダークセン自己同型が存在するか不明である．本修士論文ではどのような基本自己同型が安定ダークセン自己同型となるか調べた．

2 主結果

以下が本修士論文の主結果である．

定理 2.1 $n \geq 3$ のとき，任意の体 k，任意の $3 \leq l \leq n$ に対して，基本自己同型

$$(x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \ldots, x_n)$$

は安定ダークセン自己同型である．

定理 2.2 $n \geq 3$ で体 k の標数が 2 でないとき，ε は安定ダークセン自己同型である．

以下これらの定理を証明する．

補題 2.3 $\mathrm{GA}_n(k)$ の部分群 $\mathcal{G}$ と $f \in k[x_2, \ldots, x_n]$ は $(x_1 + f, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{G}$ と $\mathrm{Aff}_n(k) \subset \mathcal{G}$ を満たすと仮定する．このとき任意の $2 \leq i < j \leq n$ と $c \in k^\times$ に対し $(x_1 + f_{i,j}, x_2, \ldots, x_n)$ と $(x_1 + cf, x_2, \ldots, x_n)$ は $\mathcal{G}$ の元である．ただし $f_{i,j}$ は f の変数 x_i と x_j を入れ替えたものとする．

（証明） まず $R_{i,j} \circ F \circ R_{i,j}$ を計算すると

$$\begin{aligned} R_{i,j} \circ F \circ R_{i,j} &= R_{i,j} \circ (x_1 + f_{i,j}, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ &= (x_1 + f_{i,j}, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

となる．そして $R_{i,j} \in \mathrm{Aff}_n(k)$ なので $(x_1 + f_{i,j}, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{G}$ である．

次に $S_{1,c} \circ F \circ S_{1,c^{-1}}$ を計算すると

$$\begin{aligned} S_{1,c} \circ F \circ S_{1,c^{-1}} &= S_{1,c} \circ (c^{-1}x_1 + f, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1 + cf, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

となる．よって $S_{1,c}$ と $S_{1,c^{-1}}$ はアフィン自己同型なので $(x_1+cf, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{G}$ である． □

補題 2.4 任意の体 k，任意の $3 \leq l \leq n$ に対して $(x_1+x_2x_3, x_2, \ldots, x_{n+1})$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1+x_2\cdots x_l, x_2, \ldots, x_{n+1})\rangle$ の元である．

（証明） $l=3$ のときは明らかである．以下 $l \geq 4$ とする．$(x_1+x_2\cdots x_l, x_2, \ldots, x_{n+1})$ を F とおく．F の逆写像 F^{-1} は $(x_1-x_2\cdots x_l, x_2, \ldots, x_{n+1})$ である．

ここで $F^{-1}\circ T_{l,-1}\circ F\circ T_{l,1}$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&F^{-1}\circ T_{l,-1}\circ F\circ T_{l,1}\\
&=F^{-1}\circ T_{l,-1}\circ(x_1+x_2\cdots x_{l-1}(x_l+1), x_2, \ldots, x_{l-1}, x_l+1, x_{l+1}, \ldots, x_{n+1})\\
&=F^{-1}\circ(x_1+x_2\cdots x_{l-1}x_l+x_2\cdots x_{l-1}, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{n+1})\\
&=(x_1+x_2\cdots x_{l-1}, x_2, \ldots, x_{n+1})
\end{aligned}
$$

となる．$F, F^{-1}, T_{l,-1}, T_{l,1}$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), F\rangle$ の元なので，$(x_1+x_2\cdots x_{l-1}, x_2, \ldots, x_{n+1})$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), F\rangle$ の元である．次に同じ操作を F を $(x_1+x_2\cdots x_{l-1}, x_2, \ldots, x_{n+1})$ とし，$T_{l,-1}, T_{l,1}$ を $T_{l-1,-1}, T_{l-1,1}$ としてすると，$(x_1+x_2\cdots x_{l-2}, x_2, \ldots, x_{n+1})$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), F\rangle$ の元であることが分かる．同様にこの操作を繰り返すと，$(x_1+x_2x_3, x_2, \ldots, x_{n+1})$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), F\rangle$ の元であることが分かる． □

補題 2.5 $F \in \mathrm{T}_n(k)$ とする．任意の非負整数 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に対して

$$(x_1+x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1})\rangle$$

ならば F は安定ダークセン自己同型である．

（証明） 補題 2.3 より任意の非負整数 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ と $k^\times$ の任意の元 a に対して

$$(x_1+ax_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1})\rangle$$

である．つまり任意の単項式 $m \in k[x_2, \ldots, x_n]$ に対して $(x_1+m, x_2, \ldots, x_{n+1})$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1})\rangle$ の元である．任意の多項式 $f \in k[x_2, \ldots, x_n]$ に対してある非負整数 d と $k[x_2, \ldots, x_n]$ のある単項式 $m_1, \ldots, m_d$ が存在して $f=\sum_{i=1}^d m_i$ を満たす．そして $(x_1+f, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1+m_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\circ\cdots\circ(x_1+m_d, x_2, \ldots, x_{n+1})$ である．よって $(x_1+f, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1})\rangle$ である．さらにアフィン自己同型と $(x_1+f, x_2, \ldots, x_{n+1})$ を合成して変数を入れ替えられるので $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1})\rangle$

は n 変数の基本自己同型全体の集合を含む．よって $\mathrm{T}_n(k) \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1}) \rangle$ □

(定理 2.1 の証明) 補題 2.5 より任意の非負整数 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ に対して，

$$(x_1 + x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle$$

を示せばよい．まず任意の非負整数 α_2 に対して，

$$(x_1 + x_2^{\alpha_2}, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle \tag{1}$$

であることを α_2 に関する帰納法で示す．$\alpha_2 \leq 1$ のときは $(x_1 + x_2^{\alpha_2}, x_2, \dots, x_{n+1})$ はアフィン自己同型となるので成り立つ．$\alpha_2 = m$ のとき成り立つと仮定し，$G = (x_1 + x_2^m, x_2, \dots, x_{n+1})$ とおく．

$$G' := R_{1,n+1} \circ G \circ R_{1,n+1} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + x_2^m)$$

となる．このとき $(G')^{-1} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - x_2^m)$ である．さらに帰納法の仮定より $G', (G')^{-1} \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle$ である．基本自己同型 $H := (x_1 + x_2 x_{n+1}, x_2, \dots, x_{n+1})$ の逆写像は $H^{-1} = (x_1 - x_2 x_{n+1}, x_2, \dots, x_{n+1})$ であり，補題 2.3 と補題 2.4 より H, H^{-1} は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle$ の元である．

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ (G')^{-1} \circ H \circ G' &= H^{-1} \circ (G')^{-1} \circ (x_1 + x_2(x_{n+1} + x_2^m), x_2, \dots, x_n, x_{n+1} + x_2^m) \\ &= H^{-1} \circ (x_1 + x_2 x_{n+1} + x_2^{m+1}, x_2, , \dots, x_{n+1}) \\ &= (x_1 + x_2^{m+1}, x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

である．$G', (G')^{-1}, H, H^{-1}$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle$ の元だから $(x_1 + x_2^{m+1}, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle$ が成り立つ．以上で (1) が示された．

次に任意の非負整数 α_2, α_3 に対して，

$$(x_1 + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle \tag{2}$$

であることを α_3 に関する帰納法で示す．$\alpha_3 = 0$ のときは上より $(x_1 + x_2^{\alpha_2}, x_2, \dots, x_{n+1})$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2 \cdots x_l, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle$ の元なので成り立つ．$m \geq 1$ とし，$\alpha_3 = m$ のとき成り立つとする．$G = (x_1 + x_2^{\alpha_2} x_3^m, x_2, \dots, x_{n+1})$ とし，$H = (x_1 + x_3 x_{n+1}, x_2, \dots, x_{n+1})$ とすると上と同様にして (2) が示される．これは $\alpha_4, \dots, \alpha_n$ についても同様にできるので示された． □

(定理 2.2 の証明)　まず

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2 - x_3, x_3, \dots, x_n) \circ \varepsilon \circ (x_1, x_2 + x_3, x_3, \dots, x_n)\\ =&(x_1, x_2 - x_3, x_3, \dots, x_n) \circ (x_1 + (x_2 + x_3)^2, x_2 + x_3, x_3, \dots, x_n)\\ =&(x_1 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

であることに注意する．$(x_1, x_2 + x_3, x_3, \dots, x_n), \varepsilon, (x_1, x_2 - x_3, x_3, \dots, x_n)$ は $\langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle$ の元なので $(x_1 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2, x_2, \dots, x_n)) \in \langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle$ となる．そして ε の逆写像は $\varepsilon^{-1} = (x_1 - x_2^2, x_2, \dots, x_n)$ であり，$\varepsilon^{-1} \in \langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle$ なので補題 2.3 より $(x_1 - x_3^2, x_2, \dots, x_n) \in \langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle$ である．

計算すると，

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2, x_2, \dots, x_n) \circ \varepsilon^{-1} \circ (x_1 - x_3^2, x_2, \dots, x_n)\\ =&(x_1 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2, x_2, \dots, x_n) \circ (x_1 - x_2^2 - x_3^2, x_2, \dots, x_n)\\ =&(x_1 + 2x_2x_3, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

となる．したがって $(x_1 + 2x_2x_3, x_2, \dots, x_n) \in \langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle$ である．k の標数が 2 でないので 2 は可逆元である．よって補題 2.3 より $(x_1 + x_2x_3, x_2, \dots, x_n) \in \langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle$ となる．よって $\langle \mathrm{Aff}_n(k), (x_1 + x_2x_3, x_2, \dots, x_n) \rangle \subset \langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle$ となる．$n+1$ 変数でも同様のことがいえるので $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2x_3, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (\varepsilon, x_{n+1}) \rangle$ となる．定理 2.1 より $\mathrm{T}_n(k) \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2x_3, x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle$ なので $\mathrm{T}_n(k)$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (\varepsilon, x_{n+1}) \rangle$ に含まれる．ゆえに，ε は安定ダークセン自己同型である．□

3　注意 (参考)

首都大学東京の黒田茂氏から定理 2.1，定理 2.2 を次のように一般化できることを指摘された．$p > 0$ とする．まず good monomial という概念を定義する．

定義 3.1　非負整数 $t_2, \dots, t_n$ に対して単項式 $x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$ が good monomial であるとは次の条件 (1), (2) のうちいずれかが成り立つときにいう．
(1) ある i が存在して $t_i \not\equiv 0, 1 \pmod p$ を満たす．
(2) ある異なる i, j が存在して $t_i, t_j \equiv 1 \pmod p$ を満たす．
ただし $p = 2$ のとき条件 (1) は起きない．

定理 3.2　$k[x_2 \dots, x_n]$ の元 f が任意の i に対して $\deg_{x_i} f \leq \#k - 2$ を満たすとする．

このとき $(x_1+f, x_2, \ldots, x_n)$ が安定ダークセン自己同型であるための必要十分条件は f に少なくとも一つの good monomial が現れることである．

以下，定理 3.2 の証明を紹介する．

補題 3.3 $k[x]$ の任意の元 $f(x)$ に対して，ある非負整数 d と k の元 $u_0, \ldots, u_d$ が存在して $f(x) = u_0 + u_1 x + \cdots + u_d x^d$ とかける．このとき $\#k \geq d+1$ ならば任意の i に対して $u_i x^i$ は $f(\alpha_0 x), \ldots, f(\alpha_d x)$ の k 線型結合の形にかける．ただし $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ は相異なる k の元である．

（証明） $f(x)$ の x に $\alpha_0 x, \ldots, \alpha_d x$ をそれぞれ代入すると，

$$\begin{aligned} f(\alpha_0 x) &= u_0 + u_1\alpha_0 x + \cdots + u_d\alpha_0^d x^d \\ &\vdots \\ f(\alpha_d x) &= u_0 + u_1\alpha_d x + \cdots + u_d\alpha_d^d x^d \text{となる．} \end{aligned}$$

上の等式を行列で表すと，$\begin{pmatrix} f(\alpha_0 x) \\ \vdots \\ f(\alpha_d x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \ldots & \alpha_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 x \\ \vdots \\ u_d x^d \end{pmatrix}$ となる．

$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \ldots & \alpha_d^d \end{pmatrix}$ の行列式はファンデルモンドの行列式なので

$$\det A = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (\alpha_j - \alpha_i)$$

である．$\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ は相異なるので $\det A \neq 0$ となる．よって A^{-1} が存在する．上の等式の両辺に左から A^{-1} をかけると，$A^{-1}\begin{pmatrix} f(\alpha_0 x) \\ \vdots \\ f(\alpha_d x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_d x^d \end{pmatrix}$ となる．A^{-1} の各成分は k の元なので，上の等式の各成分を比較し，補題の主張が得られる． □

補題 3.4 d を非負整数として，$k[x_1, \ldots, x_n]$ の元 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は任意の i に対して $\deg_{x_i} f \leq d$ を満たすとする．このとき $\#k \geq d+1$ ならば $f(x_1, \ldots, x_n)$ に現れる任意の単項式は $f(\xi_1 x_1, \ldots, \xi_n x_n)$ $(\xi_1, \ldots, \xi_n \in k)$ の k 線型結合の形にかける．

（証明） n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らかである．$n \geq 1$ とする．f は $k[x_2,\ldots,x_n]$ の元 $f_0(x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_d(x_2,\ldots,x_n)$ を用いて $f = \sum_{i=o}^{d} f_i(x_2,\ldots,x_n)x_1^i$ とかける．f に現れる任意の単項式を m とすると，m はある $f_j(x_2,\ldots,x_n)x_1^j$ に現れる．ここで$\#k \geq d+1$ なので補題 3.3 より $f_j(x_2,\ldots,x_n)x_1^j = \sum_{l=0}^{d} a_l f(\alpha_l x_1, x_2,\ldots,x_n)$ とかける，ただし $a_0,\ldots,a_d \in k$, $\alpha_0,\ldots,\alpha_d$ は相異なる k の元とする．ここで f_j に現れる単項式 m' で $m = m'x_1^j$ を満たすものが存在する．そして m' は $k[x_2.\ldots,x_n]$ の元なので，帰納法の仮定より

$$m' = \sum_{\beta\in k^{n-1}} b_\beta f_j(\beta_2 x_2,\ldots,\beta_n x_n)$$

とかける，ただし $\beta = (\beta_2,\ldots,\beta_n), b_\beta \in k$ とする．すると $m = m'x_1^j$ より $m = \sum_{\beta\in k^{n-1}} b_\beta f_j(\beta_2 x_2,\ldots,\beta_n x_n)x_1^j$ となる．さらに $f_j(x_2,\ldots,x_n)x_1^j = \sum_{l=0}^{d} a_l f(\alpha_l x_1, x_2,\ldots,x_n)$ より $m = \sum_{\beta\in k^{n-1}}\sum_{l=0}^{d} a_l b_\beta f(\alpha_l x_1,\beta_2 x_2,\ldots,\beta_n x_n)$ となり補題は示された． □

補題 3.5 非負整数 $t_2,\ldots,t_n$ に対して単項式 $x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ が good monomial であるとする．このとき条件 (1) の場合は多項式 $(x_2+1)^{t_2}\cdots(x_n+1)^{t_n}$ に単項式 $\frac{1}{2}t_i(t_i-1)x_i^2$ が現れる．(2) の場合は多項式 $(x_2+1)^{t_2}\cdots(x_n+1)^{t_n}$ に単項式 $x_i x_j$ が現れる．ただし i,j は定義 3.1 の i,j とする．

（証明） $x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ が (1) を満たすとき $(x_2+1)^{t_2}\cdots(x_n+1)^{t_n}$ を展開すると単項式 ${}_{t_i}\mathrm{C}_2 x_i^2$ が現れる．${}_{t_i}\mathrm{C}_2 = 0$ とすると，$t_i(t_i-1) \equiv 0 \pmod p$ となり $t_i \equiv 0,1 \pmod p$ となるので条件 (1) に矛盾する．よって ${}_{t_i}\mathrm{C}_2 x_i \neq 0$ となる．なので $(x_2+1)^{t_2}\cdots(x_n+1)^{t_n}$ には 0 でない単項式 ${}_{t_i}\mathrm{C}_2 x_i^2$ が現れる．次に (2) を満たすとき $(x_2+1)^{t_2}\cdots(x_n+1)^{t_n}$ を展開すると単項式 ${}_{t_i}\mathrm{C}_1 x_i {}_{t_j}\mathrm{C}_1 x_j = t_i t_j x_i x_j$ が現れる，ただし i,j は相異なる．(2) より $t_i t_j = 1$ となるので $(x_2+1)^{t_2}\cdots(x_n+1)^{t_n}$ には単項式 $x_i x_j$ が現れる． □

まず，定理 3.2 の必要性の部分を示す．$m \in k[x_2,\ldots,x_n]$ を f に現れる good monomial とし，$m = x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ と表す．ただし $t_2,\ldots,t_n$ は非負整数とする．$F := (x_1+f, x_2,\ldots,x_n), \mathcal{T} := \langle \mathrm{Aff}_n(k), F\rangle$ とおく．補題 3.4 より $m = \sum_{\xi\in k^{n-1}} \alpha_\xi f(\xi_2 x_2,\ldots,\xi_n x_n)$ とかける，ただし各 $\xi = (\xi_2,\ldots,\xi_n)$ に対し α_ξ は k の元であるとする．各 i に対して $\deg_{x_i} f \leq \#k-2$ なので任意の ξ_j たちは 0 でないようにとれる．$\alpha_\xi \neq 0$ となる ξ に対して $(\alpha_\xi x_1, \xi_2^{-1}x_2,\ldots,\xi_n^{-1}x_n)\circ F\circ(\alpha_\xi^{-1}x_1,\xi_2 x_2,\ldots,\xi_n x_n)$

を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_\xi x_1, \xi_2^{-1}x_2, \ldots, \xi_n^{-1}x_n) \circ F \circ (\alpha_\xi^{-1}x_1, \xi_2 x_2, \ldots, \xi_n x_n)\\
&= (\alpha_\xi x_1, \xi_2^{-1}x_2, \ldots, \xi_n^{-1}x_n) \circ (\alpha_\xi^{-1}x_1 + f(\xi_2 x_2, \ldots, \xi_n x_n), \xi_2 x_2, \ldots, \xi_n x_n)\\
&= (x_1 + \alpha_\xi f(\xi_2 x_2, \ldots, \xi_n x_n), x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

となる．そしてこれを F_ξ とおく．$(\alpha_\xi x_1, \xi_2^{-1}x_2, \ldots, \xi_n^{-1}x_n), F, (\alpha_\xi^{-1}x_1, \xi_2 x_2, \ldots, \xi_n x_n)$ は $\mathcal{T}$ の元なので $F_\xi \in \mathcal{T}$ となる．

ここで $\prod_{\xi\in k^{n-1}} F_\xi$ を計算する，ただし F_ξ の形より合成に関して可換である．

$$
\begin{aligned}
&\prod_{\xi\in k^{n-1}} F_\xi\\
&= (x_1 + \sum_{\xi\in k^{n-1}} \alpha_\xi f(\xi_2 x_2, \ldots, \xi_n x_n), x_2, \ldots, x_n)\\
&= (x_1 + m, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

となる．そして $(x_1 + m, x_2, \ldots, x_n)$ を G とおく．すると $F_\xi \in \mathcal{T}$ より $G \in \mathcal{T}$ である．

そして $(x_1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1) \circ G \circ (x_1, x_2 + 1, \ldots, x_n + 1)$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&(x_1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1) \circ G \circ (x_1, x_2 + 1, \ldots, x_n + 1)\\
&= (x_1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1) \circ (x_1 + (x_2+1)^{t_2} \cdots (x_n+1)^{t_n}, x_2 + 1, \ldots, x_n + 1)\\
&= (x_1 + (x_2+1)^{t_2} \cdots (x_n+1)^{t_n}, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

となる．そしてこれを G' とおく．$(x_1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1), G, (x_1, x_2 + 1, \ldots, x_n + 1)$ は $\mathcal{T}$ の元より $G' \in \mathcal{T}$ となる．

ここで $p \geq 3$ とする．そして m が good monomial である条件 (1), (2) で場合分けをする．まず m が条件 (1) を満たす場合を考える．条件 (1) を満たすので補題 3.5 よりある i が存在して $(x_2+1)^{t_2} \cdots (x_n+1)^{t_n}$ に単項式 $\frac{1}{2}t_i(t_i - 1)x_i^2$ が現れる．上で $G \in \mathcal{T}$ を示したときの F を G' として，m を $\frac{1}{2}t_i(t_i-1)x_i^2$ として同様にすると，$(x_1 + \frac{1}{2}t_i(t_i-1)x_i^2, x_2, \ldots, x_n) \in \langle \mathrm{Aff}_n(k), G' \rangle$ となる．$G' \in \mathcal{T}$ より $\langle \mathrm{Aff}_n(k), G' \rangle \subset \mathcal{T}$ なので $(x_1 + \frac{1}{2}t_i(t_i-1)x_i^2, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}$ となる．$\frac{1}{2}t_i(t_i-1) \neq 0$ なので補題 2.3 より定数倍できてさらに変数を入れ替かえると $\varepsilon = (x_1 + x_2^2, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}$ となる．よって $\langle \mathrm{Aff}_n(k), \varepsilon \rangle \subset \mathcal{T}$ となる．さらに定理 2.2 より $\mathrm{T}_n(k) \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (\varepsilon, x_{n+1}) \rangle$ なので $\mathrm{T}_n(k) \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1}) \rangle$

次に m が条件 (2) を満たす場合を考える．条件 (2) を満たすので補題 3.5 より $(x_2 + 1)^{t_2} \cdots (x_n + 1)^{t_n}$ に単項式 $x_i x_j$ が現れる．そして (1) の場合と同様にすると $(x_1 +$

$x_ix_j, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}$ となる．よって補題 2.3 より $(x_1 + x_2x_3, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}$ である．よって $\langle \mathrm{Aff}_n(k), (x_1 + x_2x_3, \ldots, x_n)\rangle \subset \mathcal{T}$ となる．さらに定理 2.2 より $\mathrm{T}_n(k)$ は $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + x_2x_3, \ldots, x_{n+1})\rangle$ に含まれるので $\mathrm{T}_n(k) \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (F, x_{n+1})\rangle$

最後に $p = 2$ の場合は条件 (2) の場合だけ起きるが $p \geq 3$ の場合の証明と同様に示すことができる．以上で定理 3.2 の必要性の部分が示された．

補題 3.6 非負整数 $t_2, \ldots, t_n$ に対して単項式 $x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$ が good monomial でないことと次の条件 (3), (4) のうちいずれかを満たすことは同値である．
(3) 任意の i に対して $t_i \equiv 0 \pmod p$ となる．
(4) ある i が存在して $t_i \equiv 1 \pmod p$ を満たし，かつ i と異なる任意の j に対して $t_j \equiv 0 \pmod p$ となる．

（証明） $x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$ が good monomial でないとは任意の i に対して $t_i \equiv 0, 1 \pmod p$ かつ $t_i \equiv 1 \pmod p$ となる i は高々 1 個となることである．これは $t_i \equiv 1 \pmod p$ となる i が 0 個と 1 個の場合の二つに分けられる．よって 0 個の場合は条件 (3)，1 個の場合は条件 (4) となる．なので good monomial でないことは (3), (4) の条件のうちいずれかを満たすことと同値になる． □

定義 3.7 $\mathrm{GA}_{n+1}(k)$ の元 $(x_1 + x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}, x_2, \ldots x_{n+1})$ が bad elementary 自己同型であるとは $x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$ が good monomial でないときにいう．$\mathcal{B}$ を bad elementary 自己同型全体の集合とする．さらに $k[x_1 \ldots, x_{n+1}]$ の元で任意の相異なる i, j に対して単項式 x_ix_j が現れない多項式全体の集合を $\mathcal{S}$ とする．$\mathcal{S}$ が $k[x_1^p, \ldots, x_{n+1}^p]$ を含むことは明らかである．

補題 3.8 非負整数 $t_2, \ldots, t_n$ が補題 3.6 の条件 (3), (4) のいずれかを満たすとする．このとき $\mathcal{S}$ の任意の $n-1$ 個の元 $f_2, \ldots, f_n$ に対して $f_2^{t_2} \cdots f_n^{t_n}$ は $\mathcal{S}$ の元になる．

（証明） まず (3) を満たす場合考える．$f_2^{t_2} \cdots f_n^{t_n}$ は $k[x_1^p, \ldots, x_{n+1}^p]$ に属するので $\mathcal{S}$ に属する．次に (4) を満たす場合を考える．(4) よりある非負整数 t_i' が存在して $t_i = t_i'p + 1$ を満たす．さらに i と異なる任意の j に対して非負整数 t_j' が存在して $t_j = t_j'p$ を満たす．そうすると $f_2^{t_2} \cdots f_n^{t_n} = f_i(f_2^{t_2'} \cdots f_n^{t_n'})^p$ となる．ここで $(f_2^{t_2'} \cdots f_n^{t_n'})^p$ は $k[x_2^p, \ldots, x_n^p]$ の元なので $(f_2^{t_2'} \cdots f_n^{t_n'})^p$ に x_lx_m や x_l の形の単項式が現れない．ただし l と m は相異なるとする．そして $f_i \in \mathcal{S}$ なので f_i に x_jx_l の形の単項式が現れない．よって $f_2^{t_2} \cdots f_n^{t_n} \in \mathcal{S}$. □

補題 3.9 $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \mathcal{B} \rangle$ は $\mathcal{S}^{n+1}$ の部分集合である．

（証明） $\mathrm{Aff}_{n+1}(k)$ の各項は一次式なので $\mathrm{Aff}_{n+1}(k)$ は $\mathcal{S}^{n+1}$ に含まれる．bad elementary 自己同型の条件 (3),(4) より $\mathcal{B}$ は $\mathcal{S}^{n+1}$ に含まれる．そして $\mathcal{S}$ の定義より $\mathcal{S}$ は加法と定数倍で閉じているので，$\mathcal{S}^{n+1}$ の任意の元 σ と $\mathrm{Aff}_{n+1}(k)$ の任意の元 α に対して $\alpha\circ\sigma$ は $\mathcal{S}^{n+1}$ の元である．そして補題 3.8 より $\mathcal{S}^{n+1}$ の任意の元 σ と $\mathcal{B}$ の任意の元 β に対して $\beta\circ\sigma$ は $\mathcal{S}^{n+1}$ の元である．$\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \mathcal{B} \rangle$ の任意の元は $\alpha_1\circ\beta_1\circ\alpha_2\circ\beta_2\circ\cdots\circ\alpha_r\circ\beta_r\circ\alpha_{r+1}$ とかける．ただし r は非負整数で $\alpha_i \in \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \beta_i \in \mathcal{B}$ とする．$\alpha_{r+1} \in \mathcal{S}^{n+1}, \beta_r \in \mathcal{B}$ より $\beta_r \circ \alpha_{r+1} \in \mathcal{S}^{n+1}$ となる．さらに $\alpha_r \in \mathrm{Aff}_{n+1}(k)$ より $\alpha_r \circ \beta_r \circ \alpha_{r+1} \in \mathcal{S}^{n+1}$ となる．この操作を繰り返すと $\alpha_1 \circ \beta_1 \circ \alpha_2 \circ \beta_2 \circ \cdots \circ \alpha_r \circ \beta_r \circ \alpha_{r+1} \in \mathcal{S}^{n+1}$ となる．よって $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \mathcal{B} \rangle$ は $\mathcal{S}^{n+1}$ に含まれる． □

最後に，定理 3.2 の十分性の部分を背理法で示す．f に good monomial が現れないと仮定する．$f = m_1 + \cdots + m_l$ と表す．ただし，$m_1, \ldots, m_l$ は単項式とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
&(x_1 + m_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \circ (x_1 + m_2, x_2, \ldots, x_{n+1}) \circ \cdots \circ (x_1 + m_l, x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= (x_1 + \sum_{i=1}^{n} m_i, x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= (x_1 + f, x_2, \ldots, x_{n+1})
\end{aligned}
$$

となる．よって
$\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + f, x_2, \ldots, x_{n+1}) \rangle$
$\subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \{(x_1 + m_i, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid i = 1, \ldots, l\} \rangle$
となる．$\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \{(x_1 + m_i, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid i = 1, \ldots, l\} \rangle \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \mathcal{B} \rangle$ なので $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + f, x_2, \ldots, x_{n+1}) \rangle \subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \mathcal{B} \rangle$ となる．さらに補題 3.9 より $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), \mathcal{B} \rangle \subset \mathcal{S}^{n+1}$ なので $\langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + f, x_2, \ldots, x_{n+1}) \rangle \subset \mathcal{S}^{n+1}$ となる．一方で $\mathrm{T}_n(k) \not\subset \mathcal{S}^{n+1}$ なので $\mathrm{T}_n(k) \not\subset \langle \mathrm{Aff}_{n+1}(k), (x_1 + f, x_2, \ldots, x_{n+1}) \rangle$ となる．しかしこれは $(x_1 + f, x_2, \ldots, x_n)$ が安定ダークセン自己同型であることに矛盾する．よって f に少なくとも一つの good monomial が現れる．以上で定理 3.2 の十分性の部分が示された．そしてこの証明より定理 3.2 の体 k の元の個数に関する仮定がない場合でも十分性は成り立つ．

4 今後の課題

定理 3.2 において f の次数に関する条件が満たされない場合に f に good monomial が現れても，$(x_1+f, x_2, \ldots, x_n)$ が安定ダークセン自己同型かどうかは一般に分からない．例えば $k=\mathbb{F}_3$ の場合に $(x_1+x_2^5, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F}_3)$ が安定ダークセン自己同型か不明である．ただし $f=x_2^3, x_2^4$ の場合は x_2^3, x_2^4 が good monomial ではないので定理 3.2 の十分性の部分より $(x_1+f, x_2, \ldots, x_n)$ は安定ダークセン自己同型ではないことが分かる．

参考文献

[1] Y. Bodnarchuk, On generators of the tame invertible polynomial maps group, Internat. J. Algebra Comput. **15** (2005), no. 5–6, 851–867

[2] E. Edo and S. Kuroda, Generalisations of the tame automorphisms over a domain of positive characteristic, Transform. Groups **20** (2015), no. 1, 65–81.

[3] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics Vol. 190, Birkhdäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[4] S. Maubach and R. Willems, Polynomial automorphisms over finite fields: mimicking tame maps by the Derksen group, Serdica Math. J. **37** (2011), no. 4, 305–322 (2012).

[5] M. Nagata, On Automorphism Group of $k[x,y]$, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, Vol. 5, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972

[6] I. Shestakov and U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 197–227.

[7] M. K. Smith, Stably tame automorphisms, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 209–212.