

# カオス展開法を用いた金融派生証券の価格付け

首都大学東京社会科学部研究科博士後期課程経営学専攻

舟橋 秀治<sup>1</sup>

平成27年1月29日

<sup>1</sup>E-mail: fr021768@yahoo.co.jp

## 概要

本稿では、解析解の存在しない複雑な金融派生証券の価格付けに対して威力を発揮する新しい方法として、Wiener-Itôカオス展開を応用した近似手法を導入する。

本手法は、原資産価格が連続Markov過程に従う場合に、派生商品の近似価格を明示的に評価することを可能とする一般的な手法である。

本近似の精度は非常に高く、他の先行研究では正確に近似することができなかった、満期が長くボラティリティが高い場合においても近似の精度を維持することが可能となった。また、近似解の計算速度は十分に速く、実務的にも極めて有用であることを強調しておく。

数値検証では、市場に即したデータを用いて多彩な数値実験を行い、実務への応用についても議論する。

**キーワード:** Wiener-Itôカオス展開, Hermite多項式, 逐次代入法, 局所ボラティリティ・モデル, 確率ボラティリティ・モデル, デリバティブ

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序章</b>	<b>3</b>
<b>第2章</b>	<b>Wiener-Itô カオス展開</b>	<b>6</b>
2.1	はじめに . . . . .	6
2.2	局所ボラティリティ・モデル . . . . .	7
2.3	原資産価格の展開 . . . . .	7
2.4	ヨーロッパ・オプションの近似式 . . . . .	12
2.5	数値計算 . . . . .	16
2.5.1	定弾性拡散 (CEV) モデル . . . . .	16
2.5.2	市場へのキャリブレーション . . . . .	18
2.6	小括 . . . . .	19
<b>第3章</b>	<b>確率ボラティリティ・モデルへの応用</b>	<b>24</b>
3.1	確率ボラティリティ・モデル . . . . .	25
3.2	カオス展開法 . . . . .	26
3.3	ヨーロッパ・オプションの近似式 . . . . .	31
3.3.1	密度関数の近似 . . . . .	31
3.3.2	オプション価格 . . . . .	34
3.4	数値計算 . . . . .	34
3.4.1	拡散変換 (DD) モデル . . . . .	35
3.4.2	Schöbel-Zhu モデル . . . . .	35
3.4.3	ハイブリット・モデル . . . . .	37
3.5	小括 . . . . .	39
<b>第4章</b>	<b>複雑な金融派生商品の価格付けへの応用</b>	<b>41</b>
4.1	はじめに . . . . .	41
4.2	多次元資産への拡張 . . . . .	43
4.3	カオス展開法 . . . . .	44
4.4	一般的モデルへの応用 . . . . .	49
4.5	数値計算 . . . . .	51

4.5.1	定弾性拡散 (CEV) モデル	51
4.5.2	キャリブレーション	52
4.6	小括	53
<b>第 5 章</b>	<b>結論</b>	<b>56</b>
<b>付録 A</b>	<b>命題 2.3.1 の証明</b>	<b>57</b>
<b>付録 B</b>	<b>補題 2.3.4 の証明</b>	<b>58</b>
B.1	$I_{1,1}(t)$ の近似	58
B.2	$I_{1,2}(t)$ の近似	59
B.3	$I_{2,1}(t)$ の近似	60
B.4	$I_{m,n}(t)$ , $m+n \geq 4$ の近似	61
<b>付録 C</b>	<b>条件付き期待値の公式</b>	<b>62</b>
<b>付録 D</b>	<b>補題 3.2.1 の証明</b>	<b>64</b>
D.1	$I_{1,1}(t)$ の近似	64
D.2	$I_{1,2}(t)$ の近似	66
D.3	$I_{2,1}(t)$ の近似	68
D.4	$I_{m,n}(t)$ , $m+n \geq 4$ の近似	69
<b>付録 E</b>	<b>補題 4.3.1 の証明</b>	<b>71</b>
E.1	$I_{i:1,1}(t)$ の近似	71
E.2	$I_{i:1,2}(t)$ の近似	72
E.3	$I_{i:2,1}(t)$ の近似	73
<b>付録 F</b>	<b>関数 <math>a_{i,3}^k(T)</math> の定義</b>	<b>74</b>
<b>付録 G</b>	<b>条件付き期待値の公式 2</b>	<b>75</b>

# 第1章 序章

Markov 過程は、数学的に扱い易いことに加え、その豊かな表現性から広く経済学やファイナンスの分野で確率現象のモデル化に用いられてきた。金融派生商品の価格付けにおいても、原資産の従う価格過程を Markov 過程で表現することが多い。

一例として、実務では資産価格を表現するため局所ボラティリティ・モデルや確率ボラティリティ・モデル、あるいはそれらを複合したモデルが広く支持を受けている。しかし、そのような原資産の上に書かれたヨーロッパン・オプション価格の厳密な解析解は、多くの場合存在しない。一方、実務においてモデルのキャリブレーションに用いるに足る十分な流動性を持った商品は、大半の場合はヨーロッパン・オプションに限られる。したがって、ヨーロッパン・オプション価格の効率的算出の可否が原資産のモデル化における実質的なボトルネックとなっている。

本稿では、このギャップを埋めるため近似による解析解を算出する新しい手法を考案する。本手法は、以下に述べる従来の手法に比べて、近似の精度が格段に向上することに加え、計算速度も十分に速い。さらに、ヨーロッパン・オプションに限らず、一般の金融派生商品の価格付けに対しても応用することが可能である。

近年、満期の長い商品が店頭デリバティブ市場で活発に取引されるようになった。同時に、株式、為替、金利等のオプション市場では、ヨーロッパン・オプションのボラティリティにスキューやスマイルと呼ばれる構造が観察される。しかし、従来の Black-Scholes モデルが仮定する拡散過程では、市場のスキューやスマイルを再現することができない。キャリブレーションの対象となるオプション市場のスキューやスマイルを取り込むことは、広範囲に渡る満期や行使価格からなるポジションを持つ実務家にとって、非常に重要な問題であるため、複雑なモデルを使う必要性が増してきているのである。

既に多くの先行研究が、解析解のない金融派生商品の価格付けに挑戦している。例えば、数値的に偏微分方程式を解く有限差分法やモンテカルロ法を用いて解を求める手法が広く提案されている。しかし、それらの手法を実務に応用した場合、モデルのキャリブレーションに伴う計算時間が膨大に膨れ上がるため現実的でない。このような状況の下では、近似により解析解を算出する手法が唯一の解決策であると考えられる。

Fouque et al. (2000) は、確率ボラティリティ・モデルに対して特異摂動の手法を用いて、ボラティリティの確率過程が従う不変分布の周りで偏微分方程式を漸近的に展開し、オプション価格の近似解を算出した。この手法の理論的根拠は Fouque et al. (2003a) において議

論されている。Hagan et al. (2002) は、原資産が SABR モデルに従う場合のヨーロッパ・コール・オプションの価格式を特異摂動の手法を用いて導いた。同様に、De Jong (2010) は接合漸近展開法を用いて、特異摂動問題における近似解を導くことで、幾つかの具体的な連続 Markov 型モデル及び確率ボラティリティ・モデルのもとでヨーロッパ・コール・オプションの価格式を算出した。

Kunitomo and Takahashi (1992) は、小分散理論と呼ばれる漸近理論を発展させ、原資産の価格過程が対数正規過程に従う場合におけるアジア型オプション契約の価格付けを行った。Yoshida (1992a) は、Watanabe (1987) が導いた結果を用いて、Kunitomo and Takahashi (1992) の手法に対する数学的な解釈を与えた。また、この漸近展開による近似は、ボラティリティを 0 に近づければ、厳密解に完全に一致することが数学的に示されている。Takahashi (1999) は、小分散理論を用いて、原資産の価格過程が連続 Markov 型確率微分方程式に従う場合におけるヨーロッパ・オプションの価格式を近似解の形で導いた。この分野における、重要な先行研究として Kunitomo and Takahashi (2003)、Takahashi and Takehara (2007) を挙げておく。これらの論文において用いられている近似は、Malliavin 解析における渡辺・吉田理論と呼ばれる分析に基づき正当化されている。

拡散過程における遷移確率や尤度関数を近似する手法も提案されている。Aït-Sahalia は、遷移確率を Hermite 多項式で展開し、原資産が一次元 (Aït-Sahalia (2002)) および多次元 (Aït-Sahalia (2008)) の Markov 型確率過程に従う場合における対数尤度関数の近似解を算出した。Xiu (2011) は、同様の手法を用いて、幾つかの具体的な拡散過程を提示し、その過程の下でのヨーロッパ・オプション価格の近似解を算出した。

実務においても、これらの手法を用いた金融派生商品の価格付けが一般的になってきた。しかし、これらの手法に共通する性質として、ボラティリティが高く満期が長い場合において、近似の精度が格段に悪くなることが知られている。一方で、10 年を超えるような長い満期を持った派生商品は店頭デリバティブ市場では広く普及してきた。さらに、こういったオプションのインプライド・ボラティリティは大概の場合スマイルやスキューを有している。マーケットの包含するスマイルやスキューの影響を適切に価格に織り込むことは、広範囲に渡る行使価格や満期において大きなエクスポージャーを負っている株式、金利、為替といったデリバティブを扱うデスクでは、非常に重要な問題である。これらの要求を満たすためには、より高い精度の近似が要求される。

原資産に従う確率過程のキュムラント (即ちモーメント) が直接算出できる場合には、密度関数をキュムラントの項で展開する Edgeworth 展開や Gram-Charlier 展開が有用である。これらの展開の概要は、対象となる分布の固有関数を扱いやすい分布 (大概が正規分布) の固有関数で近似し、逆フーリエ展開を用いて、もとの分布の密度関数を算出するというものであり、無限級数展開においてこれら二つの展開は完全に一致する。ただし、有限級数展開では各項の配列の違いから二つの展開の精度に違いが生じる。Collin-Dufresne and Goldstein (2002) は、Edgeworth 展開を用いて原資産がアフィン型期間構造モデルに従う場

合における、利付き債の将来価値及びスワップションの算出方法を提案した。Tanaka et al. (2010) は Gram-Charlier 展開を金利派生商品及び信用派生商品の価格付けに応用し、CMS, CMS オプション, CDS 等の近似解を算出した。しかし、一般の連続 Markov 過程ではモーメントの算出が困難な場合が多く、一般にこれらの展開は本稿の問題に応用できない。

上記した先行研究の欠点を克服するため、本稿では新しい手法を提案する。カオス展開法を用いた近似の概要は、以下の通りである。まず、Wiener-Itô カオス展開に基づき原資産価格を Hermite 多項式で展開する。次に、展開された原資産価格に対して逐次代入を繰り返すことで、伊藤の重複積分の形に書き換える。この際、3 次の重複積分迄を残し、残りの項を切り捨てる近似を行う。最後に、近似された原資産価格の従う特性関数を算出し、特性関数の反転公式を用いて密度関数を近似する。

さらに本稿では、近似の精度を検証するため、市場に則したデータを用いて数値例を示す。結果として、短期及び長期のオプションに対して市場で観測されるボラティリティ・スキューを高い精度で復元することに成功した。さらに、先行研究との比較を通して本稿の提案する手法の近似の精度が圧倒的に優れていることを示す。特に従来手法では急速に近似の精度が劣化した満期が長くボラティリティが高いオプションに対しても高い精度が保たれる点を強調したい。

本稿の構成は、以下の通りである。最初に、第2章で金融派生証券の価格付けに対して威力を発揮する新しい方法として、局所ボラティリティ・モデルに Wiener-Itô カオス展開を応用したヨーロピアン・オプションの近似手法を解析的に算出する。次に第3章では、確率ボラティリティ・モデルに、第4章では局所ボラティリティ・モデルに確率金利モデルを付与した場合の Wiener-Itô カオス展開を論じる。第5章では、より複雑な派生商品への応用として、アジア型オプションやバスケット・オプションへの応用を議論する。最後に第5章で本稿をまとめる。

## 第2章 Wiener-Itôカオス展開

### 2.1 はじめに

本章では、原資産価格が局所ボラティリティ・モデルに従うとき、金融派生証券の価格付けに対して威力を発揮する新しい方法として、Wiener-Itôカオス展開を応用したアプローチを提案する<sup>1</sup>。

従来のBlack-Scholesモデルでは、市場のスキューやスマイルを再現できないことは良く知られている。この欠点を補うため、Black-Scholesモデルの改良として、原資産価格のボラティリティを時間あるいは原資産価格を変数とする関数で表現した、局所ボラティリティ・モデルが提案された。

Dupire (1994, 1997) と Derman and Kani (1994) は、リスク中立測度の下で原資産に局所ボラティリティ・モデルを仮定したとき、ヨーロピアン・オプションの価格より導かれる密度関数を用いて、ボラティリティ関数が唯一に決まることを示した。古典的な局所ボラティリティ・モデルとして、Cox and Ross (1976) が発案した定弾性分散 (CEV) モデル、Rubinstein (1983) や Marris (1999) が提唱した拡散変換 (DD) モデルが広く知られている。これらのモデルでは、瞬間ボラティリティ関数を原資産価格の単調減少関数として表現することで、インプライド・ボラティリティの形状にスキューを持たすことを可能にしている。一方、Brigo and Mercurio (2000a, 2000b) が提案した対数混合 (lognormal-mixture) モデルでは、インプライド・ボラティリティのスキューとスマイルを表現することが可能である。Dupireの方法では、実務上、入力となる市場で観測されるインプライド・ボラティリティを補間する必要があるが、CEV, DD, lognormal-mixture モデルではその必要はなく、実務では現在も好んで用いられている。

序章で述べたように、実務家にとってオプション市場への効率的なキャリブレーションは、モデルを選択する上で非常に重要なファクターになっている。しかし、一般の局所ボラティリティ・モデルの上に書かれたヨーロピアン・オプションの価格に対する厳密な解析解は、多くの場合存在しない。このため、ヨーロピアン・オプション価格の効率的算出の可否が、原資産のモデル化における実質的なボトルネックとなっているのが現状である。

本章では、原資産価格が任意の局所ボラティリティ・モデルに従う場合に、カオス展開法を用いて近似的にヨーロピアン・オプション解析解を算出する新しい手法を考案する。

---

<sup>1</sup>本章の内容は、Funahashi (2012) と Funahashi and Kijima (2015) を参照している。

まず準備として第2節で、本章で対象とするモデルを決める。第3節で、(本稿で提案する) 逐次代入法を導入し、原資産価格を伊藤の重複積分の形で展開する。第4節で、展開した原資産価格を用いて、特性関数を算出し、近似した特性関数に対して反転公式を適用することで、原資産価格の確率過程が従う密度関数を近似する。最後に第5節で、算出された密度関数を用いて近似されたヨーロピアン・オプションの価格式を算出する。

本稿を通して、 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  を通常条件を満たしたフィルター付き確率空間とし、確率測度  $\mathbb{Q}$  はリスク中立測度とする。また、 $\mathbb{E}$  をリスク中立測度のもとでの期待値とする。

## 2.2 局所ボラティリティ・モデル

資産価格  $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$  は以下の確率微分方程式 (SDE) に従うと仮定する。

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t. \quad (2.2.1)$$

ただし、 $r(t)$  は無リスク金利を表す時刻  $t$  の確定値関数、 $\sigma(s, t)$  はボラティリティを表す現資産価格と時刻の確定値関数とし、 $\{W_t\}_{t \geq 0}$  は  $\mathbb{Q}$  のもとでの標準ブラウン運動と定義する。また、本章では特に断りがない場合  $\sigma(s, t)$  は  $(s, t)$  に関して正則関数であると仮定する。

伊藤の公式より、

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left[ \int_0^t \left( r(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(S_u, u) \right) du + \int_0^t \sigma(S_u, u) dW_u \right] \\ &= F(0, t) \exp \left[ \int_0^t \sigma(S_u, u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(S_u, u) du \right] \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $F(0, t) = S_0 e^{\int_0^t r(u) du}$  は引き渡し期日  $t$  におけるフォワード価格である。つまり、 $\|g\|_t^2 = \int_0^t g^2(u) du$ 、 $J_t(g) = \int_0^t g(u) dW_u$  とすると

$$S_t = F(0, t) \exp \left[ J_t(\sigma) - \frac{1}{2} \|\sigma\|_t^2 \right] \quad (2.2.2)$$

である。

## 2.3 原資産価格の展開

派生商品の価格は任意のペイオフ  $f(S)$  に関する期待値  $\mathbb{E}[f(S_t)]$  で与えられるため、原資産価格  $S$  の分布を算出する必要がある。本節では、最初に3つの補題をあたえ、それらを用いて原資産の価格過程を伊藤の重複積分を用いて近似する。

$h_n(x)$  を  $n$  次の Hermite 多項式とする. 具体的には,  $h_0(x) = 1$  として

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

である. たとえば,  $h_1(x) = x$ ,  $h_2(x) = x^2 - 1$ ,  $h_3(x) = x^3 - 3x$  を満たす.

Hermite 多項式を用いて, 以下の関係が成り立つ. (証明は, 例えば Di Nunno et al. (2009) の 16 ページを参照.)

**補題 2.3.1.** 任意の  $x \in \mathcal{R}$  と  $\lambda > 0$  に対して,

$$\exp \left[ tx - \frac{(t\sqrt{\lambda})^2}{2} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\lambda})^n}{n!} h_n \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad (2.3.2)$$

が成り立つ<sup>2</sup>.

したがって,  $\sigma \in L_2([0, T])$  において  $t = 1$ ,  $x = J_t(\sigma)$ ,  $\lambda = \|\sigma\|_t^2$  とおくと

$$\exp \left( J_t(\sigma) - \frac{1}{2} \|\sigma\|_t^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\sigma\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_t(\sigma)}{\|\sigma\|_t} \right) \quad (2.3.3)$$

がいえる.

Ito (1951) により次の補題が導かれている.

**補題 2.3.2.**  $\sigma \in L_2([0, T])$  を時刻  $t$  の確定値関数とするとき

$$\frac{\|\sigma\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_t(\sigma)}{\|\sigma\|_t} \right) = \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma(t_1) \sigma(t_2) \cdots \sigma(t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n} \quad (2.3.4)$$

が成り立つ<sup>3</sup>. ただし,  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  は 1 次元の標準ブラウン運動である.

これらの結果を (2.2.2) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{S_t}{F(0, t)} &= \exp \left[ J_t(\sigma) - \frac{1}{2} \|\sigma\|_t^2 \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma(t_1) \sigma(t_2) \cdots \sigma(t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

を得る.

次の命題からあきらかなとおり, (2.3.5) 右辺の被加算項は, ある条件のもと  $n$  が増大すれば急速に 0 に収束する.

<sup>2</sup>この近似の有効性は, Funahashi and Kijima (2015) の 2 節で詳しく議論してる.

<sup>3</sup>この展開は, 幾何ブラウン運動における Wiener-Itô カオス展開に相当している.

**命題 2.3.1.** 伊藤の多重積分

$$I_n = \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma_1(t_1) \sigma_2(t_2) \cdots \sigma_n(t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n}$$

を考える. ボラティリティ  $\sigma_k(t)$  が確定値関数で, 任意の  $t$  に関して  $\bar{\sigma}(t) = \max_k \sigma_k(t) \in L_2([0, t])$  を満たすとき,  $\mathbb{E}[I_n^2] \leq \|\sigma\|_t^{2n}/n!$  が成り立つ.

証明は, 付録 A に載せた.

したがって, もし  $\|\bar{\sigma}\|_t$  が十分に小さいならば,  $n$  次より大きな伊藤の多重積分は ( $L_2$  の意味で) 0 と近似することができる. 本稿では, 3 次以上の伊藤の多重積分を無視する. 次に, 逐次代入法を導入する.

**補題 2.3.3.**  $T > 0$  にたいして, 可測関数  $a(t)$  と  $b(t, x)$  は, 適当な定数  $C$  と  $D$  に対して次の 2 つの条件を満たすとする.

$$|b(t, x)^2| + |b(t, x)| \leq C(1 + |\log x|), \quad x \in \mathcal{R}, t \in [0, T],$$

$$|b(t, x)^2 - b(t, y)^2| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq D \left| \log \left( \frac{x}{y} \right) \right|, \quad x, y \in \mathcal{R}, t \in [0, T].$$

このとき,  $X_t^{(0)} = X_0 e^{\int_0^t a(s) ds}$  とし, 確率変数  $X_t^{(k+1)}$  を逐次的に

$$X_t^{(k+1)} = X_0 \exp \left( \int_0^t a(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(X_s^{(k)}, s) ds + \int_0^t b(X_s^{(k)}, s) dW_s \right) \quad (2.3.6)$$

とし, 確率変数  $X_t$  を

$$X_t = X_0 \exp \left( \int_0^t a(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(X_s, s) ds + \int_0^t b(X_s, s) dW_s \right) \quad (2.3.7)$$

と定義する. このとき, ほとんど確実に  $X_t^{(k)}, k \rightarrow \infty$  は  $X_t$  に収束する.

証明は, SDE (2.2.1) に強解が存在することを示す証明と全く同様なので省略する. (例えば, Øksendal (2000) の第 5 章を参照.)

**注意 2.3.1.** 補題 2.3.3 で  $a(t)$  と  $b(t, x)$  に課された条件は, 実務上は強すぎる場合が多い<sup>4</sup>. 本稿では, 特に断りがない場合, 逐次代入により解が生成されると仮定する.

さて, これらの補題を用いて原資産価格  $S$  を伊藤の多重積分で近似することを考える. 確率微分方程式 (2.2.1) の解が

$$S_t = F(0, t) \exp \left[ \int_0^t \sigma(S_u, u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(S_u, u) du \right] \quad (2.3.8)$$

<sup>4</sup>あくまで十分条件であり, 必要条件ではない.

であると仮定する. また,  $S_t^{(0)} = F(0, t)$  とし,  $S_t^{(m)}$  を (2.3.6) に従い逐次的に

$$\begin{aligned} S_t^{(m+1)} &= F(0, t) \exp \left[ \int_0^t \sigma_m(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_m^2(u) du \right] \\ &= F(0, t) \exp \left[ J_t(\sigma_m) - \frac{1}{2} \|\sigma_m\|_t^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

と定義する. ただし,  $\sigma_m(t) = \sigma(S_t^{(m)}, t)$  である.

ここで,  $S_t^{(m)}, m \rightarrow \infty$  は  $S_t$  に収束すると仮定すると

$$S_t = S_t^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \{S_t^{(m+1)} - S_t^{(m)}\} \quad (2.3.10)$$

がいえる.

一方, (2.3.3) と (2.3.9) より

$$\frac{S_t^{(m+1)}}{F(0, t)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\sigma_m\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_t(\sigma_m)}{\|\sigma_m\|_t} \right)$$

を得る. したがって,

$$I_{m, n}(t) = \frac{1}{n!} \left\{ \|\sigma_m\|_t^n h_n \left( \frac{J_t(\sigma_m)}{\|\sigma_m\|_t} \right) - \|\sigma_{m-1}\|_t^n h_n \left( \frac{J_t(\sigma_{m-1})}{\|\sigma_{m-1}\|_t} \right) \right\} \quad (2.3.11)$$

とおくと, (2.3.10) より

$$S_t = S_t^{(1)} + F(0, t) \sum_{m, n=1}^{\infty} I_{m, n}(t) \quad (2.3.12)$$

が従う.

以下では, 実務的な理由から  $m + n \geq 4$  の項を無視することにする<sup>5</sup>. すなわち,

$$I := \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma_1(t_1) \sigma_2(t_2) \cdots \sigma_n(t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n}$$

として, ボラティリティ  $\sigma_n(t)$  が確定値関数で,  $\|\bar{\sigma}\|_t = \max_n \|\sigma_n\|_t \in L_2([0, t])$  が十分に小さいとき, 命題 2.3.1 より,  $I$  は十分早く収束すると仮定し, (2.3.12) 右辺の 4 次以降の加算項を無視する.

ところで,  $\sigma_0(t) = \sigma(F(0, t), t)$  が確定値関数であることに注意すると, 補題 2.3.2 より

$$\frac{S_t^{(1)}}{F(0, t)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) \cdots \sigma_0(t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n}$$

<sup>5</sup>本近似の有効性は, 5 節で数値計算を通して示される.

であるから,  $S_t^{(1)}$  は

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t^{(1)} = F(0, t) & \left[ 1 + \int_0^t \sigma_0(t_1) dW_{t_1} + \int_0^t \int_0^{t_2} \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) dW_{t_1} dW_{t_2} \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) dW_{t_1} dW_{t_2} dW_{t_3} \right] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

で近似される.

被加算項  $I_{m, n}(t)$  も確定値関数の伊藤の多重積分で近似することを考える. 本章では, テーラー展開をもちいて添字  $m$  の次元を下げることを考える.  $J_t(\sigma_m) = \int_0^t \sigma_m(u) dW_u = \int_0^t \sigma(S_u^{(m)}, u) dW_u$  であるから,

$$\begin{aligned} J_t(\sigma_m) \approx J_t(\sigma_{m-1}) & + \int_0^t \sigma'_{m-1}(u) \{S_u^{(m)} - S_u^{(m-1)}\} dW_u \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma''_{m-1}(u) \{S_u^{(m)} - S_u^{(m-1)}\}^2 dW_u \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

がいえる. 同様に,

$$J_t^2(\sigma_m) \approx J_t^2(\sigma_{m-1}) + 2J_t(\sigma_{m-1}) \int_0^t \sigma'_{m-1}(u) \{S_u^{(m)} - S_u^{(m-1)}\} dW_u \quad (2.3.15)$$

である. ここで, 表記を簡潔にするために

$$\sigma'_m(t) := \partial_x \sigma(x, t)|_{x=S_t^{(m)}}, \quad \sigma''_m(t) := \partial_{xx} \sigma(x, t)|_{x=S_t^{(m)}}$$

とした. また, 定義より

$$S_t^{(m+1)} - S_t^{(m)} = F(0, t) \sum_{n=1}^{\infty} I_{m, n}(t) \approx F(0, t) \sum_{n \leq 3-m} I_{m, n}(t) \quad (2.3.16)$$

である.

さて, (2.3.14) と (2.3.15) を繰り返し適用し高次の多重積分を無視すると, 各  $I_{m, n}(t)$  は次のように近似できる. 次の補題の証明は, 付録 B に載せる.

**補題 2.3.4.** (2.3.11) で, 定義された  $I_{m, n}(t)$  は, 以下のように近似される:

$$\begin{aligned} I_{1, 1}(t) \approx & \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) dW_s \\ & + \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \\ & + \int_0^t \sigma''_0(s) F^2(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma''_0(s) F^2(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0^2(u) du \right) dW_s, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

$$\begin{aligned}
I_{1,2}(t) &\approx \int_0^t \sigma_0(s) \left( \int_0^s \sigma'_0(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \\
&\quad + 2 \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \quad (2.3.18) \\
&\quad + \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0^2(u) du \right) dW_s,
\end{aligned}$$

$$I_{2,1}(t) \approx \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma'_0(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s. \quad (2.3.19)$$

また,  $m+n \geq 4$  のとき,  $I_{m,n}(t) \approx 0$  である.

これまでの結果をまとめると次のことがいえる.

**定理 2.3.1.**  $X_t := \frac{S_t}{F(0, t)} - 1$  とする. このとき,

$$\begin{aligned}
X_t &\approx \int_0^t p_1(s) dW_s + \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) dW_s \\
&\quad + \int_0^t p_3(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \quad (2.3.20) \\
&\quad + \int_0^t p_4(s) \left( \int_0^s p_5(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s
\end{aligned}$$

である. ここで, 確定値関数  $p_k(t)$  は

$$\begin{aligned}
p_1(s) &:= \left\{ \sigma_0(s) + F(0, s) \sigma'_0(s) \left( \int_0^s \sigma_0^2(u) du \right) + \frac{1}{2} F^2(0, s) \sigma_0''(s) \left( \int_0^s \sigma_0^2(u) du \right) \right\}, \\
p_2(s) &:= \sigma_0(s) + F(0, s) \sigma'_0(s), \\
p_3(s) &:= \sigma_0(s) + 3F(0, s) \sigma'_0(s) + F^2(0, s) \sigma_0''(s), \\
p_4(s) &:= \sigma_0(s) + F(0, s) \sigma'_0(s), \\
p_5(s) &:= F(0, s) \sigma'_0(s)
\end{aligned}$$

と定義した.

## 2.4 ヨーロピアン・オプションの近似式

本節では, 原資産価格が確率微分方程式 (2.2.1) に従うときのヨーロピアン・オプションの近似式を導く. 以下では,  $X_t$  の特性関数を導き, 逆関数をもちいて  $X_t$  の分布を近似する.

定理 2.3.1 より,

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \int_0^t p_1(s) dW_s, \\ a_2(t) &= \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) dW_s, \\ a_3(t) &= \int_0^t p_3(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \\ &\quad + \int_0^t p_4(s) \left( \int_0^s p_5(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \end{aligned}$$

とすると

$$X_t \approx a_1(t) + a_2(t) + a_3(t)$$

である. このとき,  $a_1(t)$  は平均 0, 分散  $\Sigma_t := \int_0^t p_1^2(s) ds$  の正規分布に従っている.

一方,  $a_1(t)$  が与えられたときの  $a_j(t)$  の積率は, 直接計算できることが知られている. 証明は, 付録 C に載せた.

$X_t$  の特性関数を  $\Psi(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X_t}]$  と定義する. このとき,

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &\approx \mathbb{E} \left[ e^{i\xi(a_1(t)+a_2(t)+a_3(t))} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{i\xi a_1(t)} \left( 1 + i\xi a_2(t) + i\xi a_3(t) - \frac{1}{2} \xi^2 a_2(t)^2 + R_4 \right) \right] \end{aligned}$$

と近似される. ここで,  $R_4$  は 4 次以上の多重積分である. ところで,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} [e^{i\xi a_1(t)} R_4]| &\leq \mathbb{E} [|e^{i\xi a_1(t)} R_4|] \\ &\leq (\mathbb{E} [|e^{i\xi a_1(t)}|^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} [|R_4|^2])^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbb{E} [|R_4|^2])^{\frac{1}{2}} \approx 0 \end{aligned}$$

であるから,  $\mathbb{E} [e^{i\xi a_1(t)} R_4] \approx 0$  がいえる.<sup>6</sup>

$a_1(t)$  が与えられたときの条件付き期待値は,

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &\approx \mathbb{E}[e^{i\xi a_1(t)}] + i\xi \mathbb{E} [e^{i\xi a_1(t)} \mathbb{E}[a_2(t) | a_1(t)]] \\ &\quad + i\xi \mathbb{E} [e^{i\xi a_1(t)} \mathbb{E}[a_3(t) | a_1(t)]] - \frac{1}{2} \xi^2 \mathbb{E} [e^{i\xi a_1(t)} \mathbb{E}[a_2(t)^2 | a_1(t)]] \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

である. この条件付き期待値は, 付録 C の結果から直接計算できる. 実際, (C.0.1), (C.0.2), (C.0.3) より

$$\mathbb{E}[a_2(t) | a_1(t) = x] = q_1(t) \left( \frac{x^2}{\Sigma_t^2} - \frac{1}{\Sigma_t} \right), \quad (2.4.2)$$

$$\mathbb{E}[a_3(t) | a_1(t) = x] = q_2(t) \left( \frac{x^3}{\Sigma_t^3} - \frac{3x}{\Sigma_t^2} \right), \quad (2.4.3)$$

$$\mathbb{E}[a_2^2(t) | a_1(t) = x] = q_3(t) \left( \frac{x^4}{\Sigma_t^4} - \frac{6x^2}{\Sigma_t^3} + \frac{3}{\Sigma_t^2} \right) + q_4(t) \left( \frac{x^2}{\Sigma_t^2} - \frac{1}{\Sigma_t} \right) + q_5(t) \quad (2.4.4)$$

<sup>6</sup>Takahashi (1999) and Kunitomo and Takahashi (2001) でもこの近似がもちいられている.

を得る. ただし,

$$\begin{aligned}
\Sigma_t &= \int_0^t p_1^2(s) ds, \\
q_1(t) &= \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u)p_1(u) du \right) ds, \\
q_2(t) &= \int_0^t p_1(s)p_3(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u)p_1(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r)p_1(r) dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \int_0^t p_1(s)p_4(s) \left( \int_0^s p_1(u)p_5(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r)p_1(r) dr \right) du \right) ds, \\
q_3(t) &= q_1^2(t), \\
q_4(t) &= 2 \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s p_1(u)p_2(u) \left( \int_0^u \sigma_0^2(r) dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u)p_2(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r)p_1(r) dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \int_0^t p_2^2(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u)p_1(u) du \right)^2 ds, \\
q_5(t) &= \int_0^t p_2^2(s) \left( \int_0^s \sigma_0^2(u) du \right) ds
\end{aligned}$$

である. ところで, 次のことが知られている.

**補題 2.4.1.**  $X$  は, 平均 0, 分散  $\Sigma$  の正規分布に従うと仮定し,  $f(x)$  と  $g(x)$  を任意の多項式とする. このとき,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}} e^{-iky} g(-ik) \mathbb{E}[f(X)e^{ikX}] dk = g\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y)n(y; 0, \Sigma)$$

が成り立つ. ここで,  $n(x; a, b)$  は平均  $a$ , 分散  $b$  の正規分布の密度関数である.

上の補題の証明は, 次の式の両辺を  $y$  について微分することで簡単に証明することができる:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}} e^{-iky} \mathbb{E}[f(X)e^{ikX}] dk = f(y)n(y; 0, \Sigma).$$

(詳細は, 例えば Takahashi (1999) を参照.)

$a_1(t)$  は平均 0, 分散  $\Sigma_t$  の標準正規分布に従うので, 補題 2.4.1 が適用できる. よって,  $X_t$  の密度関数は

$$\begin{aligned}
f_{X_t}(x) &= n(x; 0, \Sigma_t) - \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbb{E}[a_2(t)|a_1(t) = x] n(x; 0, \Sigma_t) \} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbb{E}[a_3(t)|a_1(t) = x] n(x; 0, \Sigma_t) \} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbb{E}[a_2(t)^2|a_1(t) = x] n(x; 0, \Sigma_t) \} + \dots
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

と近似される. ゆえに, (2.4.2)–(2.4.4) を (2.4.5) 代入することで, 次の結果を得る.

**定理 2.4.1.**  $X_t$  の密度関数は

$$f_{X_t}(x) \approx \frac{1}{2\Sigma_t^6} n(x; 0, \Sigma_t) \left[ q_3(t) (x^6 - 15x^4\Sigma_t + 45x^2\Sigma_t^2 - 15\Sigma_t^3) \right. \\ \left. + \Sigma_t^2 (2q_2(t) + q_4(t)) (x^4 - 6x^2\Sigma_t + 3\Sigma_t^2) \right. \\ \left. + \Sigma_t^3 \{2q_1(t) (x^3 - 3x\Sigma_t) + q_5(t) (x^2\Sigma_t - \Sigma_t^2) + 2\Sigma_t^3\} \right] \quad (2.4.6)$$

で近似される. ここで,  $n(x; a, b)$  は平均  $a$ , 分散  $b$  の正規分布の密度関数である.

また, (2.4.6) 中の多項式は全て, Hermite 多項式  $h_n(x)$  で与えられることに注意すると  $X_t$  の密度関数は,

$$\tilde{f}_{X_t}(x) = \frac{1}{2} n(x; 0, \Sigma_t) \left[ \frac{q_3(t)}{\Sigma_t^3} h_6\left(\frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) + \frac{(2q_2(t) + q_4(t))}{\Sigma_t^2} h_4\left(\frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) \right. \\ \left. + \frac{2q_1(t)}{(\sqrt{\Sigma_t})^3} h_3\left(\frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) + \frac{q_5(t)}{\Sigma_t} h_2\left(\frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}}\right) + 2 \right]$$

と書き換えることができる. よって,  $S_t$  の密度関数を  $\tilde{f}_{S_t}(x)$  と表し, (2.4.6) を変数変換すると

$$\tilde{f}_{S_t}(x) = \frac{\tilde{f}_{X_t}\left(\frac{x}{F(0, t)} - 1\right)}{F(0, t)} \quad (2.4.7)$$

を得る.

**注意 2.4.1.** 密度関数の全領域での積分は  $1$  である. 近似密度関数  $\tilde{f}_{X_t}(x)$  を  $\hat{f}(x) := \tilde{f}(x) / \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{X_t}(x) dx$  と置き換えることで, この性質を満たすことができる:  $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{X_t}(x) dx = 1$ .

最後に, 資産  $S_t$  の上に書かれた, 行使価格  $S$  で満期  $t$  のヨーロピアン・コール・オプションの近似式を算出する. ヨーロピアン・コール・オプションの価格は,  $\tilde{K} := 1 - \frac{K}{F(0, t)}$  としたとき,

$$C(t) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^t r(s) ds} (S_t - K)^+ \right] = F(0, t) \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^t r(s) ds} (X_t + \tilde{K})^+ \right]$$

で与えられることから, 密度関数  $f_{X_t}(x)$  をもちいて,

$$C(t) = S(0) \int_{-\tilde{K}}^{\infty} (x + \tilde{K}) f_{X_t}(x) dx$$

とかける. したがって, 次のことがいえる.

**定理 2.4.2.** 資産  $S_t$  の上に書かれた, 行使価格  $S$  で満期  $t$  のヨーロッパン・コール・オプションの価格は,

$$\begin{aligned}
C(t) \approx & \frac{S_0 n(\tilde{K}; 0, \Sigma)}{2\sqrt{2}\Sigma^4} \left[ \sqrt{2}q_3(t)(\tilde{K}^4 - 6\tilde{K}^2\Sigma + 3\Sigma^2) \right. \\
& + \Sigma^2\sqrt{2}(q_4(t) + 2q_2(t))(\tilde{K}^2 - \Sigma) \\
& + \Sigma^3 \left\{ -2\sqrt{2}q_1(t)\tilde{K} + \sqrt{2}q_5(t)\Sigma + 2\sqrt{2}\Sigma^2 \right\} \left. \right] \\
& + S_0\tilde{K} \left( 1 - \Phi(-\tilde{K}/\sqrt{\Sigma}) \right)
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

と近似される. ここで,  $\Phi(x)$  は標準正規分布の密度関数である.

## 2.5 数値計算

本節では, 数値計算を通して, 上で提案した近似の精度を検証する. 定弾性拡散 (CEV) モデルでは, (2.4.7) の近似密度関数  $\tilde{f}_{S_t}(x)$  と定理 2.4.2 のヨーロッパン・オプションの近似式を厳密解と比較する. さらに, ボラティリティ関数が複雑な非線形モデルに従い, 厳密解が存在しないようなモデルを考え, モンテカルロ法を用いて本近似の精度を検証する.

### 2.5.1 定弾性拡散 (CEV) モデル

確率微分方程式 (2.2.1) 中のボラティリティ関数が

$$\sigma(S, t) := \nu(t)S^{\beta(t)-1}, \quad t \geq 0$$

で与えられる場合を考える. ここで,  $\nu(t)$  と  $\beta(t)$  は時間の確定値関数とする. 特に,  $\beta(t) = 1$  で  $\nu(t) = \nu$  のとき, 原資産価格  $S_t$  は幾何ブラウン運動に従い, **Black-Scholes** モデル (**Black-Scholes (1973)**) と呼ばれている. また,  $\beta(t) = 0$  の時は, 原資産価格  $S_t$  は正規分布に従う. 本節では,  $\nu(t)$  を相対ボラティリティと呼び,  $\beta(s)$  を **CEV** のパラメーターと呼ぶことにする.

以下では, **Black-Scholes** モデル ( $\beta(t) = 1$ ) と平方根モデル ( $\beta(t) = 0.5$ ) の 2 つを考える.

#### 確率密度関数

近似の精度を確認するために, まず密度関数  $\tilde{f}_{S_t}(x)$  の収束について検証する. 図 2.1 に  $\nu = 0.15$ ,  $T = 5$  の **Black-Scholes** モデル, 図 2.2 に  $\nu = 1.33$ ,  $T = 5$  の平方根モデルにおける密度関数の収束の様子を示す. ここで, 図中の “**Analytic**” は解析的に求めた密度関

数<sup>7</sup>を, “W.I.C. (3rd)”は(2.4.7)で与えた(近似)密度関数を表している. また, 近似の収束の速度を示すため, (2.3.20)中の被積分項を $m+n=1$ と $m+n=2$ で近似した場合<sup>8</sup>の密度関数も“W.I.C. (1st)”と“W.I.C. (2nd)”として図に載せた.

図より明らかに, 近似の次元を上げれば, (2.4.7)の近似精度が向上することが観測された. また, 3次の近似で実務上十分な精度を持つことが分かる.

## オプション価格

以下では,  $S_0 = 80.00$ ,  $r(t) = 3.0\%$ に固定し, ボラティリティが小さい場合と大きい場合, 満期が短い場合( $T = 0.25$ )と長い場合( $T = 5$ )の4つのケースを試す. また, 精度を比較する指標として,

$$\text{Diff} = \text{近似解} - \text{厳密解}$$

を用いる.

最初に, Black-Scholes モデル( $\beta(t) = 1$ )を考える. このケースでは, 原資産価格は対数正規分布に従うことから, オプション価格の厳密解が存在している(Black-Scholes formula (1973)を参照). 図2.3は, ボラティリティが小さい(左図,  $\nu = 0.15$ )場合と大きい(右図,  $\nu = 0.3$ )場合, 満期が短い場合(上図)と長い場合(下図)を示す. 図中の“Analytic”はBlack-Scholes式から導かれたコール・オプションの厳密解, “W.I.C. (3rd)”は定理2.4.2より導かれた近似解を表している.

次に, Black-Scholes モデル( $\beta(t) = 0.5$ )を考える. このケースでも, 原資産価格が $\chi^2$ 分布に従うことから, オプション価格の厳密解が存在している(例えば, Schroder (1989)を参照). 図2.4は, ボラティリティが小さい(左図,  $\nu = 1.33$ )場合と大きい(右図,  $\nu = 2.66$ )場合, 満期が短い場合(上図)と長い場合(上図)を示す. ボラティリティは, 各時刻における対数収益率の分散が, ボラティリティ15%と30%のBlack-Scholesモデルと一致するように選んだ.

どちらの場合においても, 全ての満期と行使価格において, 近似の精度は非常に高いことが確認された. 誤差は, 満期が長いオプションで極端にイン・ザ・マネーやアウト・オブ・ザ・マネーが進んだ場合には, 誤差が僅かに拡大する傾向があるが, これらの誤差は, いずれの場合においても市場で観測されるビット・アスク・スプレットに比べて非常に小さく, 実務上問題を生じることはない.

<sup>7</sup>Black-Scholes モデルでは対数正規分布, 平方根モデルでは $\chi^2$ 分布の密度関数を載せた.

<sup>8</sup>それぞれ, 多重積分の1次と2次までを残す場合に相当している.

## 2.5.2 市場へのキャリブレーション

本節では、定理 5.3 で与えた近似式を用いて、JPY/USD の為替オプション市場で観測されるボラティリティ・サーフェスへのキャリブレーションを考える。

為替のスポット価格  $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$  は、

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_d(t) - r_f(t))dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad (2.5.1)$$

に従っているとする。ここで、 $r_d(t)$  は国内の、 $r_f(t)$  は外国の無リスク金利である。

ところで、確率微分方程式 (2.5.1) に対しても、これまでと全く同様の議論が適用できるから、為替オプション価格の近似式のは、

$$\begin{aligned} C(t) \approx & \frac{e^{-\int_0^t r_d(s)ds} F(0, t) n(\tilde{K}; 0, \Sigma)}{2\sqrt{2}\Sigma^4} \left[ \sqrt{2}q_3(t)(\tilde{K}^4 - 6\tilde{K}^2\Sigma + 3\Sigma^2) \right. \\ & + \Sigma^2\sqrt{2}(q_4(t) + 2q_2(t))(\tilde{K}^2 - \Sigma) \\ & \left. + \Sigma^3 \left\{ -2\sqrt{2}q_1(t)\tilde{K} + \sqrt{2}q_5(t)\Sigma + 2\sqrt{2}\Sigma^2 \right\} \right] \\ & + e^{-\int_0^t r_d(s)ds} F(0, t)\tilde{K} \left( 1 - \Phi(-\tilde{K}/\sqrt{\Sigma}) \right) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

で与えられる。

(2.5.1) 中のボラティリティが、複雑な非線形モデルに従う場合を考える：

$$\sigma(S_t, t) := \left\{ \alpha + \beta x + \frac{\gamma}{x} + \delta x^2 \right\} e^{-\epsilon x}.$$

ただし、 $x = \frac{S_t}{F(0, t)}$  と定義し、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  を定数とする。

価格式 (2.5.2) を用いて、2011 年 7 月 11 日の為替オプション市場で観測された、満期半年、1 年、5 年のボラティリティ・サーフェスにキャリブレーションすることを考える。行使価格は、市場の慣行に従い、25 デルタ・プット、10 デルタ・プット、アット・ザ・マネー、10 デルタ・コール、25 デルタ・コールの 5 点を用いた。表 2.1 に具体的な数値を示す。また、他のパラメータは  $S_0 = 80.75$ ,  $r_d(t) = 1.18\%$ ,  $r_f(t) = 3.28\%$  とした。表 2.2 に、校正後の各満期におけるパラメータを載せた。

近似の精度を確認するため表 2.2 で与えたパラメータを用いて、近似式とモンテカルロ・シミュレーションを用いて計算したオプション価格を図 2.5 に載せた。図中の“MC”はモンテカルロ法，“W.I.C. (3rd)”は近似式 (2.5.1)，“MKT”は表 2.1 で与えた市場で観測されたインプライド・ボラティリティから計算した結果を表している。

図より、広範囲に渡る行使価格と満期において、本章で提案した近似の精度は実務上問題ないことが観測された。次章では、確率微分方程式が確率ボラティリティに従う場合を考え、カオス展開近似を発展させる。また、4 章ではアジア型オプションなどより複雑な金融派生商品の価格付けにカオス展開近似を応用する。

表 2.1: 市場で観測された, 各満期における為替オプションのストライクとインプライド・ボラティリティ

Strike					
T	10 Delta Put	25 Delta Put	ATM	25 Delta Call	10 Delta Call
6M	71.09	75.76	79.68	83.90	88.51
1Y	65.35	72.57	78.50	85.41	93.04
5Y	43.18	56.62	68.54	90.35	114.67

Implied Volatility					
T	10 Delta Put	25 Delta Put	ATM	25 Delta Call	10 Delta Call
6M	13.14 %	11.37 %	10.38 %	10.40 %	11.18 %
1Y	15.51 %	13.28 %	11.98 %	11.88 %	12.59 %
5Y	19.72 %	17.05 %	15.35 %	14.35 %	14.99 %

表 2.2: 市場で観測されたボラティリティ (表 2.1) に校正したモデルのパラメータ

T	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$
6M	3.278	-16.96	3.755	10.27	1.204
1Y	-1.414	-3.553	2.362	2.896	0.921
5Y	-0.372	0.243	0.284	-0.021	-0.106

## 2.6 小括

本稿では, 金融派生証券の価格付けに対して威力を発揮する新しい方法として, Wiener-Itô カオス展開を応用した近似手法を導入した. 本手法は, 原資産価格が連続 Markov 過程に従う場合に派生商品の価格を明示的に評価することを可能とする一般的な手法である. 一方で, 近似解の計算速度は十分に速く, 実務的にも極めて有用である.

本手法における, 近似手順は以下の通りである. まず, Wiener-Itô カオス展開に基づき原資産価格を Hermite 多項式で展開する. 次に, 展開された原資産価格に対して逐次代入を繰り返すことで, 伊藤の重複積分の形に書き換える. この際, 3 次の重複積分迄を残し, 残りの項を切り捨てる近似を行う. 最後に, 近似された原資産価格の従う特性関数を算出し, 特性関数の反転公式を用いて密度関数を近似する.

さらに, 数値例を通して本手法と先行研究の比較検証をおこなった. その結果, 本近似の精度は非常に高く, 他の先行研究では正確に近似することができなかった, 満期が長くボラティリティが高い場合においても近似の精度を維持することが可能となった. また,

実際の市場に即したデータを用いて実務への応用についても議論した。それにより，本近似を用いれば，満期 10 年の為替オプションのボラティリティ・サーフェイスを正確に近似可能であり，近似誤差はビット・アスク・スプレットを考慮すると無視できる程度であることを示した。

本手法の今後の展望として，次章で確率金利モデルや確率ボラティリティ・モデルへの応用を考える。或いは，4 章以降で議論するとおり，ファイナンスにおけるその他の重要な問題にも拡張可能である。

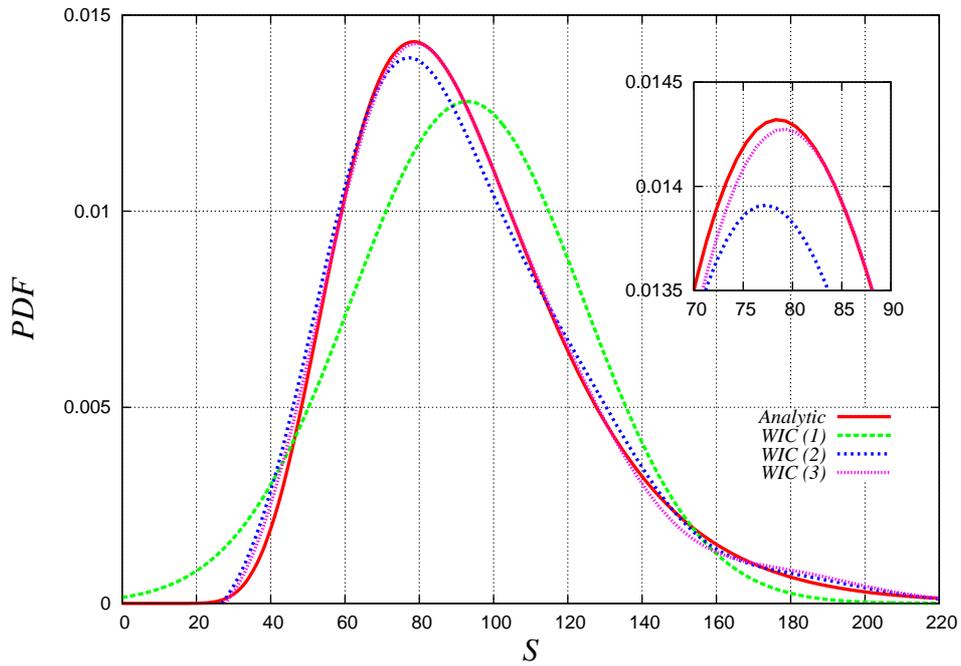


図 2.1: 解析的に求めた原資産価格の密度関数と (2.4.7) で近似された密度関数の比較. 図中の “Analytic” は解析的に求めた密度関数を表し, “W.I.C. (1st)”, “W.I.C. (2nd)”, “W.I.C. (3rd)” は各々1次, 2次, 3次の近似密度関数を表している. パラメータは,  $r_d(t) = 3.0\%$ ,  $r_f(t) = 0.0\%$ ,  $S(0) = 80.0$ ,  $\nu = 0.15$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $T = 5Y$  とした.

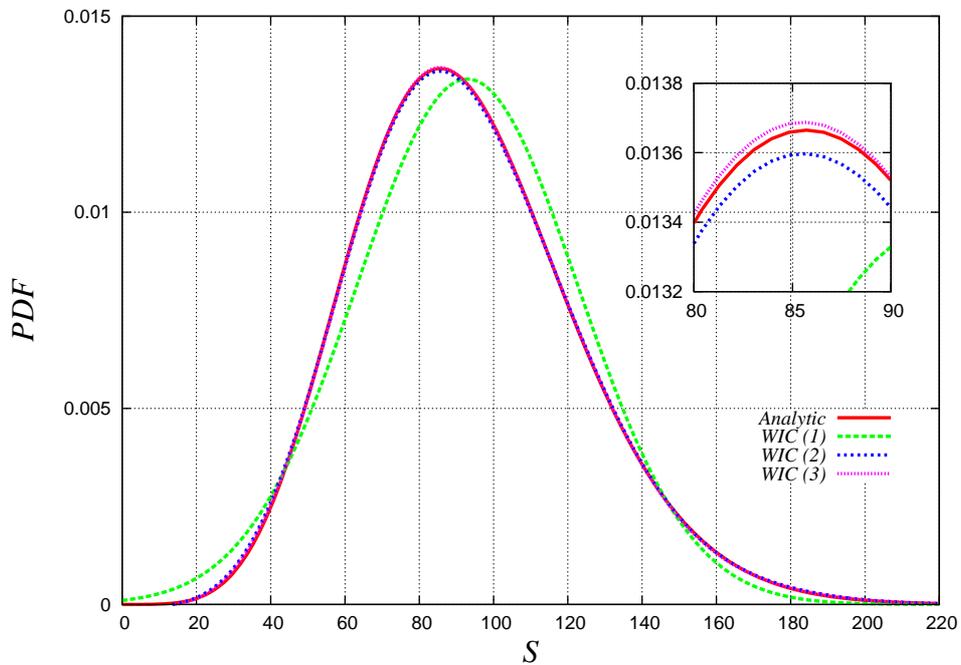


図 2.2: 解析的に求めた原資産価格の密度関数と (2.4.7) で近似された密度関数の比較. 図中の “Analytic” は解析的に求めた密度関数を表し, “W.I.C. (1st)”, “W.I.C. (2nd)”, “W.I.C. (3rd)” は各々1次, 2次, 3次の近似密度関数を表している. パラメータは,  $r_d(t) = 3.0\%$ ,  $r_f(t) = 0.0\%$ ,  $S(0) = 80.0$ ,  $\nu = 1.33$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $T = 5Y$  とした.

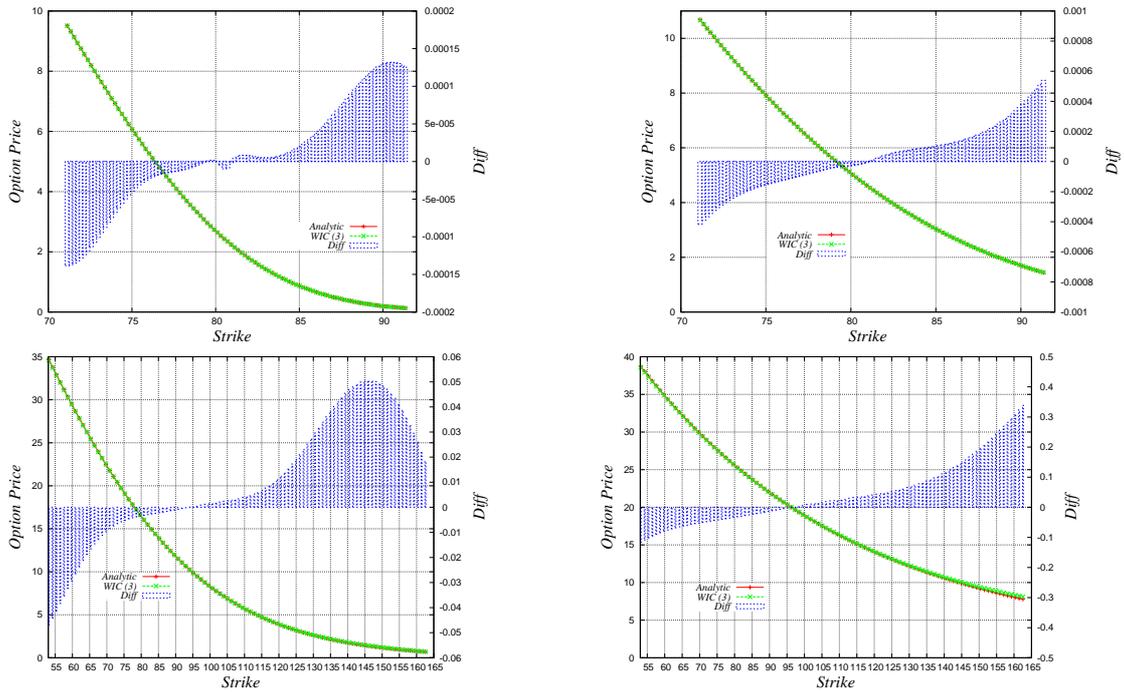


図 2.3: ヨーロピアン・オプションの厳密解 (“Analytic”) と近似解 (“W.I.C. (3rd)”) の比較. 左図は  $\nu = 0.15$ 、右図は  $\nu = 0.3$ 、上図は  $T = 0.33$ 、下図は  $T = 5$  の場合である. 他のパラメータは、 $r_d(t) = 3.0\%$ 、 $r_f(t) = 0.0\%$ 、 $S(0) = 80.0$ 、 $\beta = 1.0$  である.

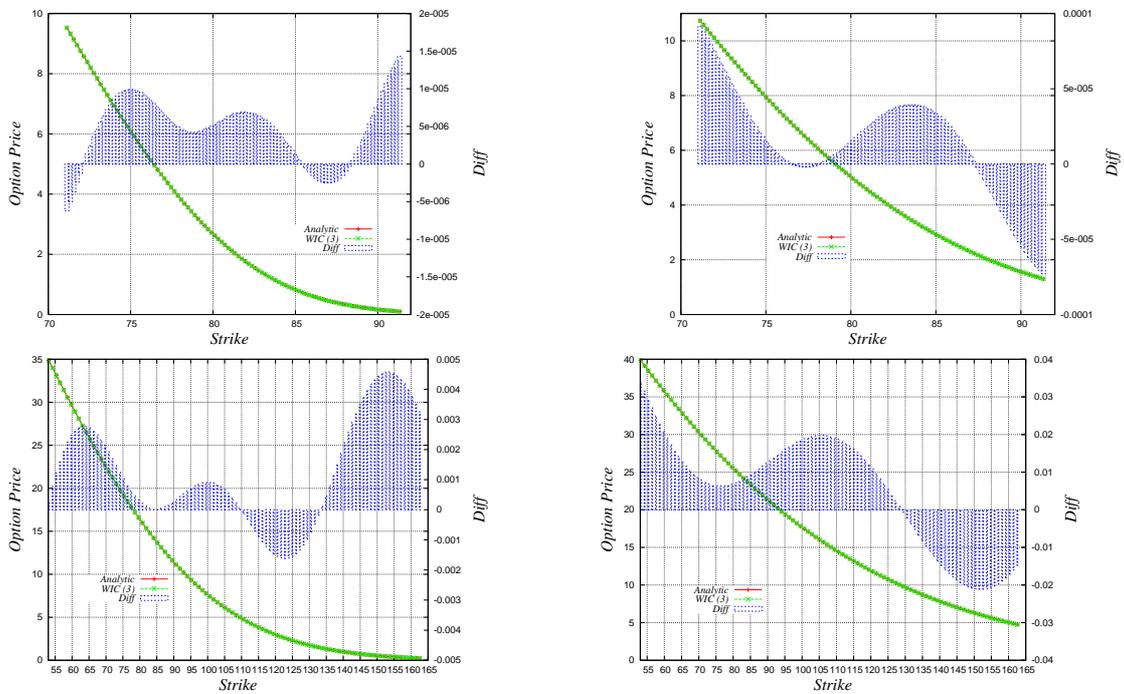
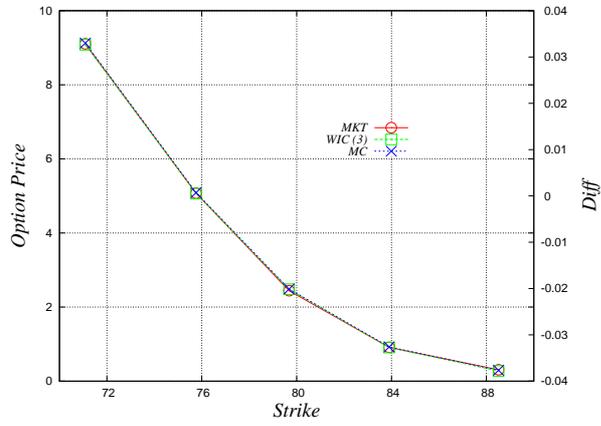
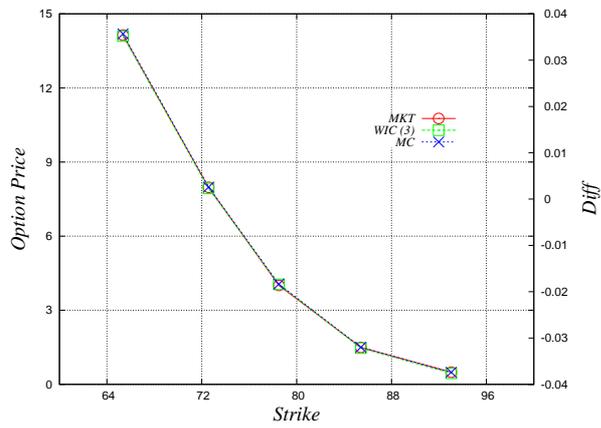


図 2.4: ヨーロピアン・オプションの厳密解 (“Analytic”) と近似解 (“W.I.C. (3rd)”) の比較. 左図は  $\nu = 0.15$ 、右図は  $\nu = 0.3$ 、上図は  $T = 0.33$ 、下図は  $T = 5$  の場合である. 他のパラメータは、 $r_d(t) = 3.0\%$ 、 $r_f(t) = 0.0\%$ 、 $S(0) = 80.0$ 、 $\beta = 0.5$  である.

Expiry = 6M



Expiry = 1Y



Expiry = 5Y

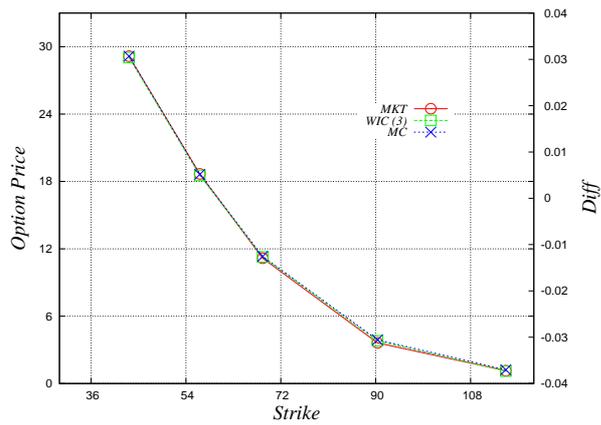


図 2.5: 表 2.2 のパラメータを用いて, カオス展開法 (W.I.C (3rd)) とモンテカルロ法 (MC) で計算されたオプション価格. MKT は, 表 3.1 に示した市場で観測されたボラティリティを用いて計算したオプション価格を表している.

## 第3章 確率ボラティリティ・モデルへの 応用

前章では、原資産価格が局所ボラティリティ・モデルに従うときにカオス展開法を用いることで、従来解析解の存在しない金融派生証券の価格を非常に精緻に近似できることを示した。

ところで、本手法は、実務で広く用いられているより複雑なモデルにおいても派生商品の価格を明示的に評価することを可能とする一般的な手法である。その一例として、本章では確率ボラティリティ・モデルへ拡張することを考える<sup>1</sup>。

前章で議論した、局所ボラティリティ・モデルはその表現力の豊かさに加え、実装が容易であることから広く実務で用いられている。しかし、Hagan et al. (2002)により示された通り、局所ボラティリティ・モデルにより予測されたインプライド・ボラティリティの挙動は、市場で観測されるそれとは正反対の動きをすることが知られるようになった。この現象は、ステッキー・デルタ<sup>2</sup>と呼ばれ、局所ボラティリティ・モデルの限界として認識され、実務家の間では急速に確率ボラティリティへのシフトが進んだ。確率ボラティリティ・モデルの重要な文献として、Hull and White (1987), Heston (1993), Schobel and Zhu (1999)を挙げておく。これらのモデルは、原資産価格とそのボラティリティを確率過程で表現することで、インプライド・ボラティリティのスキューとスマイルを表現することが可能である。

一方で、確率ボラティリティ・モデルのヨーロッパン・オプションの近似解は、一般の場合存在しない。そのため、近似解を算出することがやはり重要な役割を果たしている。

Fouque et al. (2000)は特異摂動法を用いて、原資産価格の確率微分方程式から導かれる偏微分方程式をボラティリティの確率過程の不変分布の周りで展開し、ヨーロッパン・オプションの近似解を導いた。彼らの理論的根拠は、Fouque et al. (2003b)で詳しく論じられている。また、Hagan et al. (2002)は特異摂動法を用いてSABRモデルのもとでのヨーロッパン・オプションの近似解を求めている。

Kunitomo and Takahashi (1992)は、漸近展開法を用いて、原資産価格が幾何ブラウン運動に従う場合にアジア型オプションの近似解を算出を算出した。この理論を応用し、Takahashi (1999)は、一般の局所ローカル・ボラティリティ・モデルにおいてヨーロッパン・オプショ

<sup>1</sup>本章の内容は、Funahshi (2014)を参照している。

<sup>2</sup>例えば、Ling and Shevchenko (2014)を参照。

ンの近似解を求めている. 漸近展開法の他の重要な応用例として, Kunitomo and Takahashi (2001, 2003) と Takahashi and Takehara (2007) を挙げておく. なお, これらの摂動展開は Malliavin 解析における Watanabe (1987) と Yoshida (1992a) 理論を根拠に発展した手法である.

一方, 前章で提案した Funahashi and Kijim (2014a) の手法は, カオス展開法を応用して, 漸近展開法とは根本的に異なる方法で, 局所ボラティリティ・モデルのもとでのヨーロッパ・オプション価格の近似解を算出している. 本手法は, 満期が長くボラティリティが高い場合でも高い精度の近似を実現している. 本章では, カオス展開法を確率ボラティリティ・モデルへと拡張する.

本章では, まず次節でモデルを定義する. 2章でカオス展開法を用いた近似手法を提案し, 3章では, 原資産価格の遷移密度関数を算出し, その結果を用いてヨーロッパ・オプションのの価格式を算出する. さらに, 4章でモンテカルロ・シミュレーションとの比較を行い, 満期が長くボラティリティが高い場合にもおいても, 本手法の近似精度が保たれることを示す. 最後に, 5章でまとめる.

### 3.1 確率ボラティリティ・モデル

原資産価格  $S$  とそのボラティリティ  $v$  は以下の確率過程に従うと仮定する:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= r(t)dt + \sigma(S_t, v_t)dW_t^S, \\ dv_t &= (\theta(t) - \kappa(t)v_t)dt + \gamma(v_t)dW_t^v.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

ここで,  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\kappa(t)$  は時間  $t$  の確定値関数,  $\sigma(s, v)$  は資産価格とボラティリティの確定値関数,  $\gamma(v)$  はボラティリティの確定値関数とする. また,  $W^S$  と  $W^v$  は, 測度  $\mathbb{Q}$  のもとでの標準ブラウン運動布とし, 相関は  $dW_t^S dW_t^v = \rho dt$  で与えられる. また, 本章では  $\sigma(s, t)$  は  $(s, t)$  に関して正則関数であると仮定する.

確率微分方程式 (3.1.1) が解を持つと仮定し, 伊藤の公式を用いると

$$\begin{aligned}S_t &= F(0, t) \exp \left[ \int_0^t \sigma(S_u, v_u) dW_u^S - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(S_u, v_u)^2 du \right], \\ v_t &= V(0, t) + \bar{E}(t) \int_0^t E(u) \gamma(v_u) dW_u^v\end{aligned}$$

を得る. ここで,  $F(0, t) = S_0 e^{\int_0^t r(u) du}$  は受渡期日  $t$  におけるフォワード価格,  $E(t) = e^{\int_0^t \kappa(u) du}$ ,  $\bar{E}(t) = 1/E(t)$ ,  $V(0, t) = \bar{E}(t) \left( v_0 + \int_0^t E(u) \theta(u) du \right)$  である. したがって,  $\|g\|_t^2 = \int_0^t g^2(u) du$ ,  $J_t(g) = \int_0^t g(u) dW_u^S$ ,  $L_t(g) = \bar{E}(t) \int_0^t E(u) g(v_u) dW_u^v$  としたとき,

$$\begin{aligned}S_t &= F(0, t) \exp \left[ J_t(\sigma) - \frac{1}{2} \| \sigma \|_t^2 \right], \\ v_t &= V(0, t) + L_t(\gamma).\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

がいえる.

本章の目的は, (3.1.1) の確率ボラティリティ・モデルの仮定のもと,  $S_t$  の上に書かれた行使価格  $K$ , 満期  $T$  のコール・オプションの価格を計算することである:

$$C(V, K, T) = e^{-\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}[(S_t - K)^+].$$

## 3.2 カオス展開法

$h_n(x)$  を  $n$  次の Hermite 多項式とし,  $h_0(x) = 1$ ,

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

と定義する.

Hermite 多項式は, 指数型母関数により生成されることが知られている (例えば, Nualart (2006) の 1 章を参照):

$$\exp \left[ tx - \frac{(\sqrt{\lambda}t)^2}{2} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\lambda}t)^n}{n!} h_n \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

したがって,  $t = 1$ ,  $x = J_t(\sigma)$ ,  $\lambda = \|\sigma\|_t^2$  と置いたとき

$$\exp \left( J_t(\sigma) - \frac{1}{2} \|\sigma\|_t^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\sigma\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_t(\sigma)}{\|\sigma\|_t} \right) \quad (3.2.2)$$

を得る.

$S_t^{(0)} = F(0, t)$ ,  $v_t^{(0)} = V(0, t)$  とし,  $S_t^{(m)}$  と  $v_t^{(m)}$  を逐次的に,

$$\begin{aligned} S_t^{(m+1)} &= F(0, t) \exp \left[ J_t(\sigma^{(m)}) - \frac{1}{2} \|\sigma^{(m)}\|_t^2 \right], \\ v_t^{(m+1)} &= V(0, t) + L_t(\gamma^{(m)}) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

と定義する. ただし, 表記を簡潔にするため  $\sigma^{(m)}(t) = \sigma(S_t^{(m)}, v_t^{(m)})$ ,  $\gamma^{(m)}(t) = \gamma(v_t^{(m)})$  とした. 本章では, Funahashi and Kijima (2015) と同様,  $S_t^{(m)}$  と  $v_t^{(m)}$  は  $m \rightarrow \infty$  としたとき, ほとんど確実に  $S_t$  と  $v_t$  に収束するものと仮定する.

したがって, (3.2.3) と (3.2.2) より

$$\frac{S_t^{(m+1)}}{F(0, t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\sigma^{(m)}\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_t(\sigma^{(m)})}{\|\sigma^{(m)}\|_t} \right) \quad (3.2.4)$$

が従う.

一方,  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_t^m = S_t$  と仮定したので,

$$S_t = S_t^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ S_t^{(m+1)} - S_t^{(m)} \right\} \quad (3.2.5)$$

がいえる. ゆえに,

$$I_{m, n}(t) = \frac{1}{n!} \left\{ \|\sigma^{(m)}\|_t^n h_n \left( \frac{J_t(\sigma^{(m)})}{\|\sigma^{(m)}\|_t} \right) - \|\sigma^{(m-1)}\|_t^n h_n \left( \frac{J_t(\sigma^{(m-1)})}{\|\sigma^{(m-1)}\|_t} \right) \right\}. \quad (3.2.6)$$

とおけば, (3.2.4) と (3.2.5) より

$$S_t = S_t^{(1)} + F(0, t) \sum_{m, n=1}^{\infty} I_{m, n}(t) \quad (3.2.7)$$

である.

次の結果は, Hermite 多項式と多重積分の関係を与える. (例えば, Nualart (2006) の命題 1.14 の証明が詳しい.)  $f(t) \in L^2([0, T])$  を時間の確定値関数としたとき,

$$\frac{\|f(t)\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_t(f)}{\|f\|_t} \right) = \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n} \quad (3.2.8)$$

が成り立つ. ここで,  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  は 1 次元のブラウン運動である. ところで,  $\sigma^{(0)}(t) = \sigma(F(0, t), V(0, t))$  は確定値関数であるから, (3.2.4) と (3.2.8) より,

$$\frac{S_t^{(1)}}{F(0, t)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma^{(0)}(t_1) \sigma^{(0)}(t_2) \cdots \sigma^{(0)}(t_n) dW_{t_1}^S \cdots dW_{t_n}^S \quad (3.2.9)$$

となる.

以下では, Funahashi and Kijima (2015) と同様, 実務的な理由から  $m + n \geq 4$  の項を無視することにする. すなわち,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t^{(1)} = F(0, t) & \left[ 1 + \int_0^t \sigma_0(t_1) dW_{t_1} + \int_0^t \int_0^{t_2} \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) dW_{t_1}^S dW_{t_2}^S \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) dW_{t_1}^S dW_{t_2}^S dW_{t_3}^S \right] \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

として, (3.2.7) を

$$S_t = \tilde{S}_t^{(1)} + F(0, t) \sum_{m, n \geq 1; m+n \leq 3} I_{m, n}(t) \quad (3.2.11)$$

と近似する. この近似は, ボラティリティが  $L_2$  の意味で小さい場合, Funahashi and Kijima (2015) の命題 2.2 により正当化される.

以下では、カオス展開 (3.2.9) を用いて、各  $I_{m,n}(t)$  を確定値関数の多重積分で近似する。このために、 $\{S_t^{(m-1)}, v_t^{(m-1)}\}$  の周りでテイラー展開を行い、添え字  $m$  の次数を下げることを考える。 $J_t(\sigma^{(m)}) = \int_0^t \sigma(S_u^{(m)}, v_u^{(m)}) dW_u^S$  であるから、

$$\begin{aligned}
J_t(\sigma^{(m)}) &\approx J_t(\sigma^{(m-1)}) \\
&+ \int_0^t \sigma_S^{(m-1)}(u) \{S_u^{(m)} - S_u^{(m-1)}\} dW_u^S \\
&+ \int_0^t \sigma_v^{(m-1)}(u) \{v_u^{(m)} - v_u^{(m-1)}\} dW_u^S \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{SS}^{(m-1)}(u) \{S_u^{(m)} - S_u^{(m-1)}\}^2 dW_u^S \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{vv}^{(m-1)}(u) \{v_u^{(m)} - v_u^{(m-1)}\}^2 dW_u^S \\
&+ \int_0^t \sigma_{Sv}^{(m-1)}(u) \{v_u^{(m)} - v_u^{(m-1)}\} \{S_u^{(m)} - S_u^{(m-1)}\} dW_u^S \quad (3.2.12)
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
J_t^2(\sigma^{(m)}) &\approx J_t^2(\sigma^{(m-1)}) \\
&+ 2J_t(\sigma^{(m-1)}) \int_0^t \sigma_S^{(m-1)}(u) \{S_u^{(m)} - S_u^{(m-1)}\} dW_u^S \\
&+ 2J_t(\sigma^{(m)}) \int_0^t \sigma_v^{(m-1)}(u) \{v_u^{(m)} - v_u^{(m-1)}\} dW_u^S \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

が従う。ただし、表記を簡潔にするために  $\sigma_S^{(m)}(t) := \partial_s \sigma(s, v)|_{s=S_t^{(m)}, v=v_t^{(m)}}$ ,  $\sigma_v^{(m)}(t) := \partial_v \sigma(s, v)|_{s=S_t^{(m)}, v=v_t^{(m)}}$ ,  $\sigma_{SS}(t) := \partial_{ss} \sigma(s, v)|_{s=S_t^{(m)}, v=v_t^{(m)}}$ ,  $\sigma_{vv}^{(m)}(t) := \partial_{vv} \sigma(s, v)|_{s=S_t^{(m)}, v=v_t^{(m)}}$ ,  $\sigma_{Sv}(t) := \partial_{sv} \sigma(s, v)|_{s=S_t^{(m)}, v=v_t^{(m)}}$  と定義した。

各  $I_{m,n}(t)$  に対して (3.2.12) と (3.2.13) の近似を繰り返し適用することで、次のことがいえる。証明は、付録 C に載せた。

**補題 3.2.1.** (3.2.6) で定義された各  $I_{m,n}(t)$  は、以下のように近似される:

$$I_{1,1}(t) \approx I_{1,1}^S(t) + I_{1,1}^{S,v}(t) + I_{1,1}^v(t), \quad (3.2.14)$$

$$I_{1,2}(t) \approx I_{1,2}^S(t) + I_{1,2}^v(t), \quad (3.2.15)$$

$$I_{2,1}(t) \approx I_{2,1}^S(t) + I_{2,1}^{S,v}(t) + I_{2,1}^v(t). \quad (3.2.16)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
I_{1,1}^S(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_{SS}^{(0)}(s) F(0, s)^2 \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{SS}^{(0)}(s) F(0, s)^2 \left( \int_0^s (\sigma^{(0)}(u))^2 du \right) dW_s^S, \\
I_{1,1}^{S,v}(t) &\approx \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \rho E(u) \gamma^{(0)}(u) \sigma^{(0)}(u) du \right) dW_s^S, \\
I_{1,1}^v(t) &\approx \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_{vv}^{(0)}(s) \bar{E}(s)^2 \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{vv}^{(0)}(s) \bar{E}(s)^2 \left( \int_0^s E(u)^2 (\gamma^{(0)}(u))^2 du \right) dW_s^S, \\
I_{1,2}^S(t) &\approx \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + 2 \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s (\sigma^{(0)}(u))^2 du \right) dW_s^S, \\
I_{1,2}^v(t) &\approx \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u) \bar{E}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \rho E(u) \gamma^{(0)}(u) \sigma^{(0)}(u) du \right) dW_s^S, \\
I_{2,1}^S(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S, \\
I_{2,1}^{S,v}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u) \bar{E}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
I_{2,1}^v(t) &= \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S.
\end{aligned}$$

と定義した. また, 高次の項  $m + n \geq 4$  は

$$I_{m, n}(t) \approx 0 \quad (3.2.17)$$

である.

したがって, これまでの結果を整理することで, 次の結果が従がう.

**定理 3.2.1.**  $X_t := \frac{S_t}{F(0, t)} - 1$  としたとき,

$$\begin{aligned} X_t \approx & \int_0^t p_1(s) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S + \int_0^t p_3(s) \left( \int_0^s p_4(u) dW_u^v \right) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_5(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_6(s) \left( \int_0^s p_4(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_7(s) \left( \int_0^s p_4(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_7(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s p_8(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s p_3(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ & + \int_0^t p_3(s) \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

と近似される. ここで, 確定値関数  $p_k(t)$  は

$$\begin{aligned} p_1(s) := & \sigma^{(0)}(s) + \left\{ \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) + \frac{1}{2} F(0, s)^2 \sigma_{SS}^{(0)}(s) \right\} \left( \int_0^s (\sigma_0(u))^2 du \right) \\ & + \frac{1}{2} \sigma_{vv}^{(0)}(s) \bar{E}(s)^2 \left( \int_0^s E(u)^2 \gamma^{(0)}(u)^2 du \right) \\ & + \left\{ \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) + \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \right\} \left( \int_0^s \rho E(u) \gamma^{(0)}(u) \sigma^{(0)}(u) du \right), \end{aligned}$$

$$p_2(s) := \sigma^{(0)}(s) + F(0, s) \sigma_S^{(0)}(s),$$

$$p_3(s) := \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s),$$

$$p_4(s) := E(s) \gamma^{(0)}(s),$$

$$p_5(s) := \sigma^{(0)}(s) + 3\sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) + \sigma_{SS}^{(0)}(s) F(0, s)^2,$$

$$\begin{aligned}
p_6(s) &:= \sigma_{vv}^{(0)}(s)\bar{E}(s)^2, \\
p_7(s) &:= \sigma_v^{(0)}(s)\bar{E}(s) + \sigma_{Sv}^{(0)}F(0, s)\bar{E}(s), \\
p_8(s) &:= \sigma_S^{(0)}(s)F(0, s)
\end{aligned}$$

と定義した.

### 3.3 ヨーロピアン・オプションの近似式

本節では、原資産価格の密度関数の近似式を算出し、それを用いてヨーロピアン・オプションの価格式を算出する.

先に進む前に、表記を簡潔にするため以下の変数を定義する:

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= \int_0^t p_1(s) dW_s^S, \\
a_2(t) &= \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S + \int_0^t p_3(s) \left( \int_0^s p_4(u) dW_u^v \right) dW_s^S, \\
a_3(t) &= \int_0^t p_5(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t p_6(s) \left( \int_0^s p_4(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t p_7(s) \left( \int_0^s p_4(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t p_7(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s p_8(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t p_2(s) \left( \int_0^s p_3(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t p_3(s) \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u p_4(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S.
\end{aligned}$$

このとき、(3.2.18) より

$$X_t = a_1(t) + a_2(t) + a_3(t)$$

である.

#### 3.3.1 密度関数の近似

$a_1(t)$  は、平均 0、分散  $\Sigma_t = \int_0^t p_1^2(s) ds$  の正規分布に従っていることに注意すると、補題 2.4.1 から、 $X_t$  の密度関数を求めることができる.

すなわち,  $X_t$  の密度関数  $f_{X_t}(x)$  は以下で近似できる:

$$\begin{aligned} f_{X_t}(x) &\approx n(x; 0, \Sigma_t) - \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbb{E}[a_2(t) | a_1(t) = x] n(x; 0, \Sigma_t) \} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbb{E}[a_3(t) | a_1(t) = x] n(x; 0, \Sigma_t) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbb{E}[a_2(t)^2 | a_1(t) = x] n(x; 0, \Sigma_t) \}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

ただし,  $n(x; a, b)$  を平均  $a$ , 分散  $b$  の正規分布の密度関数である.

一方, (3.3.1) 中の条件付期待値は, 付録 B の結果より直接計算することができる. 具体的には, (C.0.1), (C.0.2), (C.0.3) より

$$\mathbb{E}[a_2(t) | a_1(t) = x] = q_1(t) \left( \frac{x^2}{\Sigma_t^2} - \frac{1}{\Sigma_t} \right), \quad (3.3.2)$$

$$\mathbb{E}[a_3(t) | a_1(t) = x] = q_2(t) \left( \frac{x^3}{\Sigma_t^3} - \frac{3x}{\Sigma_t^2} \right), \quad (3.3.3)$$

$$\mathbb{E}[a_2^2(t) | a_1(t) = x] = q_3(t) \left( \frac{x^4}{\Sigma_t^4} - \frac{6x^2}{\Sigma_t^3} + \frac{3}{\Sigma_t^2} \right) + q_4(t) \left( \frac{x^2}{\Sigma_t^2} - \frac{1}{\Sigma_t} \right) + q_5(t), \quad (3.3.4)$$

である. ここで, 表記を簡潔にするために

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \int_0^t p_1(s) p_2(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) p_1(s) du \right) ds + \int_0^t p_1(s) p_3(s) \left( \int_0^s \rho p_1(u) p_4(u) du \right) ds, \\ q_2(t) &= q_{2,1}(t) + q_{2,2}(t) + q_{2,3}(t), \\ q_3(t) &= q_1^2(t), \\ q_4(t) &= q_{4,1}(t) + q_{4,2}(t) + q_{4,3}(t), \\ q_5(t) &= \int_0^t p_2^2(s) \left( \int_0^s (\sigma^{(0)}(u))^2 du \right) ds + \int_0^t p_3^2(s) \left( \int_0^s p_4^2(u) du \right) ds \\ &\quad + 2 \int_0^t p_2(s) p_3(s) \left( \int_0^s \rho \sigma^{(0)}(u) p_4(u) du \right) ds \end{aligned}$$

と定義し,  $q_{2,1}(t)$ ,  $q_{2,2}(t)$ ,  $q_{2,3}(t)$ ,  $q_{4,1}(t)$ ,  $q_{4,2}(t)$ ,  $q_{4,3}(t)$  を

$$\begin{aligned} q_{2,1}(t) &= \int_0^t p_1(s) p_5(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) p_1(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) p_1(r) dr \right) du \right) ds \\ &\quad + \int_0^t p_1(s) p_2(s) \left( \int_0^s p_1(u) p_8(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) p_1(r) dr \right) du \right) ds \\ q_{2,2}(t) &= \int_0^t p_1(s) p_3(s) \left( \int_0^s \rho p_1(u) \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u \rho p_1(r) p_4(r) dr \right) du \right) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{2,3}(t) &= \int_0^t p_1(s)p_6(s) \left( \int_0^s \rho p_1(u)p_4(u) \left( \int_0^u \rho p_1(s)p_4(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \int_0^t p_1(s)p_7(s) \left( \int_0^s \rho p_1(u)p_4(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r)p_1(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \int_0^t p_1(s)p_7(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u)p_1(u) \left( \int_0^u \rho p_1(r)p_4(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s p_1(u)p_3(u) \left( \int_0^u \rho p_1(r)p_4(r)dr \right) du \right) ds, \\
q_{4,1}(t) &= 2 \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s p_1(u)p_2(u) \left( \int_0^u (\sigma(r))^2 dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u)p_2(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r)p_1(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \int_0^t p_2(s)^2 \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u)p_2(u)du \right)^2 ds, \\
q_{4,2}(t) &= 2 \int_0^t p_1(s)p_3(s) \left( \int_0^s p_1(u)p_3(u) \left( \int_0^u p_4(r)^2 dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t p_1(s)p_3(s) \left( \int_0^s \rho p_3(u)p_4(u) \left( \int_0^u \rho p_1(r)p_4(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \int_0^t p_3(s)^2 \left( \int_0^s \rho p_1(u)p_4(u)du \right)^2 ds, \\
q_{4,3}(t) &= 2 \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s p_1(u)p_3(u) \left( \int_0^u \rho \sigma^{(0)}(r)p_4(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t p_1(s)p_3(s) \left( \int_0^s p_1(u)p_2(u) \left( \int_0^u \rho \sigma^{(0)}(r)p_4(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t p_1(s)p_2(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}p_3(u) \left( \int_0^u \rho p_1(r)p_4(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t p_1(s)p_3(s) \left( \int_0^s \rho p_2(u)p_4(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}p_1(r)dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t p_2(s)p_3(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u)p_1(u)du \right) \left( \int_0^s \rho p_1(u)p_4(u)du \right) ds
\end{aligned}$$

とした。

ゆえに、(3.3.1)に(3.3.2)–(3.3.4)を代入することで次の定理が導かれる。

**定理 3.3.1.**  $X_t$  の確率密度関数は、上で定義した  $\Sigma_t$  と  $q_i(t)$  を用いて、

$$f_{X_t}(x) \approx \frac{1}{2} n(x; 0, \Sigma_t) \left[ \frac{q_3(t)}{\Sigma_t^3} h_6 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + \frac{(2q_2(t) + q_4(t))}{\Sigma_t^2} h_4 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) \right. \quad (3.3.5)$$

$$\left. + \frac{2q_1(t)}{(\sqrt{\Sigma_t})^3} h_3 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + \frac{q_5(t)}{\Sigma_t} h_2 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + 2 \right], \quad (3.3.6)$$

で近似される。ここで、 $n(x; a, b)$  は平均  $a$ 、分散  $b$  の正規分布の密度関数である。

### 3.3.2 オプション価格

最後に、資産  $S_t$  の上に書かれた、行使価格  $K$ 、満期  $t$  のヨーロピアン・コール・オプション価格の近似式を算出する。ヨーロピアン・コール・オプションの価格は、 $K' := 1 - \frac{K}{F(0, t)}$  とすると

$$C(t) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^t r(s) ds} (S_t - K)^+ \right] = F(0, t) \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^t r(s) ds} (X_t + K')^+ \right],$$

で与えられる。ゆえに、

$$C(t) = S(0) \int_{-K'}^{\infty} (x + K') f_{X_t}(x) dx.$$

である。ここで、定理 3.3.1 を用いることで、次の結果が従う。

**定理 3.3.2.** 満期  $t$ 、行使価格  $K$  のヨーロピアン・コール・オプションの価格は、標準正規分布の累積密度関数  $\Phi(x)$  を用いて、

$$\begin{aligned} C(t) \approx & \frac{S_0 n(K'; 0, \Sigma)}{2\sqrt{2}\Sigma^4} \left[ \sqrt{2}q_3(t)(K'^4 - 6K'^2\Sigma + 3\Sigma^2) \right. \\ & + \Sigma^2\sqrt{2}(q_4(t) + 2q_2(t))(K'^2 - \Sigma) \\ & \left. + \Sigma^3 \left\{ -2\sqrt{2}q_1(t)K' + \sqrt{2}q_5(t)\Sigma + 2\sqrt{2}\Sigma^2 \right\} \right] \\ & + S_0 K' \left( 1 - \Phi\left(\frac{-K'}{\sqrt{\Sigma}}\right) \right), \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

で近似される。

## 3.4 数値計算

数値計算を通して、ヨーロピアン・コール・オプション価格の近似式の精度を確認する。本節では、局所ボラティリティ・モデルと確率ボラティリティ・モデルについて (3.3.7) の価格式とモンテカルロ法により得られた結果を比較する。また、より汎用的なモデルとして局所ボラティリティ・モデルと確率ボラティリティ・モデルの複合モデルを提案し、実際の為替オプション市場にキャリブレーションし、その有効性を実証する。

### 3.4.1 拡散変換 (DD) モデル

はじめに、局所ボラティリティ・モデルの一例として、拡散変換 (DD) モデルを考える。すなわち、確率微分方程式 (3.1.1) 中のボラティリティは、

$$\begin{aligned}\sigma(s, v) &= \sigma(t) \left\{ \beta(t) + (1 - \beta(t)) \frac{S_0}{s} \right\} \\ \gamma(v) &= 0\end{aligned}$$

で与えられるとする。ただし、 $\sigma(t) = \sigma$  と  $\beta(t) = \beta$  は時間の確定値関数である。 $\beta = 1$  のときは、原資産価格は対数正規過程に従い Black-Scholes モデル (Black and Scholes (1973)) と呼ばれ、 $\beta = 0$  のときは、原資産価格は正規分布に従う。

ここでは、 $\beta = 1$  と  $\beta = 0.5$  の場合を考え、満期の短いケース ( $T = 6$ ヶ月) と満期の長いケース ( $T = 5$ 年) を実験する。その他のパラメータは、Marris (1999) の用いた値 ( $r = 0$ ,  $S_0 = 1$ ,  $0.2$ ) を使う。以下の図では、“Analytic” は解析解より計算した値、“WIC” は定理 3.3.2 を用いて計算した値を表している。

図 3.1 に  $\beta = 1$  の場合、図 3.2 に  $\beta = 0.5$  の場合を示す。左図には満期の短い ( $T = 6$ ヶ月) ケース、右図には満期の長い ( $T = 5$ 年) ケースのもとで実験した結果を載せた。

図より、満期が長く、極端にイン・ザ・マネーやアウト・オブ・ザ・マネーが進んだ場合には、誤差が僅かに拡大する傾向があるが、これらのエラーも実務上、問題にならない程度である。

### 3.4.2 Schöbel-Zhu モデル

確率微分方程式 (3.1.1) 中のボラティリティが、 $\nu(t)$  を時間の確定値関数として

$$\begin{aligned}\sigma(s, v) &= v, \\ \gamma(v) &= \nu(t)\end{aligned}$$

で与えられる場合を考える。このモデルは、Schöbel-Zhu モデルと呼ばれ、Ornstein-Zernike 過程と呼ばれている。Schöbel-Zhu model モデルは、実装が容易な上に数値計算の結果が安定しているため、実務上で広く用いられている<sup>3</sup>。この仮定のもと、ヨーロッパン・オプションの価格は、解析的に求めることができる (Schöbel-Zhu (1999) の 2 章を参照)。

以下では、 $\rho = -0.5$ ,  $\rho = 0$ ,  $\rho = 0.5$  の 3 つのケースに対して、それぞれ満期の短い場合 ( $T = 6$ ヶ月) と長い場合 ( $T = 5$ 年) を試す。なお、他のパラメータは Schöbel-Zhu (1999) が用いた値 ( $r(t) = 0.0953$ ,  $S(0) = 100$ ,  $\theta = 0.8$ ,  $\kappa = 4$ ,  $v_0 = 0.2$ ) を使う。

図 3.3–3.5 に、それぞれ  $\rho = -0.5$ ,  $\rho = 0$ ,  $\rho = 0.5$  のケースのもとで算出したヨーロッパン・コール・オプションの価格を載せた。以下の図では、“Analytic” は解析解より計算

<sup>3</sup>同時に欠点も知られている。例えば、Jackel (2004) を参照。

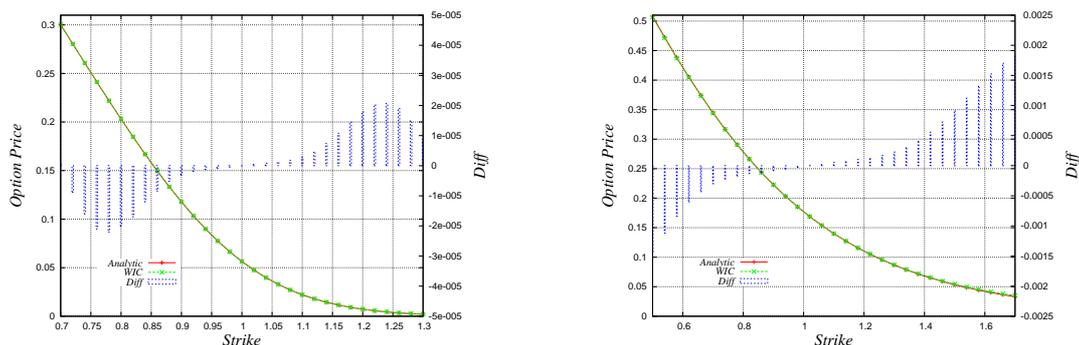


図 3.1:  $\beta = 1$  の場合の拡散変換モデルにおけるオプション価値. 左図は満期が短い場合 ( $T = 6$  months) を表し、右図は満期が長い場合 ( $T = 5$  years) である. Analytic は解析解より導かれる厳密解, WIC は定理 3.3.2 より計算された近時解を表している.

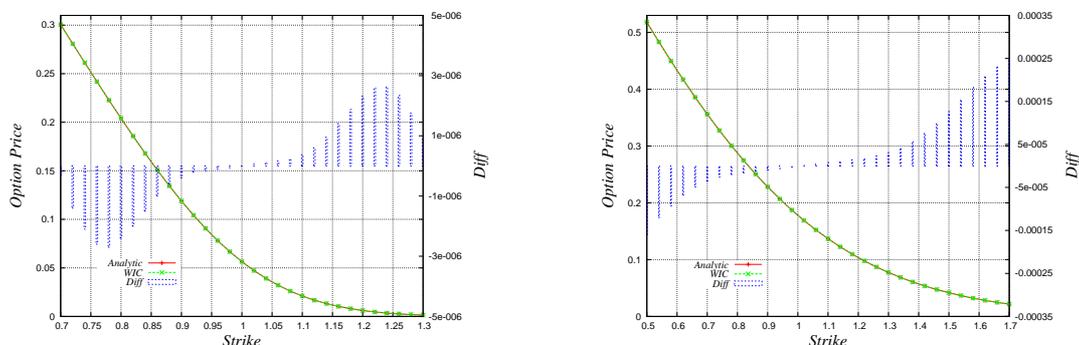


図 3.2:  $\beta = 0.5$  の場合の拡散変換モデルにおけるオプション価値. 左図は満期が短い場合 ( $T = 6$  months) を表し、右図は満期が長い場合 ( $T = 5$  years) である. Analytic は解析解より導かれる厳密解, WIC は定理 3.3.2 より計算された近時解を表している.

した値, “WIC” は定理 3.3.2 を用いて計算した値を表し, 左図に ( $T = 6$ ヶ月) の場合, 右図に満期の長い ( $T = 5$ 年) 場合を載せた.

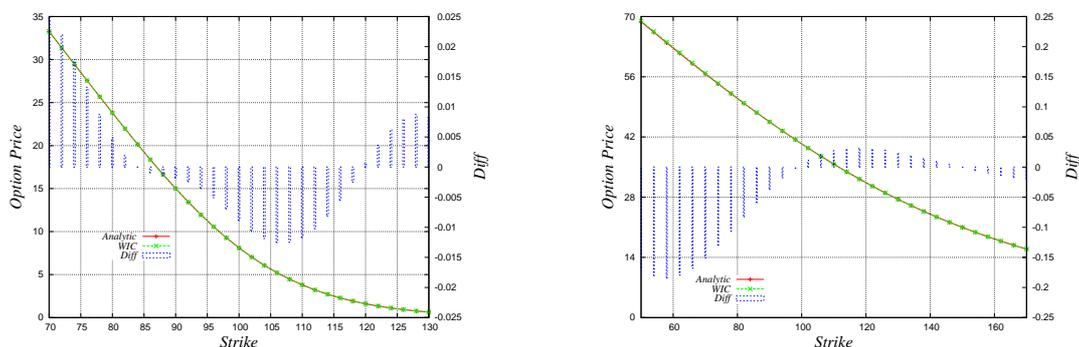


図 3.3: Schöbel-Zhu モデル ( $\rho = 0.5$ ) のもとでのオプション価格. 左図は満期の短い場合 ( $T = 6$ ヶ月), 右図は満期の長い場合 ( $T = 5$ 年) である. “Analytic” は解析解より導かれる厳密解, “WIC” は定理 3.3.2 より計算された近時解を表している. パラメータは  $r(t) = 0.0953, S(0) = 100, \theta = 0.8, \kappa = 4, v_0 = 0.2$  とした.

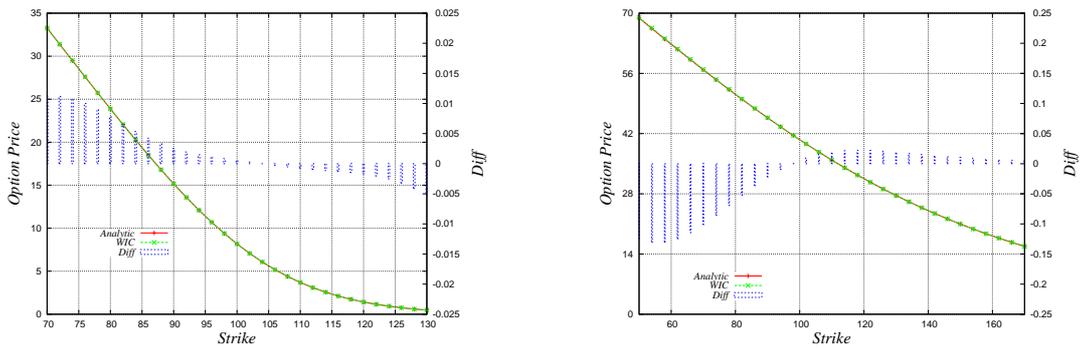


図 3.4: Schöbel-Zhu モデル ( $\rho = 0$ ) のもとでのオプション価格. 左図は満期の短い場合 ( $T = 6$ ヶ月)、右図は満期の長い場合 ( $T = 5$ 年) である.“Analytic”は解析解より導かれる厳密解, “WIC”は定理 3.3.2 より計算された近時解を表している. パラメータは  $r(t) = 0.0953, S(0) = 100, \theta = 0.8, \kappa = 4, v_0 = 0.2$  とした.

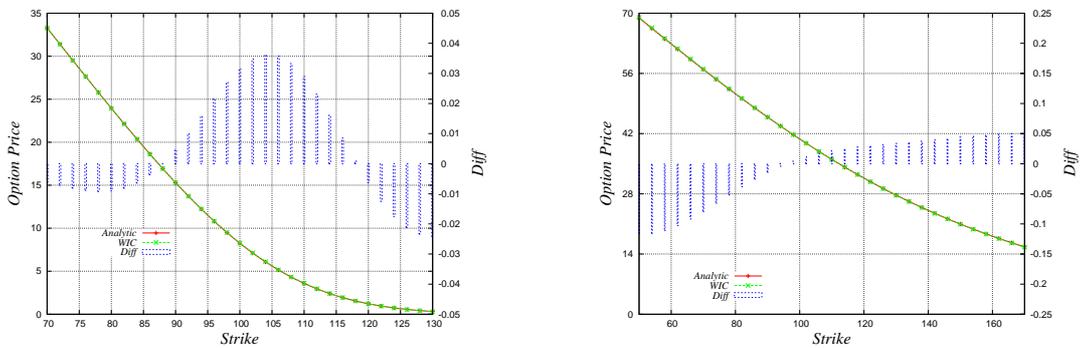


図 3.5: Schöbel-Zhu モデル ( $\rho = -0.5$ ) のもとでのオプション価格. 左図は満期の短い場合 ( $T = 6$ ヶ月)、右図は満期の長い場合 ( $T = 5$ 年) である.“Analytic”は解析解より導かれる厳密解, “WIC”は定理 3.3.2 より計算された近時解を表している. パラメータは  $r(t) = 0.0953, S(0) = 100, \theta = 0.8, \kappa = 4, v_0 = 0.2$  とした.

広範囲に渡る, 行使価格と満期において, カオス展開法による近似と解析解の誤差は非常に小さいことが確認できた. このことから, 定理 3.3.2 の近似式は確率ボラティリティ・モデルでもその精度が成り立つことが示された.

### 3.4.3 ハイブリット・モデル

次に, (3.3.7) の価格公式を用いて, 実際の為替オプション市場 (2011年7月11日) にキャリブレーションする. (3.1.1) 式の中の  $\sigma(s, v)$  と  $\gamma(v)$  は,

$$\begin{aligned} \sigma(s, v) &= v \left\{ \beta(t) + (1 - \beta(t)) \frac{F(0, t)}{s} \right\}, \\ \gamma(v) &= \epsilon(t) \end{aligned}$$

で与えられると仮定する. ただし,  $\beta(t)$  と  $\epsilon(t)$  は時間の確定値である. このモデルは, Schöbel-Zhu モデルと拡散変換モデルの複合モデルと捉えることができる.

$\beta(t)$ ,  $\epsilon(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\kappa(t)$  は, 各満期毎に区分的定数とする:

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^3 \beta_i \chi_{[T_{i-1}, T_i)}, \epsilon(t) = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \chi_{[T_{i-1}, T_i)}, \theta(t) = \sum_{i=1}^3 \theta_i \chi_{[T_{i-1}, T_i)}, \kappa(t) = \sum_{i=1}^3 \kappa_i \chi_{[T_{i-1}, T_i)}$$

ここで,  $T_0 = 0$  とし,  $\chi_A$  は集合  $A$  の定義関数とする. その他のパラメータは,  $S_0 = 80.75$ ,  $v_0 = 10.88\%$ ,  $\rho = -10.67\%$ ,  $r_d = 1.18\%$ ,  $r_f = 3.28\%$  である. 行使価格  $K$  は, 市場の慣行に従い, 25・デルタ・プット, 10・デルタ・プット, アット・ザ・マネー, 10・デルタ・コール, 25・デルタ・コールを用い, 満期は1年, 5年, 10年とする.

各満期と行使価格における, 為替オプションのインプライド・ボラティリティを表 3.1 に示し, 以後市場のパラメータを表すものとして“MKT”と表記する.

表 3.1: 満期, 行使価格, 市場で観測された為替オプションのインプライドボラティリティ

Strike					
T	10 Delta Put	25 Delta Put	ATM	25 Delta Call	10 Delta Call
1y	65.35	72.57	78.50	85.41	93.04
5y	43.18	56.62	68.54	90.35	114.67
10y	27.32	42.57	54.07	93.47	139.52

Implied Volatility					
T	10 Delta Put	25 Delta Put	ATM	25 Delta Call	10 Delta Call
1y	15.51 %	13.28 %	11.98 %	11.88 %	12.59 %
5y	19.72 %	17.05 %	15.35 %	14.35 %	14.99 %
10y	25.03 %	21.47 %	19.55 %	16.87 %	17.01 %

表 3.2 に市場データにキャリブレーションしたモデルのパラメータを載せる. 表 3.2 の結果を用いて, 満期1年, 5年, 10年のヨーロッパン・オプション価値を図 3.6 に載せた. 図中の“MC”はモンテカルロ法により求めた値, WICは定理 3.3.2 を用いて算出したオプション価値を表している.

表 3.2: 為替オプション市場のインプライド・ボラティリティに校正されたモデル・パラメータ.

$t$	$\beta(t)$	$\theta(t)$	$\kappa(t)$	$\epsilon(t)$
[0,1y)	0.228	0.029	0.223	0.101
[1y,5y)	0.490	0.045	0.179	0.011
[5y,10y)	0.574	0.044	0.164	0.003

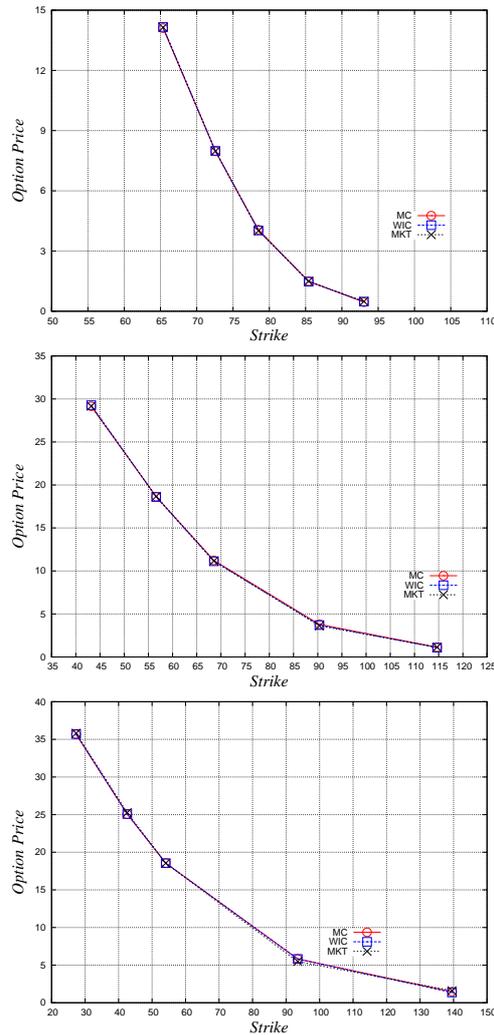


図 3.6: 満期 1 年 (上図)、満期 5 年 (中図)、満期 10 年 (下図) におけるオプション価格. モデルのパラメータは表 3.2 に載せた. MC はモンテカルロ法を用いて求めた値, WIC は定理 2.4.2 により計算した値, MKT は表 3.1 に載せた市場のインプライド・ボラティリティから求めた値を表している. パラメータは  $r(t) = 0, S(0) = 1$  とした.

図から, 広範囲に渡る行使価格と満期において, カオス展開法による近似と解析解の誤差は, 実際のビット・アスク・スプレットに比べて非常に小さいことが確認できる.

### 3.5 小括

カオス展開法 (Funahashi and Kijima (2015)) を確率ボラティリティ・モデルに拡張し, ヨーロピアン・オプションの価格を算出した. 本近似では, 最大でも 3 次の多重積分を計算するのみであり, 計算時間コストは非常に小さく, 実務上問題にならない.

また, 数値計算を通してヨーロピアン・コール・オプション価格の近似式の精度を確認

した。その結果、我々の近似は満期が長くボラティリティが高い場合においても高い精度を維持することが示された。

さらに、より汎用的なモデルとして局所ボラティリティ・モデルと確率ボラティリティ・モデルの複合モデルを提案し、実際の為替オプション市場にキャリブレーションすることで、その有効性を実証した。なお、本手法を用いれば、任意のモデルを市場に校正することでパラメータを決定し、モンテカルロ法や有限差分法を用いて複雑なエキゾティック・デリバティブを評価することが可能になった点も強調しておく。

# 第4章 複雑な金融派生商品の価格付けへの応用

## 4.1 はじめに

最近では数多くの近似手法が提案され、これまで数値計算に頼るしかなかった複雑な金融派生商品を効率的に計算できるようになった。これらの近似手法は、計算時間を大幅に短縮するだけでなく、安定的にリスク指標を計算することを可能にしている。このため、実務の現場ではこれらの近似手法が好んで使われている。

本章では、より複雑な金融派生商品の価格付けにおいてもカオス展開法が有効であることを示すため、解析的にも数值的にも計算が難しいことで知られている、アジア型オプション<sup>1</sup>とバスケット・オプションの近似解を算出する<sup>2</sup>。

アジア型オプションは、約定で決まった期間の平均価格の上にかかれたパス依存型オプションで、企業が業務上抱えるリスクをヘッジする手段の一つとして、コモディティや為替市場で盛んに取引されている。さらに、アジア型オプションはヨーロッパ・オプション、キャップ、フロアーといった商品よりも価格が安いいため実務家に好んで用いられている。

このタイプのオプションは計算が難しいことで知られていることから、数多くの研究者がこの問題に取り組んできた。有限差分法やモンテカルロ法を用いた手法は、Kemna and Vorst (1990), Dewynne and Wilmott (1993), Rogers and Shi (1995), Forsyth et al. (1996), Lapeyre and Temam (2001), Hoogland and Neumann (2000), Vecer (2001)により提案されている。しかし、一般的にはこれらの手法は実務で用いるには計算負荷が大きいため近似的解法が好まれる傾向がある。

例えば、原資産価格がブラック・ショールズ・モデル (Black-Scholes (1973)) に従う場合には、幾つかの有効的な近似手法が提案されている。Turnbull and Wakeman (1991) や Ritchken et al. (1993) は4次のエッジワース展開を対数正規分布に適用し、アジア型オプションの近似解を算出している。Levy (1992) は、Turnbull と Wakeman の近似手法を発展させ、より精緻な近似解を提案している。Milevsky and Posner (1998) は、逆ガンマ分布に従うアジア型オプションの近似式を算出した。Posner and Milevsky (1998) は Johnson 関数を

<sup>1</sup>本稿では、算術平均オプションのみを扱う。

<sup>2</sup>本章の内容は、Funahashi and Kijima (2014a) を参照している。

用いて、最初の4次のモーメントが合うように状態価格密度を近似し、それを用いてアジア型オプションの近似解を導いた。Ju (2002) は、6次のテーラー展開を用いて算術平均価格の特性関数を対数正規確率変数の特性関数で近似することで非常に精緻な近似を可能にした。一般的な拡散モデルでは、Yoshida (1992) や Takahashi (1999) が Malliavin-Watanabe 理論を応用し、2次の漸近近似を算出している。また、Fouque and Han (2003) は特異摂動近似を用いて確率ボラティリティ・モデルのもとでのアジア型オプションの価格式を導いている。

一方、バスケット・オプションはペイオフが2つ以上の資産の上に書かれたエキゾティック・オプションである。例えば、インデックス・オプション、スプレット・オプション、レインボー・オプションなどが、実務では頻繁に取引されている。このタイプのオプションは、多通貨に渡り価格変動リスクを負っている金融機関が、各通貨のバニラ・オプションを個別に買うより安くリスクをヘッジできることから為替市場で特に盛んに取引されている。バスケット・オプションでも、Rubinstein (1991), Pellizzari (2001), Hager et al (2010) をはじめ数多くの数値計算手法が提案されている。しかし、多くの状態変数を計算する必要があるため計算負荷は非常に大きいのが難点である。そのため、アジア型オプション同様に近似解が非常に重要な役割を果たしているのである。先に述べた Turnbull and Wakeman (1991), Ritchken et al. (1993), Levy (1992), Milevsky and Posner (1998), Posner and Milevsky (1998), Ju (2002) の手法を用いれば、ブラック・ショールズ・モデルの下でのバスケット・オプションの近似解を計算することも可能である。この点については、Ju (2002) や Krekel et al. (2004) が詳しい。同様に、Takahashi (1999) は原資産が一般の拡散過程に従う場合にバスケット・オプションの近似解を2次の漸近展開を用いて導くことに成功している。

ところで、従来の Black-Scholes モデルでは市場のスキューやスマイルを再現できないため、対数正規分布を仮定した従来の手法は実務に則していない。以下では、局所ボラティリティ・モデルを仮定して議論を進めていくが、3章の議論から確率ボラティリティ・モデルでも全く同様の議論が成り立つことを強調しておく。加えて、本手法の近似精度は非常に高く、他の先行研究では正確に近似することができなかった、満期が長くボラティリティが高い場合においても近似の精度を維持することを数値計算を通して示す。

本章の構成は、以下の通りである。次節では、多次元資産に対してカオス展開法を応用し、各資産価格を伊藤の多重積分の形で近似する。3節では、2節の結果を用いて多次元資産からなるアジア型オプションの価格式を近似する。4節では、より現実的なモデルを仮定し、カオス展開を適用する。5節では、厳密解やモンテカルロ法と近似解を比較を通して、カオス展開法を用いた近似の精度を確かめる。最後に6節でまとめる。

## 4.2 多次元資産への拡張

$N$  個の危険資産  $\{S_{i,t}\}_{0 \leq t \leq T}, i = 1, 2, \dots, N$  と安全資産  $\{S_{0,t}\}_{0 \leq t \leq T}$  からなる経済を考える. 無リスク資産をバンク・アカウントとし, 安全利子率  $r(t)$  は時間の確定値関数であるとする. また, 各危険資産は, リスク中立測度  $\mathbb{Q}$  のもとで, 以下の確率微分方程式に従うと仮定する:

$$\frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} = r(t)dt + \sigma_i(\mathbf{S}_t, t)dW_{i,t}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.2.1)$$

ここで,  $\mathbf{S}_t = (S_{1,t}, \dots, S_{N,t})$ , ボラティリティ関数  $\sigma_i(\mathbf{s}, t)$  は資産価格  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$  と時間  $t$  の確定値関数とし,  $(\mathbf{s}, t)$  に対して正則関数とする. また,  $\{W_{i,t}\}_{t \geq 0}$  は, 測度  $\mathbb{Q}$  のもとでの標準ブラウン運動で, 相関は  $dW_{i,t}dW_{j,t} = \rho_{i,j}dt$  で与えられる.

本章では, 多次元局所ボラティリティ・モデル (4.2.1) を仮定し, 関数  $w_{i,t}$  で重み付けされた確率変数

$$V_T := \sum_{i=1}^N \int_0^T w_{i,t} S_{i,t} dt, \quad V_0 = V \quad (4.2.2)$$

の上にかかれた満期  $T$ , ストライク  $K$  のバスケット・アジアン・オプションのコール価格

$$C(V, K, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^T r(u)du} (V_T - K)^+ \right] \quad (4.2.3)$$

を計算する. ここで,  $C(V, K, T)$  は, 以下のオプションの一般化になっている:

**ヨーロッパン・オプション** 任意の  $t \geq 0$  に対して,  $N = 1$ ,  $w_{1,t} = \delta(T - t)$  としたとき,  $V_t = S_{1,T}$  であるから, (4.2.3) はヨーロッパン・オプションとなる.

**アジア型オプション** 任意の  $0 \leq t \leq T$  に対して,  $N = 1$ ,  $w_{1,t} = 1/T$  としたとき,  $V_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_{1,t} dt$  であるから, (4.2.3) はアジア型オプションである.

**パーシャル・アジアン・オプション**  $N = 1$  とし,  $T_1 \leq t \leq T_2$  ( $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$ ) では  $w_{1,t} = 1/(T_2 - T_1)$ , その他では  $w_{1,t} = 0$  であるとする. このとき,  $V_T = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} S_{1,t} dt$  となり, (4.2.3) はパーシャル・アジアン・オプションと呼ばれている.

**バスケット・オプション**  $\delta(u)$  をディラック・デルタ関数とし,  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) を固定値とする. このとき,  $w_{i,t} = w_i \delta(T - t)$  とすれば,  $V_T = \sum_{i=1}^N w_i S_{i,T}$  であるから, (4.2.3) はバスケット・オプションである.

**スプレッド・オプション** バスケット・オプションの特殊なケースとして,  $N = 2$ ,  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = -1$  としたとき,  $V_T = S_{1,T} - S_{2,T}$  であるから, (4.2.3) はスプレッド・オプションとなる.

**バスケット・アジアン・オプション** 任意の  $0 \leq t \leq T$  に対して,  $w_{i,t} = 1/T, i = 1, 2, \dots, N$  としたとき,  $V_T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{T} \int_0^T S_{i,t} dt$  となり, (4.2.3) はバスケット・アジアン・オプションとなる.

### 4.3 カオス展開法

カオス展解法を多次元資産価格の確率過程 (4.2.1) に適用する.

伊藤の公式を (4.2.1) に適用することで

$$S_{i,t} = F_i(0, t) \exp \left[ J_{i,t}(\sigma_i) - \frac{1}{2} \|\sigma_i\|_t^2 \right] \quad (4.3.1)$$

を得る. ただし,  $F_i(0, t) = S_{i,0} e^{\int_0^t r(u) du}$  は, 受け渡し日  $t$  の先渡し価格を表し,  $J_{i,t}(g) = \int_0^t g(u) dW_{i,u}$ ,  $\|g\|_t^2 = \int_0^t g^2(u) du$  とする. ところで, これまでの議論から, 各資産価格は任意の  $\sigma_i \in L^2([0, T])$  に対して,  $n$  次の Hermite 多項式  $h_n(x)$  を用いて

$$S_{i,t} = F_i(0, t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\sigma_i\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_{i,t}(\sigma_i)}{\|\sigma_i\|_t} \right) \quad (4.3.2)$$

と書ける.

次に,  $S_{i,t}^{(0)} = F_i(0, t)$  として  $S_{i,t}^{(m)}$  を逐次的に

$$S_{i,t}^{(m+1)} = F_i(0, t) \exp \left[ J_t(\sigma_i^{(m)}) - \frac{1}{2} \|\sigma_i^{(m)}\|_t^2 \right], \quad (4.3.3)$$

と定義する. ただし,  $\sigma_i^{(m)}(t) = \sigma_i(\mathbf{S}_t^{(m)}, t)$ ,  $\mathbf{S}_t^{(m)} = (S_{1,t}^{(m)}, \dots, S_{N,t}^{(m)})$  とした.

Funahashi and Kijima (2015) と同様に,  $\mathbf{S}_t^{(m)}$  は, ほとんど確実に  $m \rightarrow \infty$  に対して  $\mathbf{S}_t$  に収束すると仮定する. このとき,

$$S_{i,t} = S_{i,t}^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ S_{i,t}^{(m+1)} - S_{i,t}^{(m)} \right\}$$

がいえる. また, (4.3.2) と (4.3.3) より

$$\frac{S_{i,t}^{(m+1)}}{F_i(0, t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\sigma_i^{(m)}\|_t^n}{n!} h_n \left( \frac{J_{i,t}(\sigma_i^{(m)})}{\|\sigma_i^{(m)}\|_t} \right)$$

であるから,

$$I_{i,m,n}(t) = \frac{1}{n!} \left\{ \|\sigma_i^{(m)}\|_t^n h_n \left( \frac{J_{i,t}(\sigma_i^{(m)})}{\|\sigma_i^{(m)}\|_t} \right) - \|\sigma_i^{(m-1)}\|_t^n h_n \left( \frac{J_{i,t}(\sigma_i^{(m-1)})}{\|\sigma_i^{(m-1)}\|_t} \right) \right\} \quad (4.3.4)$$

と定義すると

$$S_{i,t} = S_{i,t}^{(1)} + F_i(0,t) \sum_{m,n=1}^{\infty} I_{i:m,n}(t)$$

が従う。

$S_{i,t}$  は, Funahashi and Kijima (2015) 同様, 実務的な理由から  $m+n \geq 4$  の項を無視する。ゆえに,

$$S_{i,t} \approx S_{i,t}^{(1)} + F_i(0,t) \sum_{m+n \leq 3} I_{i:m,n}(t) \quad (4.3.5)$$

である。この近似は, ボラティリティが  $L_2$  の意味で十分に小さいとき, Funahashi and Kijima (2015) の命題 2.2 により正当化される。

ところで, Nualart (2006) の命題 1.14 から (4.3.5) の右辺第 1 項は

$$\frac{S_{i,t}^{(1)}}{F_i(0,t)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma_i^{(0)}(t_1) \sigma_i^{(0)}(t_2) \cdots \sigma_i^{(0)}(t_n) dW_{i,t_1} \cdots dW_{i,t_n}$$

と書ける。ここで,  $\sigma_i^{(0)}(t) = \sigma_i(\mathbf{S}_t^{(0)}, t)$  と  $\mathbf{S}_t^{(0)} = (F_1(0,t), \dots, F_N(0,t))$  は確定値関数である。しがたがって, 高次の項を無視すると,

$$S_{i,t}^{(1)} \approx F_i(0,t) \left[ 1 + \int_0^t \sigma_i^{(0)}(t_1) dW_{i,t_1} + \int_0^t \int_0^{t_2} \sigma_i^{(0)}(t_1) \sigma_i^{(0)}(t_2) dW_{i,t_1} dW_{i,t_2} + \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \sigma_i^{(0)}(t_1) \sigma_i^{(0)}(t_2) \sigma_i^{(0)}(t_3) dW_{i,t_1} dW_{i,t_2} dW_{i,t_3} \right] \quad (4.3.6)$$

となる。

$I_{i:m,n}(t)$ ,  $m+n \leq 3$  を近似するため, Funahashi and Kijima (2015) と同様に  $\mathbf{S}_t^{(m-1)}$  の周りでテーラー展開を行う。すなわち,  $J_{i,t}(\sigma_i^{(m)}) = \int_0^t \sigma_i(\mathbf{S}_u^{(m)}, u) dW_{i,u}$  であるから

$$\begin{aligned} J_{i,t}(\sigma_i^{(m)}) &\approx J_{i,t}(\sigma_i^{(m-1)}) + \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(m-1)}(u) \{S_{p,u}^{(m)} - S_{p,u}^{(m-1)}\} dW_{i,u} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_{pp} \sigma_i^{(m-1)}(u) \{S_{p,u}^{(m)} - S_{p,u}^{(m-1)}\}^2 dW_{i,u} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p \neq q}^N \int_0^t \partial_{pq} \sigma_i^{(m-1)}(u) \{S_{p,u}^{(m)} - S_{p,u}^{(m-1)}\} \{S_{q,u}^{(m)} - S_{q,u}^{(m-1)}\} dW_{i,u} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

がいえる。ここで,  $\partial_p \sigma_i^{(m)}(u)$  は,  $\sigma_i^{(m)}(u)$  の  $p$  番目の変数での偏微分,  $\partial_{pq} \sigma_i^{(m)}(u)$  は  $p$  番目と  $q$  番目の変数での偏微分を表している。また,

$$J_t^2(\sigma^{(m)}) \approx J_t^2(\sigma^{(m-1)}) + 2J_t(\sigma^{(m-1)}) \left( \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma^{(m-1)}(u) \{S_{p,u}^{(m)} - S_{p,u}^{(m-1)}\} dW_{i,u} \right) \quad (4.3.8)$$

である。

(4.3.7) と (4.3.8) を繰り返し用いることで、次の結果が従う。証明は、付録 E に載せた。

**補題 4.3.1.** (4.3.4) で定義された  $I_{i:m,n}(t)$  は、次のように近似できる:

$$\begin{aligned}
I_{i:1,1}(t) &\approx \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\
&+ \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\
&+ \sum_{p,q=1}^N \int_0^t \partial_{pq} \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) F_q(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_q^{(0)}(r) dW_{q,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N \int_0^t \partial_{pq} \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) F_q(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \sigma_q^{(0)}(u) du \right) dW_{i,s}, \\
I_{i:1,2}(t) &\approx \sum_{p=1}^N \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) \left( \int_0^s \partial_p \sigma_i^{(0)}(u) F_p(0, u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\
&+ \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \\
&+ \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\
&+ \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \sigma_p^{(0)}(u) du \right) dW_{i,s}, \\
I_{i:2,1}(t) &\approx \sum_{p,q=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)} F_p(0, s) \left( \int_0^s \partial_q \sigma_p^{(0)} F_q(0, s) \left( \int_0^u \sigma_q^{(0)}(r) dW_{q,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}.
\end{aligned}$$

ここで、補題 4.3.1 の被積分関数は全て確定値関数である。

これらの結果から、次のことがいえる。

**定理 4.3.1.** 各資産価格  $S_{i,t}$  は、

$$S_{i,t} \approx F_i(0, t) [1 + A_{i,t}^1 + A_{i,t}^2 + A_{i,t}^3], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3.9)$$

で近似される。ただし,

$$\begin{aligned}
A_{i,t}^1 &= \int_0^t P_i^1(s) dW_{i,s}, \\
A_{i,t}^2 &= \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \\
&\quad + \sum_{p=1}^N \int_0^t P_{i:p}^2(s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\
A_{i,t}^3 &= \sum_{k=1}^7 A_{i,t}^3(k)
\end{aligned}$$

と定義し,  $A_{i,t}^3(k)$  は

$$\begin{aligned}
A_{i,t}^3(1) &= \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s}, \\
A_{i,t}^3(2) &= \sum_{p=1}^N \int_0^t P_{i:p}^2(s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}, \\
A_{i,t}^3(3) &= \sum_{p=1}^N \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) \left( \int_0^s P_{i:p}^2(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}, \\
A_{i,t}^3(4) &= \sum_{p=1}^N \int_0^t P_{i:p}^2(s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s}, \\
A_{i,t}^3(5) &= \sum_{p=1}^N \int_0^t P_{i:p}^2(s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}, \\
A_{i,t}^3(6) &= \sum_{p,q=1}^N \int_0^t P_{i:p}^2(s) \left( \int_0^s P_{p:q}^2(s) \left( \int_0^u \sigma_q^{(0)}(r) dW_{q,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}, \\
A_{i,t}^3(7) &= \sum_{p,q=1}^N \int_0^t P_{i:p,q}^3(s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_q^{(0)}(r) dW_{q,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}.
\end{aligned}$$

である。また,  $P_i^k(t)$  は全て確定値関数で

$$\begin{aligned}
P_i^1(s) &:= \sigma_i^{(0)}(s) + \sum_{p=1}^N \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \sigma_p^{(0)}(u) du \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N \partial_{pq} \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) F_q(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \sigma_q^{(0)}(u) du \right), \\
P_{i:p}^2(s) &:= \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s), \\
P_{i:p,q}^3(s) &:= \partial_{pq} \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) F_q(0, s)
\end{aligned}$$

で与えられる.

このことから,

$$a_{i,k}(T) = \int_0^T w_{i,t} F_i(0,t) A_{i,t}^k dt, \quad k = 1, 2, 3$$

と定義すると. (4.3.9) より,

$$\int_0^T w_{i,t} S_{i,t} dt \approx \int_0^T w_{i,t} F_i(0,t) dt + a_{i,1}(T) + a_{i,2}(T) + a_{i,3}(T), \quad (4.3.10)$$

であるから, 積分の順序を交換すると,

$$a_{i,1}(T) = \int_0^T \bar{p}_i^1(t, T) dW_{i,t}, \quad \bar{p}_i^1(t, T) := P_i^1(t) \int_t^T w_{i,s} F_i(0,s) ds,$$

と

$$\begin{aligned} a_{i,2}(T) &= \int_0^T \bar{s}_i(t, T) \left( \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) dW_{p,s} \right) dW_{i,t} \\ &\quad + \sum_{p=1}^N \int_0^T \bar{p}_{i:p}^2(t, T) \left( \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) dW_{p,s} \right) dW_{i,t}, \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\bar{s}_i(t, T) := \sigma_i^{(0)}(t) \int_t^T w_{i,s} F_i(0,s), \quad \bar{p}_{i:p}^2(t, T) := P_{i:p}^2(t) \int_t^T w_{i,s} F_i(0,s)$$

である.

$a_{i,3}(T)$  も同様に表記できる. たとえば,  $a_{i,3}(T)$  の最初の項は

$$\begin{aligned} a_{i,3}^1(T) &:= \int_0^T w_{i,t} F_i(0,t) A_{i,t}^3(1) dt \\ &= \int_0^T \bar{s}_i(t, T) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \end{aligned}$$

である. 他の項  $a_{i,3}^k(T)$ ,  $k = 2, \dots, 7$  の定義は, 付録 F に載せた.

したがって, (4.2.2) 中の確率変数  $V_T$  は,

$$V_T \approx \sum_{i=1}^N \int_0^T w_{i,t} F_i(0,t) dt + a_1(T) + a_2(T) + a_3(T), \quad (4.3.11)$$

と近似できる. ただし,  $a_k(T) = \sum_{i=1}^N a_{i,k}(T)$  と定義した.

## 4.4 一般的モデルへの応用

ここまで、一般的な局所ボラティリティ・モデル (4.2.1) として、ボラティリティ関数が  $N$  個の資産全てに依存する場合を議論してきた。しかし、この定式化は、実務で用いるには複雑すぎることが多い。本章では、(4.2.1) の特殊な場合として、ボラティリティ関数が自身の価格にのみ依存する場合を考える：

$$\frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} = r(t)dt + \sigma_i(S_{i,t}, t)dW_{i,t}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.4.1)$$

このとき、定理 4.3.1 で定義された関数  $P_i^k(s)$  は

$$\begin{aligned} P_i^1(s) &:= \sigma_i^{(0)}(s) + \partial_i \sigma_i^{(0)}(s) F_i(0, s) \left( \int_0^s \left\{ \sigma_i^{(0)}(u) \right\}^2 du \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_{ii} \sigma_i^{(0)}(s) F_i^2(0, s) \left( \int_0^s \left\{ \sigma_i^{(0)}(u) \right\}^2 du \right), \\ P_{i:i}^2(s) &:= \partial_i \sigma_i^{(0)}(s) F_i(0, s), \\ P_{i:i,i}^3(s) &:= \partial_{ii} \sigma_i^{(0)}(s) F_i^2(0, s) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

となる。ゆえに、各資産価格は

$$\begin{aligned} S_{i,t} \approx & F_i(0, t) \left[ 1 + \int_0^t r_{i,1}(s) dW_{i,s} + \int_0^t r_{i,2}(s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \right. \\ & + \int_0^t r_{i,3}(s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \\ & \left. + \int_0^t r_{i,4}(s) \left( \int_0^s r_{i,5}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \right], \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

と書ける。ここで、 $\sigma_i^{(0)}(s) := \sigma_i(F_i(0, s), s)$ ,

$$\begin{aligned} r_{i,1}(s) &:= P_i^1(s) \\ r_{i,2}(s) &:= \sigma_i^{(0)}(s) + P_{i:i}^2(s), \\ r_{i,3}(s) &:= \sigma_i^{(0)}(s) + 3P_{i:i}^2(s) + P_{i:i,i}^3(s), \\ r_{i,4}(s) &:= \sigma_i^{(0)}(s) + P_{i:i}^2(s), \\ r_{i,5}(s) &:= P_{i:i}^2(s) \end{aligned}$$

である。

同様に、(4.3.10) 中の多重積分  $a_{i,k}(T)$  も

$$\begin{aligned}
a_{i,1}(T) &= \int_0^T \bar{r}_{i,1}(t) dW_{i,t}, \\
a_{i,2}(T) &= \int_0^T \bar{r}_{i,2}(t) \left( \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) dW_{i,s} \right) dW_{i,t}, \\
a_{i,3}(T) &= \int_0^T \bar{r}_{i,3}(t) \left( \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \right) dW_{i,t} \\
&\quad + \int_0^T \bar{r}_{i,4}(t) \left( \int_0^s r_{i,5}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s}.
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

と書ける。ただし、 $\bar{r}_{i,k}(t) = r_{i,k}(t) \int_t^T w_{i,s} F(0, s) ds$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  である。

また、条件付期待値は

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[a_2(t) | a_1(t) = x] &= q_1(t) \left( \frac{x^2}{\Sigma_t^2} - \frac{1}{\Sigma_t} \right), \\
\mathbb{E}[a_3(t) | a_1(t) = x] &= q_2(t) \left( \frac{x^3}{\Sigma_t^3} - \frac{3x}{\Sigma_t^2} \right), \\
\mathbb{E}[a_2^2(t) | a_1(t) = x] &= q_3(t) \left( \frac{x^4}{\Sigma_t^4} - \frac{6x^2}{\Sigma_t^3} + \frac{3}{\Sigma_t^2} \right) + q_4(t) \left( \frac{x^2}{\Sigma_t^2} - \frac{1}{\Sigma_t} \right) + q_5(t),
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= \sum_{i,j,k=1}^N \int_0^t \rho_{i,j} \bar{r}_{j,1}(s) \bar{r}_{i,2}(s) \left( \int_0^s \rho_{i,k} \sigma_i^{(0)}(u) \bar{r}_{k,1}(u) du \right) ds, \\
q_2(t) &= \sum_{i,j,k,l=1}^N \int_0^t \rho_{i,j} \bar{r}_{j,1}(s) \bar{r}_{i,3}(s) \left( \int_0^s \rho_{i,k} \sigma_i^{(0)}(u) \bar{r}_{k,1}(u) \left( \int_0^u \rho_{i,l} \sigma_i^{(0)}(r) \bar{r}_{l,1}(r) dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^N \int_0^t \rho_{i,j} \bar{r}_{j,1}(s) \bar{r}_{i,4}(s) \left( \int_0^s \rho_{i,k} \bar{r}_{k,1}(u) r_{i,5}(u) \left( \int_0^u \rho_{i,l} \sigma_i^{(0)}(r) \bar{r}_{l,1}(r) dr \right) du \right) ds, \\
q_3(t) &= q_1^2(t), \\
q_4(t) &= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^N \int_0^t \rho_{i,k} \bar{r}_{k,1}(s) \bar{r}_{i,2}(s) \left( \int_0^s \rho_{j,l} \bar{r}_{l,1}(u) \bar{r}_{j,2}(u) \left( \int_0^u \rho_{i,j} \sigma_i^{(0)}(r) \sigma_{j,0}(r) dr \right) du \right) ds \\
&\quad + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^N \int_0^t \rho_{i,k} \bar{r}_{k,1}(s) \bar{r}_{i,2}(s) \left( \int_0^s \rho_{i,j} \sigma_i^{(0)}(u) \bar{r}_{j,2}(u) \left( \int_0^u \rho_{j,l} \sigma_{j,0}(r) \bar{r}_{l,1}(r) dr \right) du \right) ds \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^N \int_0^t \rho_{i,j} \bar{r}_{i,2}(s) \bar{r}_{j,2}(s) \left( \int_0^s \rho_{i,l} \sigma_i^{(0)}(u) \bar{r}_{l,1}(u) du \right) \left( \int_0^s \rho_{j,m} \sigma_{j,0}(u) \bar{r}_{m,1}(u) du \right) ds, \\
q_5(t) &= \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \rho_{i,j} \bar{r}_{i,2}(s) \bar{r}_{j,2}(s) \left( \int_0^s \rho_{i,j} \sigma_i^{(0)}(u) \sigma_{j,0}(u) du \right) ds
\end{aligned}$$

である。

これらの結果から、次の定理が従う。

**定理 4.4.1.**  $X_t$  の密度関数は

$$f_{X_t}(x) \approx \frac{1}{2} n(x; 0, \Sigma_t) \left[ \frac{q_3(t)}{\Sigma_t^3} h_6 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + \frac{(2q_2(t) + q_4(t))}{\Sigma_t^2} h_4 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + \frac{2q_1(t)}{(\sqrt{\Sigma_t})^3} h_3 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + \frac{q_5(t)}{\Sigma_t} h_2 \left( \frac{x}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + 2 \right]$$

で近似される。ここで、 $\Sigma_t$  と  $q_i(t)$  は上で定義された関数で、 $n(x; a, b)$  は平均  $a$ 、分散  $b$  の正規分布の密度関数である。

**定理 4.4.2.** 満期  $t$ 、権利行使価格  $K$  のヨーロピアン・コール・オプションの価格は

$$C(T) \approx \frac{e^{-\int_0^T r(t)dt} n(\bar{K}; 0, \Sigma)}{2\Sigma^4} \left[ q_3(T)(\bar{K}^4 - 6\bar{K}^2\Sigma + 3\Sigma^2) + \Sigma^2 (q_4(T) + 2q_2(T)) (\bar{K}^2 - \Sigma) + \Sigma^3 \{-2q_1(T)\bar{K} + q_5(T)\Sigma + 2\Sigma^2\} \right] + e^{-\int_0^T r(t)dt} \bar{K} \left( 1 - \Phi(-\bar{K}/\sqrt{\Sigma}) \right)$$

で近似される。ただし、 $\Phi(x)$  は標準正規分布の累積密度関数を表している。

## 4.5 数値計算

本節では、数値計算を通して、カオス展開近似の精度を検証する。バスケット・オプションやアジア型オプションの解析解は多くの場合存在しないため、モンテカルロ法と近似解を比較する。以下では、定弾性拡散 (CEV) モデルとより複雑な非線形モデルを例に検証する。

### 4.5.1 定弾性拡散 (CEV) モデル

原資産価格が、定弾性拡散 (CEV) モデルに従うと仮定する。すなわち、確率微分方程式 (4.3.1) 中のボラティリティは、各  $i$  に関して

$$\sigma_i(S_{i,t}, t) := \sigma_i S_{i,t}^{\beta_i - 1}, \quad t \geq 0$$

で与えられると仮定する。ここで、 $\sigma_i$  と  $\beta_i$  は固定値とする。

図4.1–4.4に、定理4.4.2を用いて計算したオプション価格とモンテカルロ法により算出したオプション価格を載せた。左図は満期が短い場合（6ヶ月）、右図は満期が長い場合（5年）を表している。

図4.1では、平方根モデル( $\beta(t) = 0.5$ )のもとでのアジア型オプションのコール価格を表し、パラメータは $S_0 = 100, r = 0.03, \sigma = 1.33$ とした。

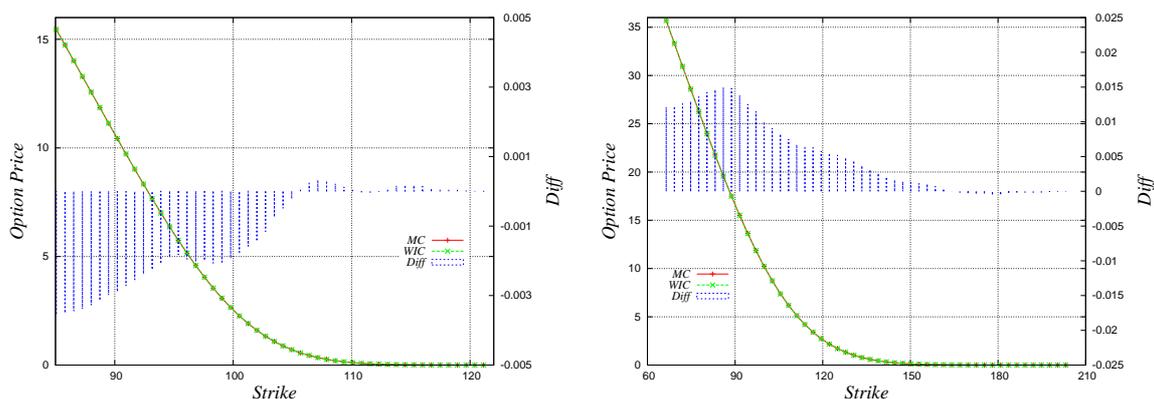


図4.1: 平方根モデルの下でのアジア型オプションの価格. 左図は満期 ( $T = 6$ ヶ月) の短い場合, 右図は満期の長い場合 ( $T = 5$ 年) である. MC は, モンテカルロ法により計算したオプション価格, WIC は定理4.4.2を用いて計算したオプション価格である. パラメータは,  $S_0 = 100, r = 0.03, \sigma = 0.15$ を用いた。

一方, 図4.2–4.4では, 2つの異なる資産からなるバスケット・オプションの価格を載せた. パラメータは $r = 0.03, S_{1,0} = S_{2,0} = 100, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 1.33$ とし, 資産1は平方根モデル, 資産2はブラック・ショールズ・モデルを仮定した. 図4.2–4.4は, 相関が $\rho = 0.75, \rho = 0, \rho = -0.75$ の場合を表している. 左図は満期が短い場合（6ヶ月）、右図は満期が長い場合（5年）である。

これらの図から, 満期が長く極端にイン・ザ・マネーやアウト・オブ・ザ・マネーが進んだ場合には, 誤差が僅かに拡大する傾向があるが, 誤差は限定的で, 実務上問題が無い範囲内である。

## 4.5.2 キャリブレーション

最後に, 実際の市場へのキャリブレーションを通して, 近似式(4.4.2)の有効性を確認する. 以下では, (4.4.2)式を用いてモデルのパラメータを為替オプション市場で観測されたボラティリティに校正することを考える。

このため, 確率微分方程式(4.3.1)を以下の通り修正する:

$$\frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} = (r_d(t) - r_{i,f}(t))dt + \sigma_i(S_{i,t}, t)dW_{i,t}, \quad i = 1, 2. \quad (4.5.1)$$

ただし,  $r_d(t)$  と  $r_{i,f}(t)$  は国内金利と外国金利を表している. この仮定のもと, 先渡し価格 (4.4.2) は,  $F_i(0, t) = \exp\{\int_0^t (r_d(s) - r_{i,f}(s)) ds\}$  と修正される. また, ボラティリティ・スマイルを取り込むため, (4.4.2) 中のボラティリティが

$$\sigma_i(x, t) := \left( \alpha_i + \beta_i x + \frac{\gamma_i}{x} + \delta_i x^2 \right) e^{-\epsilon_i x}, \quad t \geq 0 \quad (4.5.2)$$

で与えられると仮定する. このボラティリティの定式化は Funahashi and Kijima (2015) が詳しい.

最初に, アジア型オプションを考える. 近似式 (4.4.2) を用いて, 2011 年 11 月 11 日の 5 年為替オプション市場 (円・ドル) で観測されたボラティリティにキャリブレーションした. 結果は次のとおりである:

$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\delta_1$	$\epsilon_1$
1.29531	-1.99897	-0.00018	0.809651	1.014743

図 4.5 に, 3 年アジア型オプションのオプション価格を載せた. 図の中で, “MC” はモンテカルロ法により求めたオプション価格を表し, “WIC” は定理 4.4.2 の近似式を用いて計算したオプションの価格を表している. 他のパラメータは  $r_d(t) = 0.0977$ ,  $r_{1,f}(t) = 0.0222$ ,  $S_{1,0} = 77.54$  である.

次に, 2 つの通貨 (円・ドルと円・豪ドル) からなるバスケット・オプションを考える. JPY/USD の場合と同様に, 2011 年 11 月 11 日の 5 年為替オプション市場 (円・豪ドル) にも近似式 (4.4.2) を用いてキャリブレーションした. キャリブレーション結果は次のとおりである:

$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$\delta_2$	$\epsilon_2$
0.853855	-0.699724	-0.001258	0.627338	0.221596

図 4.6 に, 3 年バスケット・オプションの価格を載せた. 図の中で, “MC” はモンテカルロ法により求めたオプション価格を表し, “WIC” は定理 4.4.2 の近似式を用いて計算したオプションの価格を表している. 他のパラメータは  $r_d(t) = 0.0977$ ,  $r_{1,f}(t) = 0.0222$ ,  $S_{1,0} = 77.54$ ,  $\rho = 0.5$  である.

## 4.6 小括

本章では, カオス展開法をアジア型オプションやバスケット・オプションに応用し, 精緻な近似式を導出した. 本手法は, これまでの先行研究のように幾何ブラウン運動に限らず, 多次元局所ボラティリティ・モデルでも応用可能であることを示した. また, Funahashi (2014) や本稿 2 章の結果を用いれば, 確率ボラティリティ・モデルへの応用も可能である.

数値検証では, 多様な数値計算を通して近似式の精度を確認した. その結果, 複雑なエキゾチック・デリバティブに対しても, 我々の近似はその精度を維持することが示された.

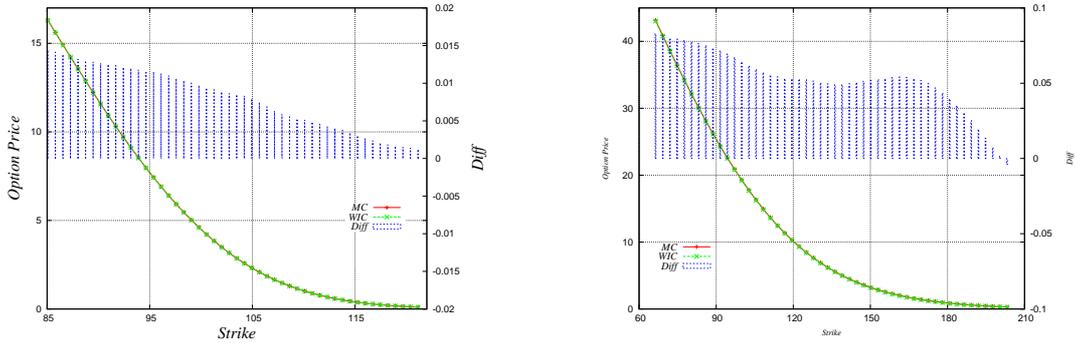


図 4.2: コリレーションが  $\rho = 0.75$  の場合の平方根モデルのもとでの、バスケットオプションの価格. 左図は満期 ( $T = 6$ ヶ月) の短い場合, 右図は満期の長い場合 ( $T = 5$ 年) である. MC は, モンテカルロ法により計算したオプション価格, WIC は定理 4.4.2 を用いて計算したオプション価格を表している. パラメータは,  $S_{1,0} = S_{2,0} = 100, r = 0.03, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 1.33$  を用いた.

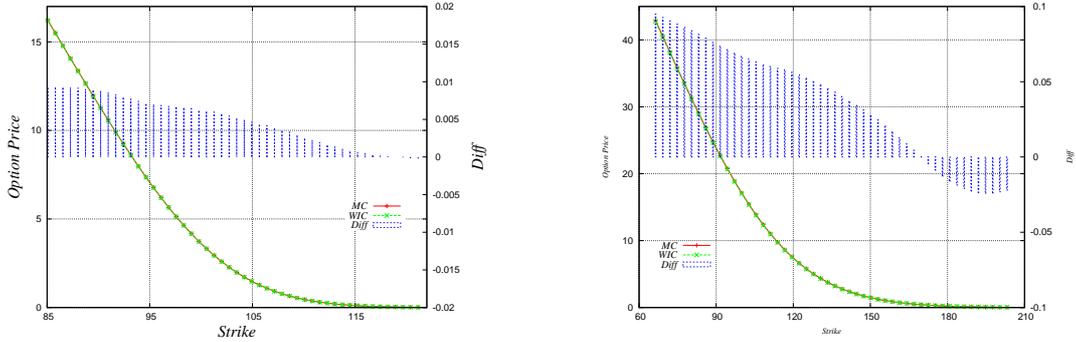


図 4.3: コリレーションが  $\rho = 0$  の場合の平方根モデルのもとでの、バスケットオプションの価格. 左図は満期 ( $T = 6$ ヶ月) の短い場合, 右図は満期の長い場合 ( $T = 5$ 年) である. MC は, モンテカルロ法により計算したオプション価格, WIC は定理 4.4.2 を用いて計算したオプション価格を表している. パラメータは,  $S_{1,0} = S_{2,0} = 100, r = 0.03, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 1.33$  を用いた.

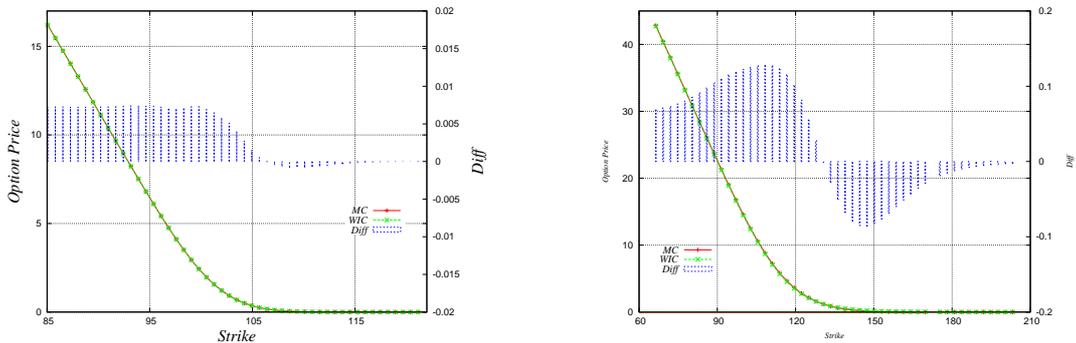


図 4.4: コリレーションが  $\rho = -0.75$  の場合の平方根モデルのもとでの、バスケットオプションの価格. 左図は満期 ( $T = 6$ ヶ月) の短い場合, 右図は満期の長い場合 ( $T = 5$ 年) である. MC は, モンテカルロ法により計算したオプション価格, WIC は定理 4.4.2 を用いて計算したオプション価格を表している. パラメータは,  $S_{1,0} = S_{2,0} = 100, r = 0.03, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 1.33$  を用いた.

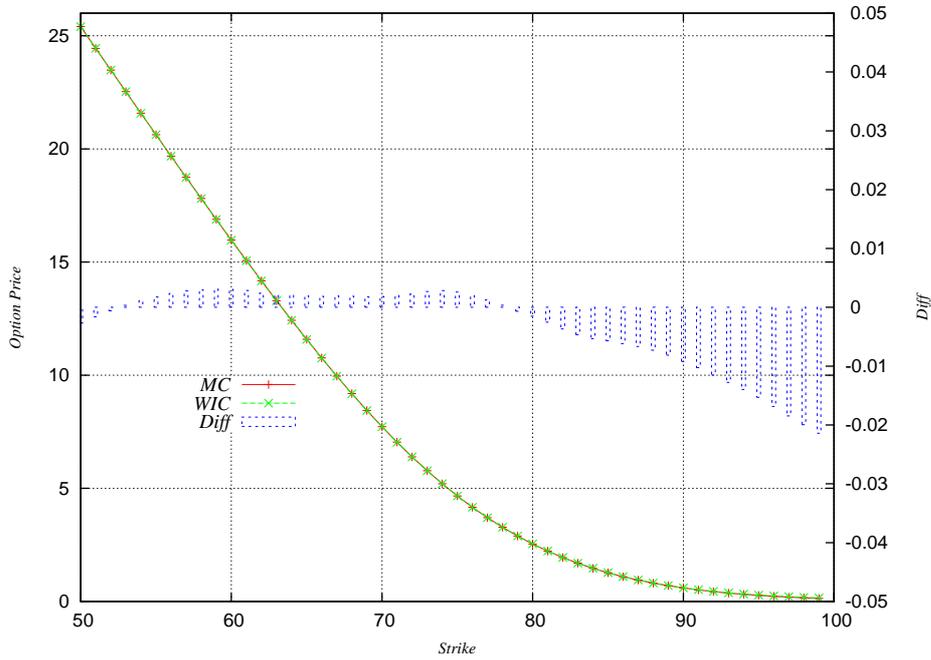


図 4.5: 市場にキャリブレーションしたパラメータを用いて計算したオプション価格. MC は, モンテカルロ法により計算したオプション価格, WIC は定理 4.4.2 を用いて計算したオプション価格である. パラメータは,  $r_d(t) = 0.0977$ ,  $r_{1,f}(t) = 0.0222$ ,  $S_{1,0} = 77.54$ ,  $T = 3$  を用いた.

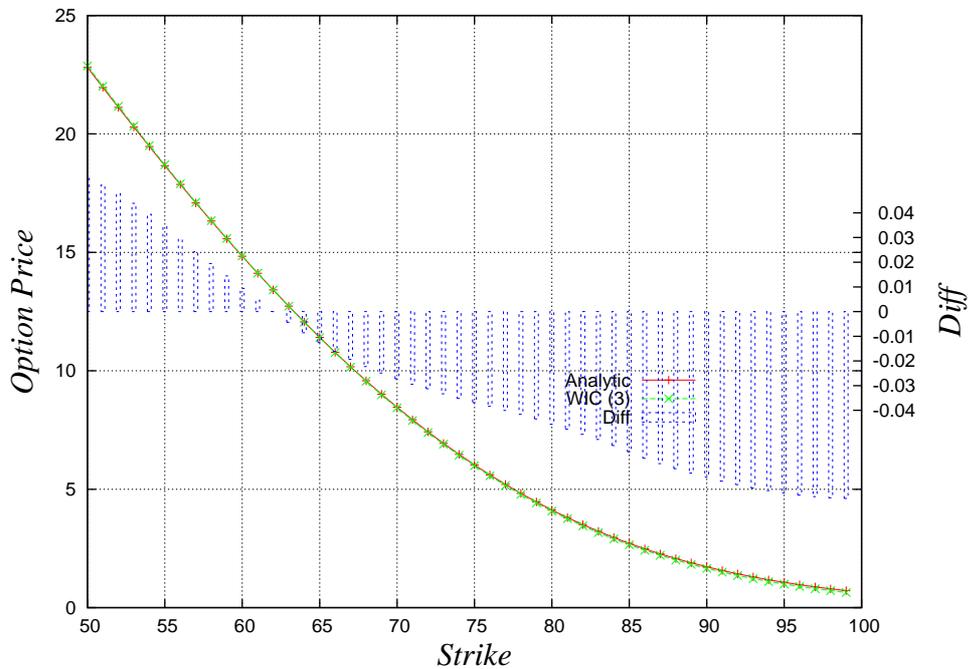


図 4.6: 市場にキャリブレーションしたパラメータを用いて計算したオプション価格. パラメータは,  $r_d(t) = 0.0977$ ,  $r_{1,f}(t) = 0.0222$ ,  $r_{2,f}(t) = 0.04$ ,  $S_{1,0} = 77.54$ ,  $S_{2,0} = 78.60$ ,  $T = 3$ ,  $w_1 = w_2 = 0.5$  を用いた. コリレーションは  $\rho = 0.5$  とした.

## 第5章 結論

本稿では、金融派生証券の価格付けに対して威力を発揮する新しい分析方法として、ウィナー・伊藤カオス展開を応用した、全く新しい近似手法を提案した。

カオス展開法は、原資産価格が連続マルコフ過程に従う場合に派生商品の価格を明示的に評価することを可能とする一般的な手法である。導出した近似解の計算に要する時間も十分に短く実務的にも極めて有用である。また、数値例を通して本近似の精度が非常に高く、他の先行研究では正確に近似することができなかった、満期が長くボラティリティが高い場合においても近似の精度を維持することを示した。

当手法における、近似手順は以下の通りである。まず、ウィナー・伊藤カオス展開に基づき原資産価格を **Hermite** 多項式で展開する。次に、展開された原資産価格に対して逐次代入を繰り返すことで、伊藤の重複積分の形に書き換える。この際、3次の重複積分迄を残し、残りの項を切り捨てる近似を行う。最後に、近似された原資産価格の従う特性関数を算出し、特性関数の反転公式を用いて密度関数を近似するというものである。

本手法の応用例として、2章で局所ボラティリティ・モデル、3章で確率ボラティリティにカオス展開法を提供し、その有用性を応用を議論した。また、4章では、より複雑な金融派生商品の価格付けにおいてもカオス展開法が有効であることを示すため、解析的にも数値的にも計算が難しいことで知られている、アジア型オプションとバスケット・オプションへの応用を示した。

さらなる応用として、Funahashi (2015) では、金利モデルと株式モデルのハイブリット・モデルにおいて、カオス展開を応用し、ヨーロッパ・コール・オプション価格の近似式を求めている。Funahashi and Kijima (2014b) では、より一般的なアジア型オプション、オーストラリアン・オプション、出来高加重平均価格 (VWAP) オプションなどへの応用を議論している。また、Funahashi and Kijima (2014c) では、バリア型オプションの近似解を算出している。

今後の展望として、フラクタル・ブラウン運動などへの応用が期待される。

## 付録A 命題2.3.1の証明

本付録では、命題2.3.1の証明をおこなう。証明は、 $n$ に対する数学的帰納法で算出する。まず、 $n = 1$ の場合は明らかである。次に、 $n - 1$ において題意が成り立つと仮定する。 $\sigma_n(t)$ が確定値関数であることと $|\sigma_n(t)| \leq |\bar{\sigma}(t)|$ に注意して、伊藤の等長性から

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma_1(t_1) \sigma_2(t_2) \cdots \sigma_n(t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n} \right)^2 \right] \\ &= \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left( \sigma_n(t_n) \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma_1(t_1) \sigma_2(t_2) \cdots \sigma_{n-1}(t_{n-1}) dW_{t_1} \cdots dW_{t_{n-1}} \right)^2 \right] dt_n \\ &\leq \int_0^t \bar{\sigma}^2(t_n) \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \sigma_1(t_1) \sigma_2(t_2) \cdots \sigma_{n-1}(t_{n-1}) dW_{t_1} \cdots dW_{t_{n-1}} \right)^2 \right] dt_n \end{aligned}$$

がいえる。したがって、仮定より

$$\mathbb{E}[I_n^2] \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \bar{\sigma}^2(t_n) \left( \int_0^{t_n} \bar{\sigma}^2(s) ds \right)^{n-1} dt_n$$

を得る。最後に、

$$\frac{1}{n!} \int_0^t d \left\{ \left( \int_0^{t_n} \bar{\sigma}^2(s) ds \right)^n \right\} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \bar{\sigma}^2(s) \left( \int_0^{t_n} \bar{\sigma}^2(u) du \right)^{n-1} ds$$

であるから、全ての $n$ に対して、題意が従う。

## 付録B 補題2.3.4の証明

本付録では, (2.3.14) と (2.3.15) を用いて,  $I_{m,n}(t)$  の近似をおこなう. 以下では4次以上の重複積分を高次の呼び, 十分小さいと仮定し無視する.

### B.1 $I_{1,1}(t)$ の近似

定義から  $I_{1,1}(t) = J_t(\sigma_1) - J_t(\sigma_0)$  であるから, (2.3.14) より,

$$I_{1,1}(t) \approx \int_0^t \sigma'_0(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\} dW_u + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma''_0(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\}^2 dW_u$$

である.  $S_t^{(0)} = F(0, t)$  であり,  $S_t^{(1)}$  は (2.3.13) で近似されることに注意すると, 高次の項を無視して,

$$\begin{aligned} I_{1,1}(t) &\approx \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) dW_s \\ &\quad + \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \quad (\text{B.1.1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma''_0(s) F^2(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right)^2 dW_s \end{aligned}$$

を得る. さらに, 伊藤の公式から

$$\begin{aligned} &\int_0^t \sigma''_0(s) F^2(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right)^2 dW_s \\ &= 2 \int_0^t \sigma''_0(s) F^2(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \quad (\text{B.1.2}) \\ &\quad + \int_0^t \sigma''_0(s) F^2(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0^2(u) du \right) dW_s \end{aligned}$$

がいえる. 以上から, (B.1.2) を (B.1.1) に代入して, (2.3.17) を得る.

## B.2 $I_{1,2}(t)$ の近似

Hermite 多項式の定義より, (2.3.15) の近似を用いると

$$\begin{aligned} I_{1,2}(t) &= \frac{1}{2} \{ (J_t^2(\sigma_1) - J_t^2(\sigma_0)) - (\|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2) \} \\ &\approx J_t(\sigma_0) \int_0^t \sigma'_0(u) \{ S_u^{(1)} - S_u^{(0)} \} dW_u - \frac{1}{2} (\|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2) \end{aligned}$$

を得る. ここで,  $J_t(\sigma_0) = \int_0^t \sigma_0(u) dW_u$ ,  $\sigma_0(t) = \sigma(F(0, t), t)$  であるから, 高次の項を無視し, (2.3.13) の近似を用いると

$$\begin{aligned} I_{1,2}(t) \approx & \left( \int_0^t \sigma_0(s) dW_s \right) \left( \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) dW_s \right) \\ & - \frac{1}{2} (\|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2) \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

となる.

伊藤の公式より, (B.2.3) の最初の項は

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^t \sigma_0(s) dW_s \right) \left( \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) dW_s \right) \\ = & \int_0^t \sigma_0(s) \left( \int_0^s \sigma'_0(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \\ & + \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right)^2 dW_s \\ & + \int_0^t \sigma_0(s) \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) ds \end{aligned}$$

で与えられる. 同様に上式の第2, 第3項は, それぞれ

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right)^2 dW_s \\ = & 2 \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \\ & + \int_0^t \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0^2(u) du \right) dW_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sigma_0(s) \sigma'_0(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) ds \\ = & \left( \int_0^t \sigma_0(s) \sigma'_0(s) F(0, s) ds \right) \left( \int_0^t \sigma_0(s) dW_s \right) \\ & - \int_0^t \sigma_0(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \sigma'_0(u) F(0, u) du \right) dW_s \end{aligned}$$

とかける.

一方, (B.2.3) の第2項は  $S_t^{(0)}$  の周りでテイラー展開すると

$$\|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2 = \int_0^t (\sigma_1^2(s) - \sigma_0^2(s)) ds \approx 2 \int_0^t \sigma_0(u) \sigma_0'(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\} ds$$

と近似できる. よって, (2.3.13) の近似と伊藤の公式から,

$$\begin{aligned} \|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2 &\approx 2 \int_0^t \sigma_0(s) \sigma_0'(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) dW_u \right) ds \\ &= 2 \left( \int_0^t \sigma_0(s) \sigma_0'(s) F(0, s) ds \right) \left( \int_0^t \sigma_0(s) dW_s \right) \\ &\quad - 2 \int_0^t \sigma_0(s) \left( \int_0^s \sigma_0(u) \sigma_0'(u) F(0, u) du \right) dW_s \end{aligned}$$

を得る. 最後にこれまでの結果を整理し, (2.3.18) を得る.

### B.3 $I_{2,1}(t)$ の近似

定義から  $I_{1,1}(t) = J_t(\sigma_1) - J_t(\sigma_0)$  であるから, (2.3.14) より,

$$I_{2,1}(t) \approx \int_0^t \sigma_1'(u) (S_u^{(2)} - S_u^{(1)}) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_1''(u) (S_u^{(2)} - S_u^{(1)})^2 dW_s$$

である. また, (2.3.16) より  $S_u^{(2)} - S_u^{(1)} = F(0, t) I_{1,1}(t)$  と  $I_{1,1}(t) = J_t(\sigma_1) - J_t(\sigma_0)$  から,

$$I_{2,1}(t) \approx \int_0^t \sigma_1'(s) F(0, s) I_{1,1}(s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_1''(s) F^2(0, s) I_{1,1}^2(s) dW_s$$

である. したがって, (B.1.1) より, 高次の項を無視すると

$$\begin{aligned} I_{2,1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_1'(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0'(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_s \right) dW_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_1''(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma_0'(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_s \right)^2 dW_s \end{aligned}$$

がいえる.

ここで,  $S_t^{(0)}$  の周りで,  $\sigma_1'(t) = \partial_x \sigma(S_t^{(1)}, t)$  と  $\sigma_1''(t)$  をテーラー展開し高次の項を無視すると

$$\begin{aligned} I_{2,1}(t) &\approx \int_0^t \{ \sigma_0'(s) + \sigma_0''(s) \{ S_s^{(1)} - S_s^{(0)} \} \} F(0, s) \\ &\quad \times \left( \int_0^s \sigma_0'(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s \end{aligned}$$

を得る. ゆえに, (2.3.13) より (2.3.19) が導かれる.

## B.4 $I_{m,n}(t)$ , $m+n \geq 4$ の近似

他の項も全く同様に証明することができるため、ここでは  $I_{2,2}(t) \approx 0$  のみを示す。

$$I_{2,2}(t) = \frac{1}{2} \{ (J_t^2(\sigma_2) - J_t^2(\sigma_1)) - (\|\sigma_2\|_t^2 - \|\sigma_1\|_t^2) \}$$

であることに注意すると、(2.3.15) と、 $I_{2,1}$  を近似する時に用いた近似手法を再び用いて、

$$J_t^2(\sigma_2) \approx J_t^2(\sigma_1) + 2J_t(\sigma_1) \int_0^t \sigma'_0(s) F(z, 0, s) \left( \int_0^s \sigma'_0(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma_0(r) dW_r \right) dW_u \right) dW_s$$

を得る。ここで、第2項は高次の項しか含まないため無視した。同様に、

$$\|\sigma_2\|_t^2 - \|\sigma_1\|_t^2 = E[J_t^2(\sigma_2) - J_t^2(\sigma_1)] \approx 0$$

であるから、題意が成り立つ。

## 付録C 条件付き期待値の公式

各  $W_t^i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  を1次元の標準ブラウン運動とし, 相関  $d\langle W_t^i, W_t^j \rangle = \rho_{i,j} dt$  を持つとする. また,  $y_i(x)$  を任意の確定値関数とする. ここで,  $\Sigma := \int_0^T y_1^2(t) dt$  とし,  $J_T(y_1) = \int_0^T y_1(t) dW_t^1$  と表記すると, 次の3つの公式が成り立つ.

$$E \left[ \int_0^T y_3(t) \left( \int_0^t y_2(s) dW_s^2 \right) dW_t^3 \middle| J_T(y_1) = x \right] = v_1 \left( \frac{x^2}{\Sigma^2} - \frac{1}{\Sigma} \right), \quad (\text{C.0.1})$$

$$E \left[ \int_0^T y_4(t) \left( \int_0^t y_3(s) \left( \int_0^s y_2(u) dW_u^2 \right) dW_s^3 \right) dW_t^4 \middle| J_T(y_1) = x \right] = v_2 \left( \frac{x^3}{\Sigma^3} - \frac{3x}{\Sigma^2} \right), \quad (\text{C.0.2})$$

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_0^T y_3(t) \left( \int_0^t y_2(s) dW_s^2 \right) dW_t^3 \right) \left( \int_0^T y_5(t) \left( \int_0^t y_4(s) dW_s^4 \right) dW_t^5 \right) \middle| J_T(y_1) = x \right] \\ = v_3 \left( \frac{x^4}{\Sigma^4} - \frac{6x^2}{\Sigma^3} - \frac{3}{\Sigma^2} \right) + v_4 \left( \frac{x^2}{\Sigma^2} - \frac{1}{\Sigma} \right) + v_5. \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

ここで,  $v_i$  は

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_0^T \rho_{1,3} y_1(t) y_3(t) \left( \int_0^t \rho_{1,2} y_1(s) y_2(s) ds \right) dt, \\ v_2 &= \int_0^T \rho_{1,4} y_1(t) y_4(t) \left( \int_0^t \rho_{1,3} y_1(s) y_3(s) \left( \int_0^s \rho_{1,2} y_1(u) y_2(u) du \right) ds \right) dt, \\ v_3 &= \left( \int_0^T \rho_{1,3} y_1(t) y_3(t) \left( \int_0^t \rho_{1,2} y_1(s) y_2(s) ds \right) dt \right) \left( \int_0^T \rho_{1,5} y_1(t) y_5(t) \left( \int_0^t \rho_{1,4} y_1(s) y_4(s) ds \right) dt \right), \\ v_4 &= \int_0^T \rho_{1,3} y_1(t) y_3(t) \left( \int_0^t \rho_{1,5} y_1(s) y_5(s) \left( \int_0^s \rho_{2,4} y_2(u) y_4(u) du \right) ds \right) dt \\ &\quad + \int_0^T \rho_{1,5} y_1(t) y_5(t) \left( \int_0^t \rho_{1,3} y_1(s) y_3(s) \left( \int_0^s \rho_{2,4} y_2(u) y_4(u) du \right) ds \right) dt \\ &\quad + \int_0^T \rho_{1,3} y_1(t) y_3(t) \left( \int_0^t \rho_{2,5} y_2(s) y_5(s) \left( \int_0^s \rho_{1,4} y_1(u) y_4(u) du \right) ds \right) dt \\ &\quad + \int_0^T \rho_{1,5} y_1(t) y_5(t) \left( \int_0^t \rho_{3,4} y_3(s) y_4(s) \left( \int_0^s \rho_{1,2} y_1(u) y_2(u) du \right) ds \right) dt \\ &\quad + \left\{ \int_0^T \rho_{3,5} y_3(t) y_5(t) \left( \int_0^t \rho_{1,2} y_1(s) y_2(s) ds \right) \left( \int_0^t \rho_{1,4} y_1(s) y_4(s) ds \right) dt \right\} \\ v_5 &= \int_0^T \rho_{3,5} y_3(t) y_5(t) \left( \int_0^t \rho_{2,4} y_2(u) y_4(u) du \right) dt. \end{aligned}$$

と定義した.

公式 (C.0.1), (C.0.2), (C.0.3) は Takahashi (1999) の補題 2.1 で与えられた公式の 1 次元の場合に相当している. さらに詳細な議論は, Yoshida (1992b) を参照.

## 付録D 補題3.2.1の証明

本付録では、各  $I_{m, n}(t)$  を (3.2.12) と (3.2.13) を用いて近似する。以下では、定義から

$$S_t^{(m)} - S_t^{(m-1)} = F(0, t) \sum_{n=1}^{\infty} I_{m, n}(t) \approx F(0, t) \sum_{n \leq 3-m} I_{m, n}(t) \quad (\text{D.0.1})$$

であることを用いる。

### D.1 $I_{1, 1}(t)$ の近似

定義より  $I_{1, 1}(t) = J_t(\sigma^{(1)}) - J_t(\sigma^{(0)})$  であるから、近似 (3.2.12) を用いると

$$\begin{aligned} I_{1, 1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(0)}(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\} dW_u^S + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(u) \{v_u^{(1)} - v_u^{(0)}\} dW_u^S \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{SS}^{(0)}(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\}^2 dW_u^S + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{vv}^{(0)}(u) \{v_u^{(1)} - v_u^{(0)}\}^2 dW_u^S \\ &+ \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\} \{v_u^{(1)} - v_u^{(0)}\} dW_u^S \end{aligned}$$

を得る。  $S_t^{(0)} = F(0, t)$ ,  $v_t^{(1)} - v_t^{(0)} = \bar{E}(t) \int_0^t E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v$ , また  $S_t^{(1)}$  が (3.2.9) で与えられることから、高次の項を無視すると

$$\begin{aligned} I_{1, 1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &+ \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &+ \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{SS}^{(0)}(s) F(0, s)^2 \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right)^2 dW_s^S \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{vv}^{(0)}(s) \bar{E}(s)^2 \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right)^2 dW_s^S \\ &+ \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \end{aligned}$$

がいえる。さらに、伊藤の公式から

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right)^2 &= 2 \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t (\sigma^{(0)}(s))^2 ds, \end{aligned} \quad (\text{D.1.2})$$

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right)^2 &= 2 \int_0^t E(s) \gamma^{(0)}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^v \\ &\quad + \int_0^t E(s)^2 (\gamma^{(0)}(s))^2 ds, \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

と

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) \left( \int_0^t E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) &= \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t E(s) \gamma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^v \\ &\quad + \int_0^t \rho E(s) \gamma^{(0)}(s) \sigma^{(0)}(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{D.1.4})$$

であるから、これらの結果を合わせて結論が従う：

$$\begin{aligned} I_{1,1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_{SS}^{(0)}(s) F(0, s)^2 \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{SS}^{(0)}(s) F(0, s)^2 \left( \int_0^s (\sigma^{(0)}(u))^2 du \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_{vv}^{(0)}(s) \bar{E}(s)^2 \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{vv}^{(0)}(s) \bar{E}(s)^2 \left( \int_0^s E(u)^2 (\gamma^{(0)}(u))^2 du \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_{Sv}^{(0)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \rho E(u) \gamma^{(0)}(u) \sigma^{(0)}(u) du \right) dW_s^S. \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

## D.2 $I_{1,2}(t)$ の近似

Hermite 多項式の定義と近似式 (3.2.13) より

$$\begin{aligned} I_{1,2}(t) &= \frac{1}{2} \{ (J_t^2(\sigma^{(1)}) - J_t^2(\sigma^{(0)})) - (\|\sigma^{(1)}\|_t^2 - \|\sigma^{(0)}\|_t^2) \} \\ &\approx J_t(\sigma^{(0)}) \int_0^t \sigma_S^{(0)}(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\} dW_u^S + J_t(\sigma^{(0)}) \int_0^t \sigma_v^{(0)}(u) \{v_u^{(1)} - v_u^{(0)}\} dW_u^S \\ &\quad - \frac{1}{2} (\|\sigma^{(1)}\|_t^2 - \|\sigma^{(0)}\|_t^2), \end{aligned}$$

である.  $J_t(\sigma^{(0)}) = \int_0^t \sigma^{(0)}(u) dW_u$ ,  $\sigma^{(0)}(t) = \sigma(F(0, t), V(0, t))$  であるから, (3.2.9) の近似を用いて, 高次の項を無視すると

$$\begin{aligned} I_{1,2}(t) &\approx \left( \int_0^t \sigma^{(0)}(s) dW_s^S \right) \left( \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S \right) \\ &\quad + \left( \int_0^t \sigma^{(0)}(s) dW_s^S \right) \left( \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\|\sigma^{(1)}\|_t^2 - \|\sigma^{(0)}\|_t^2) \end{aligned} \tag{D.2.6}$$

いえる.

ここで, 伊藤の公式を用いると (D.2.6) の第 1 項と第 2 項は

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^t \sigma^{(0)}(s) dW_s^S \right) \left( \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) dW_s^S \right) \\ &= \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right)^2 dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) ds, \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^t \sigma^{(0)}(s) dW_s^S \right) \left( \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \right) \\ &= \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u) \bar{E}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) ds, \end{aligned}$$

となる.

一方で, (D.2.6) の第3項は  $S_t^{(0)}$  の周りでテーラー展開すると

$$\begin{aligned}\|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2 &= \int_0^t ((\sigma^{(1)})^2(s) - (\sigma^{(0)})^2(s)) ds \\ &\approx 2 \int_0^t \sigma^{(0)}(u) \sigma_S^{(0)}(u) \{S_u^{(1)} - S_u^{(0)}\} du + 2 \int_0^t \sigma^{(0)}(u) \sigma_v^{(0)}(u) \{v_u^{(1)} - v_u^{(0)}\} du\end{aligned}$$

と近似される. (3.2.9) を適用して, 伊藤の公式を使うと

$$\begin{aligned}\|\sigma^{(1)}\|_t^2 - \|\sigma^{(0)}\|_t^2 &\approx 2 \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(u) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^S \right) ds\end{aligned}$$

が従う.

これまでの結果を整理すると,

$$\begin{aligned}I_{1,2}(t) &\approx \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right)^2 dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u) \bar{E}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) dW_u^S \right) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^S\end{aligned}$$

が従う.

ゆえに, (D.1.2) と (D.1.4) より,

$$\begin{aligned}I_{1,2}(t) &\approx \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u) F(0, u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + 2 \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s) F(0, s) \left( \int_0^s (\sigma^{(0)}(u))^2 du \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma^{(0)}(s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u) \bar{E}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \sigma^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r) dW_r^S \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\ &\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \rho E(u) \gamma^{(0)}(u) \sigma^{(0)}(u) du \right) dW_s^S \quad (\text{D.2.7})\end{aligned}$$

が導かれる.

### D.3 $I_{2,1}(t)$ の近似

定義より  $I_{2,1}(t) = J_t(\sigma^{(2)}) - J_t(\sigma^{(1)})$  であるから, (3.2.12) より

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(1)}(u) \{S_u^{(2)} - S_u^{(1)}\} dW_u^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_v^{(1)}(u) \{v_u^{(2)} - v_u^{(1)}\} dW_u^S \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{SS}^{(1)}(u) \{S_u^{(2)} - S_u^{(1)}\}^2 dW_u^S \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{vv}^{(1)}(u) \{v_u^{(2)} - v_u^{(1)}\}^2 dW_u^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_{Sv}^{(1)}(u) \{v_u^{(2)} - v_u^{(1)}\} \{S_u^{(2)} - S_u^{(1)}\} dW_u^S
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,  $v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t)$  は  $v_t^{(0)}$  周りでテーラー展開すると

$$\begin{aligned}
v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t) &= \bar{E}(t) \int_0^t E(u) \{ \gamma^{(1)}(u) - \gamma^{(0)}(u) \} dW_u^v \\
&\approx \bar{E}(t) \int_0^t E(u) \gamma_v^{(0)}(u) \{ v^{(1)}(u) - v^{(0)}(u) \} dW_u^v \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{E}(t) \int_0^t E(u) \gamma_{vv}^{(0)}(u) \{ v^{(1)}(u) - v^{(0)}(u) \}^2 dW_u^v
\end{aligned}$$

となる. したがって,  $v_t^{(1)} - v_t^{(0)} = \bar{E}(t) \int_0^t E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v$  より

$$\begin{aligned}
v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t) &\approx \bar{E}(t) \int_0^t \gamma_v^{(0)}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) dW_s^v \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{E}(t) \int_0^t \gamma_{vv}^{(0)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right)^2 dW_s^v \quad (\text{D.3.8})
\end{aligned}$$

が従う. (D.0.1) より  $S_u^{(2)} - S_u^{(1)} = F(0, t) I_{1,1}(t)$  であるから, (D.3.8) より高次の項を無視すると

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(1)}(u) F(0, u) I_{1,1}(u) dW_u^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_v^{(1)}(s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{SS}^{(1)}(u) F(0, u)^2 I_{1,1}(u)^2 dW_u^S \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{vv}^{(1)}(s) \bar{E}(s)^2 \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r) \gamma^{(0)}(r) dW_r^v \right) dW_u^v \right)^2 dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_{Sv}^{(1)}(s) F(0, s) \bar{E}(s) \left( \int_0^s E(u) \gamma^{(0)}(u) dW_u^v \right) I_{1,1}(s) dW_s^S
\end{aligned}$$

がいえる。ゆえに、(D.1.5)より、再び高次の項を無視すると

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(1)}(s)F(0,s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u)F(0,u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r)dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_S^{(1)}(s)F(0,s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u)\bar{E}(u) \left( \int_0^r E(r)\gamma^{(0)}(r)dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_v^{(1)}(s)\bar{E}(s) \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r)\gamma^{(0)}(r)dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sigma_S^{(1)}(t)$  と  $\sigma_v^{(1)}(t)$  に対して、 $\{S_t^{(0)}, v_t^{(0)}\}$  の周りでテーラー展開をおこなうと

$$\begin{aligned}
\sigma_S^{(1)} &\approx \sigma_S^{(0)}(s) + \sigma_{SS}^{(0)}(s) \{S_s^{(1)} - S_s^{(0)}\}, \\
\sigma_v^{(1)} &\approx \sigma_v^{(0)}(s) + \sigma_{vv}^{(0)}(s) \{v_s^{(1)} - v_s^{(0)}\}
\end{aligned}$$

と近似できる。(3.2.9)を用いて、再び高次の項を無視すると

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(t) &\approx \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s)F(0,s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u)F(0,u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r)dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s)F(0,s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u)\bar{E}(u) \left( \int_0^r E(r)\gamma^{(0)}(r)dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s)\bar{E}(s) \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r)\gamma^{(0)}(r)dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S \quad (\text{D.3.9})
\end{aligned}$$

が導かれる。

## D.4 $I_{m,n}(t)$ , $m+n \geq 4$ の近似

ここでは、 $I_{2,2}(t) \approx 0$  の場合だけを示す。他の項も全く同じように証明することが可能である。

$$I_{2,2}(t) = \frac{1}{2} \{ (J_t^2(\sigma^{(2)}) - J_t^2(\sigma^{(1)})) - (\|\sigma^{(2)}\|_t^2 - \|\sigma^{(1)}\|_t^2) \}.$$

(3.2.13) と  $I_{2,1}$  で用いた近似を使うと

$$\begin{aligned}
J_t^2(\sigma_2) &\approx J_t^2(\sigma^{(1)}) \\
&\quad + 2J_t(\sigma^{(1)}) \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s)F(0,s) \left( \int_0^s \sigma_S^{(0)}(u)F(0,u) \left( \int_0^u \sigma^{(0)}(r)dW_r^S \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + 2J_t(\sigma^{(1)}) \int_0^t \sigma_S^{(0)}(s)F(0,s) \left( \int_0^s \sigma_v^{(0)}(u)\bar{E}(u) \left( \int_0^r E(r)\gamma^{(0)}(r)dW_r^v \right) dW_u^S \right) dW_s^S \\
&\quad + 2J_t(\sigma^{(1)}) \int_0^t \sigma_v^{(0)}(s)\bar{E}(s) \left( \int_0^s \gamma_v^{(0)}(u) \left( \int_0^u E(r)\gamma^{(0)}(r)dW_r^v \right) dW_u^v \right) dW_s^S
\end{aligned}$$

がいえ。ここで、第2項、第3項、第4項は高次の項を含むだけなので0と近似できる。同様に、

$$\|\sigma^{(2)}\|_t^2 - \|\sigma^{(1)}\|_t^2 = E[J_t^2(\sigma^{(2)}) - J_t^2(\sigma^{(1)})] \approx 0,$$

であるから題意が従う。

## 付録E 補題4.3.1の証明

本付録では,(4.3.7)と(4.3.8)を繰り返し用いて,  $I_{i:m,n}(t)$ を近似する. 以下では, これまでと同様, 4次以上の伊藤の重複積分の項を無視する. 証明は, Funahashi and Kijima (2015)と全く同様である.

### E.1 $I_{i:1,1}(t)$ の近似

定義から,  $I_{i:1,1}(t) = J_t(\sigma^{(1)}) - J_t(\sigma^{(0)})$ であるから, (4.3.7)より

$$\begin{aligned} I_{i:1,1}(t) &\approx \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(u) \{S_{p,u}^{(1)} - S_{p,u}^{(0)}\} dW_{i,u} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N \int_0^t \partial_{pq} \sigma_i^{(0)}(u) \{S_{p,u}^{(1)} - S_{p,u}^{(0)}\} \{S_{q,u}^{(1)} - S_{q,u}^{(0)}\} dW_{i,u} \end{aligned}$$

がいえる. また,  $S_{i,t}^{(0)} = F_i(0, t)$ であり,  $S_{i,t}^{(1)}$ は(4.3.6)で近似できるから, 高次の項を無視すると

$$\begin{aligned} &I_{i:1,1}(t) \tag{E.1.1} \\ &\approx \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\ &+ \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N \int_0^t \partial_{pq} \sigma_i^{(0)}(u) F_p(0, s) F_q(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) \left( \int_0^s \sigma_q^{(0)}(u) dW_{q,u} \right) dW_{i,u} \end{aligned}$$

が従う. さらに, 伊藤の公式から

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) dW_{p,s} \right) \left( \int_0^t \sigma_q^{(0)}(s) dW_{q,s} \right) &= \int_0^t \sigma_q^{(0)}(s) \left( \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) dW_{p,u} \right) dW_{q,s} \\ &\quad + \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) \left( \int_0^t \sigma_q^{(0)}(s) dW_{q,u} \right) dW_{p,s} \\ &\quad + \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) \sigma_q^{(0)}(s) ds. \tag{E.1.2} \end{aligned}$$

を得る. 最後に, (E.1.2) を (E.1.1) に代入することで題意が従う.

## E.2 $I_{i:1,2}(t)$ の近似

Hermite 多項式の定義から, (4.3.7) の近似を用いると,

$$\begin{aligned} I_{i:1,2}(t) &= \frac{1}{2} \left\{ (p_t^2(\sigma_i^{(1)}) - p_t^2(\sigma_i^{(0)})) - (\|\sigma_i^{(1)}\|_t^2 - \|\sigma_i^{(0)}\|_t^2) \right\} \\ &\approx p_t(\sigma_i^{(0)}) \left( \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(u) \{S_{p,u}^{(1)} - S_{p,u}^{(0)}\} dW_{p,u} \right) - \frac{1}{2} (\|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2), \end{aligned}$$

がいえる. したがって,  $J_t(\sigma_0) = \int_0^t \sigma_0(u) dW_u$ ,  $\sigma_0(t) = \sigma(F(0, t), t)$  であるから, (4.3.6) を用いて, 高次の項を無視すると,

$$\begin{aligned} I_{i:1,2}(t) &\approx \left( \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) dW_{i,s} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_p^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\|\sigma_1\|_t^2 - \|\sigma_0\|_t^2), \end{aligned} \tag{E.2.3}$$

が従う.

ここで, 伊藤の公式から (E.2.3) 式の最初の項は,

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) dW_{i,s} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_p^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \right) \\ &= \sum_{p=1}^N \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) \left( \int_0^s \partial_p \sigma_p^{(0)}(u) F_p(0, u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\ &\quad + \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) dW_{i,u} \right) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\ &\quad + \sum_{p=1}^N \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right) ds \end{aligned}$$

と書ける.

一方, (E.2.3) 式の第2項は,  $S_t^{(0)}$  の周りでテーラー展開することで,

$$\begin{aligned} \|\sigma_i^{(1)}\|_t^2 - \|\sigma_i^{(0)}\|_t^2 &= \int_0^t \left\{ (\sigma_i^{(1)}(s))^2 - (\sigma_i^{(0)}(s))^2 \right\} ds \\ &\approx 2 \sum_{p=1}^N \int_0^t \sigma_i^{(0)}(u) \partial_p \sigma_i^{(0)}(u) \{S_{p,u}^{(1)} - S_{p,u}^{(0)}\} ds \end{aligned}$$

である.

同様に第3項は,

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) dW_{p,u} \right)^2 dW_{p,s} \\
= & \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \\
& + \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s} \\
& + \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(0)}(s) F_p(0, s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \sigma_i^{(0)}(u) du \right) dW_{i,s}
\end{aligned}$$

となる.

これらの結果を (E.2.3) 式に代入することで題意が従う.

### E.3 $I_{i:2,1}(t)$ の近似

定義から  $I_{i:2,1}(t) = J_t(\sigma_i^{(2)}) - J_t(\sigma_i^{(1)})$  であるから, (4.3.7) より,

$$I_{i:2,1}(t) \approx \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(1)}(u) (S_{p,u}^{(2)} - S_{p,u}^{(1)}) dW_{i,s}$$

である. また,  $S_{i,u}^{(2)} - S_{i,u}^{(1)} = F_i(0, t) I_{i:1,1}(t)$  と  $I_{i:1,1}(t) = J_t(\sigma_i^{(1)}) - J_t(\sigma_i^{(0)})$  であることから

$$I_{i:2,1}(t) \approx \sum_{p=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(1)}(u) F_p(0, t) I_{i:1,1}(t) dW_{i,s}$$

を得る. したがって, (E.1.1) より, 高次の項を無視すると

$$I_{i:2,1}(t) \approx \sum_{p,q=1}^N \int_0^t \partial_p \sigma_i^{(1)}(u) F_p(0, t) \left( \int_0^t \partial_q \sigma_p^{(0)}(s) F_q(0, s) \left( \int_0^s \sigma_q^{(0)}(u) dW_{q,u} \right) dW_{p,s} \right) dW_{i,s}$$

がいえる. ここで,  $S_t^{(0)}$  の周りで  $\partial_p \sigma_i^{(1)}(t)$  をテーラー展開した.

さらに, 高次の項を無視すると

$$\begin{aligned}
I_{i:2,1}(t) \approx & \sum_{p,q,r=1}^N \int_0^t \left\{ \partial_p \sigma_0(u) + \partial_{pp} \sigma_i^{(0)}(u) \{ S_{r,u}^{(1)} - S_{r,u}^{(0)} \} \right\} \\
& \times F_p(0, t) \left( \int_0^t \partial_q \sigma_p^{(0)}(s) F_q(0, s) \left( \int_0^s \sigma_q^{(0)}(u) dW_{q,u} \right) dW_{p,s} \right) dW_{i,s}
\end{aligned}$$

である. 最後に, (4.3.6) を用いて, さらに高次の項を無視することで, 結果が従う.

## 付録F 関数 $a_{i,3}^k(T)$ の定義

定理 4.3.1 より,  $a_{i,3}(T)$  の第 2 項は

$$a_{i,3}^2(T) = \sum_{p=1}^N \int_0^T w_{i,t} F_i(0, t) \int_0^t P_{i;p}^2(s) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} dt$$

で与えられる. 積分の順序を入れ替えると

$$a_{i,3}^2(T) = \sum_{p=1}^N \int_0^T \bar{p}_{i;p}^3(t, T) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}$$

を得る. ここで,

$$\bar{p}_{i;p}^3(t, T) := P_{i;p}^2(t) \int_t^T w_{i,s} F_i(0, s) ds$$

である. 同様に,

$$\begin{aligned} a_{i,3}^3(T) &= \sum_{p=1}^N \int_0^T \bar{s}_i(t, T) \left( \int_0^s P_{i;p}^2(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}, \\ a_{i,3}^4(T) &= \sum_{p=1}^N \int_0^T \bar{p}_{i;p}^2(t, T) \left( \int_0^s \sigma_i^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_p^{(0)}(r) dW_{p,r} \right) dW_{i,u} \right) dW_{i,s}, \\ a_{i,3}^5(T) &= \sum_{p=1}^N \int_0^T \bar{p}_{i;p}^2(t, T) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_i^{(0)}(r) dW_{i,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}, \\ a_{i,3}^6(T) &= \sum_{p,q=1}^N \int_0^T \bar{p}_{i;p}^2(t, T) \left( \int_0^s P_{p;q}^2(s) \left( \int_0^u \sigma_q^{(0)}(r) dW_{q,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s} \end{aligned}$$

と

$$a_{i,3}^7(T) = \sum_{p,q=1}^N \int_0^T \bar{p}_{i;p,q}^4(t, T) \left( \int_0^s \sigma_p^{(0)}(u) \left( \int_0^u \sigma_q^{(0)}(r) dW_{q,r} \right) dW_{p,u} \right) dW_{i,s}$$

がいえる. ただし,

$$\bar{p}_{i;p,q}^4(t, T) := P_{i;p,q}^3(t) \int_t^T w_{i,s} F_i(0, s) ds$$

と定義した.

## 付録G 条件付き期待値の公式2

$W_t^i, i = 1, \dots, 5$  を相関  $dW_t^i dW_t^j = \eta_{i,j} dt$  を持つ標準ブラウン運動とし,  $y_i(x), i = 1, \dots, 5$  を確定値関数とする. さらに,  $\Sigma := \int_0^T y_1^2(t) dt$ ,  $J_T(y_1) = \int_0^T y_1(t) dW_t^1$  と定義する. 条件付き期待値を計算するために, 以下の公式を与える:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T y_3(t) \left( \int_0^t y_2(s) dW_s^2 \right) dW_t^3 \middle| J_T(y_1) = x \right] = v_1 \left( \frac{x^2}{\Sigma^2} - \frac{1}{\Sigma} \right). \quad (\text{G.0.1})$$

ここで,

$$v_1 = \int_0^T \eta_{1,3} y_3(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{1,2} y_2(s) y_1(s) ds \right) dt$$

である.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^T y_4(t) \left( \int_0^t y_3(s) \left( \int_0^s y_2(u) dW_u^2 \right) dW_s^3 \right) dW_t^4 \middle| J_T(y_1) = x \right] \\ = v_2 \left( \frac{x^3}{\Sigma^3} - \frac{3x}{\Sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{G.0.2})$$

ただし,

$$v_2 = \int_0^T \eta_{1,4} y_4(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{1,3} y_3(s) y_1(s) \left( \int_0^s \eta_{1,2} y_2(u) y_1(u) du \right) ds \right) dt$$

である.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T y_3(t) \left( \int_0^t y_2(s) dW_s^2 \right) dW_t^3 \right) \left( \int_0^T y_5(t) \left( \int_0^t y_4(s) dW_s^2 \right) dW_t^3 \right) \middle| J_T(y_1) = x \right] \\ = v_3 \left( \frac{x^4}{\Sigma^4} - \frac{6x^2}{\Sigma^3} - \frac{3}{\Sigma^2} \right) + v_4 \left( \frac{x^2}{\Sigma^2} - \frac{1}{\Sigma} \right) + v_5. \end{aligned} \quad (\text{G.0.3})$$

ここで,

$$\begin{aligned}
v_3 &= \left( \int_0^T \eta_{1,3} y_3(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{1,2} y_2(s) y_1(s) ds \right) dt \right) \\
&\quad \times \left( \int_0^T \eta_{1,5} y_5(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{1,4} y_4(s) y_1(s) ds \right) dt \right), \\
v_4 &= \int_0^T \eta_{1,3} y_3(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{1,5} y_5(s) y_1(s) \left( \int_0^s \eta_{2,4} y_4(u) y_2(u) du \right) ds \right) dt \\
&\quad + \int_0^T \eta_{1,5} y_5(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{1,3} y_3(s) y_1(s) \left( \int_0^s \eta_{2,4} y_4(u) y_2(u) du \right) ds \right) dt \\
&\quad + \int_0^T \eta_{1,3} y_3(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{2,5} y_2(s) y_5(s) \left( \int_0^s \eta_{1,4} y_4(u) y_1(u) du \right) ds \right) dt \\
&\quad + \int_0^T \eta_{1,5} y_5(t) y_1(t) \left( \int_0^t \eta_{3,4} y_3(s) y_4(s) \left( \int_0^s \eta_{1,2} y_2(u) y_1(u) du \right) ds \right) dt \\
&\quad + \left\{ \int_0^T \eta_{3,5} y_5(t) y_3(t) \left( \int_0^t \eta_{1,2} y_2(s) y_1(s) ds \right) \left( \int_0^t \eta_{1,4} y_4(s) y_1(s) ds \right) dt \right\} \\
v_5 &= \int_0^T \eta_{3,5} y_5(t) y_3(t) \left( \int_0^t \eta_{2,4} y_4(u) y_2(u) du \right) dt
\end{aligned}$$

である.

この公式を使って,  $\mathbb{E}[a_2(t)|a_1(t) = x]$  を証明する.  $a_2(t) = \sum_{i=1}^N a_{i,2}(T)$  であり,

$$a_{i,2}(T) = \int_0^T \bar{s}_i(t, T) \left( \int_0^t \sigma_i^{(0)}(s) dW_{i,s} \right) dW_{i,t} + \sum_{p=1}^N \int_0^T \bar{p}_{i:p}^2(t, T) \left( \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) dW_{p,s} \right) dW_{i,t}$$

であるから, (G.0.1) を用いて,  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T \bar{s}_i(t, T) \left( \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) dW_{p,s} \right) dW_{i,t} \middle| a_1(t) = x \right]$  が計算できる.

$y_1(x) = \sqrt{\Lambda_x}$ ,  $y_2(x) = \sigma_p^{(0)}(x)$ ,  $y_3(x) = \bar{s}_i(x, T)$  とし,

$$\begin{aligned}
\eta_{1,2} &= dW_{p,t} d\hat{W}_t = \sum_{k=1}^N \rho_{kp} \left( \bar{p}_{k,1}(t) / \sqrt{\Lambda_t} \right), \\
\eta_{1,3} &= dW_{i,t} d\hat{W}_t = \sum_{k=1}^N \rho_{ik} \left( \bar{p}_{k,1}(t) / \sqrt{\Lambda_t} \right)
\end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \bar{s}_i(t, T) \left( \int_0^t \sigma_p^{(0)}(s) dW_{p,s} \right) dW_{i,t} \middle| a_1(t) = x \right] = v_1 \left( \frac{x^2}{\Sigma^2} - \frac{1}{\Sigma} \right)$$

がいえ。ただし,

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \int_0^T \sum_{k=1}^N \rho_{ik} \left( \bar{p}_{k,1}(t) / \sqrt{\Lambda_t} \right) \bar{s}_i(t, T) \sqrt{\Lambda_t} \left( \int_0^t \sum_{l=1}^N \rho_{lp} \left( \bar{p}_{k,1}(s) / \sqrt{\Lambda_s} \right) \sigma_p^{(0)}(s) \sqrt{\Lambda_s} ds \right) dt \\
 &= \sum_{k,l=1}^N \int_0^T \rho_{ik} \bar{p}_{k,1}(t) \bar{s}_i(t, T) \left( \int_0^t \rho_{lp} \bar{p}_{k,1}(s) \sigma_p^{(0)}(s) ds \right) dt
 \end{aligned}$$

である。

他の項も全く同様に証明できる。

# 謝辞

木島正明教授には、5年に渡り懇切丁寧にご指導頂きました。木島先生のご指導がなければ本稿ができることはありませんでした。深く感謝致します。

室町幸雄教授には、有益なご指導のみならず、短期間の間に原稿を通読していただき、多くの誤植をご指摘いただきました。また、ゼミを通して芝田隆志教授や中岡秀隆教授をはじめ参加者の皆様にも色々と教えて頂きました。みずほ証券金融商品部の皆様には本研究を進めるにあたり、ご助言等をいただき、勇気付けていただきました。この場をお借り致しまして、御礼申し上げます。

## 関連図書

- [1] Aït-Sahalia, Y. (2002), “Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: A closed-form approximation approach,” *Journal of Econometrics*, **70**, 223–262.
- [2] Aït-Sahalia, Y. (2008), “Closed-form likelihood expansions for multivariate diffusions,” *Annals of Statistics*, **36**, 906–937.
- [3] Black, F. and M. Scholes (1973), “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654.
- [4] Brigo, D. and F. Mercurio (2000a), “Analytical models for volatility smiles and skews,” Banca IMI internal report, 2000.
- [5] Brigo, D. and F. Mercurio (2000b), “A mixed-up smile,” *Risk*, September, 123–126.
- [6] Collin-Dufresne, P. and R. Goldstein (2002), “Pricing swaptions within an affine framework,” *Journal of Derivatives*, **10**, 1–18.
- [7] Cox, J. C. and S. A. Ross (1976), “The valuation of options for alternative stochastic processes,” *Journal of Financial Economics*, **3**, 145–166.
- [8] Derman, E. and I. Kani (1994), “Riding on a Smile,” *Risk*, February, 32–39.
- [9] De Jong, L. (2010), “Option pricing with perturbation methods,” Master’s thesis, Delft University.
- [10] Dewynne, J. and P. Wilmott (1993), “Partial to the exotic,” *Risk*, **6**, 38–46.
- [11] Di Nunno, G., B. Øksendal and F. Proske (2009), *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*, Springer, Berlin.
- [12] Dupire, B. (1994), “Pricing with a Smile,” *Risk*, January, 18–20.
- [13] Dupire, B. (1997), “Pricing and Hedging with Smiles,” *Cambridge University Press*, January, 103–111.
- [14] Forsyth, P. A., Vetzal, K., and Zvan, R. (1996), “Robust numerical methods for PDE models of Asian options,” Technical Report, University of Waterloo, Canada.
- [15] Fouque, J. P. and C. H. Han (2003), “Pricing Asian options with stochastic volatility,” *Quantitative Finance*, **3**, 352–362.
- [16] Fouque, J. P., G. Papanicolaou and K.R. Sircar (2000), *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press.
- [17] Fouque, J.P., G. Papanicolaou, K.R. Sircar and K. Solna (2003a), “Short time-scale in S&P500 volatility,” *Journal of Computational Finance*, **6**, 1–23.
- [18] Fouque, J.P., G. Papanicolaou, K.R. Sircar and K. Solna (2003b), “Singular perturbations in option pricing,” *Journal on Applied Mathematics*, **63**, 1648–1681.

- [19] Funahashi, H. (2012), “A chaos expansion approximation for the pricing of financial products,” Master’s thesis, Tokyo Metropolitan University.
- [20] Funahashi, H. (2014), “A chaos expansion approach under hybrid volatility models,” *Quantitative Finance*, **14**(11), 1923–1936.
- [21] Funahashi, H. (2015), “An analytical approximation of European option prices under stochastic interest rate economy,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, forthcoming.
- [22] Funahashi, H., M. Kijima (2014a), “An Extension of the Chaos Expansion Approximation for the Pricing of Exotic Basket Options,” *Journal of Applied Mathematical Finance*, **21**(2), 109–139.
- [23] Funahashi, H., M. Kijima (2014b), “A unified approach for the pricing of options related to averages,” working paper.
- [24] Funahashi, H., M. Kijima (2014c), “Analytical pricing of barrier options under local volatility model,” working paper.
- [25] Funahashi, H., M. Kijima (2015), “A Chaos Expansion Approach for the Pricing of Contingent Claims,” forthcoming.
- [26] Hager C, Hueber S, Wohlmuth B (2010), “Numerical techniques for the valuation of basket options and its Greeks,” *Journal of Computational Finance*, **13**, 1–31
- [27] Hagan, P., D. Kumar and A. Lesniewski (2002), “Managing smile.” *Wilmott magazine*, September, 84–108.
- [28] Heston, S. (1993), “A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *Review of Financial Studies*, **6**, 327–343.
- [29] Hoogland, J. K., C. D. D. Neumann (2000). “Tradable schemes,” Technical Report MAS-0024, CWI, Amsterdam, The Netherlands.
- [30] Hull, J. and A. White (1987), The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, **3**, 281–300.
- [31] Ito, K. (1951), “Multiple wiener integral,” *Journal of Mathematical Society of Japan*, **3**, 157–169.
- [32] Jäckel P. (2004), “Stochastic Volatility Models: Past, Present and Future,” *The Best of Wilmott I: Incorporating the Quantitative Finance Review*, 379–390.
- [33] Ju, N. (2002), “Pricing Asian and basket options via Taylor expansion,” *Journal of Computational Finance*, **5**, 79–103.
- [34] Kemna, A.G.Z. and A.C.F. Vorst (1990), “A pricing method for options based on average asset values,” *Journal of Banking and Finance*, **14**, 113–129.
- [35] Krekel, M., J.D. Kock, R. Korn and T.K. Man (2004), “An analysis of pricing methods for baskets options,” *WILMOTT magazine*, **3**, 82–89.
- [36] Kunitomo, N. and A. Takahashi (1992), “Pricing average options” (In Japanese), *Japan Financial Review*, **14**, 1–20.
- [37] Kunitomo, N. and A. Takahashi (2001), “The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rates contingent claims,” *Mathematical Finance*, **11**, 117–151.

- [38] Kunitomo, N. and A. Takahashi (2003), “On validity of the asymptotic expansion approach in contingent claim analysis,” *Annals of Applied Probability*, **13**, 914–952.
- [39] Lapeyre, B. and E. Temam (2001), “Competitive Monte Carlo methods for pricing Asian options,” *Journal of Computational Finance*, **5**.
- [40] Levy, E. (1992), “Pricing European average rate currency options,” *Journal of International Money and Finance*, **11**, 474–491.
- [41] Ling, T. G. and P. V. Shevchenko (2014), “Historical Backtesting of Local Volatility Model using AUD/USD Vanilla Options,” working paper.
- [42] D. Marris (1999), “Financial Option Pricing and Skewed Volatility,” MPhil thesis, University of Cambridge.
- [43] Milevsky, M. and S. Posner (1998), “Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **33**, 409–422.
- [44] Nualart, D. (2006), *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, Berlin.
- [45] Øksendal, B. (2000), *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer, Berlin.
- [46] Pellizzari, P. (2001), “Efficient Monte Carlo pricing of portfolio options,” *Quantitative Finance*, **1**, 108–123,
- [47] Posner, S. and M. Milevsky (1998), “Valuing exotic options by approximating the SPD with higher moments.” *Journal of Financial Engineering*, **7**, 109–125.
- [48] Ritchken, P., L. Sankarasubramanian and A. Vijh (1993), “The valuation of path dependent contracts on the average,” *Management Science*, **39**, 1202–1213.
- [49] Rogers, L., Z. Shi (1995), “The value of an Asian Option,” *Journal of Applied Probability*, **32**, 1077-1088.
- [50] Rubinstein (1983), M., “Displaced Diffusion Option Pricing,” *Journal of Financial*, **38**, 213–217.
- [51] Rubinstein, M. (1991), “One for another,” *Risk*, **4**, 1202–1213.
- [52] Schroder, M. (1989), “Computing the constant elasticity of variance option,” *Journal of Finance*, **44**, 211–219.
- [53] Schöbel, R. and J. Zhu, “Stochastic volatility with Ornstein-Uhlenbeck process: An extension,” *European Finance Review*, 1999, **4**, 23–46.
- [54] Takahashi, A. (1999), “An asymptotic expansion approach to pricing financial contingent claims,” *Asia-Pacific Financial Market*, **6**, 115–151.
- [55] Takahashi, A. and K. Takehara (2007), “An asymptotic expansion approach to currency options with a market model of interest rates under stochastic volatility process of spot exchange rates,” *Asia-Pacific Financial Market*, **14**, 69–121.
- [56] Tanaka, K., T. Yamada and T. Watanabe (2010), “Applications of Gramcharlier expansion and bond moments for pricing of interest rates and credit risk,” *Quantitative Finance*, **10**, 645–662.
- [57] Turnbull, S. and L. Wakeman (1991), “A quick algorithm for pricing European average options,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **26**, 377–389.

- [58] Vecer, J. (2001), “A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options,” *Journal of Computational Finance*, **4**, 105–113.
- [59] Watanabe, S. (1987), “Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels,” *Annals of Probability*, **15**, 1–39.
- [60] Xiu, D. (2011), “Dissecting and deciphering European option prices using closed-form series expansion,” Chicago Booth Research Paper No. 11-40.
- [61] Yoshida, N. (1992a), ‘Asymptotic expansions of maximum likelihood estimators for small diffusions via the theory of Malliavin-Watanabe,’ *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 275–311.
- [62] Yoshida, N. (1992b), “Asymptotic expansions for statistics related to small diffusions,” *Journal of Japan Statistical Society*, **22**, 139–159.