【学位論文審査の要旨】

１　研究の目的

Riemann 幾何学において，ある種の特殊な幾何学的性質を持つ部分多様体がしばしば本質的な役割を果たし，重要な研究対象として古くから研究が行われている．たとえば，体積汎関数の停留点となる部分多様体は極小部分多様体と呼ばれ，平均曲率ベクトル場が恒等的に零となるものとして特徴付けられる．極小部分多様体は石けん膜の数理モデルであり，物質の界面などとして自然界に現れることから，物理学をはじめ自然科学の諸分野からも関心を持たれている．本論文で主に扱う Riemann 対称空間は，各点においてその点を孤立固定点に持つ対合的等長変換が存在する連結 Riemann 多様体である．Riemann 対称空間には等長変換群が推移的に作用することから等質部分多様体が豊富に存在し，それらの中から全測地的部分多様体や極小部分多様体など顕著な性質を持つものを得ることができる．本学位論文はコンパクト対称空間内の等質部分多様体の様々な幾何学的性質を調べることを目的としている．

Gを連結コンパクト Lie 群とし，K_1とK_2はともにGの対称部分群であるとする．すなわち，商多様体 G/K_1 と G/K_2 がともにコンパクト対称空間であるとする．このとき，K_2の G/K_1 への等長作用および K_1 の G/K_2 への等長作用を Hermann 作用と呼ぶ．Hermann 作用は超極作用と呼ばれる作用になり，その軌道はコンパクト対称空間の等質部分多様体の良いクラスを与える．本学位論文では Lie 理論的な手法により，可換な Hermann 作用の軌道およびコンパクト Lie 群 G への $K_2\times K_1$ 作用の軌道の微分幾何学的な性質に関する研究を行っている．極小軌道の他に，austere 部分多様体と呼ばれる第二基本形式が対称性を持つ特殊な極小部分多様体になる軌道，さらに austere 部分多様体の対称性を大域化した外在的対称性を持つ部分多様体である弱鏡映部分多様体となる軌道を調べ，それらの性質を持つ軌道の対応関係を調べている．また近年，調和写像の拡張概念として二重調和写像の研究が活発に進められている．二重調和写像は Riemann 多様体の間の写像で二重エネルギー汎関数の停留点となるものである．本論文の後半では，可換な Hermann 作用の軌道の中で，埋め込みが二重調和写像になるものの構成と分類に関する研究を行っている．

２　研究の方法と結果

対称空間およびその等質部分多様体の研究においては Lie 理論的手法が有効に用いられる．たとえば，コンパクト対称空間のイソトロピー作用の軌道の第二基本形式は，対称対の制限ルート系により記述することができる．同様にして Hermann 作用の軌道を調べる目的で，既約ルート系の拡張になる対称三対の概念が井川治氏（京都工芸繊維大学）により導入された．Hermann 作用において，コンパクト Lie 群 Gの二つの対称部分群 K_1と K_2に対する Gの対合的自己同型θ_1とθ_2が可換である場合，Gの Lie 環の二つの標準分解が同時固有空間分解となり，重複度付き対称三対が導出される．井川氏はこの重複度付き対称三対を用いて軌道の第二基本形式を表し，全測地的軌道，極小軌道，austere 軌道の特徴付けを

与えた．これにより，G/K_1 への K_2 作用と G/K_2 への K_1 作用の二つの Hermann 作用の間で，全測地的軌道，極小軌道，austere 軌道の対応関係があることを示した．Hermann 作用からは，さらにコンパクト Lie 群 G への $K_2 \times K_1$ の作用が誘導されるが，これら三つの Lie 変換群の作用は，軌道空間が同じ軌道体 $K_2 \backslash G/K_1$ の構造を持ち，軌道の幾何学的性質についても関連性があることが期待される．本学位論文では G への $K_2 \times K_1$ 作用の軌道の第二基本形式を重複度付き対称三対を用いて表している．これにより，G への $K_2 \times K_1$ 作用と G/K_2 への K_1 作用の間で，極小軌道，austere 軌道の対応関係があることを示している．一方で，全測地的軌道に関しては対応がないことも明らかにしている．Hermann 作用およびコンパクト Lie 群 G への $K_2 \times K_1$ 作用の austere 軌道の中で弱鏡映性を持つものは未だ完全には決定されていない．本論文の 3 節では対称三対の Weyl 群を使って鏡映を構成することにより，可換な Hermann 作用および G への $K_2 \times K_1$ 作用の軌道が弱鏡映になるための一つの十分条件を与えている．これにより実際に austere 軌道のいくつかが弱鏡映性を持つことを示している．

論文の 4 節では，コンパクト対称空間内の二重調和部分多様体について議論している．まず，Einstein 多様体内において張力テンソル場が法接続に関して平行なはめ込みについて，二重調和になるための必要十分条件を第二基本形式に関する方程式として与えている．次に，これを可換な Hermann 作用と G への $K_2 \times K_1$ 作用の軌道に適用し，軌道が二重調和になるための必要十分条件を重複度付き対称三対の条件として記述している．さらに，この判定法を用いて，井川氏による対称三対の分類に従い，対称三対の型とその重複度ごとに，二重調和の条件の解析を行った．これによりコンパクト既約対称空間内において，余等質性 1 の可換な Hermann 作用の軌道として得られる調和でない二重調和等質超曲面の分類を与えている．この分類結果により，対称三対の型と重複度ごとに，調和でない二重調和正則軌道は高々2 つであることが示された．また，余等質性 1 の可換な Hermann 作用において，二つの Hermann 作用の間で，二重調和となる正則軌道の対応があることを示している．より一般に，この方法は対称三対の階数が高い場合にも適用が可能である．階数 2 の対称三対を持つ Hermann 作用の特異軌道を調べることによって，余次元が高い等質部分多様体であって，調和でない二重調和部分多様体の例を組織的に構成することに成功している．

３　審査の結果

本論文では可換な Hermann 作用の軌道の幾何学的性質を対称三対を用いて記述している．コンパクト対称三対$(G,\ K_1,\ K_2)$から定まる二つの Hermann 作用とコンパクト Lie 群 G への $K_2 \times K_1$ 作用を統一的に捉えて，軌道の部分多様体としての性質の対応を調べているところには独創性が認められる．特に，G への $K_2 \times K_1$ 作用の軌道を調べるためにも対称三対を用いることができることを示したことは意義深い．

極小部分多様体や austere 部分多様体の条件は局所的であり，変分法によるアプローチ

が有効である．一方で，弱鏡映部分多様体の条件は大域的な性質であり，弱鏡映性を示すことは容易ではない．Weyl 群の作用を用いて鏡映を構成することにより，軌道が弱鏡映性を持つための一つの十分条件を与えたことは評価できる．実際，これにより austere 軌道のいくつかが弱鏡映性を持つことを示している．

二重調和写像の研究においては「Euclid 空間内の二重調和部分多様体は調和になる」という B.-Y. Chen 予想が未解決問題として盛んに議論されている．一方で，球面など非負曲率を持つ Riemann 多様体の場合は状況が異なり，調和でない二重調和部分多様体の例が知られている．本学位論文では Hermann 作用の軌道に対して二重調和になるための判定法を与え，調和でない二重調和部分多様体を組織的に構成している．特に，余次元が高い二重調和部分多様体の例として知られているものは少なく．本論文において，Hermann 作用の軌道に対して二重調和性の判定法を与え，余次元の高い具体例を数多く与えることができたことは注目に値する．本学位論文で述べられている二重調和写像に関する結果の一部は，酒井と浦川肇氏（東北大学名誉教授）との共著論文として国際的な学術雑誌に既に掲載されており，学会や研究集会においても研究発表を行っている．

以上の理由から本論文は博士（理学）の学位に十分に値するものと判断する．

４　最終試験の結果

１１月に論文審査委員と数理情報科学専攻の教員数名による予備審査会を行い，学位論文として十分な成果が得られていると判断し，最終試験の受験を承認した．最終試験として，２月５日に学位論文公聴会を開き，論文の内容に関する発表と論文審査委員および数理情報科学専攻の教員による質疑応答を行った．その結果，申請論文が博士の学位論文としてふさわしく，かつ申請者が自身の専門および関連分野に関して十分な学力を有するものと認め，合格と判定した．