

氏名	大野 晋司
所属	理工学研究科 数理情報科学専攻
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理工博 第187号
学位授与の日付	平成28年3月25日
課程・論文の別	学位規則第4条第1項該当
学位論文題名	可換な Hermann 作用の軌道の幾何学的性質 (英文)
論文審査委員	主査 准教授 酒井 高司 委員 教授 横田 佳之 委員 准教授 田崎 博之 (筑波大学)

【論文の内容の要旨】

本文

Riemann 幾何学とその周辺分野にはしばしば幾何学的に特別な性質を持つ部分多様体が現れる。例えば極小部分多様体は微小な変形の中で体積を極小にする。この性質は石けん膜をモデルに得られたものであり、物理学とも深い関わりを持っている。本論文では、極小性のような特別な性質を持つ部分多様体について議論している。例えば二重調和部分多様体や弱鏡映部分多様体がその一例である。

多様体への Lie 群作用の軌道は部分多様体の例を豊富に与える。実際、極小部分多様体の例が数多く Lie 群作用の軌道として得られる事が知られている。特に、コンパクト Riemann 対称空間のイソトロピー作用の軌道の幾何学的性質は代数的な対象である制限ルート系を用いて表すことができる。コンパクト対称空間のイソトロピー作用の拡張の一つとして Hermann 作用がある。A. Kollross のコンパクト既約 Riemann 対称空間への超極作用の分類を見ると、その殆どが Hermann 作用と軌道同値であることがわかる。この事からコンパクト Riemann 対称空間の等質部分多様体を調べるためには Hermann 作用の軌道を調べる事が有効である。

井川は、可換な Hermann 作用の軌道を調べるために、既約制限ルート系の拡張概念である重複度付き対称三対の概念を導入し、可換な Hermann 作用の軌道の極小性、austere 性、全測地性と言った性質を、対称三対を用いて特徴づけた。この事実は、コンパクト Riemann 対称空間のイソトロピー作用の軌道の幾何学的性質が制限ルート系を用いて記述できる事の一般化となっている。

本論文では、Hermann 作用に加えて、Hermann 作用から誘導されるコンパクト Lie 群への作用も考え、それらの軌道の極小性、austere 性、全測地性、弱鏡映性、二重調和性などの部分多様体としての幾何学的性質を、重複度付き対称三対を用いて記述する。

第 2 節では、Hermann 作用と重複度付き対称三対に関する井川の仕事を紹介し、さらには Hermann 作用から誘導される Lie 群への作用の軌道の第二基本形式を重複度付き対称三対の言葉で記述する。この結果によって、Hermann 作用の軌道が極小、austere であることと、対応する Lie 群への作用の軌道が極小、austere であることが同値となる事が示される。

第 3 節では、Hermann 作用、及び Lie 群への作用の軌道が弱鏡映性を持つための十分条件を、対称三対を用いて与える。弱鏡映性は、Leung によって導入された鏡映性の一般化であり、井川、酒井、田崎によって導入された概念である。井川、酒井、田崎によって球面や複素射影空間内の弱鏡映部分多様体の例が数多く得られているが、一般のコンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体の例は多くは得られていなかった。対称三対を用いた十分条件によって、コンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体の例が数多く得られる。

第 4 節では、Hermann 作用、及び Lie 群への作用の軌道の二重調和性を、重複度付き対称三対を用いて特徴づける。二重調和部分多様体は調和部分多様体の一つの一般化である。二重調和部分多様体に関する重要な予想として Chen 予想がある。それは「Euclid 空間内の二重調和部分多様体は調和である」といったものである。Chen 予想は特定の条件の下で部分的な解決がなされてはいるが、未解決である。この事実とは対照的に、多様体の曲率が正の場合には調和でない二重調和部分多様体の例がいくつか見つかっている。例えば、一山、井ノ口、浦川によって、球面内の等質な二重調和超曲面の分類がなされている。一般に、二重調和の条件は 4 階の偏微分方程式で与えられるが、対称三対を用いた二重調和性の特徴付けによって、ある種の代数的な方程式に帰着される。この結果を用いると、球面のみならず、一般のコンパクト対称空間内の調和でない二重調和部分多様体の例が数多く得られる。特に、この手法の場合、高次元の二重調和部分多様体の例が構成できる点が特徴的である。第 4 節の内容は、酒井、浦川との共同研究に基づく。