連続講座

断層映像法の基礎　第30回
3次元コーンビームの投影と画像再構成

篠原　広行[1)]、中世古　和真[1)]、橋本　雄幸[2)]

[1)] 首都大学東京人間健康科学研究科　放射線科学域
[2)] 横浜創英短期大学　情報学科

はじめに

前回はCTの世界でよく使われている2次元のファン（扇状）ビームからの画像再構成について解説した。本稿では2次元ファンビームから重み付けした重畳積分法を利用して直接画像再構成する方法を前回よりも詳しく解説し、その方法を利用した3次元のコーン（円錐状）ビームの投影データから近似的に画像再構成するFeldkampの方法について解説する。

1. 2次元ファンビームからの直接画像再構成法
2. 3次元コーンビームの投影データ
3. Feldkampの画像再構成法

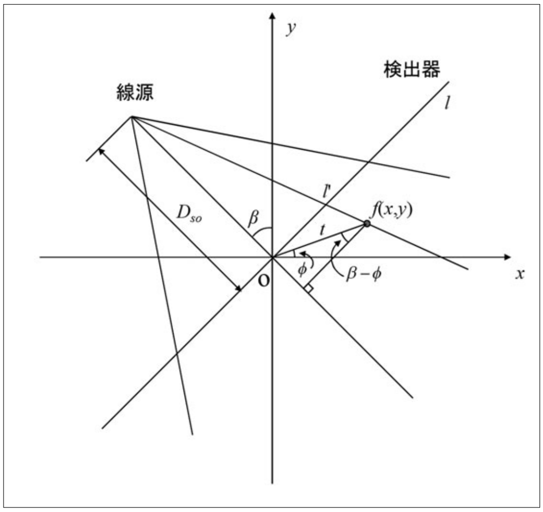


図1.　直線状の検出器を考えた場合の2次元ファンビームにおける座標系と線源、検出器の配置

1.　2次元ファンビームからの直接画像再構成法

ファンビームの平面検出器の場合についてもう一度詳しく解説する。線源と検出器の配置を**図1**に示す。通常、被写体は座標系x-o-yの原点付近に配置し、検出器は線源から原点に向かって反対側に配置される。**図1**に示した配置では、被写体の場所と検出器のある直線lが重なっている。本来はあり得ない配置であるが、**図2**に示すように本来の検出器の位置から拡大率（1画素の長さで換算する）を考えて、仮想検出器の位置に投影データを持ってくることを想定する。線源から原点を通る仮想検出器までの距離をD_{so}、線源から実際の検出器までの距離をD_{sd}、実際の検出器の標本間隔（検出器1つの幅、投影データの1画素の長さに相当）をΔdとしたとき、仮想検出器での標本間隔Δlは、

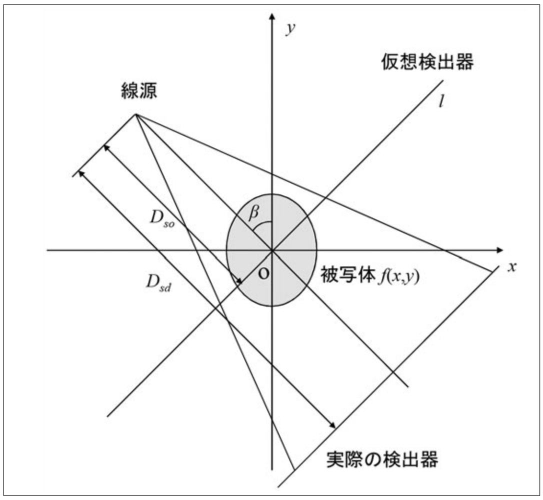


図2.　実際の検出器と仮想検出器と被写体の配置

連絡先：〒116-8551　東京都荒川区東尾久7-2-10
首都大学東京人間健康科学研究科放射線科学域　篠原　広行
TEL：03-3819-1211　FAX：03-3819-1406
E-mail：sinohara@hs.tmu.ac.jp
URL：http://www.metro-hs.ac.jp/rs/sinohara

$$\Delta l = \frac{D_{so}}{D_{sd}} \Delta d \tag{1}$$

となる。これは、簡単な幾何学で計算でき、その換算をしておくだけで原点を通る仮想検出器lから画像再構成を考えることが可能となる。

この仮想検出器から直接画像再構成を行う式は、

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{L_2(x,y,\beta)^2} \int_{-l\max}^{l\max} \hat{p}(l,\beta)\, h(l'-l) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + l^2}} dl\, d\beta \tag{2}$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1} y/x \end{cases} \tag{3}$$

$$L_2(x,y,\beta) = \frac{D_{so} + t\sin(\beta-\phi)}{D_{so}} \tag{4}$$

$$l' = \frac{D_{so}\, t\cos(\beta-\phi)}{D_{so} + t\sin(\beta-\phi)} \tag{5}$$

となる。この式の意味と画像再構成の手順を以下に示す。

(3) 式は、**図3**の点Fの直交座標（x, y）を極座標（t, ϕ）に変換する式である。(4) 式のL_2は線源Sと点Eまでの距離SEと線源と検出器の距離D_{so}の比を求めたものである。(5) 式は、原点oからl'までの距離を三角形Sol'と三角形SEFとの比（D_{so}：D_{so}+tsin($\beta-\phi$)）から求めている。これらの値を用いて(2)式を計算すると画像再構成することができる。(2)式の手順は以下のようになる。

①ファンビームの投影データ $\hat{p}(l,\beta)$に
　$D_{so}/\sqrt{D_{so}^2+l^2}$を掛ける。

$$\hat{p}'(l,\beta) = \hat{p}(l,\beta) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + l^2}} \tag{6}$$

②掛け算して修正した①のデータ $\hat{p}'(l,\beta)$に
　h(l)のフィルタを重畳積分する。

$$q(l',\beta) = \int_{-l\max}^{l\max} \hat{p}'(l,\beta) h(l'-l) dl \tag{7}$$

ここで h(l)は、実空間の Ramachandran-Lakshiminarayananフィルタで、その離散系は

$$h(l_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{4(\Delta l)^2} & i=0 \\ 0 & i: \mathrm{even} \\ -\dfrac{1}{\pi^2 l_i^2} & i: \mathrm{odd} \end{cases} \tag{8}$$

である。ここでΔlは (1)式の値を用いる。l_iは実際に標本化した投影データの標本位置に相当する。

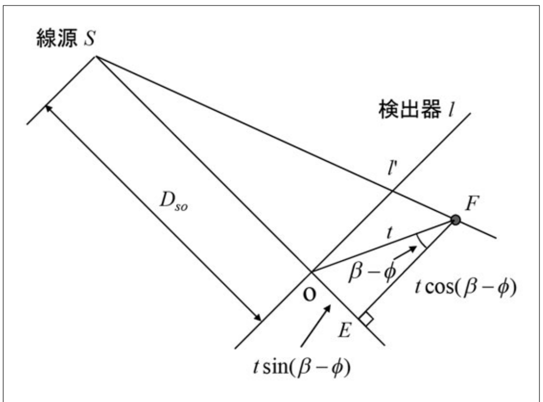


図3.　直接再構成法を考える上での幾何学的配置

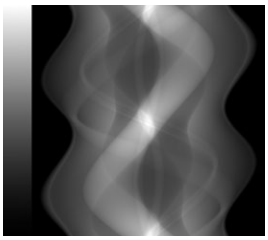


図4.
ファンビームの投影データ

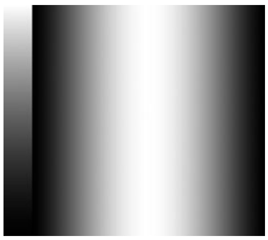


図5.
$D_{so}/\sqrt{D_{so}^2+l^2}$の値の画像

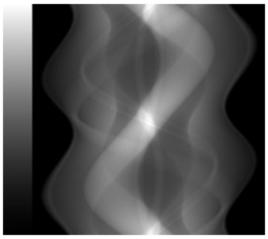


図6.
手順①を行った後の $\hat{\mathrm{p}}'(l,\beta)$ の画像

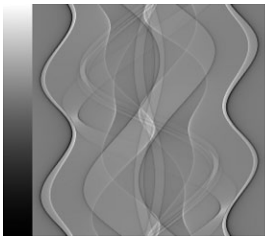


図7.
手順②のフィルタを重畳積分した後の画像

図8.
手順③の重み付けしながら逆投影した再構成画像

③重畳積分でフィルタ処理した②のデータを $1/\mathrm{L}_2{}^2$ で重み付けしながら逆投影する。

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\mathrm{L}_2(\mathrm{x},\mathrm{y},\beta)^2}\,\mathrm{q}(l',\beta)\,\mathrm{d}\beta \tag{9}$$

ファンビームの投影データから再構成画像ができるまでの過程を**図4**から**図8**まで画像で示す。**図4**がファンビームの投影データである。**図5**に $\mathrm{D_{so}}/\sqrt{\mathrm{D_{so}}^2+l^2}$ の値の画像を示す。それを掛け算した手順①の $\hat{\mathrm{p}}'(l,\beta)$ の画像を**図6**に示す。**図7**に手順②の処理であるフィルタを重畳積分した $\mathrm{q}(l',\beta)$ の画像を示す。**図8**に手順③の重み付けしながら逆投影した再構成画像 $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ を示す。**図8**では、数値ファントムの画像がきれいに再構成されているのが分かる。

次に3次元コーンビームの画像再構成の準備としてファンビームの画像再構成の式を、ベクトルを用いて書き直す。単位ベクトル i,j を**図9**の通り決定する。y-z平面における断層像を $\mathrm{f}(\mathrm{r}_0)$、$\mathrm{r}_0=(\mathrm{y},\mathrm{z})^{\mathrm{T}}$ とすると（Tは行と列を入れ替える転置を表す）、

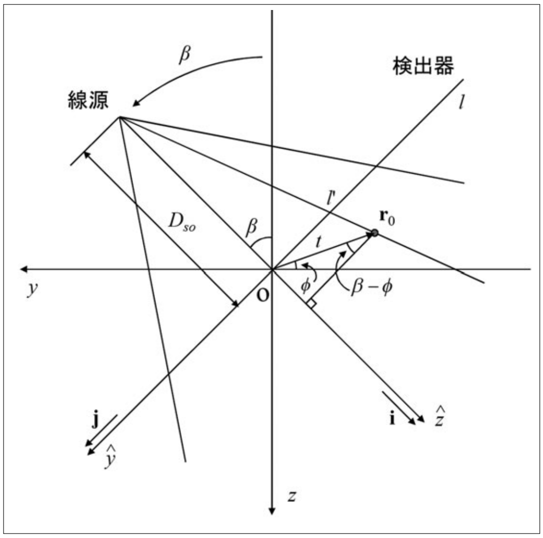


図9. 2次元ファンビームにおける座標系とベクトルの関係

$$\begin{cases}\mathrm{r}_0\cdot\mathrm{i}=\mathrm{t}\sin(\beta-\phi)\\ \mathrm{r}_0\cdot\mathrm{j}=\mathrm{t}\cos(\beta-\phi)\end{cases} \tag{10}$$

となり、(2)、(4)、(5) 式は、

$$\mathrm{f}(\mathrm{r}_0)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\mathrm{L}_2(\mathrm{r}_0,\beta)^2}\int_{-l\mathrm{max}}^{l\mathrm{max}}\hat{\mathrm{p}}(l,\beta)\,\mathrm{h}(l'-l)\,\frac{\mathrm{D_{so}}}{\sqrt{\mathrm{D_{so}}^2+l^2}}\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\beta \tag{11}$$

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{r}_0,\beta)=\frac{\mathrm{D_{so}}+\mathrm{r}_0\cdot\mathrm{i}}{\mathrm{D_{so}}} \tag{12}$$

$$l'=\frac{\mathrm{D_{so}}\,\mathrm{r}_0\cdot\mathrm{j}}{\mathrm{D_{so}}+\mathrm{r}_0\cdot\mathrm{i}} \tag{13}$$

となる。

2. 3次元コーンビームの投影データ

3次元コーンビームに対する投影は、**図10**に示すように線源から円錐状に放出されたX線を2次元の平面検出器で検出し、被写体の周りを1周し投影を撮る。投影データは、$\hat{\mathrm{y}}$ とx平面上の2次元検出器のデータを、角度 β を0〜2π まで変化させて撮る3次元データとなる。3次元コーンビームの投影データをサイノグラムのように積み重ねて3次元にした場合のそれぞれ原点を通る軸平面上の3つの2次元画像

を**図11（a）〜（c）**に示す。2次元検出器を256×256画素とし、256投影のデータを数値ファントムから作成している。**図11（a）**は、2次元検出器上の1つの角度方向の2次元投影データを示している（lm平面）。**図11（b）**は、2次元検出器の縦方向を中心位置に固定し、横方向（l方向）と角度方向（β方向）との2次元投影データを示している。このデータは2次元のサイノグラムに相当する。**図11（c）**は、2次元検出器の横方向を中心位置に固定し、縦方向（m方向）と角度方向（β方向）との2次元投影データを示している。

3次元コーンビームの場合も、2次元ファンビームと同様に検出器を原点にずらした仮想検出器を用いて画像再構成を考える。仮想検出器にずらす場合の拡大率については、ファンビームと同様に（1）式で変換する。ただし、2次元検出器の横方向と縦方向の標本間隔は等しいと仮定する。

3. Feldkampの画像再構成法

2次元ファンビームからの直接画像再構成法を利用して、3次元コーンビームを近似的に画像再構成するFeldkampの方法について解説する。**図12**のように座標系を設定する。3次元コーンビームの場合、2次元ファンビームの傾いた（コーン角）投影データが撮られているとみなして画像再構成を行う。傾いた投影データにおいては、回転すると被写体の別の平面が切られるので正確に画像再構成することができない。傾きが大きくなるほど画像再構成の誤差は大きくなる。しかし、近似的ではあるがそれなりの画像が再構成されるので、3次元コーンビームではこのFeldkampの方法が用いられている。

単位ベクトルi, j, kを**図12**の通り決定する。3次元空間の画像の値をf（r）、$\mathrm{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$とすると、

$$\begin{cases} \mathrm{r}\cdot\mathrm{i}=-y\sin\beta+z\cos\beta \\ \mathrm{r}\cdot\mathrm{j}=y\cos\beta+z\sin\beta \\ \mathrm{r}\cdot\mathrm{k}=x \end{cases} \tag{14}$$

となり、（11）、（12）、（13）式は3次元に拡張して、

$$\mathrm{f}(\mathrm{r})=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\mathrm{L}_2(\mathrm{r},\beta)^2}\int_{-l\mathrm{max}}^{l\mathrm{max}}\hat{\mathrm{p}}(l,\mathrm{m},\beta)\,\mathrm{h}(l'-l)\frac{\mathrm{D_{so}}}{\sqrt{\mathrm{D_{so}}^2+l^2+\mathrm{m}^2}}\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\beta \tag{15}$$

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{r},\beta)=\frac{\mathrm{D_{so}}+\mathrm{r}\cdot\mathrm{i}}{\mathrm{D_{so}}} \tag{16}$$

$$l'=\frac{\mathrm{D_{so}}\,\mathrm{r}\cdot\mathrm{j}}{\mathrm{D_{so}}+\mathrm{r}\cdot\mathrm{i}} \tag{17}$$

と表すことができる。コーンビームの投影データ$\hat{\mathrm{p}}(l,\mathrm{m},\beta)$は、$l$が2次元検出器の横方向、mが2次元検出器の縦方向に相当する。また、βが2次元検出器を回転した回転角に相当する。f（r）が点rにおける

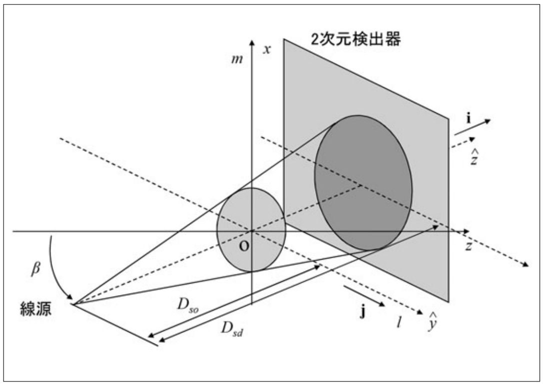


図10. 3次元コーンビーム投影の幾何学的配置

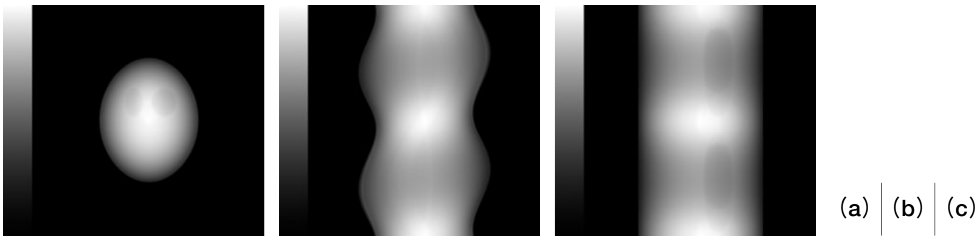


図11. 3次元コーンビームの投影データ
（a）2次元検出器上の1つの角度方向の2次元投影データ（lm平面）
（b）2次元検出器の横方向（l方向）と角度方向（β方向）との2次元投影データ（2次元のサイノグラムに相当する）
（c）2次元検出器の縦方向（m方向）と角度方向（β方向）との2次元投影データ

再構成画像の強度値になる。(15)式の具体的な手順は以下のようになる。

①コーンビームの投影データ $\hat{p}(l,m,\beta)$ に $D_{so}/\sqrt{D_{so}^2+l^2+m^2}$ を掛ける

$$\hat{p}'(l,m,\beta)=\hat{p}(l,m,\beta)\frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2+l^2+m^2}} \tag{18}$$

②1次元のRamachandran-Lakshiminarayananフィルタをそのまま投影データの l 方向に重畳積分する（フィルタ補正にあたる）。フィルタは(8)式と同じものを用いる。

$$q(l',m,\beta)=\int_{-l\max}^{l\max}\hat{p}'(l,m,\beta)h(l'-l)dl \tag{19}$$

③フィルタ補正した投影データを以下の式で重み付けして逆投影する

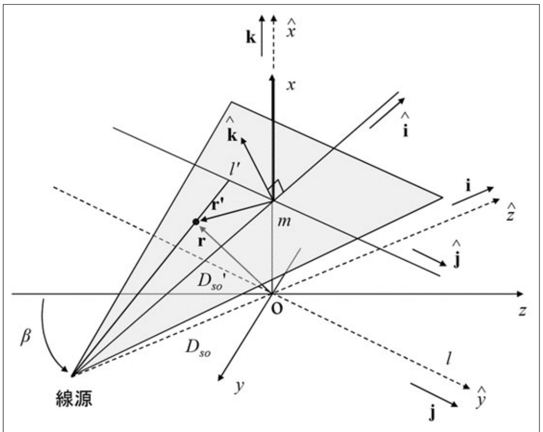
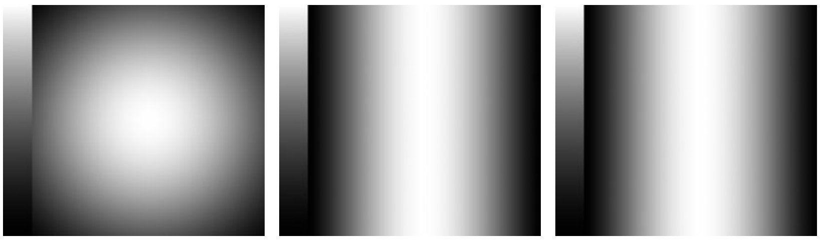


図12．コーンビームの投影データからFeldkampの画像再構成を行う場合の座標系

$$f(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{D_{so}^2}{(D_{so}+r\cdot i)^2}q(l',m,\beta)d\beta \tag{20}$$

図11に示したコーンビームの投影データから再構成画像ができるまでの過程を**図13**から**図16**まで画像で示す。それぞれの画像は**図11**と同様に3つの軸平面上の画像を示す。**図13**に $D_{so}/\sqrt{D_{so}^2+l^2+m^2}$ の値の画像を示す。それを掛け算した手順①の $\hat{p}'(l,m,\beta)$ の画像を**図14**に示す。**図15**に手順②の処理であるフィルタを重畳積分した $q(l',m,\beta)$ の画像を示す。**図16**に手順③の重み付けしながら逆投影した再構成画像f(r)を示す。**図16（a）**は、yz平面の2次元画像を示している。回転軸であるx軸の値が0の場合であるので、ファンビーム画像再構成に一致している。このため、誤差のない再構成画像となっている。**図16（b）**は、yx平面の2次元画像を示している。x軸が縦の回転軸方向であるため、縦に切られた画像となっている。中心から上下にずれるにしたがって誤差が大きくなるので、被写体の上と下の部分にアーチファクト（偽像）が見られる。**図16（c）**はzx平面の2次元画像を示している。**（b）**と同様のことがいえる。

図17に再構成した画像の回転軸であるx方向の位置を変化させたyz平面に平行な断層画像を示す。x=128のときx軸の中央になるので、**図16（a）**の断層画像となる。**図17（a）〜（c）**はそれぞれx=148、170、190の場合の断層画像である。xの値が大きくなるにつれて中央から離れていくので、誤差が大きくなる。**図17（a）**あたりではアーチファクトは目立たないが、**図17（b）**あたりになると、画像の周辺部にぶれが生じている。**図17（c）**では、本来楕円の形であるのに、ぶれの影響が大きくなり、円に近い形に



（a）｜（b）｜（c）

図13．$D_{so}/\sqrt{D_{so}^2+l^2+m^2}$ の値の画像

（a）2次元検出器上の1つの角度方向のデータ（lm平面）
（b）2次元検出器の横方向と角度方向のデータ（$l\beta$平面）
（c）2次元検出器の縦方向と角度方向のデータ（mβ平面）

なっている。このようにFeldkampの画像再構成法は近似の再構成法であるため、x軸の中央から離れてコーン角が大きくなると、近似誤差が大きくなり、アーチファクトが目立つようになる。

　コーンビームの投影を円周上で一回転して得られる3次元投影データは、3次元再構成のための完全なデータとはいえないので、いずれにしても近似を行って画像再構成する必要がある。Feldkampの画像再構成法は、その中でも良い近似方法とされている。

謝辞：本研究で使用したプログラムの開発は平成17年度〜平成22年度首都大学東京共同研究費（富士フィルムRIファーマ株式会社）、および平成21年度首都大学東京傾斜的配分研究費によるものである。

参考文献

1. 斉藤恒雄：画像処理アルゴリズム．近代科学社，東京，(1993)．

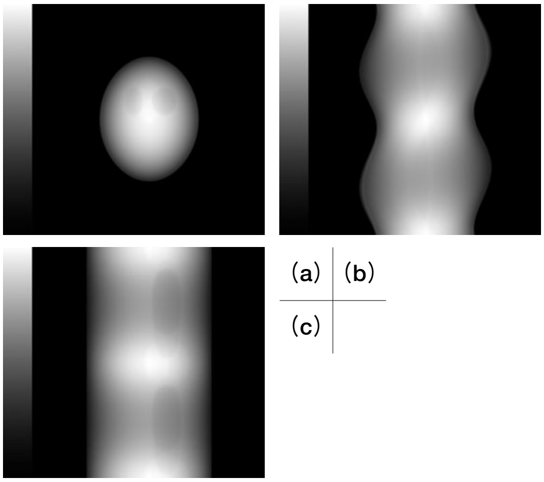


図14.　手順①を行った後の$\hat{p}'(l,m,\beta)$の画像
（a）2次元検出器上の1つの角度方向のデータ（lm平面）
（b）2次元検出器の横方向と角度方向のデータ（$l\beta$平面）
（c）2次元検出器の縦方向と角度方向のデータ（mβ平面）

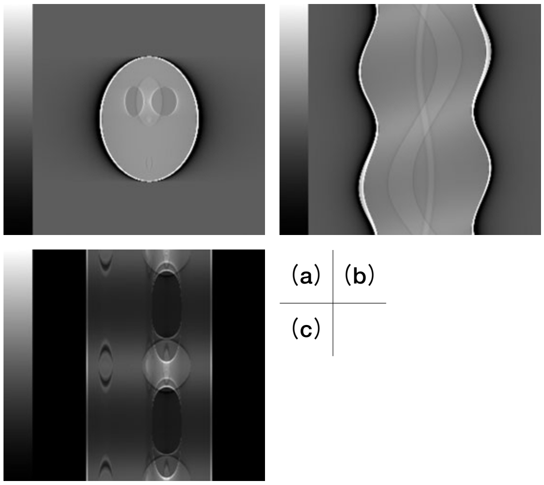


図15.　手順②のフィルタを重畳積分した後の画像
（a）2次元検出器上の1つの角度方向のデータ（lm平面）
（b）2次元検出器の横方向と角度方向のデータ（$l\beta$平面）
（c）2次元検出器の縦方向と角度方向のデータ（mβ平面）

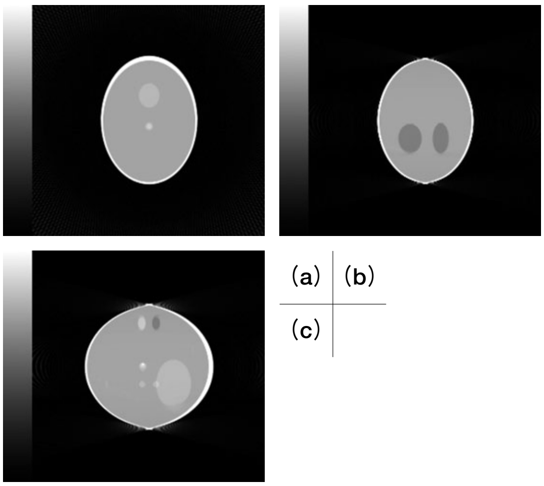


図16.　手順③の重み付けしながら逆投影した再構成画像
（a）yz平面の2次元画像（ファンビーム画像再構成に一致している）
（b）yx平面の2次元画像（x軸が縦の回転軸方向である）
（c）zx平面の2次元画像

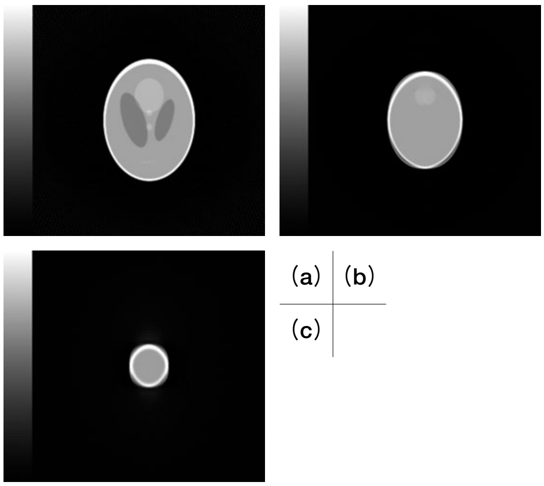


図17.　回転軸であるx軸の値を変化させた場合のyz平面に平行な断層画像
（a）x=148　（b）x=170　（c）x=190