



## 断層映像法の基礎 第39回 フィルタ補正逆投影法と最小二乗法との関係

篠原 広行<sup>1)</sup>、小島 慎也<sup>2)</sup>、中世古 和真<sup>3)</sup>、橘 篤志<sup>4)</sup>、橋本 雄幸<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup> 首都大学東京

<sup>2)</sup> 東京女子医科大学東医療センター 放射線部

<sup>3)</sup> つくば国際大学医療保健学部 診療放射線学科

<sup>4)</sup> 東京慈恵会医科大学附属病院 放射線部

<sup>5)</sup> 横浜創英大学こども教育学部

### はじめに

これまで本連載の第31回で代数的画像再構成法のART法、SIRT法、第32回で統計的画像再構成のML-EM法などの逐次近似法について述べた。逐次近似法は仮定した画像から計算で投影を作り(順投影)、これと計測した投影との差(比)を求め、誤差分を逆投影し仮定画像を更新する繰り返し計算によって原画像に近づけていく。逐次近似法では画像と投影の関係を表す検出確率が主要な役割を果たす。なお、検出確率という用語は核医学の逐次近似法で用いられてきたが、最近ではCT、MRIでの逐次近似法が普及しつつあり、システム行列あるいは簡単に係数行列と呼ばれる。そこで、本稿では係数行列と呼ぶことにする。第33回の最小二乗法を利用した画像再構成では、係数行列の階数(ランク)不足(1次独立の行または列が行列の次数よりも少ない)によって通常の方法では逆行列が求められない場合でも、特異値分解によって一般逆行列を求めれば近似的に原画像が復元されることを示した。逐次近似法に対し、解析的画像再構成の代表はフィルタ補正逆投影(FBP)法である。第33回ではフィルタ補正逆投影法と最小二乗法とはどのような関係にあるか触れなかったが、本稿では、係数行列に着目し両者の関係を整理する。

2006年頃からCTやMRIにおいて少ないデータからの画像再構成が盛んに研究されている。少数投影からの画像再構成は昔から研究されてきたテーマであったが、近年の情報理論で発達した圧

縮センシング(Compressed Sensing:CS)という手法がCTやMRIなどの医用イメージングにも導入され、少数投影からの画像再構成が可能になりつつある。CTでは少ない投影データから画像ができれば被ばく量の低減につながる。MRIにおいては少ないk空間データあるいは投影データから画像ができれば検査時間の短縮につながる。そこで、25年度の連載では、圧縮センシングを利用した画像再構成(CS法)の基礎となる、少ない投影からの画像再構成、これを実現するための逐次近似法で用いられる共役勾配法などの最適化法、CS法の紹介を予定している。本稿では、準備としてCS法で用いられる用語のベクトルのノルム、Total variation ノルム(TVノルム)などについて触れる。なお、本稿はやや数式が多い記述となっているが、図や画像なども多くしできるだけ数式の意味をわかりやすく述べたい。

1. 線形方程式による原画像、係数行列、投影の関係
2. 最小二乗法による画像再構成
3. FBP法と最小二乗法の関係
4. 正則化付き画像再構成
5. 最小二乗法の逐次近似計算

連絡先: 首都大学東京 篠原 広行

E-mail: sinohara@hs.tmu.ac.jp

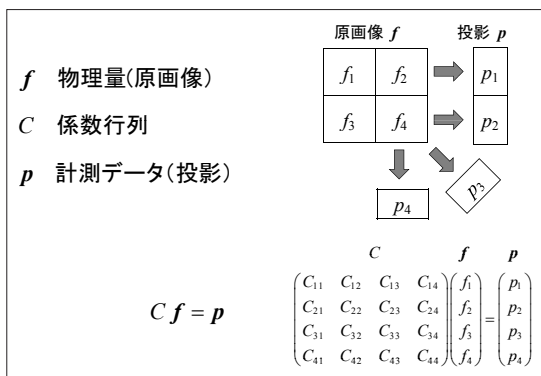


図1. 線形連立方程式で表される原画像、係数行列、投影の関係

1. 線形方程式による原画像、係数行列、投影の関係

原画像  $f$  を正方形画像とし1辺の画素数を  $N$ 、総画素数を  $J (= N \times N)$ 、投影角度数  $M$ 、角度あたりの投影数  $N$ 、総投影数を  $I (= M \times N)$ 、係数行列を  $C (= J \times I)$ 、投影を  $p (= I)$  とするときこれらの関係は以下で表される。なお、本稿ではベクトルを  $f$  や  $p$  のように太字で表している。

$$C_{11}f_1 + C_{12}f_2 + \dots + C_{1J}f_J = p_1$$

$$C_{21}f_1 + C_{22}f_2 + \dots + C_{2J}f_J = p_2$$

$$\vdots$$

$$C_{I1}f_1 + C_{I2}f_2 + \dots + C_{IJ}f_J = p_I$$

(1) 式の行列表示は

$$Cf = p$$

となる。 $C$  は行列、 $f$  と  $p$  は列(縦)ベクトルであり、行列の要素とベクトルの成分で書くと次式で表される。

$$\sum_{j=1}^J C_{ij}f_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, I$$

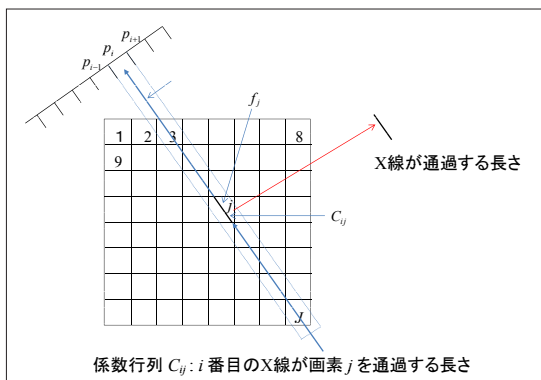


図2. 係数行列  
 $i$  番目のX線が画素  $j$  を通過する長さを係数行列とした場合。

図1は(1)式の原画像、係数行列、投影の関係を示す。係数行列には計測過程の様々な要因を組み込むことができるが、本稿での係数行列は簡単に図2のようにX線が画素を横切る長さ、あるいは図3のようにX線に幅があると考えそれが画素を横切る面積とする。係数行列  $C$  は次元(行列の行または列の数)が大きいこと、また、1本の投影に沿ってX線が横切る画素は全画素の一部のため、図4のように行列の要素に0を多く含む疎行列(スパース行列)となることが特徴である。

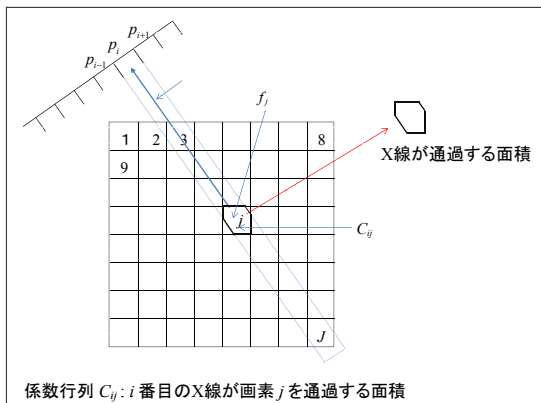
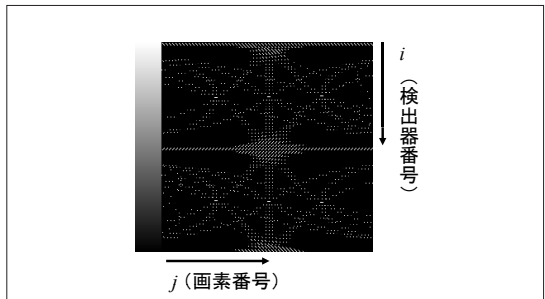


図3. 係数行列  
 $i$  番目のX線が画素  $j$  を通過する面積を係数行列とした場合。

図4. 原画像が  $64 \times 64$  画素 ( $J = 64 \times 64$ )、投影数  $64 \times 64$  ( $I = 64 \times 64$ ) から作られる係数行列  
 係数行列の要素数は  $J \times I = 4096 \times 4096$  の4096次正方行列となる。表示は  $256 \times 256$  に縮小している。



## 2. 最小二乗法による画像再構成

最小二乗法は次式の  $L_2$  ノルムの 2 乗からなる評価関数  $Q$  を最小にするように原画像の近似値を求める手法である。

$$Q = \| \mathbf{Cf} - \mathbf{p} \|_2^2 = (\mathbf{Cf} - \mathbf{p})^T (\mathbf{Cf} - \mathbf{p}) \quad (4)$$

ここでノルムについて説明する。ベクトル (ベクトルといっても、数の集まりの数列と考えればよい) は縦に成分を並べて以下のように表す。これを列ベクトルという。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

行ベクトルでは横に成分を並べて以下のように書く。T は行と列を入れ替える操作で転置という。(5) 式は  $n$  行 1 列なので行と列を入れ替えると 1 行  $n$  列となる。

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \quad (6)$$

ベクトル  $\mathbf{a}$  とベクトル  $\mathbf{b}$  の内積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  はスカラーであり次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \end{aligned} \quad (7)$$

図 1 は係数行列の 1 例を示しているが、行列の各行は数値が横に並んだ行ベクトルで各列は数値が縦に並んだ列ベクトルである。行列をベクトルの集まりと考えれば、行列とベクトルの掛け算は (7) 式の内積を計算していることになる。ベクトルの大きさを測る尺度をノルムと呼び、ノルムは、通常、 $\| \cdot \|$  の記号を用い以下のように表す。

$$\| \mathbf{a} \|_0, \quad \| \mathbf{a} \|_1 = \sum_{i=1}^N |a_i|, \quad \| \mathbf{a} \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2} \quad (8)$$

(8) 式の 1 番目を  $L_0$  ノルム、2 番目を  $L_1$  ノルム、3 番目を  $L_2$  ノルムという。 $L_0$  ノルムはベクトルの成分のうち 0 でない成分の数を足し算したもの、 $L_1$  ノルムは成分の絶対値を足し算したもの、 $L_2$  ノルムは成分の 2 乗を足し算しその平方根をとったものである。例えばベクトル  $\mathbf{a}$  が

$$\mathbf{a} = (1, 2, 0, 0, 3, 4)^T$$

のとき、それぞれのノルムは

$$L_0 = \| \mathbf{a} \|_0 = 4$$

$$L_1 = \| \mathbf{a} \|_1 = \sum_{i=1}^N |a_i| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$L_2 = \| \mathbf{a} \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$$

となる。(4) 式の  $\| \mathbf{Cf} - \mathbf{p} \|_2^2$  は  $\| \cdot \|$  内のベクトル  $\mathbf{Cf} - \mathbf{p}$  について  $L_2$  ノルムを 2 乗したものである。

(4) 式の最小二乗法の評価関数  $Q$  をベクトル  $\mathbf{f}$  の成分  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  について偏微分し 0 と置くと

$$\frac{\partial Q}{\partial f_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Q}{\partial f_n} = 0 \quad (9)$$

以下の式が得られる。

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{C}^T (\mathbf{Cf} - \mathbf{p}) = 0 \quad (10)$$

これから原画像の近似値は次式で与えられる。

$$\mathbf{f} \simeq (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{p} \quad (11)$$

画素数  $J$  に比べ投影数  $I$  が少ない場合の解は、ラグランジュの未定乗数法を用い次式で表される。

$$\mathbf{f} \simeq \mathbf{C}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{p} \quad (12)$$

(11) 式、(12) 式は第 33 回の特異値分解で解く方法の他、逐次近似 (反復計算) で解く方法がある。以上で最小二乗法によって原画像を近似的に求める式が得られたので、FBP 法との関係について考えてみよう。

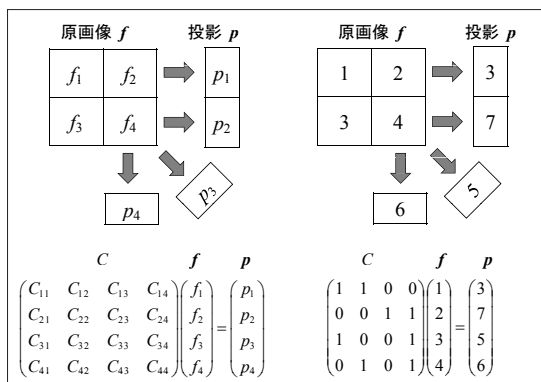


図5. 順投影の模式図

### 3. FBP 法と最小二乗法の関係

図5は図1の2×2画素の画像について原画像、係数行列、投影の値を設定した例を示す。図5は(2)式と(13)式の実際の数値を併記して投影(順投影)を表している。係数行列の要素  $C_{ij}$  はX線が画素を横切る長さを表す。正確には45°方向では画素の長さが1ではなく $\sqrt{2}$ となるが簡単のため1としている。原画像  $f$  は列ベクトルで表し画素の番号を添字  $j$ 、投影  $p$  は列ベクトルで表し投影の番号を添字  $i$ 、係数行列  $C$  の行は投影の番号  $i$ 、列は画素の番号  $j$  を表している。

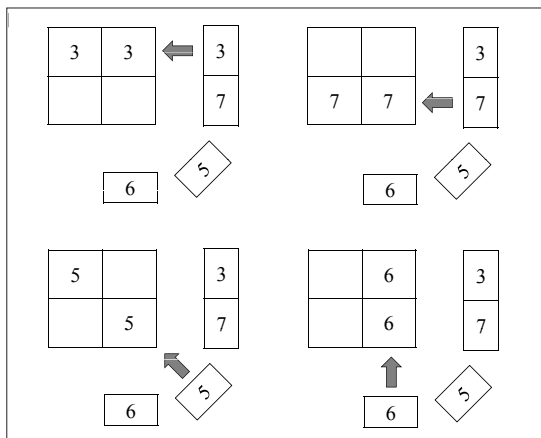


図6. フィルタ補正逆投影法で行われる逆投影(フィルタ補正なしの場合) 投影に着目した1方向毎の逆投影の過程を示す。

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (13)$$

係数行列  $C$  とベクトル  $f$  の掛け算から投影  $p$  が得られる。

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = C f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (14)$$

係数行列  $C$  の行と列を入れ替えた転置行列では、列は投影の番号  $i$ 、行は画素の番号  $j$  となる。

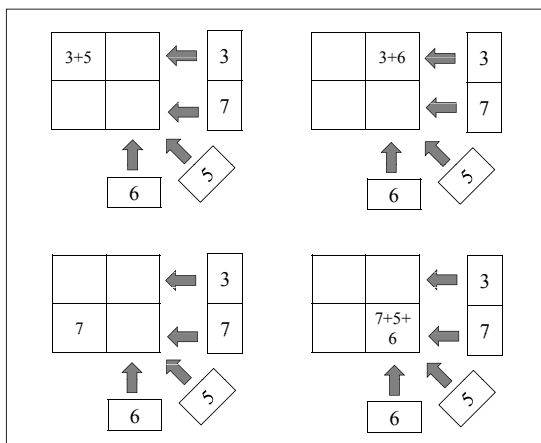


図7. 逆投影 画素に着目した逆投影の過程を示す。係数行列が0でない投影からの寄与が足し算される。

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix} \quad (15)$$

FBP法の逆投影は、投影の値をその投影を得た検出器に垂直な直線上に戻す操作であるから、フィルタ補正をしないで戻すと図6になる。各画素について逆投影された投影の値を足し算すると図7になる。係数行列の転置行列を用いると逆投影は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} &= \mathbf{C}^T \mathbf{p} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

例えば  $g_1$  の計算は以下のように、投影と係数行列  $C$  の下付添字の 2 番目が 1 に固定され (1 番目の画素に相当)、1 番目の添字が 1、2、3、4 と投影の順番に並び、係数行列  $C$  の転置行列と投影の積の足し算から逆投影の値が得られる式になっている。

$$g_1 = C_{11}p_1 + C_{21}p_2 + C_{31}p_3 + C_{41}p_4 \tag{17}$$

図 8 は係数行列  $C$  の転置行列と投影の掛け算をしてできる画像を  $\mathbf{g}$  とした式を左に、右には実際の数値を示す。図 8 と FBP 法で行われる逆投影の図 7 を比較すると両者は等しいことがわかる。すなわち、(11) 式の  $\mathbf{C}^T \mathbf{p}$  は逆投影を表す。投影は 1 次元であるがそれを 2 次元平面に逆投影すると 2 次元画像ができる。この 2 次元画像はぼけており、そのぼけを補正するのが (11) 式の逆行列の部分の  $(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}$  である。FBP 法は線形な画像再構成法であるから

方法 1

- 1) 投影を逆投影 (2 次元画像ができる)
- 2) 2 次元画像を 2 次元 Ramp フィルタや 2 次元 Shepp-Logan フィルタでフィルタ補正

方法 2

- 1) 投影を 1 次元 Ramp フィルタや 1 次元 Shepp-Logan フィルタでフィルタ補正
- 2) フィルタ補正した投影を逆投影

のいずれでも画像再構成が可能で両者は等しい値となる。通常、FBP 法は方法 2 の手順になる。(11) 式が方法 1 であり、 $(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}$  は 2 次元 Ramp フィルタに相当する。(12) 式ははじめに投影をフィルタ補

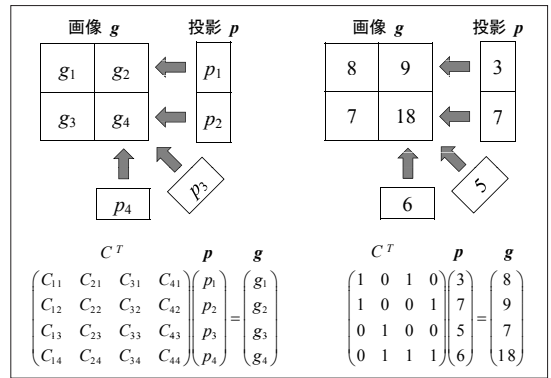


図 8. 係数行列の転置行列を用いた逆投影の模式図

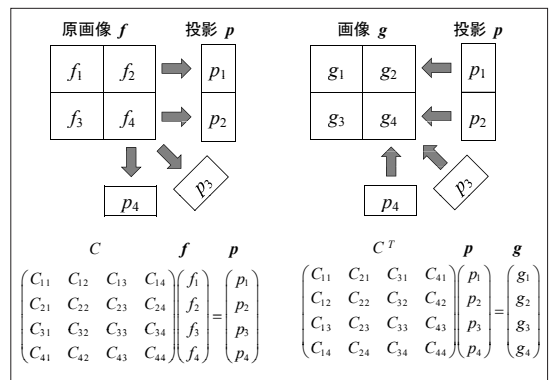


図 9. 順投影と逆投影の模式図

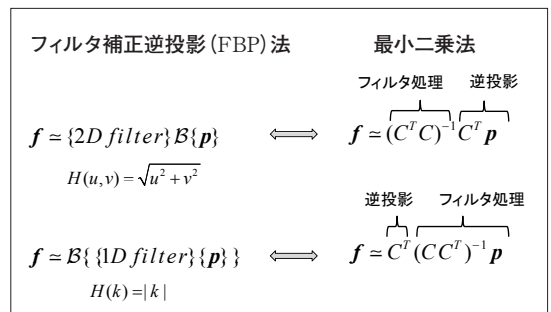


図 10. フィルタ補正逆投影法と最小二乗法の関係

正し次に逆投影を行う式になっているので、(12) 式は方法 2 であり  $(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}$  は 1 次元 Ramp フィルタに相当する。図 9 は順投影と逆投影を係数行列  $C$  とその転置行列で表している。図 10 は FBP 法と最小二乗法の関係をまとめたものである。ここで、 $B$  は逆

投影を表す演算子で  $B\{\mathbf{p}\}$  は投影を逆等することを示す。 $\{2D\text{filter}\}$  はこれより右にある項目に2次元フィルタ処理を行うことを示す。 $B\{\{1D\text{filter}\}\{\mathbf{p}\}\}$  は投影に1次元フィルタ処理を行いその結果を逆投影することを示す。

#### 4. 正則化付き画像再構成

原画像が  $256 \times 256$  画素で1投影角度あたりのデータ数を256とすると、標準化定理から必要な投影角度数(ビュー数)は402となる。このように、折り返し誤差のない正確な原画像を復元するには多くのビュー数が必要である。一方、原画像に関する事前情報(先見確率)がわかっていると、標準化定理を満たさないビュー数からも原画像を正確に復元することができる。極端な場合、原画像は円でありかつ円内の物理量(線減弱係数、磁化量、放射能など計測対象となる量)が一定(円画像)とわかれば、1方向の投影のみから原画像を正確に復元することができる。原画像に関するある事前情報を組み入れて画像再構成することを正則化付き画像再構成という。画像再構成に画像の勾配を正則化の条件にした最小二乗法の評価関数は次式で表される。

$$Q = \|C\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \beta \|\nabla \mathbf{f}\|_1 \tag{18}$$

右辺の第1項は(4)式と同じであり、第2項の  $\nabla \mathbf{f}$  は画像の勾配(Gradient)を示し、 $\|\nabla \mathbf{f}\|_1$  は勾配についての  $L_1$  ノルム(つまり勾配の大きさの足し算)を示す。 $\beta$  はこの  $L_1$  ノルムに掛ける重み係数である。ここで、勾配について復習する。1次元関数の微分(勾配)は次式で表される。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{19}$$

2次元関数の場合の微分はそれぞれの方向の勾配を表し以下の偏微分係数で与えられる。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{20}$$

勾配の大きさ  $\nabla \mathbf{f}$  は偏微分係数の2乗和の平方根である。

$$\nabla \mathbf{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \tag{21}$$

TVノルムとは勾配の大きさの  $L_1$  ノルムとして次式で表される(以下の式は和を積分で表している)。

$$\begin{aligned} TV &= \iint \|\nabla \mathbf{f}(x,y)\|_1 dx dy \\ &= \iint \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \end{aligned} \tag{22}$$

したがって、TVノルムの最小化は勾配画像(勾配の大きさを表す画像)の  $L_1$  ノルムの最小化と同じことである。図11はShepp-Loganファントム画像とそのx方向の微分画像、y方向の微分画像、勾配画像を示す。このファントムはそれぞれの楕円内の値が一定なのでそれらの領域内の勾配は0となる。すなわち勾配画像には0の領域が多い。その結果、(22)式のTVノルムは小さな値になる。(22)式のTVノルムを(18)式の第2項に用いると評価関数Qは次式で表される。

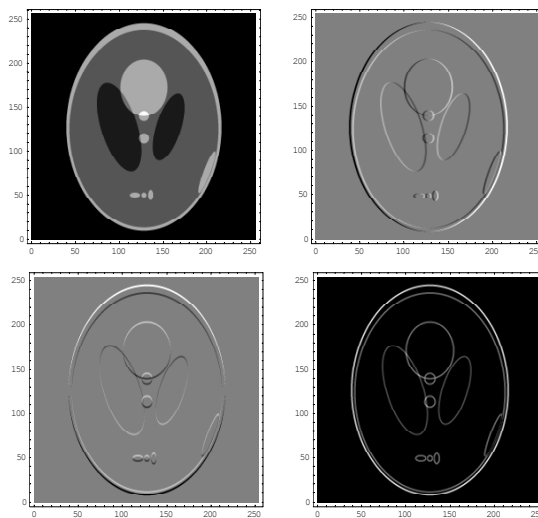


図11. Shepp-Logan ファントムと勾配画像

- (a) 原画像
- (b) x方向の微分画像
- (c) y方向の微分画像
- (d) 勾配画像

a	b
c	d

$$Q = \| \mathbf{Cf} - \mathbf{p} \|_2^2 + \beta \| \text{TV}(\mathbf{f}) \|_1 \quad (23)$$

(23) 式の評価関数  $Q$  を小さくするように  $\mathbf{f}$  を求めるには、画像と投影の整合性の指標である第1項の誤差を小さくするとともに第2項も小さくする必要がある。TVノルムを正則化の条件にすると勾配画像の0でない領域を少なくする作用があるので、濃度が一定であるべき領域を滑らかにする一方で図11(d)から予想されるようにエッジを保存し、雑音やギブスリングアーチファクトに対しては抑制する働きがある。その結果、少ない投影数でもエッジを保存しアーチファクトの少ない再構成画像を得ることができる。そのためには $\beta$ を適切に選ぶ必要がある。

図12は  $256 \times 256$  画素の Shepp-Logan ファントムを1投影角度あたりの投影数を256、投影角度数を256、96、64、32、24、16と減少させたときの再構成画像を左にその2次元フーリエ変換(実部)を右に示す。投影角度数が減少するにつれ、周波数空間の隙間が増加し、その結果、実空間での画像にはアーチファクトが顕著になる。正則化の条件として(21)式のTVノルムの他に、1) 原画像は有効視野内にあること、2) 原画像は負の値をとらず正のみの値をとることなどを逐次近似画像再構成に付け加えると、投影角度数が24のShepp-Loganファントムでも投影角度数が256に近い再構成画像が

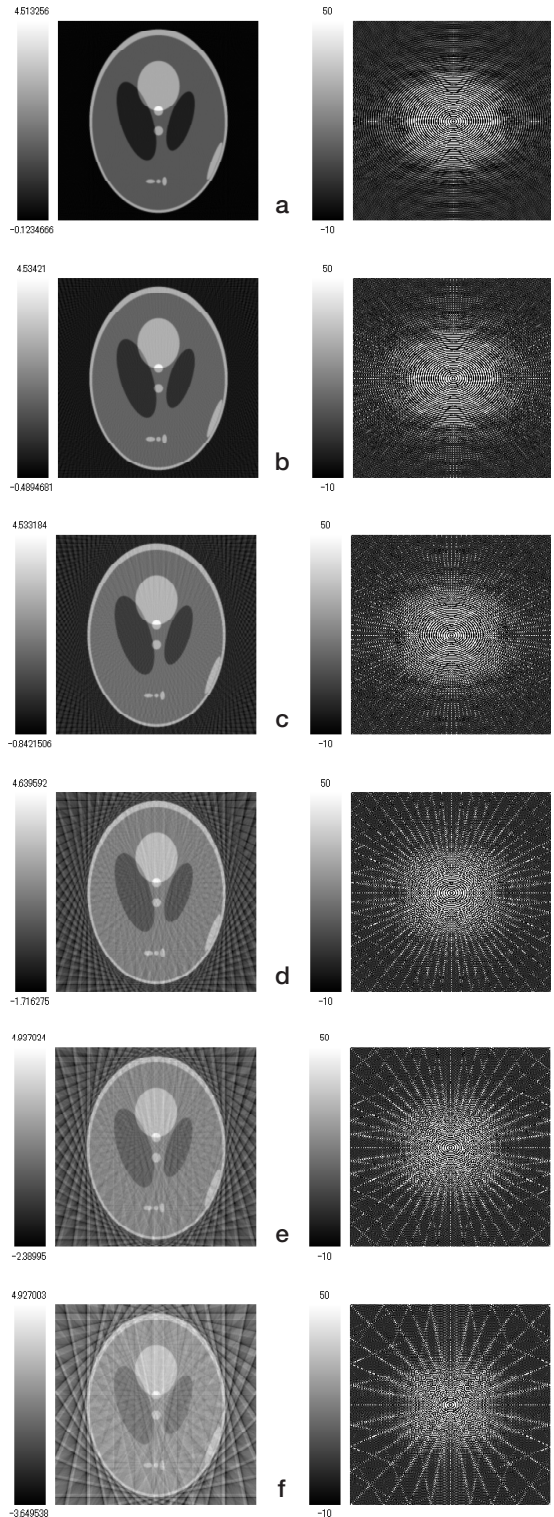


図12. Shepp-Logan ファントムのフィルタ補正逆投影法による再構成画像と周波数成分画像

- (a) 投影角度数 256
- (b) 投影角度数 96
- (c) 投影角度数 64
- (d) 投影角度数 32
- (e) 投影角度数 24
- (f) 投影角度数 16

フィルタは Ramp フィルタ。左は再構成画像、右は周波数成分画像を示す。投影角度数は  $180^\circ$  についての値であり、256は  $180^\circ$  についての256の投影角度で投影を取得する(投影角度の間隔は  $180^\circ / 256$  となる)。投影角度数が少なくなると周波数成分が欠如している様子がわかる。

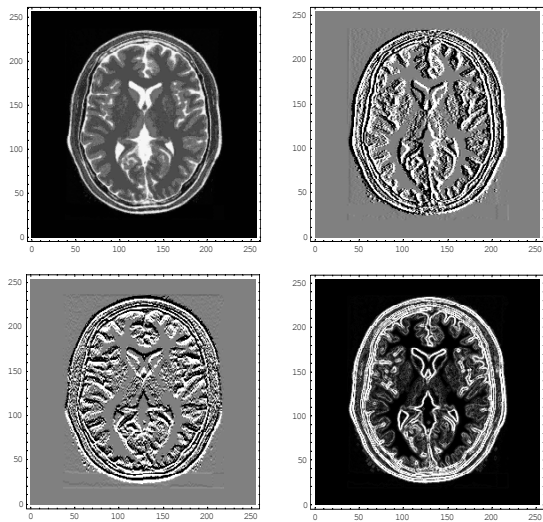


図 13. 頭部 T2 強調画像と勾配画像

- (a) 原画像
- (b) x 方向の微分画像
- (c) y 方向の微分画像
- (d) 勾配画像

a	b
c	d

得られることが報告されている。図 13 は T2 強調画像と勾配画像を示し、この画像とは異なるが T2 強調画像に関し、投影角度数 24 の逐次近似法によって良好な再構成画像が得られることが報告されている。また、胸部 CT 画像に関し、ART 法の再構成画像に見られるアーチファクトが TV ノルムの正則化によって抑制され、原画像に近い画像が得られることも報告されている。図 14 の横断面の T1 強調画像や図 15 の矢状断面の T1 強調画像に関し、少ない投影角度数から TV ノルムの正則化付き画像再構成によってどの程度の画像が得られるか興味を持たれる。

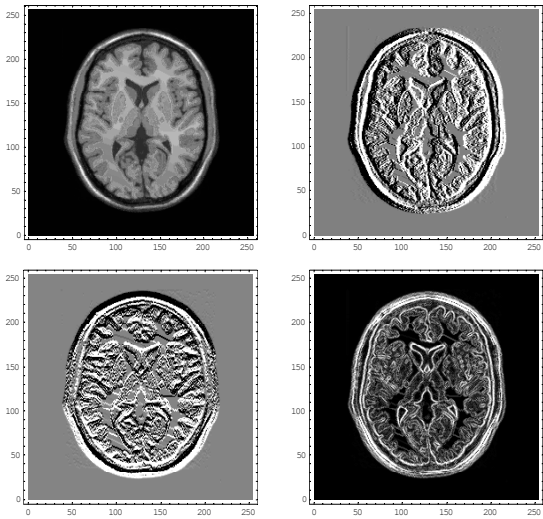


図 14. 頭部 T1 強調画像と勾配画像

- (a) 原画像
- (b) x 方向の微分画像
- (c) y 方向の微分画像
- (d) 勾配画像

a	b
c	d

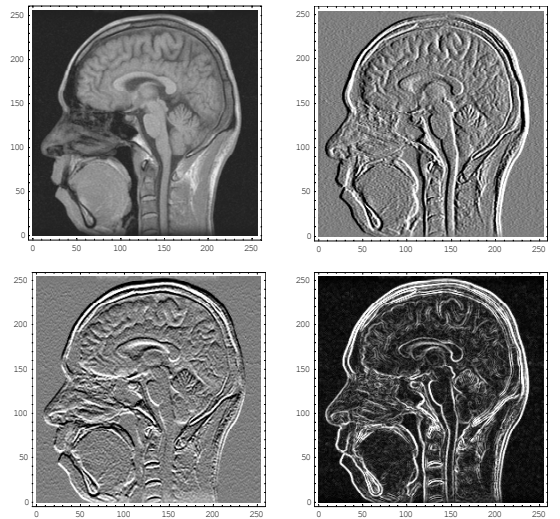


図 15. 頭部 T1 強調画像と勾配画像

- (a) 原画像
- (b) x 方向の微分画像
- (c) y 方向の微分画像
- (d) 勾配画像。

a	b
c	d



## 5. 最小二乗法の逐次近似計算

一般逆行列を利用する特異値分解は最小二乗法の解法として極めて有用であるが、大きな行列計算を必要とする。(10) 式の勾配を用いると

$$\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{f}^k - \mathbf{p}) \quad (24)$$

次式のような逐次近似が考えられる。

$$\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k - a_k \nabla Q \quad (25)$$

ここで  $\mathbf{f}^k$  は反復式における更新前の画像、 $\mathbf{f}^{k+1}$  は更新後の画像、 $a_k$  は加速係数と呼ばれる反復計算の

収束を速めるための係数で、この係数の違いによって最急降下法や共役勾配法など一般に勾配法と呼ばれる最適化法がある。正則化付き最小二乗法をこれら勾配法で解くには、(21) 式の勾配画像を  $x$  および  $y$  で微分することが必要であるが、これは近似計算によって行われる。したがって、次式の評価関数  $Q$  の微分は計算することができるので、これを(25) 式に代入すれば反復計算式となる。

$$\nabla Q = 2\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{f} - \mathbf{p}) + \beta \nabla \|\text{TV}(\mathbf{f})\|_1 \quad (26)$$

今回は最急降下法や共役勾配法による再構成画像を紹介したい。