原著

k 空間データの極座標変換を用いた MRI 画像再構成法

橘 篤志 橋本雄幸 坂口和也 小畠隆行 篠原広行

- 1東京慈恵会医科大学付属病院放射線部
- 2横浜創英短期大学情報学科
- 3 北里大学医療衛生学部
- 4 放射線医学総合研究所重粒子医科学センター
- 5首都大学東京大学院人間健康科学研究科

論文受付 2011年10月17日 論文受理

2012年1月18日 Code No. 500

緒言

磁気共鳴画像(magnetic resonance imaging; MRI)は 核磁気共鳴現象を利用して組織の周波数空間分布を k 空間データとして収集する. 二次元フーリエ変換 MRI の k 空間データは直交座標系で得られ, 二次元フーリ エ逆変換を用い画像再構成を行う. 一方, 二次元ラジ アルスキャン MRI の k 空間データは極座標系で得ら れ, フィルタ補正逆投影法(filtered back projection; FBP 法)¹¹や逐次近似法によって画像再構成される. 特に, 逐次近似法はサンプリング数の少ないデータあるいはマルチコイルを用いた MRI の画像再構成法への応用で注目されている²⁾.

本研究では、二次元フーリエ変換 MRI で得られる直 交座標系のk空間データを極座標系に変換し、FBP法 や逐次近似法によって画像再構成する MRI 画像再構成 法を提案する. これまでの逐次近似法を用いた MRI 画 像再構成法の応用は、ラジアルスキャン MRI のk空間 データに限定されており、提案する MRI 画像再構成法

MRI Image Reconstruction Using Polar-coordinates Conversion of k-space Data

Atsushi Tachibana, ^{1*} Takeyuki Hashimoto, ² Kazuya Sakaguchi, ³ Takayuki Obata, ⁴ and Hiroyuki Shinohara ⁵

Department of Radiology, The Jikei University Hospital

³Kitasato University School of Allied Health Sciences

Received October 17, 2011; Revision accepted January 18, 2012 Code No. 500

Summary

In this study, we proposed the new reconstruction techniques for magnetic resonance imaging (MRI) using filtered back projection (FBP) or simultaneous reconstruction technique (SIRT). We converted the k-space which was acquired by conventional phase-encoding schemes from Cartesian coordinates to polar coordinates and created the projection. The linear interpolation and the sinc interpolation were used in the conversion. The accuracy of the reconstructed image using projection was evaluated by the relative error in comparison with the standard image which was reconstructed by the two-dimensional Fourier transform (2DFT) with conventional Cartesian k-space. The relative error reconstructed both FBP and SIRT from projection with sinc interpolation is 0.013. The maximum value of standard image is 1.501451, FBP is 1.47921, and SIRT with iteration 100 is 1.44858 and with iteration 200 is 1.579442. The minimum value of both the standard image and the others is about 0. Visually, there is no margin between the standard image and the reconstructed image from projection with FBP or SIRT.

Key words: magnetic resonance imaging (MRI), simultaneous reconstruction technique (SIRT), iterative reconstruction, polar-coordinates conversion, projection

²Department of Information Processing, Yokohama Soei Junior College

⁴Research Center for Charged Particle Therapy, National Institute of Radiological Sciences

⁵Tokyo Metropolitan University Graduate School of Human Health Sciences

^{*}Proceeding author

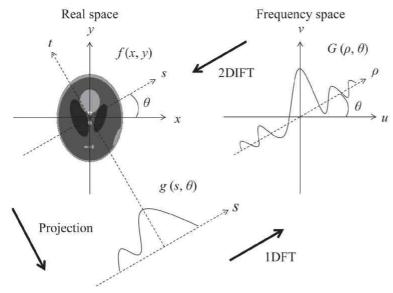


Fig. 1 A graphical illustration of the projection slice theorem.

The one-dimensional Fourier transform (1DFT) of projection $g(s, \theta)$

from the image f(x, y) is equal to the profile of two-dimensional Fourier transform (2DFT) $G(\rho, \theta)$ with the projection angle θ .

はこれまで報告されていない独創的な手法である. 逐次 近似画像再構成法は解析的画像再構成法である FBP 法 と比較し、装置分解能、統計雑音の寄与など、データ 計測の過程で生じる画質劣化因子をアルゴリズム中に 組み込める柔軟性を有している。そこで、将来、MRI 画像再構成にこのような因子を組み込むことも想定し. 本研究ではその第一歩として直交座標系の k 空間デー タを極座標系に変換し再構成画像を得ることに焦点をあ てた3.4). 本研究のポイントはk空間データを直交座標 系から極座標系に変換する際に生じる補間誤差を最小 限に留めることであり、初めに、MRI装置で収集した ファントムデータを用い線形補間とシンク補間の2種類 の補間法で極座標変換を行い、投影データを得た. 次 に、これら投影データを FBP 法と逐次近似法の一つで ある代数的手法の simultaneous reconstruction technique (SIRT法)5.6)によって画像再構成し、二次元フーリエ変 換法による再構成画像を基準画像としてその差を絶対 誤差によって評価した.

1. 方 法

1-1 投影切断面定理による投影の作成

Fig. 1 に示す投影切断面定理によって、原画像 f(x, y) の二次元フーリエ変換 F(u, v) から θ 方向の投影 $g(s, \theta)$ の一次元フーリエ変換 $G(\rho, \theta)$ を作成することが可能である.

極座標変換を用いた画像再構成の過程を Fig. 2 に示す.

帯域制限された連続データでは標本化定理を満たす 離散データからシンク補間によって、もとのデータを正 確に復元できることが知られている。シンク補間で使用 するシンク関数は次式で表される。

$$\operatorname{sinc}(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho} \quad \dots \tag{1}$$

任意範囲の中で各整数座標の値を原点とするシンク 関数を考え、実数座標の値を求めるにはそこを通るす べてのシンク関数の和を計算する. 256×256のk空間 データから 1 投影あたりのサンプリング数 256, 投影方 向数 256 の投影を作成した.

1-2 ファントムデータの収集と開発環境

MRI 装置,送受信コイルは GE ヘルスケア・ジャパン 社製 Signa 3.0T MRI, 1ch QD coil,ファントムは Phantom Laboratory 社製 Magphan Quantitative Imaging Phantom を用いて、SE 法によって k 空間データを収集した.撮像 条件は TE 5 ms. TR 500 ms, Matrix 256×256, NEX 1, FOV 30 cm. 開発環境には Microsoft Visual Studio .NET 2003 C++ を使用した.

1-3 画像再構成と強度画像の作成

直交座標系の k 空間データの実部と虚部から、線形補間、シンク補間によって投影を作成した. FBP 法は画像再構成フィルタに ramp フィルタを使用し、4 倍のゼロパディングを行った. FBP 法ではフィルタ補正後の投影の総和は原理的にゼロであり、数値計算においてもゼロになるが、投影をそのままフーリエ変換し逆投影すると再構成画像の最大値は原画像の最大値の約90%となり定量性が保持されない. これを改善するためには、フーリエ変換する際、投影の両端にゼロを付加(ゼロパディング)し、再構成画像のマトリクスよりも大きな領域

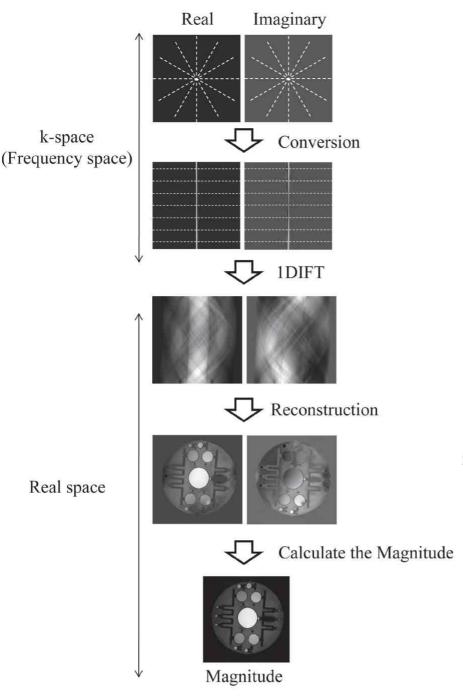


Fig. 2 Schematic diagram of proposed reconstruction method using the converted k-space data from Cartesian coordinates to polar coordinates.

We converted the k-space from Cartesian coordinates to polar coordinates in the frequency space and created the projection with one-dimensional inverse Fourier transform (1DIFT). The real and the imaginary image were reconstructed and the magnitude image was calculated with the square root of sum of squares from each data.

に逆投影することが不可欠であり、4倍のゼロパディングを行うと再構成画像は原画像に近づく⁷⁾. 逆投影の補間には線形補間を用いた. SIRT 法は次式の加法的 SIRT 法を用い画像再構成を行い、実部、虚部の画像から強度画像を作成した.

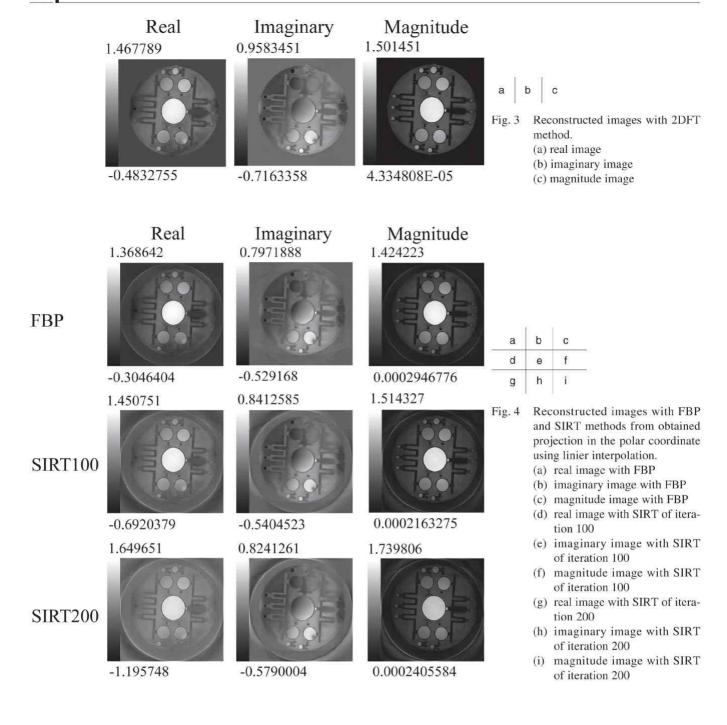
$$\lambda_{j}^{k+1} = \lambda_{j}^{k} + \frac{1}{\sum_{i}^{m} C_{ij}} \sum_{i}^{m} \frac{\left(y_{i} - \sum_{j}^{m} C_{ij} \lambda_{j}^{k}\right) C_{ij}}{\sum_{j}^{m} C_{ij}} \qquad (2)$$

式(2)のkは繰り返し回数, iは投影の座標を表す添

え字、jは再構成画像の座標を表す添え字、 λ_j は画素 j の再構成値、 y_i は画素 i の投影値、 C_{ij} は検出確率、m はサンプリング数を表す。 C_{ij} は画素の投影による面積分で作成した。なお、SIRT 法の繰り返し回数は 100回、200回とした。

1-4 再構成画像の評価

提案手法による再構成画像と二次元フーリエ変換法による再構成画像との差は、二次元フーリエ変換による再構成画像 f(x, y) を基準画像とし、FBP 法、SIRT 法による再構成画像 g(x, y) との各画素間で次式の絶対誤差



にて評価した.

$$E = \frac{\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left| f(x,y) - g(x,y) \right|}{N \times N}$$
 (3)

ここで N×N は再構成画像の総画素数であり、絶対誤差の値が小さい程、再構成画像は二次元フーリエ変換による再構成画像に近い、また、再構成画像の最大値、最小値を比較した。再構成画像の分解能はパワースペクトルで評価した。

2. 結果

二次元フーリエ変換法によって画像再構成した実

部、虚部、強度の画像を Fig. 3 に示す. 各画像の上段、下段の数値はそれぞれ最大値、最小値である. 線形補間を用いた投影からの再構成画像を Fig. 4 に、シンク補間を用いた投影からの再構成画像を Fig. 5 に示す. 線形補間を用いた場合、画像周囲に円状のアーチファクトが発生した. 絶対誤差は FBP<SIRT 100<SIRT 200 の順に大きくなった. シンク補間を用い投影を作成した場合、アーチファクトは見られず、視覚的には二次元フーリエ変換法と同様の再構成画像が得られた. 線形補間を用いた投影からの再構成画像の絶対誤差をTable 1、シンク補間を用いた投影からの再構成画像の絶対誤差をTable 2 に示す.

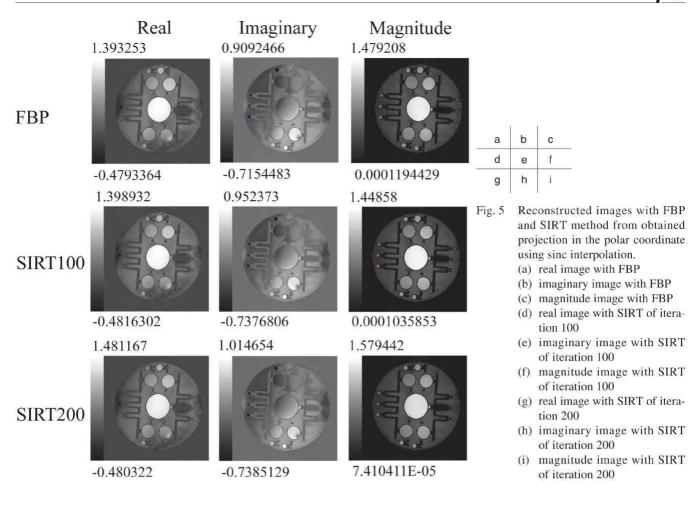


Table 1 Relative error of reconstructed image with linier interpolation

	Real	Imaginary	Magnitude 0.063585	
FBP	0.056892	0.032270		
SIRT 100	0.076646	0.047413	0.090415	
SIRT 200	0.090664	0.052563	0.105555	

Relative error of reconstructed images with FBP and SIRT method from obtained projection using linier interpolation.

Table 2 Relative error of reconstructed image with sinc interpolation

	Real	Imaginary	Magnitude	
FBP	0.014993	0.009215	0.013717	
SIRT 100	0.014119	0.008754	0.013392	
SIRT 200	0.014387	0.009690	0.014054	

Relative error of reconstructed images with FBP and SIRT methods from obtained projection using sinc interpolation.

線形補間を用いた投影からの再構成画像のパワースペクトルを Fig. 6 に、シンク補間を用いた投影からの再構成画像のパワースペクトルを Fig. 7 に示す. SIRT 100 のパワースペクトルは高周波成分が低下し、SIRT 200 のパワースペクトルは二次元フーリエ変換法のパワースペクトルに近い結果が得られた.

3. 考察

線形補間を用いた座標変換では、近傍画素のみを使用した補間となり誤差が発生した。投影を用いた画像再構成では二次元画像内に内接する円の外側は表現が困難であり、その境界において顕著なアーチファクトが発生したと考えられる。絶対誤差はFBP<SIRT

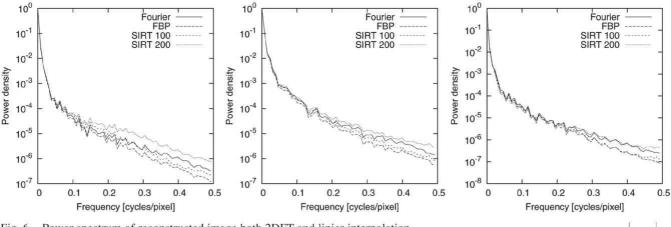


Fig. 6 Power spectrum of reconstructed image both 2DFT and linier interpolation.

Power spectrum of reconstructed image with 2DFT method, and those of reconstructed images with FBP and SIRT methods from obtained projection using linier interpolation.

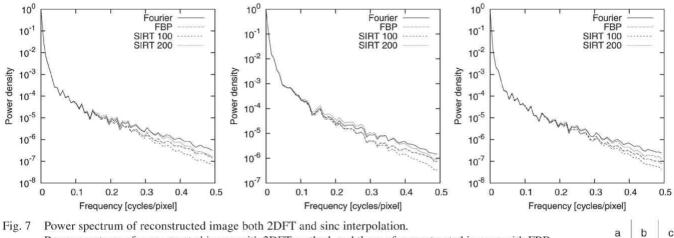


Fig. 7 Power spectrum of reconstructed image both 2DFT and sinc interpolation.

Power spectrum of reconstructed image with 2DFT method, and those of reconstructed images with FBP and SIRT methods from obtained projection using sinc interpolation.

100<SIRT 200 の順で大きく(悪く)なったが、これは繰り返しの過程でアーチファクトが増強したことによると考えられる。シンク補間を用いた座標変換では、全画素を用いて補間の計算を行うことで忠実に画素値が再現され、アーチファクトが顕著に低減し視覚的には二次元フーリエ変換法による再構成画像と区別できない画質であった。絶対誤差はFBP、SIRT 100、SIRT 200で大きな差はなく、パワースペクトルでは SIRT 200 が最も二次元フーリエ変換法による再構成画像に近い傾向を示した。

ファントム実験は 256×256 画素に限定しているが、この画素数は MRI に使用されている画素数であることから現実に即した実験計画となっている。一方、MRI では別の画素数での収集もあることから、本節ではシンク補間と画素数の関係について計算機シミュレーション実験で検討する。検証には解析的に二次元フーリエ変換を容易

に求めることができ、かつ角度によって投影が異なる、 以下の矩形領域内で強度が一定の二次元関数を用いる.

$$f(x, y)=A \qquad |x| \le a \text{ and } |y| \le a$$

$$=0 \qquad |x| > a \text{ or } |y| > a \qquad (4)$$

ここで and と or は論理積と論理和を表すものとする. この関数の二次元フーリエ変換は.

$$F(u,v) = \frac{4a^2 A \sin(2\pi au)}{2\pi au} \frac{\sin(2\pi av)}{2\pi av} \qquad (5)$$

となる。投影切断面定理によって角度 θ 方向の投影の一次元フーリエ変換は、

$$G(\rho,\theta) = \frac{4a^2 A \sin\{2\pi a(\rho\cos\theta)\}}{2\pi a(\rho\cos\theta)} \frac{\sin\{2\pi a(\rho\sin\theta)\}}{2\pi a(\rho\sin\theta)} \begin{cases} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \end{cases}$$
.....(6)

C

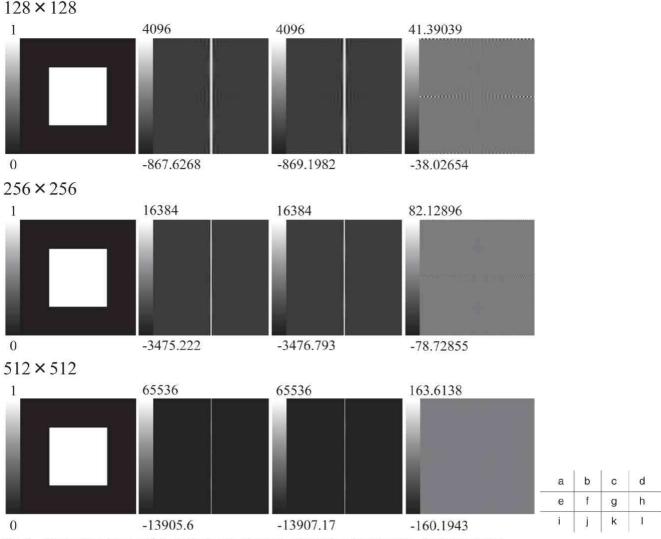


Fig. 8 Comparison images of theoretical projection and estimated projection using sinc interpolation.

- (a) rectangular image (128×128 matrix)
- (b) 1DFT of projection for rectangular image calculated using sinc interpolation (128×128 matrix)
- (c) projection of rectangular image calculated by Eq. (6) (128×128 matrix)
- (d) subtracted projection between theoretical and estimated projection (128×128 matrix)
- (e) rectangular image (256×256 matrix)
- (f) 1DFT of projection for rectangular image calculated using sinc interpolation (256×256 matrix)
- (g) projection for rectangular image calculated by Eq. (6) (256×256 matrix)
- (h) subtracted projection between theoretical and estimated projection (256×256 matrix)
- (i) rectangular image (512×512 matrix)
- (j) 1DFT of projection for rectangular image calculated using sinc interpolation (512×512 matrix)
- (k) projection for rectangular image calculated by Eq. (6) (512×512 matrix)
- (1) subtracted projection between theoretical and estimated projection (512×512 matrix)

となる。シンク補間によって極座標変換した投影の誤差は式(6)と比較することで評価できる。計算機シミュレーション実験は1辺の画素数をNとし、A=1, a/N=1/4, 画像のマトリクスを128×128、256×256、512×512 画素の3種類とした。結果をFig. 8と Table 3に示す。シンク補間による極座標変換の誤差は画像の大きさが変わってもわずかであり、提案手法によって128×128、256×256、512×512 画素のk空間データに対し、極座標変換を用いたMRI画像再構成が可能である。理論値と

の乖離については、矩形画像が帯域制限されていないことや数値計算による誤差などが推測される。投影切断面定理に関し、解析的二次元フーリエ変換とシンク補間による投影との数値比較の報告がなく、先行研究との対比ができないため、理論値との乖離の原因究明に関しては今後の研究課題としたい。FBP法に及ぼす雑音の影響については、われわれはShepp-Logan数値ファントム8(256×256 画素)を用い、雑音レベルをデシベル単位で5段階に変化させ報告している3. 雑音を含ま

Table 3 Comparison of theoretical projection and estimated projection using sinc interpolation

Matrix size	T_max	E_max	T_min	E_min	Sub_max	Sub_min	Ratio
128×128	4096	4096	-869.1982	-867.6268	41.39039	-38.02654	0.010105
256×256	16384	16384	-3476.793	-3475.222	82.12896	-78.72855	0.005013
512×512	65536	65536	-13907.17	-13905.6	163.6138	-160.1943	0.002497

T_max (T_min): theoretical maximum value (minimum value) of projection for rectangular image calculated by Eq. (6), E_max (E_min): maximum value (minimum value) of 1DFT of projection for rectangular image calculated using sinc interpolation, Sub_max (Sub_min): maximum value (minimum value) of subtracted projection between theoretical and estimated projection, Ratio: ratio of maximum difference between subtracted projection and F (0, 0) in Eq. (5).

ないファントム画像を基準にした平方根二乗誤差 (RMSE)は、雑音が少ない条件(視覚的に雑音を確認できない雑音レベル)では、提案手法のRMSEはフーリエ変換法のRMSEよりも大きいが、視覚的に確認できる雑音レベルでは、提案手法のRMSEはフーリエ変換法のRMSEよりも小さい、SIRT法についても同様の傾向と推測されるが、今後の検討としたい。

本研究では統計雑音を含むファントム実験のデータを用いているので、パワースペクトルの高周波成分には雑音のスペクトルも含まれる。投影のサンプリング数 N_p 、投影方向数 N_ϕ 、再構成画像のx、y方向の総画素数をそれぞれ N_x 、 N_y としたとき、 $N_xN_y=N_pN_\phi$ の条件では、雑音のみを含むk空間データを二次元フーリエ変換法で画像再構成したときの標準偏差 $\sigma(FT)$ とFBP法の標準偏差 $\sigma(FBP)$ との間に以下の関係がある 9

$$\frac{\sigma(\text{FBP})}{\sigma(\text{FT})} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{12}} = 0.9069 \quad (7)$$

シンク補間で作成したアーチファクトが認められない 投影データを用い、FBP 法や SIRT 法によって再構成し た画像のパワースペクトルが二次元フーリエ変換法によ る再構成画像のパワースペクトルよりも若干低い値を示 したのは、式(7)に基づく結果なのか分解能の違いを示 すのか現段階では明らかではない。

直交座標から極座標への座標変換の処理時間は線形 補間が1秒以内.シンク補間は4分22秒であった.シ ンク補間に時間がかかるが、コンピュータの高速化、並列化計算の普及に伴い将来的には現在の計算時間は大幅に減少する可能性がある。本研究では、直交座標で得られるk空間データを極座標変換し加法的SIRT法によって画像再構成することができた。このことから、直接極座標の投影データが得られるラジアルスキャンMRIに対しても加法的SIRT法は適用可能であると考えられる。

4. 結 語

二次元フーリエ変換 MRI で得られる直交座標系の k 空間データを極座標系の投影データに変換し、FBP 法 や逐次近似法によって画像再構成を行う手法を提案した.シンク補間を用い作成した投影データから FBP 法、SIRT 法で得た再構成画像とフーリエ変換法による 再構成画像との絶対誤差は 1 画素あたり 0.013 と小さく、視覚的には同等の画質であった。本研究の今後の展開として、逐次近似法に分解能補正や雑音低減処理のアルゴリズムを組み込んだ MRI 画像再構成の研究への応用が示唆される.

本論文の要旨は, 第38回日本放射線技術学会秋季 学術大会(2010年10月, 仙台)において発表した. ま た, 本研究は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研 究(C)(No. 21591571)の援助によった.

参考文献

- Herman GT. Image reconstruction from projections: the fundamentals of computerized tomography. Academic Press, New York, 1980: 135-138.
- Block KT, Uecker M, Frahm J. Undersampled radial MRI with multiple coils. Iterative image reconstruction using a total variation constraint. Magn Reson Med 2007; 57(6): 1086-1098.
- 3) 橋本雄幸, 伊藤 猛, 軽部修平, 他. k 空間における直交 変換を利用した画像再構成. 日磁医誌 2009; 29S: 409.
- 4) 橘 篤志, 藤堂幸宏, 橋本雄幸, 他. MAP-EM(MRP)法を 用いた MRI 逐次近似画像再構成法. 日放技学誌 2010; 66(9): 1095.
- 5) Gilbert P. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. J Theor Biol 1972; 36(1): 105-17.
- Yokoi T, Shinohara H, Hashimoto T. Iterative reconstruction algorithms in SPECT: a simulation study using EGS4. Japan KEK Proceedings 200-20, 2000: 224-234.

- 7) 橋本雄幸, 篠原広行. 第5章 画像再構成の実際. C 言語による画像再構成の基礎. 医療科学社, 東京, 2006: 248-250.
- 8) Shepp LA, Logan BF. The Fourier reconstruction of a head section. IEEE Trans Nucl Sci 1974; 21: 21-43.
- Liang ZP, Lauterbur PC. Principles of magnetic resonance imaging: a signal processing perspective. Wiley-IEEE press, New York, 2000: 246-250.

Fig. 1 投影切断面定理

画像 f(x, y) から得た投影データ $g(s, \theta)$ の一次元フーリエ変換は、f(x, y) の二次元フーリエ変換における原点を通る同じ角度の一次元データ $G(\rho, \theta)$ に等しい.

Fig. 2 周波数空間における極座標変換を用いた画像再構成の処理過程 周波数空間にてk空間データを直交座標系から極座標系へ変換後、一次元フーリエ逆変換にて投影を作成した。画像再構成に よって実部と虚部を作成し、それらの二乗和の平方根から強度画像を作成した。

Fig. 3 二次元フーリエ変換法による再構成画像

- (a) 実部画像
- (b) 虚部画像
- (c) 強度画像
- Fig. 4 線形補間を用い極座標で得た投影を FBP, SIRT 法で再構成した画像
 - (a) FBP によって再構成した実部画像
 - (b) FBP によって再構成した虚部画像
 - (c) FBP によって再構成した強度画像
 - (d) SIRT, 繰り返し 100 回によって再構成した実部画像
 - (e) SIRT, 繰り返し 100 回によって再構成した虚部画像
 - (f) SIRT, 繰り返し 100 回によって再構成した強度画像
 - (g) SIRT, 繰り返し 200 回によって再構成した実部画像
 - (h) SIRT. 繰り返し 200 回によって再構成した虚部画像
 - (i) SIRT, 繰り返し 200 回によって再構成した強度画像
- Fig. 5 シンク補間を用い極座標で得た投影を FBP, SIRT 法で再構成した画像
 - (a) FBP によって再構成した実部画像
 - (b) FBP によって再構成した虚部画像
 - (c) FBP によって再構成した強度画像
 - (d) SIRT, 繰り返し 100 回によって再構成した実部画像
 - (e) SIRT, 繰り返し 100 回によって再構成した虚部画像
 - (f) SIRT, 繰り返し100回によって再構成した強度画像
 - (g) SIRT, 繰り返し 200 回によって再構成した実部画像
 - (h) SIRT, 繰り返し 200 回によって再構成した虚部画像
 - (i) SIRT, 繰り返し 200 回によって再構成した強度画像
- Fig. 6 二次元フーリエ変換法による再構成画像と線形補間を用いた FBP, SIRT 法による再構成画像のパワースペクトル
- Fig. 7 二次元フーリエ変換法による再構成画像とシンク補間を用いた FBP、SIRT 法による再構成画像のパワースペクトル
- Fig. 8 解析的フーリエ変換による投影とシンク補間による投影の比較画像
 - (a) 矩形画像(128×128 画素)
 - (b) シンク補間を用いた投影画像(128×128 画素)
 - (c) 解析的フーリエ変換を用いた投影画像(128×128 画素)
 - (d) シンク補間による投影と解析的な投影との差分画像(128×128 画素)
 - (e) 矩形画像(256×256 画素)
 - (f) シンク補間を用いた投影画像(256×256 画素)
 - (g) 解析的フーリエ変換を用いた投影画像(256×256 画素)
 - (h) シンク補間による投影と解析的な投影との差分画像(256×256 画素)
 - (i) 矩形画像(512×512 画素)
 - (j) シンク補間を用いた投影画像(512×512 画素)
 - (k) 解析的フーリエ変換を用いた投影画像(512×512 画素)
 - (1) シンク補間による投影と解析的な投影との差分画像(512×512 画素)
- Table 1 線形補間を用いた再構成画像の絶対誤差
- Table 2 シンク補間を用いた再構成画像の絶対誤差
- Table 3 解析的フーリエ変換による投影とシンク補間による投影の比較

 T_{max} (T_{min}): 式(6)から求めた矩形画像の解析的な投影における最大値(最小値). E_{max} (E_{min}): シンク補間による投影の一次元フーリエ変換における最大値(最小値). Sub_{max} (Sub_{min}): 解析的な投影とシンク補間を用いた投影との差分画像. Ratio: 差分画像と式(5)の F (0, 0) における値の比.

問合先

〒 105-8471 港区西新橋 3-19-18

東京慈恵会医科大学付属病院放射線部 橘 篤志