連続講座

断層映像法の基礎　第26回
ベクトル表現を利用した不等間隔な点からの逆変換

篠原　広行[1]、藤堂　幸宏[1]、軽部　修平[1]、小島　慎也[1]、橋本　雄幸[2]

[1] 首都大学東京人間健康科学研究科　放射線科学系
[2] 横浜創英短期大学　情報学科

はじめに

第25回では、ベクトル表現として等間隔な粗いサンプリングで変換が分かっているときに、それをもとに変換前の画像に戻す方法を解説し、シミュレーションを行なってどの程度の正確さで逆変換できるかを差分画像で視覚的に検証した。今回は、ベクトル表現での逆変換のサンプリングが等間隔ではない場合に、どのような方法で変換ベクトルの補間を行ない、逆変換できるかを解説する。まずは、1次元の場合における不等間隔なサンプリング点からの補間方法について解説する。次に2次元の場合における空間分割とそれを利用した補間方法について解説する。最後に、2次元の補間方法を変換ベクトルに応用する方法について解説する。

1. 不等間隔な点からの1次元補間

通常サンプリングは等間隔で行なうが、等間隔でないサンプリングが行なわれた場合、その後の処理のために等間隔なサンプリング点に補間する必要がある。1次元では等間隔なサンプリングで利用した補間と同じような補間方法を用いることができる。以下に、最近傍補間、線形補間と3次多項式補間について解説する。

1-1　最近傍補間

粗いサンプリングの変換ベクトルが不等間隔で並んでいる場合、等間隔なサンプリングのときと同様に、最も単純な補間方法は、最も近い点の値を代用する最近傍補間である。不等間隔なサンプリング点の場合でもその補間方法を用いることができる。不等間隔な場合は、サンプリング点間の中央で代用する値を変えることになる。**図1**に示す不等間隔なサン

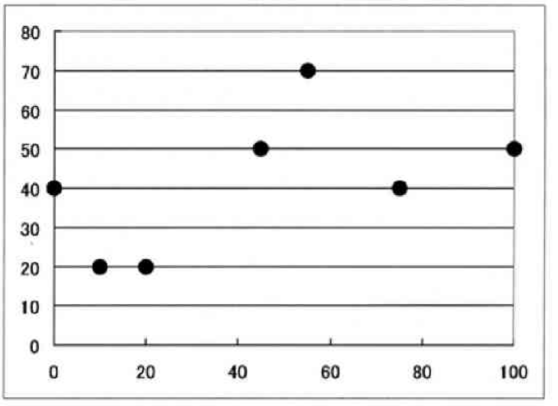


図1.　不等間隔なサンプリング点の一例

別刷請求先：〒116-8551　東京都荒川区東尾久7-2-10
首都大学東京人間健康科学研究科放射線科学系　篠原 広行
TEL：03-3819-1211　FAX：03-3819-1406

プリング点を用いて最近傍補間を行なうと**図2**のようになる。サンプリング点間の中央で値が大きく変化する。この例ではちょうど中央にくる点では右側の値を用いている。中央の点については、補間を用いるときにどちらかに決めておけば問題ない。

1-2 線形補間

不等間隔なサンプリングの場合でも、等間隔なサンプリングのときと同様に線形補間を用いることができる。**図3**に示すように、$f(x_0)$ と $f(x_1)$ の間にある $f(x)$ の値は、$x_0<x<x_1$とするとき、

$$f(x)=\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \tag{1}$$

となる。線形補間の場合、2点からの補間なので、等間隔なサンプリングの場合とまったく同じ式を用いることができる。ただし、不等間隔であるので、x_0とx_1との距離がそれぞれの点の間によって変化する。この線形補間を行なった例を**図4**に示す。不等間隔なサンプリングの場合でも2点間を直線で結ぶだけなので、等間隔な場合とそれ程変わらない。

1-2 3次多項式補間

線形補間より正確に補間を行なう方法の1つに3次多項式補間がある。不等間隔の場合は、それぞれの点の間で3次多項式を算出して、その3次多項式を用いて値を求める方法となる。よって**図5**に示すように、$f(x_0)$ と $f(x_1)$ の間にある $f(x)$ の値は、$x_{-1}<x_0<x<x_1<x_2$ とするとき、$f(x_{-1})$ と$f(x_2)$ の値も利用して、

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \tag{2}$$

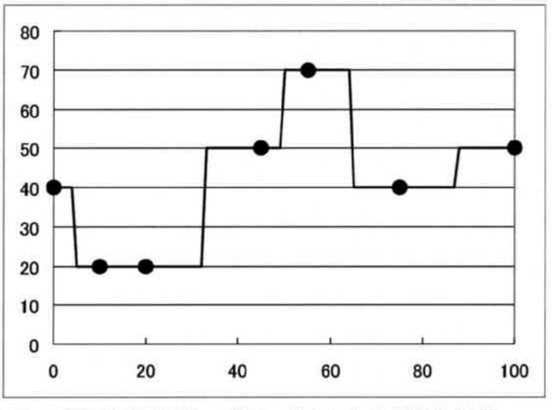


図2. 不等間隔なサンプリング点からの最近傍補間
2点間の中央の位置で左右の点から選択する代表値が変化する。

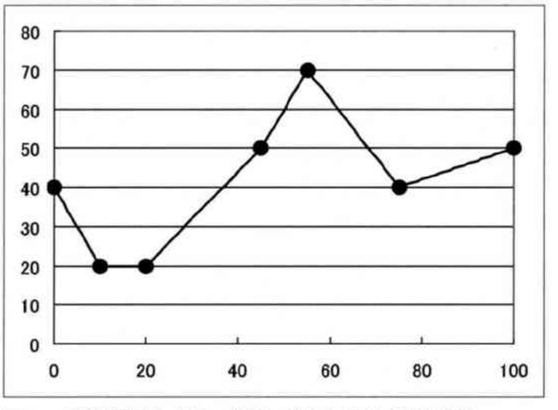


図4. 不等間隔なサンプリング点からの線形補間

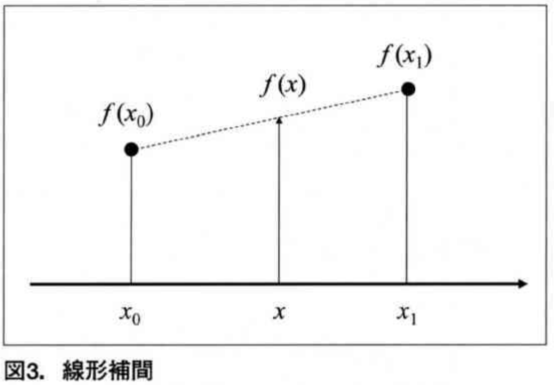


図3. 線形補間
左右のデータを直線で結び、その線上の値を代表値とする。

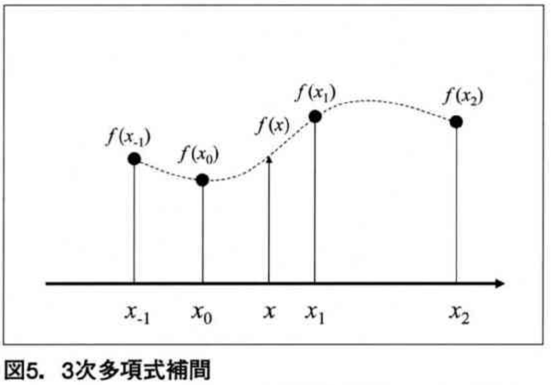


図5. 3次多項式補間
左右2つずつの4つの値から3次多項式を算出し、その曲線上の値を代表値とする。

の係数を求めてから計算する。その係数 a, b, c, d の値は、

$$\begin{cases} f(x_{-1}) = ax_{-1}^3 + bx_{-1}^2 + cx_{-1} + d \\ f(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \\ f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \\ f(x_2) = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d \end{cases} \quad (3)$$

の連立方程式を解いて求める。等間隔なサンプリングの場合、事前に連立方程式を解いて、簡便な式に直して実行することができるが、不等間隔なサンプリングの場合は、毎回連立方程式を解いてから補間の値を求める。この3次多項式補間を行なった例を**図6**に示す。線形補間に比べて滑らかにつながっている。

2. 不等間隔な点からの2次元補間

2-1 ボロノイ図における空間分割

2次元やそれ以上の次元の場合、まず、不等間隔な点を用いて空間分割を行なう必要がある。これは、補間を行なう際に、あるサンプリング点が寄与する空間範囲を決定しなければならないからである。任意に配置された複数個の点から空間分割を行なう最も一般的な方法は、ボロノイ図を利用する方法である。n 個の任意の点の集合 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ と任意の2点間の距離を求める関数 $d(p_i, p_j)$ を考えた場合、

$$V(p_i) = \{p \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), i \neq j\} \quad (4)$$

で構成される領域 $V(p_i)$ をボロノイ領域と呼び、その領域で区切った図をボロノイ図と呼ぶ。ボロノイ領域では、領域内の任意の点が、その領域に代表される点に他の代表点より最も近くなっている。任意に配置された複数個の点の例を**図7**に示す。**図7**の複数個の点からボロノイ領域で分割し色分けしたボロノイ図を**図8**に示す。

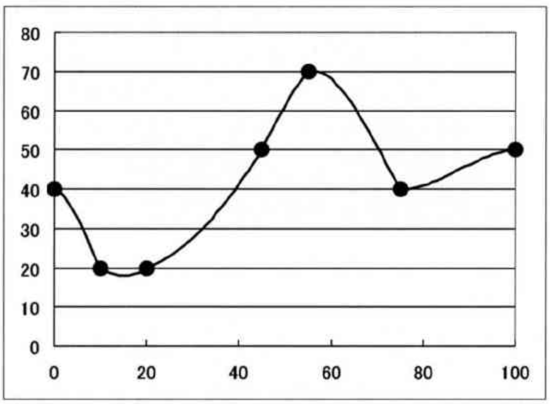


図6. 不等間隔なサンプリング点からの3次多項式補間
線形補間に比べると滑らかにつながっている。

2-2 ボロノイ図を利用した最近傍補間

図8に示したボロノイ図をもとに補間法を考えた場合、最も単純な方法は、ボロノイ領域内の値を代表点の値にする方法である。これは、1次元での最近傍補間と同じ考え方となる。この方法では、ボロノイ図の色分け通りに値が配置される。ボロノイ図を利用した補間では、線形的な方法を用いようとしても複雑になってしまう。そこで、線形補間を考える場合、次のドロネー図を利用した空間分割が有効となる。

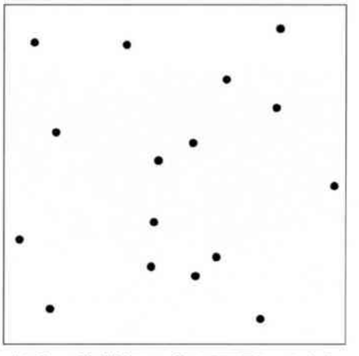


図7. 任意に複数個の点を配置した例
2次元画像の中に16個の点を任意に配置している。

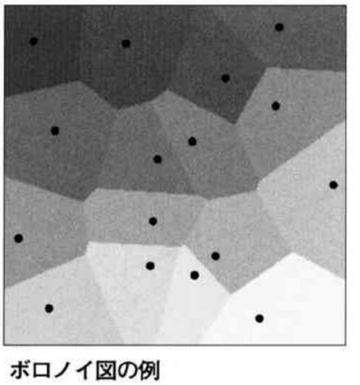


図8. ボロノイ図の例
図7に示した任意の点を用いて、ボロノイ領域で区切ったボロノイ図。代表点を黒丸で示し、ボロノイ領域は1つずつ色分けしている。

2-3 ドロネー図における空間分割

ドロネー図は、ボロノイ図を利用して、代表点を頂点とした三角形に分割する方法である。まれに三角形にならない場合もあるが、大抵は三角形に分割される。ドロネー図の作成方法は、ボロノイ図において2つのボロノイ領域が隣接する場合に、その代表点同士を直線で結んで、空間を分割していく。この分割を進めると、空間は三角形に分割される。この分割を特にドロネー三角形分割と呼んでいる。**図8**を利用して、ドロネー三角形分割を行なったドロネー図を**図9**に示す。不等間隔なサンプリング点を頂点とした三角形に分割されている。

2-4 ドロネー図を利用した線形補間

ドロネー図では、空間は代表点を頂点とした三角形に分割されるので、補間はその3点から三角形内の値を決定することになる。任意の3点から構成される三角形内の線形補間は、3点を別々に考えて三角形内の任意の点に寄与する割合を求め、その割合で重み付けして加えることで補間値を求める。その補間法を**図10**をもとに詳しく説明する。三角形ABCにおいて頂点 Aからの寄与を考える。三角形ABC内の任意の点を点Dとし、線分ADを延長して辺BCと交わる点を点Eとする。頂点Aの寄与は、点Aの値を1とし、点 E の値を0として、線形的に点Dの値を求める。点Dにおける頂点Aの寄与をg_Aとすると、

$$g_A = \frac{AD}{AE} \tag{5}$$

となる。同様に、頂点Bから点Dを通る直線を引き、辺CAと交わる点を点Fとし、頂点Bの寄与をg_Bとすると、

$$g_B = \frac{BD}{BF} \tag{6}$$

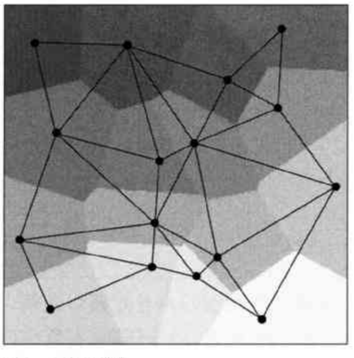


図9. ドロネー図の例
図8に示したボロノイ図をもとに、ドロネー三角形分割を行なったドロネー図。ボロノイ図を背景としてドロネー図を描画している。不等間隔なサンプリング点を頂点とした三角形に分割されている。

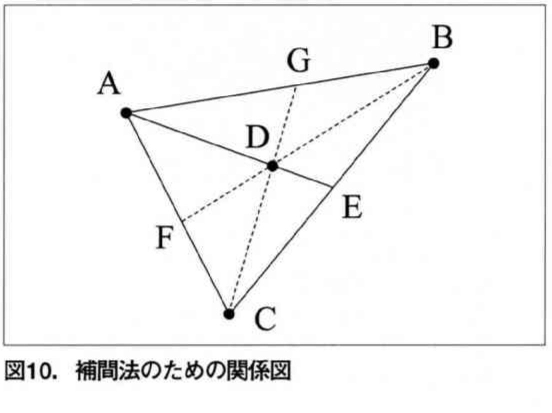
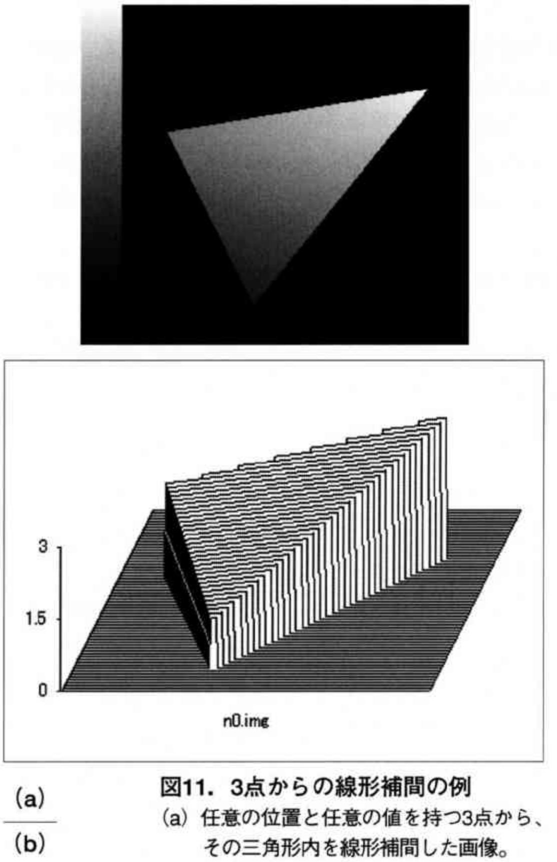


図10. 補間法のための関係図



(a)
(b)

図11. 3点からの線形補間の例
(a) 任意の位置と任意の値を持つ3点から、その三角形内を線形補間した画像。
(b) (a)に示した画像の鳥瞰図。

となる。さらに、頂点Cから点Dを通る直線を引き、辺ABと交わる点を点Gとし、頂点Cの寄与をg_Cとすると、

$$g_C = \frac{CD}{CG} \tag{7}$$

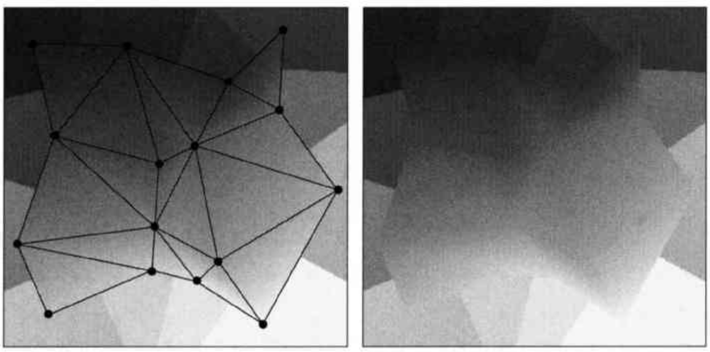
となる。点A, B, Cにおける値をそれぞれf(A), f(B), f(C)とすると、点Dの値f(D)は、

$$f(D) = g_A f(A) + g_B f(B) + g_C f(C) \tag{8}$$

と表すことができる。任意の位置と任意の値を持つ3点から、その三角形内を線形補間した画像とその鳥瞰図を**図11(a), (b)**に示す。鳥瞰図を見ると分かるが、補間した値は鳥瞰図上で3点を通る1つの面を構成している。

図9のドロネー図からこの線形補間法を用いて値を滑らかに変化させた画像を**図12(a), (b)**に示す。**図12(a)**では、ドロネー図の三角形内のみ補間を行なった画像とドロネー図を重ねて表示している。また、**図12(b)**では、補間を行なった画像のみを表示している。**図12**では、ドロネー図の三角形内のみを線形補間しているので、周りの部分はボロノイ領域の最近傍補間による均一な値のままである。ドロネー図の三角形の外側も補間する場合には、別の方法で外側の領域を三角形に分割し、線形補間する必要がある。次に1つの解決策を示す。

画像の4つの頂点と4辺上のボロノイ領域の境界に、新たな点を作成する。4つの頂点の値は、最も近い点の値（ボロノイ領域の値）とする。ボロノイ領域の境界に設けた点の値は、2つのボロノイ領域の平均値とする。新たに加えた頂点を用いて三角形に分割した



(a) | (b)

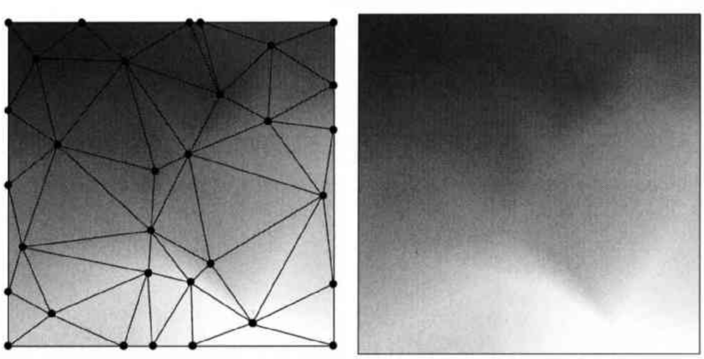
図12. ドロネー図からの線形補間

(a) ドロネー図の三角形内のみ線形補間を行なった画像とドロネー図を重ねて表示している。

(b) 線形補間を行なった画像のみを表示している。ドロネー図の三角形以外は、ボロノイ領域の最近傍補間を表示している。

図13. 画像周辺部の三角形分割

ドロネー図の三角形以外の周辺部を三角形に分割した図。



(a) | (b)

図14. ドロネー図と周辺部の三角形からの線形補間

(a) 画像の三角形内を線形補間した画像とドロネー図および周辺部の三角形を重ねて表示している。

(b) 線形補間を行なった画像のみを表示している。

例を**図13**に示す。**図13**に示したすべての三角形内を線形補間して作成した画像を**図14 (a), (b)** に示す。**図14 (a)** では、補間した画像にドロネー図と周辺部の三角形を重ねて表示している。**図14 (b)** では、補間した画像のみを表示している。画像全体が滑らかに補間されている。ただし、線形補間なので三角形の境界部分に山や谷のような不連続な境界が見られる。

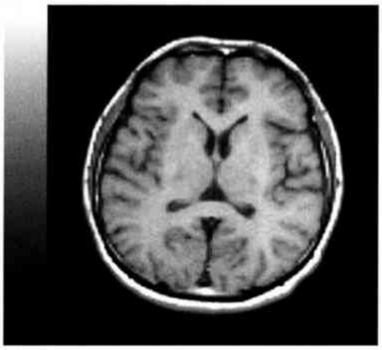


図15. MRI画像の原画像

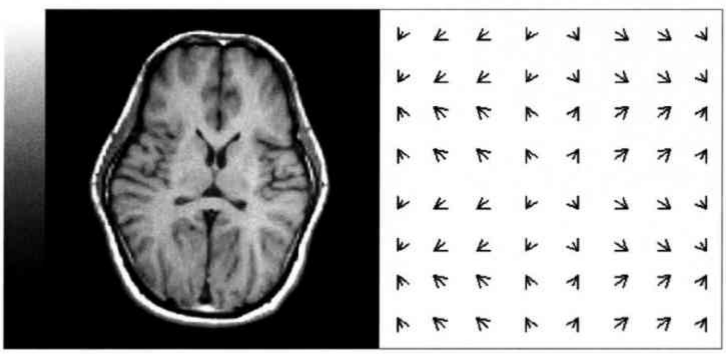
3. 変換ベクトルへの応用

非線形変換の変換ベクトルにおいて、等間隔の格子状の点で逆変換ベクトルが分かっている場合、その逆変換ベクトルから画像を逆変換しようとすると、ベクトルの先の不等間隔な座標点から補間を行なわなくてはならなくなる。

256×256画素のMRIの画像を**図15**に示す。その**図15**に示した画像をもとに、非線形変換の逆変換ベクトルが

$$\begin{cases} v_x(x,y)=10\times\sin(2\pi\cdot\dfrac{(x-128)}{256}) \\ v_y(x,y)=10\times\sin(4\pi\cdot\dfrac{(y-128)}{256}) \end{cases} \tag{9}$$

となるような非線形変換を行なった256×256画素の画像を**図16 (a)** に示す。また、**図16 (b)** には逆変換のベクトル画像を示す。ここで、(9) 式の $v_x(x, y)$ は x 方向のベクトル成分で $v_y(x, y)$ は y 方向のベクトル成分である。**図16 (b)** に示した逆変換ベクトルの先端にあたる座標点を**図17**に示す。**図17**の点を



(a) | (b)

図16. 非線形変換を行なった画像とその逆変換ベクトル画像
(a) 図15の画像を非線形変換した画像。
(b) 非線形変換の逆変換ベクトルの画像。

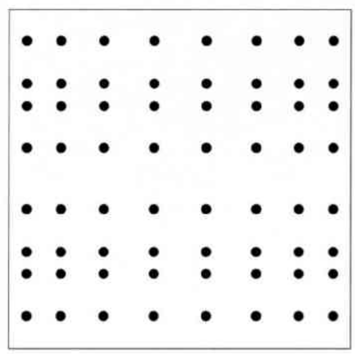
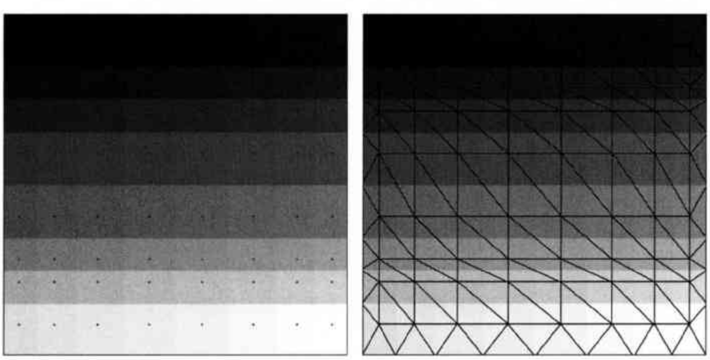


図17. 逆変換ベクトルの先端にあたる座標点



(a) | (b)

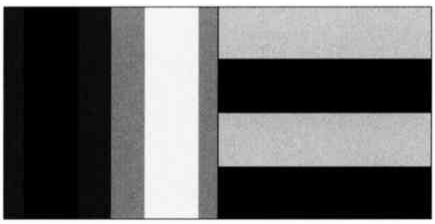
図18. ボロノイ図とドロネー図
(a) 図17の点を用いて作成したボロノイ図。ボロノイ領域内は、左上の領域から右下の領域に順に色分けしている。
(b) (a)のボロノイ図をもとに作成したドロネー図。ボロノイ図を背景とし、周辺部分は前述の方法で三角形を描いている。

元に空間分割したボロノイ図とドロネー図をそれぞれ**図18(a),(b)**に示す。**図18(b)**のドロネー図では、ボロノイ領域の境界が格子状になる特殊な場合となり、2つの境界を結んだ線が四角形になるので、片方の対角線を結んで三角形を作成している。

図18(a)のボロノイ図を利用した最近傍補間を用いて逆変換ベクトルの x 成分と y 成分をそれぞれ補間した画像を**図19**に示す。最近傍補間なので帯状に均一な値が並んでいる。その逆変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像を**図20(a)**に示す。また、原画像との差分画像を**図20(b)**に示す。最近傍補間では、不連続な部分がはっきりと見られる。

次に、**図18(b)**のドロネー図を利用した線形補間を用いて逆変換ベクトルの x 成分と y 成分をそれぞれ補間した画像を**図21**に示す。x 成分と y 成分がそれぞれ直線状に変化している様子が見られる。その逆変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像を**図22(a)**に示す。また、原画像との差分画像を**図22(b)**に示す。差分画像を見ると完全には戻っていない部分が見られるが、全体的には滑らかに戻っている様子がうかがえる。

謝辞：本研究で使用したプログラムの開発は平成17年度～平成20年度首都大学東京共同研究費（富士フィルムRIファーマ株式会社）、および平成20年度首都大学東京傾斜的配分研究費によるものである。

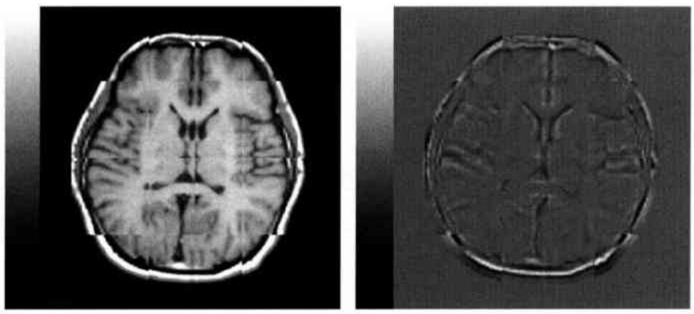


(a) | (b)

図19. ボロノイ図を利用した最近傍補間の逆変換ベクトル成分

(a) 逆変換ベクトルのx成分。

(b) 逆変換ベクトルのy成分。

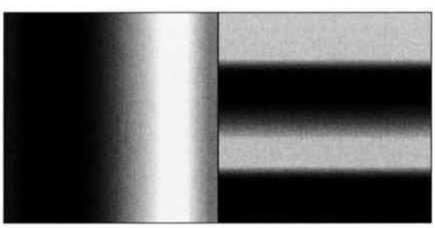


(a) | (b)

図20. 図19の逆変換ベクトル成分を利用して逆変換した画像と差分画像

(a) ボロノイ図を利用した最近傍補間で逆変換した画像。

(b) 原画像との差分画像。

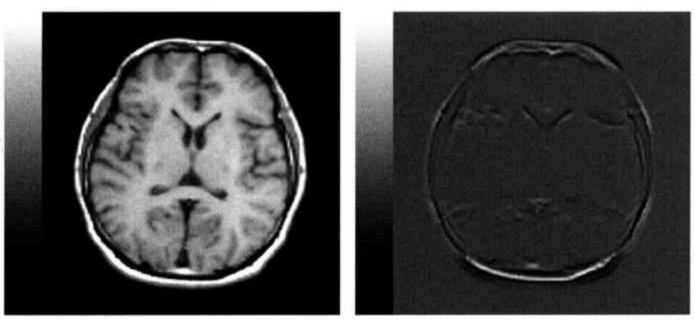


(a) | (b)

図21. ドロネー図を利用した線形補間の逆変換ベクトル成分

(a) 逆変換ベクトルのx成分。

(b) 逆変換ベクトルのy成分。



(a) | (b)

図22. 図21の逆変換ベクトル成分を利用して逆変換した画像と差分画像

(a) ドロネー図を利用した線形補間で逆変換した画像。

(b) 原画像との差分画像。