連続講座

断層映像法の基礎　第25回
ベクトル表現を利用した逆変換

篠原　広行[1]、藤堂　幸広[1]、軽部　修平[1]、小島　慎也[1]、橋本　雄幸[2]

[1] 首都大学東京人間健康科学研究科　放射線科学系
[2] 横浜創英短期大学　情報学科

はじめに

第24回では、2次元の平行移動と回転、さらに拡大縮小の画像変換について、ベクトルで表現する方法を解説した。さらに、非線形変換を含めた一般化についても考えた。今回は、平行移動、回転、拡大縮小の変換がベクトル表現として粗いサンプリングで分かっているときに、それをもとに変換前の画像に戻す方法と、どの程度の精度で戻るかを検証する。また、非線形の変形が伴った場合に、同様の方法を用いて、どの程度の精度で戻るかを検証する。

1. ベクトル表現からの逆変換

1-1　粗いサンプリングの変換ベクトル

何らかの移動変換をした2次元画像g (x,y) を、もとの画像f (x,y) に戻すことを考える。その際、変換ベクトルが得られる方法として次の2つのことが想定される。

①変換ベクトルが画像の格子点上で得られている場合
②変換ベクトルが画像の格子点上で得られているとは限らない場合

①の代表的な変換ベクトルを**図1 (a)、(b)** に示す。

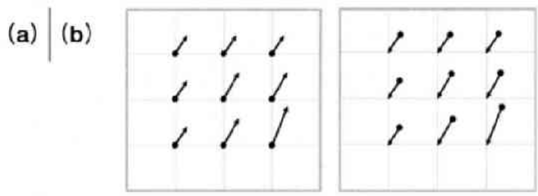


図1. 変換ベクトルが画像の格子点上に得られている場合
(a) 格子点上からの順変換ベクトル。
(b) 格子点上への逆変換ベクトル。

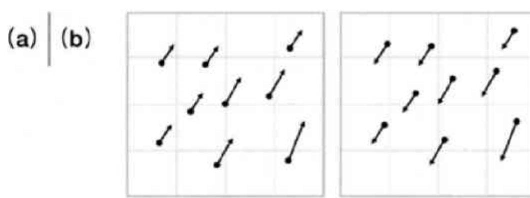


図2. 変換ベクトルが画像の格子点上に得られているとは限らない場合
(a) ある点からの順変換ベクトル。
(b) ある点への逆変換ベクトル。

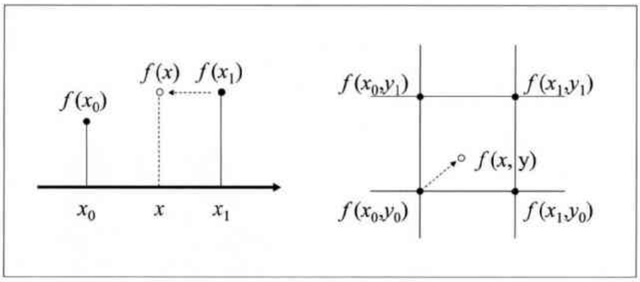
別刷請求先：〒116-8551　東京都荒川区東尾久7-2-10
首都大学東京人間健康科学研究科放射線科学系　篠原 広行
TEL：03-3819-1211　FAX：03-3819-1406

画像の格子点も一緒に描いている。**図1 (a)** は順変換を**図1 (b)** は逆変換を表しているが、単純にベクトルの向きが逆になっているだけなので、どちらかが得られていれば問題ない。このように画像の格子点上に粗いサンプリングで変換ベクトルが得られている場合は、画像上の変換ベクトルが存在していない部分を通常の補間で埋めることができる。もとの画像上で変換ベクトルを作成することで、変換後の画像からもとの画像を計算することができる。②の代表的な変換ベクトルを**図2 (a)**、**(b)** に示す。画像の格子点も一緒に描いている。**図2 (a)**、**(b)** は順変換と逆変換のペアを示している。これは、画像の任意の特徴点をもとに移動ベクトルを作成するような場合に生じる。この場合、画像の格子点上にベクトルが求められてないので、もとの画像の格子点上に変換ベクトルを作成するためには、バラバラのサンプリング位置から補間して求めなければならない。よって、通常の補間ができなくなる。

今回は、①の場合について考える。①の場合に用いることができる補間方法のうち、最近傍補間、線形補間と3次多項式補間の利用方法についてそれぞれ1-2節、1-3節、1-4節で述べる。

1-2　最近傍補間

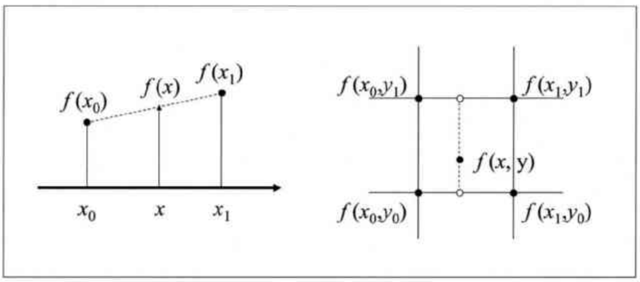
粗いサンプリングの変換ベクトルが格子状に並んでいる場合、最も単純な補間方法は最近傍補間である。最近傍補間は、変換ベクトルが存在していない部分を最も近くにある変換ベクトルで代用する方法である。**図3 (a)**、**(b)** に模式図を示しているが、**図3 (a)** に示す1次元の場合は、左右のデータで近い方を選び、**図3 (b)** に示す2次元の場合は、近接4点のうち一番距離の短いデータを選ぶ。



(a) | (b)

図3. 最近傍補間

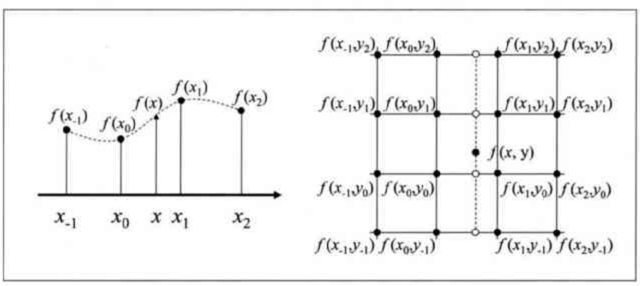
(a) 1次元の最近傍補間。近い方のデータを代表値とする。
(b) 2次元の最近傍補間。周りの4点のうち最も近いデータを代表値とする。



(a) | (b)

図4. 線形補間

(a) 1次元の線形補間。左右のデータを直線で結び、その線上の値を代表値とする。
(b) 2次元の線形補間。隣接4点のデータから縦、横それぞれに線形補間を行い、代表値を求める。



(a) | (b)

図5. 3次多項式補間

(a) 1次元の3次多項式補間。左右2つずつの4つの値から3次多項式を算出し、その曲線上の値を代表値とする。
(b) 2次元の3次多項式補間。横方向で3次多項式補間を用いて4つの白丸の点の値をそれぞれ算出し、4つの白丸の点の値から3次多項式補間を用いて目的の代表値を求める。1次元の3次多項式補間を5回用いることになる。

1-3 線形補間

粗いサンプリングの変換ベクトルが格子状に並んでいる場合、単純でより有効な補間方法は線形補間を用いる方法である。画像が2次元の場合、x方向とy方向の2方向が存在するので線形補間もそれぞれ2方向で行なう。これを双線形補間と呼ぶ。1次元で考えると、**図4 (a)** に示すように、$f(x_0)$ と $f(x_1)$ の間にある $f(x)$ の値は、$x_0<x<x_1$ とするとき

$$f(x)=\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \tag{1}$$

となる。2次元の場合は**図4 (b)** に示すように、$f(x_0,y_0)$、$f(x_1,y_0)$、$f(x_0,y_1)$、$f(x_1,y_1)$ の4点に囲まれた $f(x,y)$ の値は、$x_0<x<x_1$、$y_0<y<y_1$ とするとき

$$\begin{aligned} f(x,y)=&w_{00}\cdot f(x_0,y_0)+w_{10}\cdot f(x_1,y_0)\\ &+w_{01}\cdot f(x_0,y_1)+w_{11}\cdot f(x_1,y_1) \end{aligned} \tag{2}$$

となり、ここで

$$\begin{cases} w_{00}=\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y_1-y}{y_1-y_0}\\ w_{10}=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y_1-y}{y_1-y_0}\\ w_{01}=\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}\\ w_{11}=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} \end{cases} \tag{3}$$

となる。このように比較的近い点から単純に計算することができるので、特に2次元以上の補間では多くの場合に利用されている。

1-4 3次多項式補間

より正確に補間を行なう方法が3次多項式補間である。1次元で考えると、**図5 (a)** に示すように、$f(x_0)$ と $f(x_1)$ の間にある $f(x)$ の値は、$f(x_{-1})$ と $f(x_2)$ の値も利用して、$x_{-1}<x_0<x<x_1<x_2$ とするとき

$$f(x)=w_{-1}f(x_{-1})+w_0f(x_0)+w_1f(x_1)+w_2f(x_2) \tag{4}$$

となり、ここで

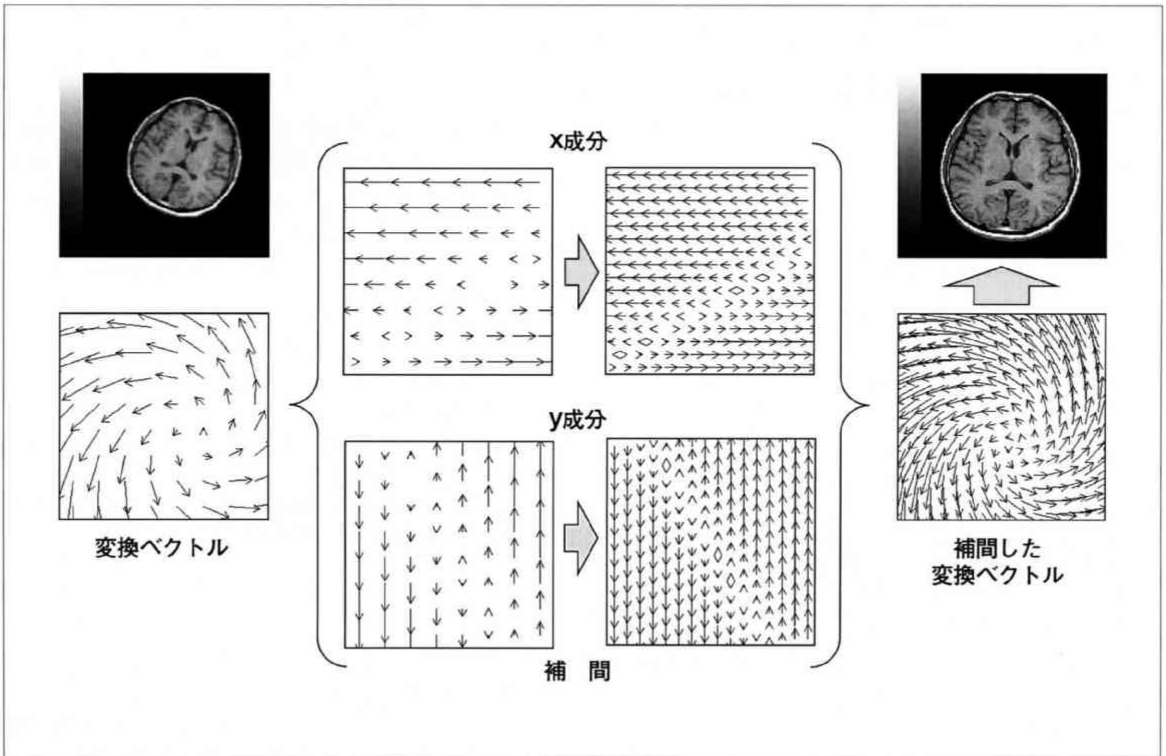


図6. 粗いサンプリングの変換ベクトルを用いた逆変換の手順
逆変換ベクトルが求まっている場合、変換ベクトルをx成分とy成分に分けて、それぞれで補間を行ない間の成分を算出する。補間を行なった変換ベクトルを用いて、画像の逆変換を行なう。画像の逆変換の際も補間を用いることになる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
w_{-1} &= -\frac{1}{6}t(t-1)(t-2)\\
w_0 &= \frac{1}{2}(t+1)(t-1)(t-2)\\
w_1 &= -\frac{1}{2}t(t+1)(t-2)\\
w_2 &= \frac{1}{6}t(t+1)(t-1)
\end{aligned}
\right. \tag{5}
$$

$$
t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}
$$

となる。2次元の場合は**図5(b)**に示すように、周りの16点の値からx方向とy方向にそれぞれ3次多項式補間を行なって、間のf(x,y)の値を求める。一般式は省略するが、各方向に順番に行なう場合、1つ目の方向(例えばx方向)に4回行ない、2つ目の方向(例えばy方向)に1回行なえば値が求まる。

2. ベクトル表現からの逆変換の検証

ベクトル表現からの逆変換の方法は、**図6**に示すように、変換ベクトルが粗いサンプリングで求まっている状態から、それをx方向の成分とy方向の成分に分ける。それぞれの成分で、1章で述べた補間方法を用いて、サンプリングの間のx成分とy成分をそれぞれ求める。細かく求まった変換ベクトルから逆変換を行なう。逆変換をする際にも、画像の値に補間を用いて逆変換後の画像を求める。画像の補間には2次元の3次多項式補間を用いた。

図7に示す256×256画素のMRI画像に対して、それぞれの節で示す移動を行なった画像に対して逆変換を行ない、どの程度戻すことができるかを検証する。その際、戻した画像と**図7**の原画像との差分画像を示して、逆変換の誤差を視覚的に見ることにする。

2-1 平行移動

図7の画像をx方向に15画素、y方向に10画素平行移動した画像を**図8(a)**に示す。また、もとの画像の格子上に求めた順変換ベクトルと逆変換ベクトルを

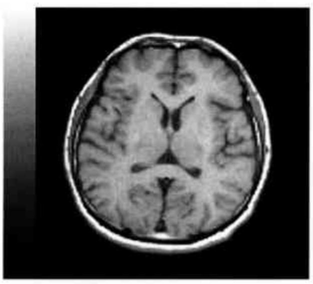
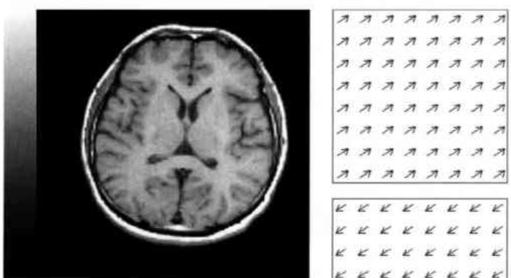


図7. MRI画像の原画像



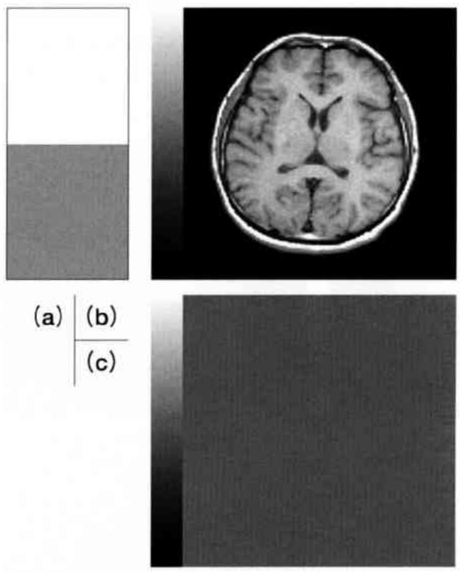
(a) | (b)
(c)

図8. 平行移動したMRI画像とベクトル画像

(a) 図7の画像をx方向に15画素、y方向に10画素平行移動した画像。

(b) 平行移動の順変換ベクトルの画像。

(c) 平行移動の逆変換ベクトルの画像。



(a) | (b)
(c)

図9. 変換ベクトルの補間した成分と逆変換したMRI画像と原画像との差分画像

(a) 粗いサンプリングの変換ベクトルから補間したx成分(上半分)とy成分(下半分)の画像。

(b) 逆変換した画像。

(c) 図7で示した原画像と(b)の画像との差分画像。

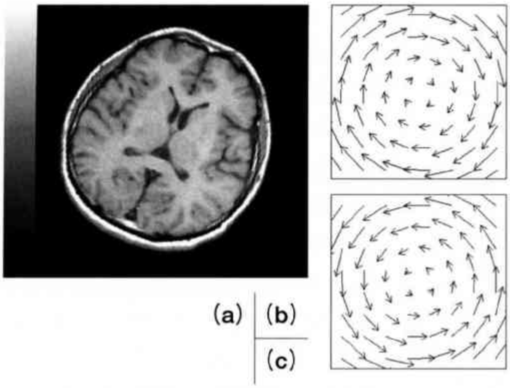


図10. 回転移動したMRI画像とベクトル画像
(a) 図7の画像を時計回りに20度回転移動した画像。
(b) 回転移動の順変換ベクトルの画像。
(c) 回転移動の逆変換ベクトルの画像。

それぞれ図8 (b)、(c) に示す。変換ベクトルは8×8個のみ既知であるとする。その8×8個の変換ベクトルを用いてもとの画像を作成する逆変換を行なう。もとの画像上で求められている図8 (c) の逆変換ベクトルから最近傍補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を画像で図9 (a) に示す。図9 (a) に示した画像は、上半分がx成分の値で下半分がy成分の値になっている。平行移動の場合、変換ベクトルのx成分とy成分は画像上でそれぞれ一定の値になるので、補間方法にはよらずどの方法でも同じ結果になる。逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を図9 (b)、(c) に示す。差分画像を見ると分かるように、きれいに逆変換されている。平行移動の場合は、他の補間方法でも同じ結果になるので、結果は省略する。

2-2 回転移動

図7の画像を時計回りに20度回転した画像を図10 (a) に示す。また、もとの画像の格子上に求めた順変換ベクトルと逆変換ベクトルをそれぞれ図10 (b)、(c) に示す。図10 (c) の逆変換ベクトルから最近傍補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を図11 (a) に示す。回転移動の場合、変換ベクトルのx成分とy成分は異なる方向に線形的に変化する。よって最近傍補間の場合、変化がモザイク状になる。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を図11 (b)、(c)

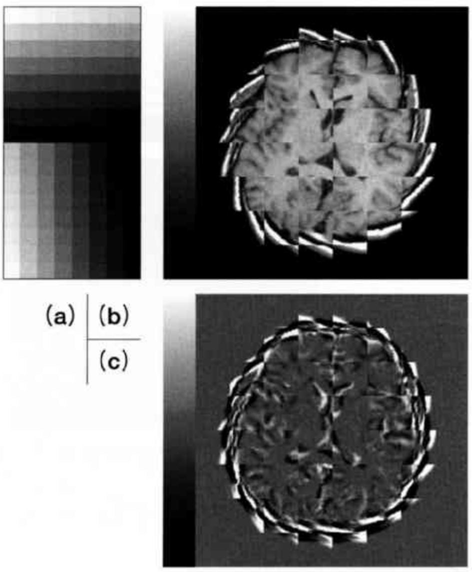


図11. 回転移動の変換ベクトルを最近傍補間を用いて間を埋めた場合
(a) 補間した変換ベクトルのx成分 (上半分) とy成分 (下半分)。
(b) 逆変換した画像。
(c) 原画像との差分画像。

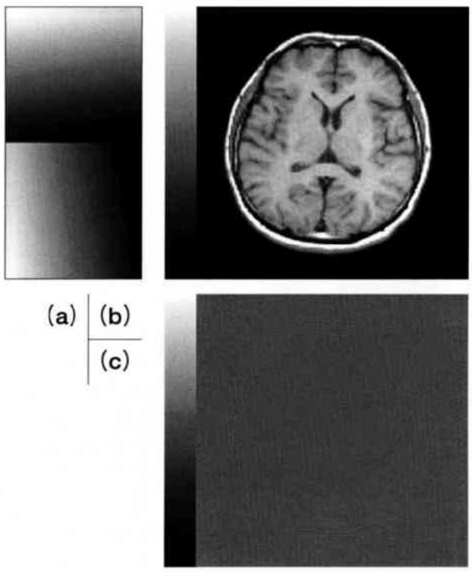


図12. 回転移動の変換ベクトルを双線形補間を用いて間を埋めた場合
(a) 補間した変換ベクトルのx成分 (上半分) とy成分 (下半分)。
(b) 逆変換した画像。
(c) 原画像との差分画像。

に示す。変換ベクトルがモザイク状になっているため、画像の変換もうまくいかなくなる。

図10（c）の逆変換ベクトルから双線形補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図12（a）**に示す。回転移動の場合、変換ベクトルのx成分とy成分は線形的に変化しているので、線形補間を用いれば精度よく補間できることになる。よって双線形補間の場合、きれいに変換ベクトルを再現できている。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図12（b）**、**（c）**に示す。差分画像を見ても分かるように、逆変換の誤差が小さい。

図10（c）の逆変換ベクトルから3次多項式補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図13（a）**に示す。線形補間と同様に補間できているように見える。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図13（b）**、**（c）**に示す。差分画像を見ると上下左右の端の方で歪みが生じている。これは、3次多項式補間が近接16点を用いているので、今回のような8×8点の粗いサンプリングの場合、画像からはみ出た補間用の点が内側に影響しているために歪みが生じてしまう。中央付近では、良好な補間精度を示しているので、もっとサンプリングの点が多ければ歪みはなくなり、全体的にも良い補間精度になると考えられる。

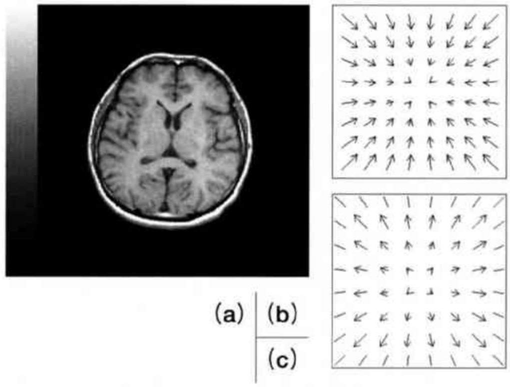


図14. 縮小したMRI画像とベクトル画像

（a）図7の画像を0.8倍した画像。

（b）縮小の順変換ベクトルの画像。

（c）縮小の逆変換ベクトルの画像。

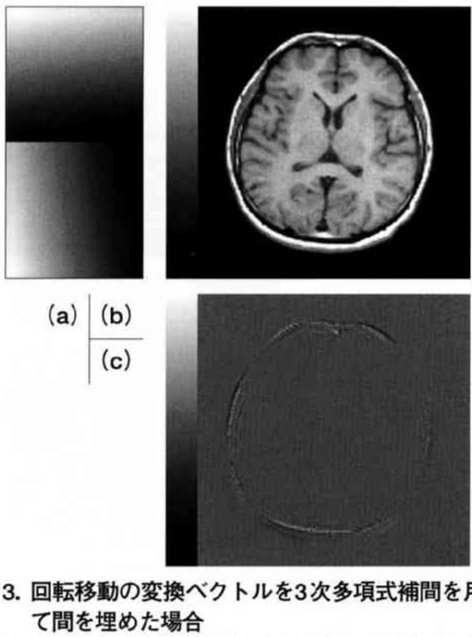


図13. 回転移動の変換ベクトルを3次多項式補間を用いて間を埋めた場合

（a）補間した変換ベクトルのx成分（上半分）とy成分（下半分）。

（b）逆変換した画像。

（c）原画像との差分画像。

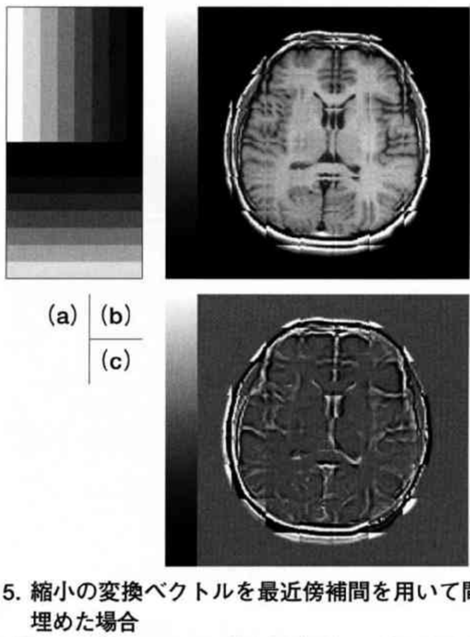


図15. 縮小の変換ベクトルを最近傍補間を用いて間を埋めた場合

（a）補間した変換ベクトルのx成分（上半分）とy成分（下半分）。

（b）逆変換した画像。

（c）原画像との差分画像。

2-3 拡大縮小

図7の画像を0.8倍した画像を**図14 (a)** に示す。また、もとの画像の格子上に求めた順変換ベクトルと逆変換ベクトルをそれぞれ**図14 (b)**、**(c)** に示す。**図14 (c)** の逆変換ベクトルから最近傍補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図15 (a)** に示す。拡大縮小の場合、変換ベクトルのx成分はx方向に線形的に変化し、y成分はy方向に線形的に変化する。よって最近傍補間の場合、変化がそれぞれの成分で縞模様になる。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図15 (b)**、**(c)** に示す。変換ベクトルが縞模様になっているため、画像の変換もうまくいかなくなる。

図14 (c) の逆変換ベクトルから双線形補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図16 (a)** に示す。拡大縮小の場合、変換ベクトルのx成分とy成分はその方向に線形的に変化するので、線形補間を用いれば精度よく補間できることになる。よって双線形補間の場合、きれいに変換ベクトルを再現できている。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図16 (b)**、**(c)** に示す。差分画像を見ても分かるように、逆変換の誤差が小さい。

図14 (c) の逆変換ベクトルから3次多項式補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図17 (a)** に示す。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図17 (b)**、**(c)** に示す。差分画像を見ると回転移動のときと同様に上下左右の端の方で歪みが生じている。これは、回転移動のときと同じ理由であると考えられる。

移動、回転、拡大縮小の変換は、変換ベクトルのx成分とy成分で考えると、いずれも線形的な変化にとどまるので、サンプリングの粗い変換ベクトルを補間する場合は、線形補間を用いれば十分であることが分かる。

3. 非線型変換と逆変換

非線型変換であっても変換ベクトルが格子状に並んでいる場合は、線形補間と3次多項式補間を用いることができる。非線型変換の変換ベクトルを

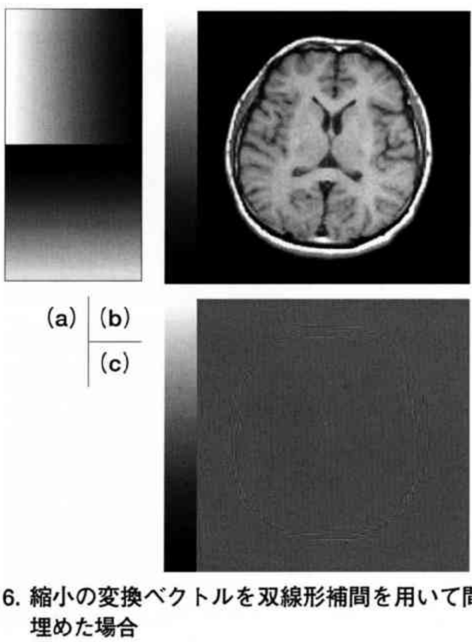


図16. 縮小の変換ベクトルを双線形補間を用いて間を埋めた場合
(a) 補間した変換ベクトルのx成分（上半分）とy成分（下半分）。
(b) 逆変換した画像。
(c) 原画像との差分画像。

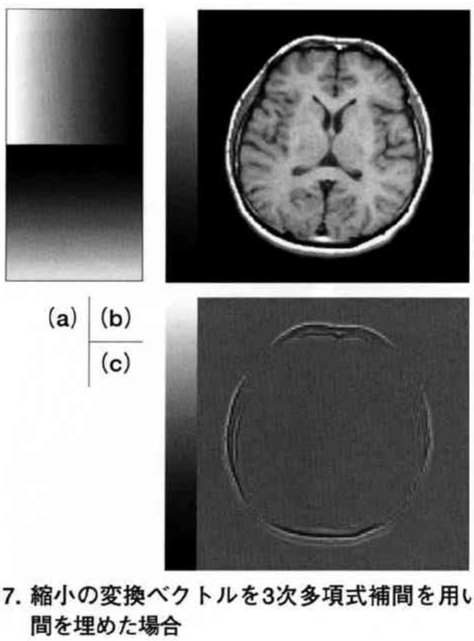


図17. 縮小の変換ベクトルを3次多項式補間を用いて間を埋めた場合
(a) 補間した変換ベクトルのx成分（上半分）とy成分（下半分）。
(b) 逆変換した画像。
(c) 原画像との差分画像。

$$\begin{cases} v_x(x,y)=10\times\sin(2\pi\cdot\dfrac{(x-128)}{256}) \\ v_y(x,y)=10\times\sin(4\pi\cdot\dfrac{(y-128)}{256}) \end{cases} \tag{6}$$

として非線型変換を行なった画像と変換ベクトルをそれぞれ**図18 (a)**、**(b)**、**(c)** に示す。ここで、v_x (x, y) はx方向のベクトル成分でv_y (x,y) はy方向のベクトル成分である。**図18 (c)** に示した8×8個の逆変換ベクトルを用いて逆変換を行なう。

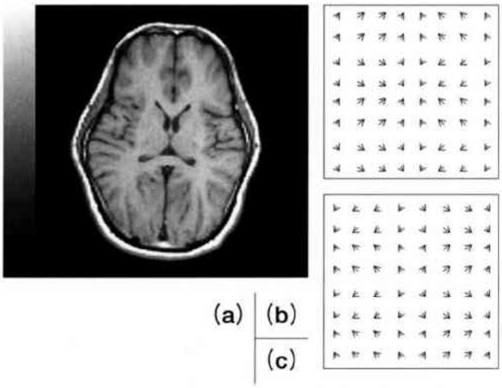


図18. 非線形変換を行なった画像とそのベクトル画像
(a) 図7の画像を非線形変換した画像。
(b) 非線形変換の順変換ベクトルの画像。
(c) 非線形変換の逆変換ベクトルの画像。

図18 (c) の逆変換ベクトルから最近傍補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図19 (a)** に示す。今回の非線形変換の場合、最近傍補間では、変化が幅の異なる縞模様になる。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図19 (b)**、**(c)** に示す。変換ベクトルが縞模様になっているため、画像の変換もうまくいかなくなり、途中で不連続点が生じる。

図18 (c) の逆変換ベクトルから双線形補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図20 (a)** に示す。線形補間では、割ときれいに再現されているが、値の直線状の変化しか表現できない。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図20 (b)**、**(c)** に示す。差分画像を見ても分かるように、線形変換に比べ逆変換の誤差は大きい。

図18 (c) の逆変換ベクトルから3次多項式補間を利用して変換ベクトルを補間したベクトルのx成分とy成分の値を**図21 (a)** に示す。3次多項式補間では、

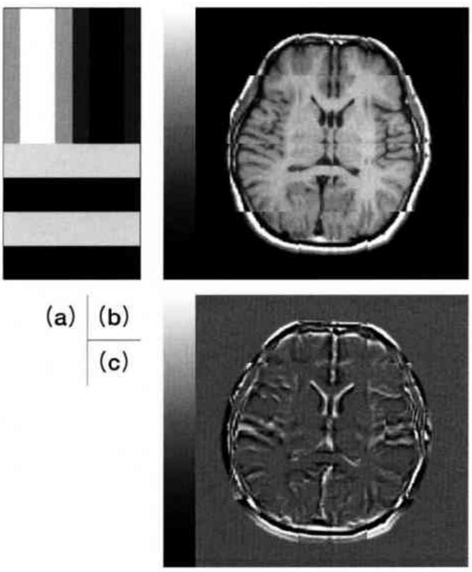


図19. 非線形変換の変換ベクトルを最近傍補間を用いて間を埋めた場合
(a) 補間した変換ベクトルのx成分（上半分）とy成分（下半分）。
(b) 逆変換した画像。
(c) 原画像との差分画像。

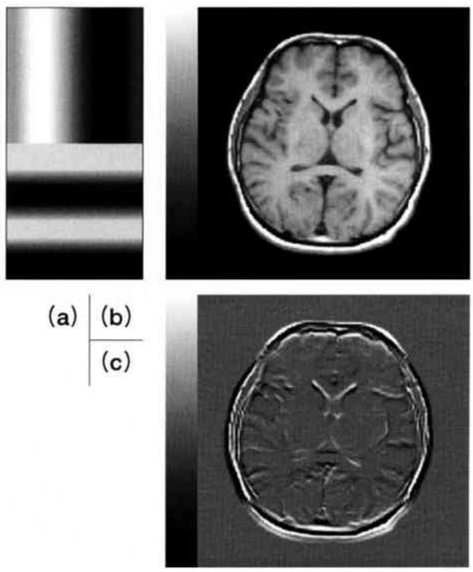


図20. 非線形変換の変換ベクトルを双線形補間を用いて間を埋めた場合
(a) 補間した変換ベクトルのx成分（上半分）とy成分（下半分）。
(b) 逆変換した画像。
(c) 原画像との差分画像。

値の曲線状の変化も表現されている。その変換ベクトルを用いて逆変換を行なった画像と、原画像との差分画像を**図21 (b)**、**(c)** に示す。差分画像を見ると上下左右の端の方で線形移動の時に見られた歪みが生じているが、中央付近では線形補間よりも補間精度が上がっている。サンプリングの数には左右されるが、非線形変換の場合は、線形補間よりも3次多項式補間を用いた方がより正確に再現できると考えられる。

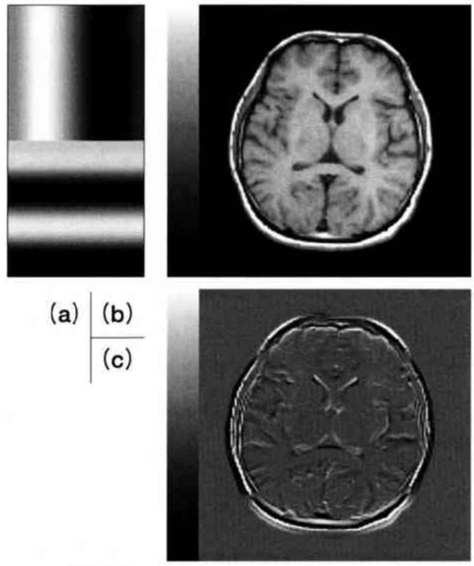


図21. 非線形変換の変換ベクトルを3次多項式補間を用いて間を埋めた場合

(a) 補間した変換ベクトルのx成分（上半分）とy成分（下半分）。
(b) 逆変換した画像。
(c) 原画像との差分画像。

謝辞：本研究で使用したプログラムの開発は平成17年度〜平成20年度首都大学東京共同研究費（富士フィルムRIファーマ株式会社）、および平成20年度首都大学東京傾斜的配分研究費によるものである。