連続講座

断層映像法の基礎　第31回
繰り返しを利用した画像再構成

篠原　広行[1)]、今門　隼也人[1)]、橘　篤志[1)]、寺松　翔太[1)]、橋本　雄幸[2)]

[1)] 首都大学東京人間健康科学研究科　放射線科学域
[2)] 横浜創英短期大学　情報学科

はじめに

CTやMRIの画像再構成で使われているフーリエ変換法やFBP法のような解析的に直接再構成する方法は本講座の第13回で解説した。画像再構成法にはその解析的な方法のほかに、繰り返しを利用して徐々に解に近づけていく方法があり逐次近似画像再構成法と呼ばれている。本稿では繰り返しを利用した方法の考え方と具体的な方法を解説する。また、その方法を利用した数値シミュレーションの結果についても紹介する。

1. 繰り返しを利用した方法
2. 投影と逆投影
3. 代数的画像再構成法（ART法とSIRT法）

1. 繰り返しを利用した方法

これまで紹介してきた画像再構成法は解析的な方法で、数式を用いて解法を導き出しその数式にしたがってコンピュータで計算して画像を求めるものである。その解析的な方法の一般的な手順は、計算の道具である数式を実際の計測に合わせて定式化するところから始まる。このような計測を定式化することを順問題という。また、定式化した順問題の式から逆に式を解くことを逆問題という。この順問題と逆問題の関係は、簡単な算数の問題でも行われている。そこで簡単な例について考えてみよう。

「1個50円のペンを何個か購入したら500円になった。」という事例があったとする。この場合、1個が50円というのは元々分かっていることであり、購入した金額の500円が計測されたデータである。何個購入したか分からないのでそれをxと置くと今回の事例を次式のように定式化することができる。

$$50x=500 \tag{1}$$

これが順問題である。この式から逆にxを求めるように解くのが逆問題である。これは簡単な方程式なので、私たちはxを求めるのに両辺を50で割ればよいということを知っている。よって、この逆問題の解法は「計測データを50で割る」ということになる。一度解ければ計測データが500円以外であっても同じ「50で割る」という方法で解くことができる。これが解析的な方法である。

計測データをyとおいて順問題の式を一般的な形に書き換えると

$$y=50x \tag{2}$$

となる。これをxについて解析的に解いた式は

$$x=\frac{y}{50} \tag{3}$$

となる。これらの様子を入力と出力という形で示す

連絡先：〒116-8551　東京都荒川区東尾久7-2-10
首都大学東京人間健康科学研究科放射線科学域　篠原　広行
TEL：03-3819-1211　FAX：03-3819-1406
E-mail：sinohara@hs.tmu.ac.jp
URL：http://www.metro-hs.ac.jp/rs/sinohara

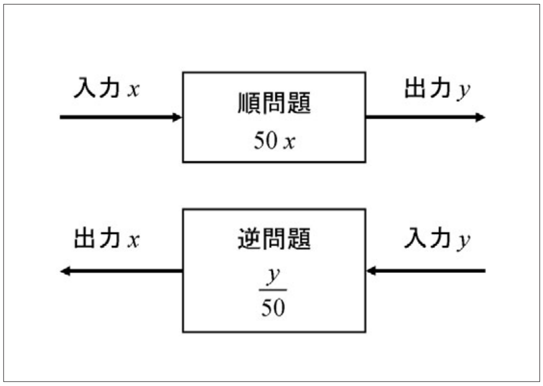

図1. 順問題と逆問題の関係

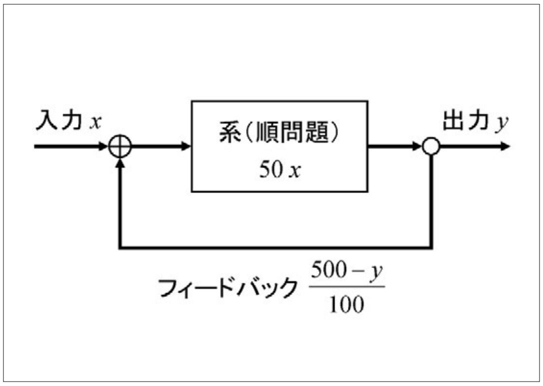

図2. フィードバックの様子

と**図1**のようになる。

今度は、方程式を解く方法を私たちは知らないと仮定しよう。(1)式の順問題の式は分かっているが、その式からxを直接求める方法は分からない。この場合、まず考えられるのはxに適当な数字を当てはめて順問題の式が成り立つときのxの値を探していくという方法であろう。単純にxの値を「1，2，3，…」と変えていって最も近いところを探していく方法もあるが、もう少し一般的で効率のいい方法を考えてみる。例えばxに初期値として1を当てはめてみると、左辺が50で右辺が500となり両辺で450の差分が出る。その差分を利用して次のxを決めることを考える。これは制御でよく用いられるフィードバックの考え方である。フィードバックの方法はいろいろ考えられるが、差分に1/100を掛けて戻す（初期値に加える）ことを考えてみる。すると、次のxの値は、1+4.5=5.5となる。この手順を繰り返していくとどのようになるであろうか。このフィードバックの様子は**図2**のようになる。入力はxの値で、系はxに50を掛けるという順問題になり、出力はその結果のyとなる。そのyの値を用いて計測データである500からの差分に1/100を掛け算したものをフィードバックしている。次にこの手順を数式で表してみる。k番目のxの値を$x^{(k)}$、次のk+1番目のxの値を$x^{(k+1)}$とするとこの手順は

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\frac{500-50\cdot x^{(k)}}{100} \tag{4}$$

と表せる。$50\cdot x^{(k)}$がk番目のxに対する順問題の式を表している。この順問題の計算値と計測データである500との差分を計算し、100で割った値をk番目のxの値に加えてk+1番目のxの値を作成している。この式を用いたxの値の推移をExcelで計算し、グラフにしたものを**図3**に示す。回数を重ねるごとに徐々に（1）式の解である10に近づいている。このように方程式を解くという逆問題を使わずに、順問題だけで繰り返しながら解に近づける方法が繰り返しの方法である。

繰り返しの方法では必要になる事柄は少なくとも2点あることが今回の例から分かる。1点目は順問題の定式化である。私たちが問題を解くときに使う道具は数式なので、いずれの方法をとるにしても問題を定式化しなければならない。2点目はフィードバックの方法である。今回の例では「差分に1/100

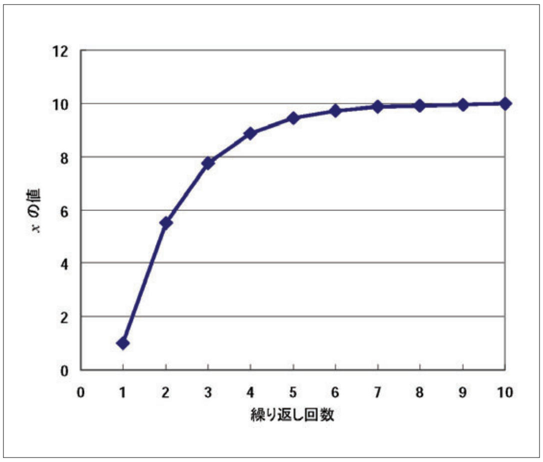

図3. 「差分に1/100を掛けてから加える」というフィードバックを行って繰り返した結果

を掛けてから加える」という方法をとった。フィードバックの方法によってはうまく解に到達しない場合も考えられる。例えば「差分に1/20を掛けてから加える」とした場合

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\frac{500-50\cdot x^{(k)}}{20} \tag{5}$$

となるが、これをExcelで実行すると**図4**に示すように値が発散してしまう。このように繰り返しの方法においては、フィードバックに十分注意を払う必要がある。

2. 投影と逆投影

本節ではX線CTの順問題を考える。計測対象はX線を照射する被写体の線減弱係数となり、計測データはX線が被写体を透過して反対側の検出器で計測されるX線の強度である。照射するX線の強度は一定とし被写体の線減弱係数は位置に依存した分布をもつとする。照射するX線の強度をI_0、計測されるX線の強度をI、2次元の被写体分布を$f(x,y)$とすると順問題は

$$I=I_0\exp(-\int_l f(x,y)\,dl) \tag{6}$$

と表すことができる。ここで、lはX線が通過した直線の経路を表す。その様子を**図5**に示す。被写体に照射されたX線は被写体内で減弱する。その減弱割合は、X線の経路に沿って被写体の線減弱係数$f(x,y)$を積分した（足し合わせた）値に負記号を付け自然対数eのべき乗（expの演算）にしたものである。ただし、2次元の線減弱係数分布を考えているので、X線CTの場合は被写体に対して全領域を覆うようにスキャン（X線源と検出器を平行移動して計測）し、さらにそれを1回転して計測する。その様子を座標系も加えて**図6**に示す。被写体のある固定された座標系をx-o-yとして、その座標系

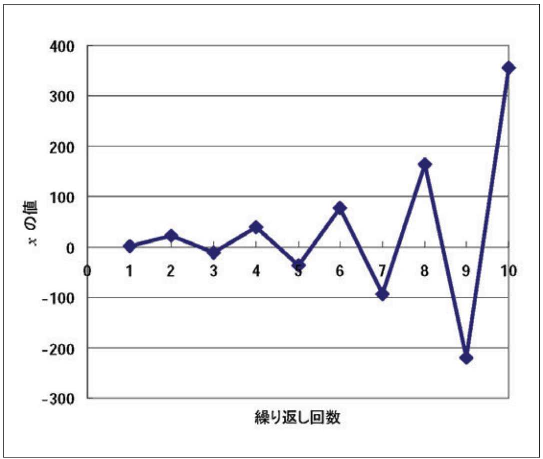

図4. 「差分に1/20を掛けてから加える」というフィードバックを行って繰り返した結果

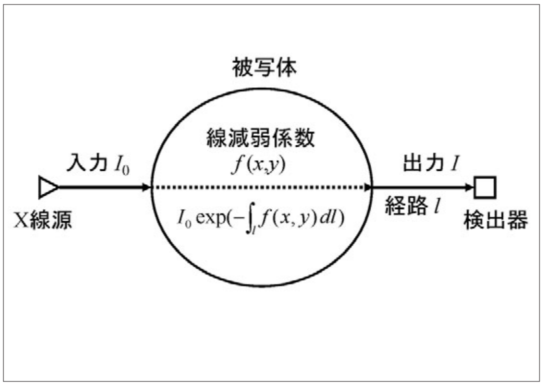

図5. X線源からX線を被写体に照射して、反対側の検出器でX線の強度を検出している様子

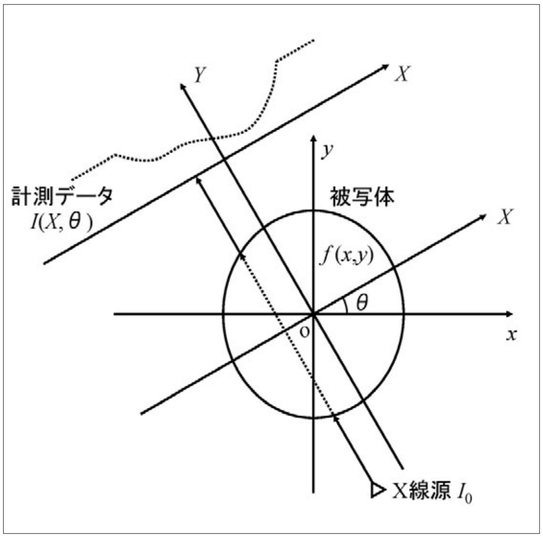

図6. X線CTの計測の様子を、座標系を含めて図示したもの

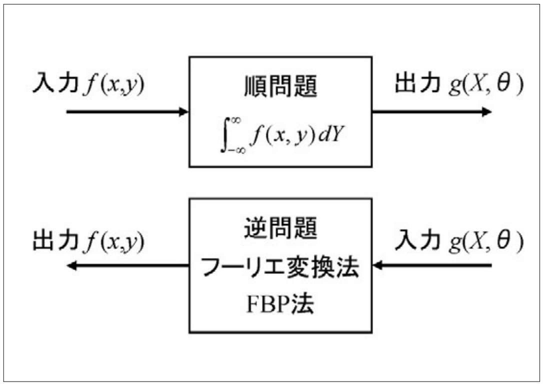

図7. X線CTの順問題と逆問題

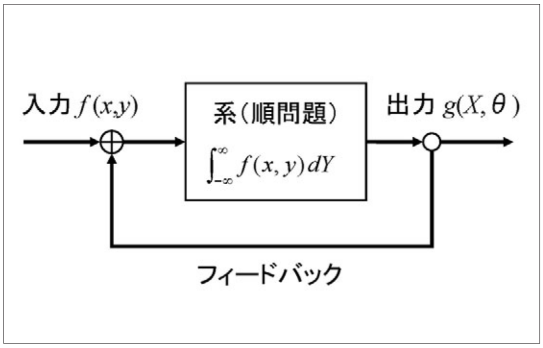

図8. X線CTにおける繰り返しの方法

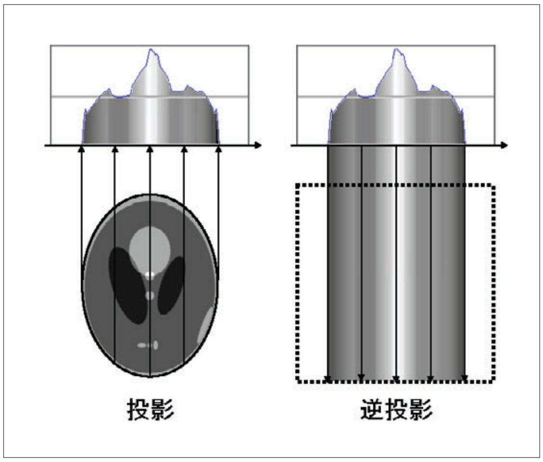

図9. ある角度における投影と逆投影の模式図

から角度 θ 回転した座標系をX-o-Yとする。その回転した座標系のY軸に沿って強度 I_0 のX線を照射して計測したデータを $I(X,\theta)$ とする。計測データはスキャンと回転をして計測されるのでXと θ に関する2次元データとして次式で表すことができる。

$$I(X,\theta)=I_0\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY\right) \tag{7}$$

線減弱係数の積分経路はY軸に沿って $-\infty$ から ∞ までとする。これが順問題の式となるが、この式ではexpなどが入って少々複雑なのでX線の初期強度 I_0 が既知であるということから一般的には以下のように変形する。

$$\frac{I(X,\theta)}{I_0}=\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY\right) \tag{8}$$

両辺の自然対数をとり

$$\ln\frac{I(X,\theta)}{I_0}=-\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY \tag{9}$$

右辺を正にするため左辺の上下を入れ替える。

$$\ln\frac{I_0}{I(X,\theta)}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY \tag{10}$$

(10)式の左辺を $g(X,\theta)$ と置くと次式が得られる。

$$g(X,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY \tag{11}$$

ここで $g(X,\theta)$ は計測データ $I(X,\theta)$ と I_0 の比を対数変換したもので投影あるいは投影データと呼ぶ。この(11)式は原画像 $f(x,y)$ を線積分によって投影に変換するものでラドン変換という。この

ラドン変換は線減弱係数をＹ軸に沿って線積分した形になっている。Ｘ線CTでは、このラドン変換を順問題とする。この順問題では入力が f(x,y)で出力がg(X, θ)ということになる。すると、順問題と逆問題の関係は**図7**のように表すことができる。解析的な方法で逆問題を解いたものにフーリエ変換法やFBP法がある。

次に逆問題を解いた解析的な方法が分からないものとして、これを繰り返しの方法に当てはめると**図8**のようになる。順問題は定式化しているので、ここで問題となるのはフィードバックの方法である。このフィードバックに使われる手法の１つである逆投影の考え方について解説する。

投影データは被写体 f(x,y)をスキャンと回転をしながら線積分して求める。逆投影とは次式のように投影データを被写体の方向に向かって直線状にデータを加えていく操作である。

$$f'(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(X,\theta)\,d\theta \quad (12)$$

図9に1つの角度に関する投影と逆投影の模式図を示す。投影では線積分が投影データの値となり、逆投影では投影データの値がそのまま直線状に画像領域に加えられる。投影と逆投影を0度、45度、90度のみで行った例を**図10(a)**、**(b)**に示す。**図10(a)**では、被写体の画像から0度、45度、90度の投影を作成している様子を示している。**図10(b)**では、その3つの投影から逆投影している様子を示している。この投影と逆投影を360度で256方向から行った様子を**図11**に示す。投影データは横方向をスキャンのX方向、縦方向を回転のθ方向とするサイノグラムとして表示する。逆投影した画像は非常にぼけている。解析的な方法であるFBP法では、このぼけをフィルタ処理で除去してから逆投影をすることで真の画像を作成している。

3. ART法とSIRT法

Ｘ線CTの画像再構成において繰り返しの方法を用いる概念と道具が揃ったので、本節では最も単純な繰り返しの方法を紹介する。Ｘ線CTの順問

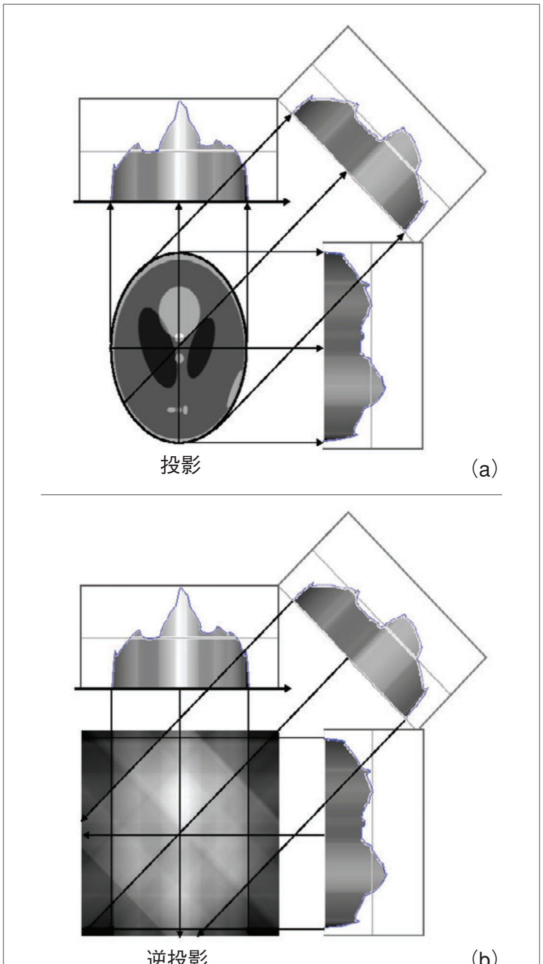

図10. 0度、45度、90度における投影と逆投影
(a) 投影の様子　(b) 逆投影の様子

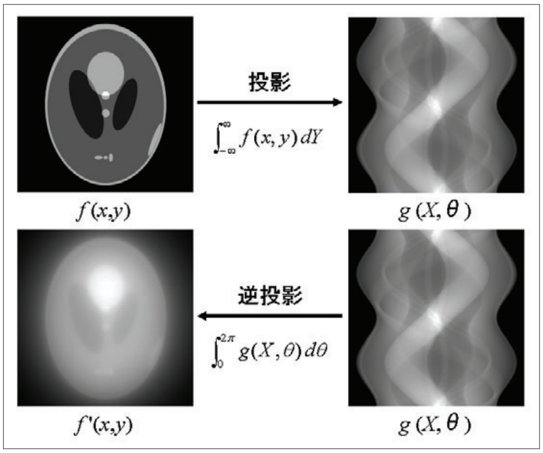

図11. 360度で256投影を使って投影と逆投影の様子を表したもの

題は解決しているので、繰り返しを用いるためのフィードバックの方法を考える。その方法は逆投影を利用するが、基本的には「ペンを何個購入したか」のときに使った方法とさほど変わらない。ペンを購入したときに分かっていた支払った金額の500円に相当するのが投影データとなる。

はじめに適当に予想した画像を作成しておき順問題である投影処理を行う。投影処理の結果と計測から分かっている投影データの差分を求め、それを逆投影してもとの画像に戻す（加える）。この手順をフィードバックの図で示すと、**図12**のようになる。k番目の画像を $f(x,y)^{(k)}$ とし、k+1番目の画像を $f(x,y)^{(k+1)}$ としたとき、この繰り返しの方法は次式で表される。

$$f(x,y)^{(k+1)}=f(x,y)^{(k)}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{g(X,\theta)-\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)^{(k)}dY\right\}d\theta \tag{13}$$

ここで投影と逆投影を1つの角度ごとに行って画像を更新していく方法を ART（algebraic reconstruction technique）法、投影と差分の逆投影をすべての角度で行ってから画像を更新していく方法を SIRT（simultaneous reconstruction technique）法と呼ぶ。ART法では、1つの角度ごとに画像を更新していくので収束は速くなるが、画像の値が発散してしまう可能性が多少高くなる。逆にSIRT法は、すべての角度で投影と差分の逆投影を行ってから画像を更新するので収束は遅くなるが、値が発散する可能性はART法に比べて低くなる。(13)式のまま実行すると値が発散してしまう。最初に解説したペンの例で示したように100で割ったものを戻した場合は発散しなかったが20で割った場合は発散してしまった。そこで(11)式でも同じようにk番目の $f(x,y)$ にフィードバックを加える前に適当な値で割って小さくしておくと発散を抑えることができる。数値シミュレーションでは次式のようにフィードバックの際に2000で割ってから戻すようにした。

$$f(x,y)^{(k+1)}=f(x,y)^{(k)}+\frac{1}{2000}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{g(X,\theta)-\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)^{(k)}dY\right\}d\theta \tag{14}$$

ART法の数値シミュレーションの結果を**図13**に示す。初期画像はすべて同じ値の画像とした。ART

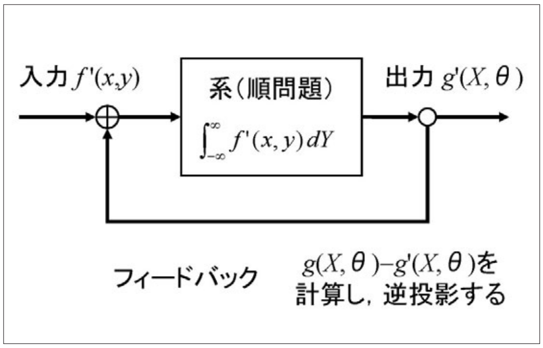

図12. X線CTの繰り返し方法をフィードバックの図で示したもの

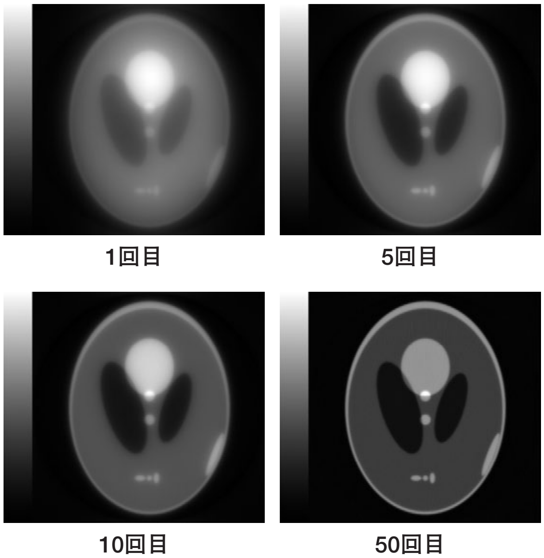

図13. ART法の数値シミュレーション結果

法は1投影ごとに画像を更新するが、SIRT法の更新回数に合わせるため、**図13**では全投影で更新が終わった時点を1回として更新回数を示している。また、SIRT法の結果を**図14**に示す。初期画像はART法と同様にすべて同じ値の画像とした。両者とも徐々に元の画像に近づく様子が見られる。画像を見た限りでは、ART法もSIRT法も違いが分からないので、再構成画像の評価値をプロットしたグラフを**図15**に示す。画像の評価には、元となる数値ファントムとそれぞれの再構成画像の各画素の差を絶対値にして平均をとったもの（平均絶対誤差）を用いた。**図15**のグラフを見ると、ART法の収束が多少速くなっている。それほど両者に差が出ていないのは、2000で割ることで収束をゆっくりにするように調整しているためだと考えられる。次回は、繰り返しの方法で現在最も多く用いられているML-EM法とOS-EM法を解説する。

謝辞：本研究で使用したプログラムの開発は平成17年度～平成22年度首都大学東京共同研究費（富士フィルムRIファーマ株式会社）、および平成22年度首都大学東京傾斜的配分研究費によるものである。

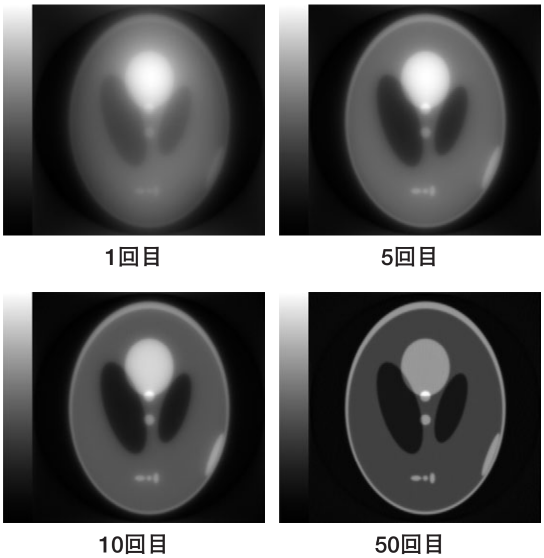

図14.　SIRT法の数値シミュレーション結果

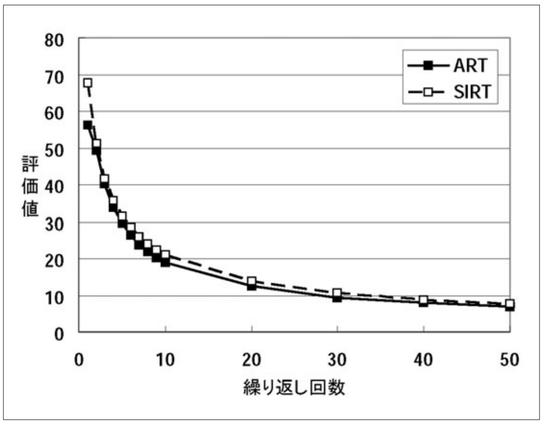

図15.　ART法、SIRT法の平均絶対誤差と繰り返し回数（更新回数）