連続講座

断層映像法の基礎　第 33 回
最小二乗法を利用した画像再構成法

篠原　広行[1)]、桑山　潤[1)]、小川　亙[1)]、寺松　翔太[1)]、橋本　雄幸[2)]

[1)] 首都大学東京人間健康科学研究科　放射線科学域
[2)] 横浜創英短期大学　情報学科

はじめに

第 32 回では繰り返しを使った方法で最も多く使われている ML-EM 法と OS-EM 法について解説した。その中では、検出確率 C_{ij} を作成し、それをもとに繰り返しを使って解を求めた。今回は、検出確率 C_{ij} の関係を行列とベクトルの計算式に置き換えて解を求める最小二乗法を利用した方法について解説する。また、その方法を利用した数値シミュレーションの結果についても紹介する。

1. 検出確率 C_{ij} と行列 C
2. 最小二乗法と特異値分解
3. 画像再構成への応用

1. 検出確率 C_{ij} と行列 C

前回、検出確率 C_{ij} を用いると、投影の式は、

$$y_i = \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} \lambda_j \tag{1}$$

となり、逆投影の式は、

$$\lambda'_j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} C_{ij}} \sum_{i=0}^{N-1} y_i C_{ij} \tag{2}$$

となることを解説した。ここで、λ_j と λ'_j は画像を表し、j は画素の番号に相当する。M は画素の総数である。y_i は投影データを表し、i は検出器の番号に相当する。N は検出器の総数である。これを行列とベクトルに置き換えて考える。C_{ij} はもともと i 行 j 列のマトリクスなのでそのまま行列となる。画像である λ_j と λ'_j と投影データである y_i は、通常 2 次元であったり 3 次元であったりするが、1 次元に番号を振り直して、要素数が M 個および N 個の多次元ベクトルと見なすことができる。検出確率の行列を C、画像ベクトルを f、投影ベクトルを p とすると投影の (1) 式は、

$$p = Cf \tag{3}$$

逆投影の (2) 式は、

$$f = C^T p \tag{4}$$

と表現することができる。ここで C^T は行列 C の行と列を入れ替えた転置行列を表す。ただし、(4) 式では規格化は表記していない。

単純に (3) 式から画像ベクトル f を求めようとすると、行列 C の逆行列 C^{-1} が求められれば、

$$\begin{aligned} C^{-1}p &= C^{-1}Cf \\ f &= C^{-1}p \end{aligned} \tag{5}$$

のように解を求めることができる。これを簡単な行列とベクトルの例で見てみる。

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}$$

という関係式があるとする。ここでベクトルの要素 x と y を求めるために逆行列を求めると、

連絡先：〒 116-8551　東京都荒川区東尾久 7-2-10
首都大学東京人間健康科学研究科放射線科学域　篠原 広行
TEL：03-3819-1211　FAX：03-3819-1406
E-mail：sinohara@hs.tmu.ac.jp
URL：http://www.metro-hs.ac.jp/rs/sinohara

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる。このように逆行列が求まれば、ベクトルの要素 x と y は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4\times5+2\times11 \\ 3\times5-1\times11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

と求めることができる。

では、**図 1** に示すような投影を仮定した場合はどうなるか考えてみる。画像と投影の関係を行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる。投影の $(3,7,4,6)^T$ から画像の $(1,2,3,4)^T$ を求めるためには逆行列を求めることになる。ただしこの行列は階数（rank）が 3 であり、1 次元分退化している。画像を未知数として連立方程式を解こうとしても解が一意的に求まらない。当然逆行列も求めることができない。

投影を**図 2** のように取った場合はどうであろうか。画像と投影の関係を行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{10}$$

となる。この行列は階数が 4 となるので逆行列を求めることができる。逆行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

となり、投影から画像は

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

のように計算できる。このように逆行列が求まれば、同じ幾何学配置で投影の値が変わっても行列の演算で画像を求めることができる。

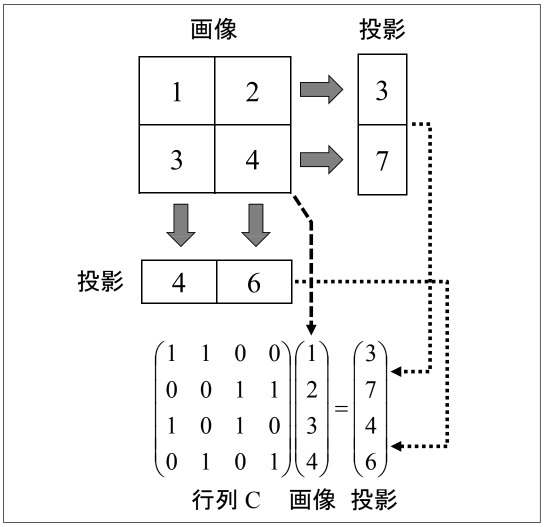


図 1. 画像と投影の例 1
行列 C の階数が 3 となり、逆行列が作れない。

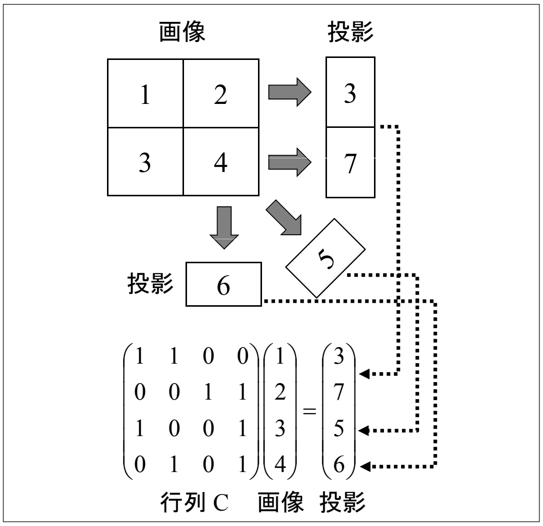


図 2. 画像と投影の例 2
行列 C の階数が 4 となり、逆行列を作ることができる。

2. 最小二乗法と特異値分解

　前節で示したとおり、投影の取り方によっては行列 C の階数が少なくなり、逆行列を求めることができない場合が生じる。そのような場合でも最小二乗法を用いると擬似的な逆行列を求めることができる。最小二乗法は、

$$r^2 \equiv \| Cf - p \|^2 \tag{13}$$

で r の値を最小にする f を求めることに相当する。この解き方の 1 つに特異値分解を利用する方法がある。特異値分解により行列 C を 3 つの行列に分解する。それらの行列から擬似的な逆行列を求めることができる。行列 C の分解は、

$$C = U \cdot W \cdot V^T \tag{14}$$

で表され、行列 U と V は正規直交行列、行列 W は対角行列である。ここから擬似的な逆行列 C^+ は

$$C^+ = V \cdot W^{-1} \cdot U^T \tag{15}$$

のように求められる。対角行列 W^{-1} は、対角成分を逆数にするだけで良い。C が正方行列で階数が満たされている場合は、C^+ は逆行列 C^{-1} と等しくなる。階数が足りない場合は、対角行列 W の対角成分に、足りない階数分だけ 0 が含まれる。0 の逆数は計算できないので、その要素はそのまま 0 とおいて計算する。

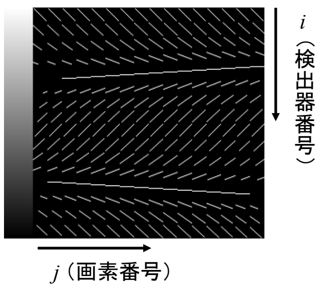


図 3. 16 × 16 画素の画像と 16 × 16 投影の投影データから作成した検出確率の行列 C の画像（256 × 256 マトリクス）
横方向が画像の画素番号に相当し、縦方向が投影の検出器番号に相当する。

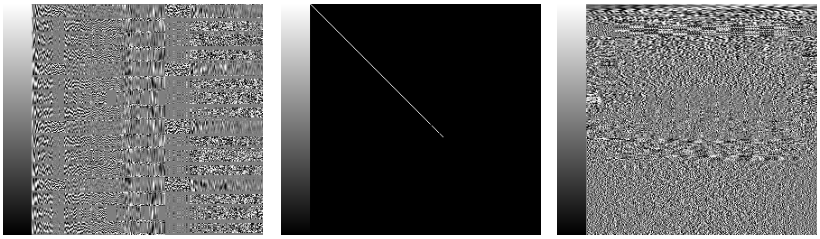
　前節の 2 通りの場合について計算した結果を次に示す。まずは**図 2** で示した階数が足りている場合について計算すると、

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} -0.435 & 0.707 & 0 & 0.557 \\ -0.435 & -0.707 & 0 & 0.557 \\ -0.557 & 0 & -0.707 & -0.435 \\ -0.557 & 0 & 0.707 & -0.435 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 2.136 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.662 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} -0.465 & -0.465 & -0.204 & -0.726 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0.185 & 0.185 & 0.842 & -0.473 \end{pmatrix} \tag{16}$$

となり、擬似的な逆行列 C^+ は、

$$C^+ = \begin{pmatrix} -0.465 & 0.5 & -0.707 & 0.185 \\ -0.465 & 0.5 & 0.707 & 0.185 \\ -0.204 & -0.5 & 0 & 0.842 \\ -0.726 & -0.5 & 0 & -0.473 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 0.468 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.51 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} -0.435 & -0.435 & -0.557 & -0.557 \\ 0.707 & -0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0.707 \\ 0.557 & 0.557 & -0.435 & -0.435 \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{17}$$

となる。この逆行列は (12) 式で求めたものと等しくなる。



a | b | c

図 4. 行列 C を特異値分解した画像（256 × 256 マトリクス）
(a) 正規直交行列 U　　(b) 対角行列 W　　(c) 正規直交行列 V^T

次に**図 1** で示した階数が足りていない場合について計算すると、

$$
C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}
\approx\begin{pmatrix}-0.5&-0.5&0.5&-0.5\\-0.5&0.5&0.5&0.5\\0.5&-0.5&0.5&0.5\\0.5&0.5&0.5&-0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1.414&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1.414\end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix}-0.5&0.5&0.5&-0.5\\-0.707&0&0&0.707\\0.5&0.5&0.5&0.5\\0&-0.707&0.707&0\end{pmatrix}\tag{18}
$$

となる。対角行列 W の対角成分が 1 つだけ 0 になっている。対角成分が 0 のところはそのまま 0 にして擬似的な逆行列 C^+ を求めると、

$$
C^+=\begin{pmatrix}-0.5&-0.707&0.5&0\\0.5&0&0.5&-0.707\\0.5&0&0.5&0.707\\-0.5&0.707&0.5&0\end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0.707&0&0\\0&0&0.5&0\\0&0&0&0.707\end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix}-0.5&-0.5&0.5&0.5\\-0.5&0.5&-0.5&0.5\\0.5&0.5&0.5&0.5\\-0.5&0.5&0.5&-0.5\end{pmatrix}
\approx\begin{pmatrix}0.375&-0.125&0.375&-0.125\\0.375&-0.125&-0.125&0.375\\-0.125&0.375&0.375&-0.125\\-0.125&0.375&-0.125&0.375\end{pmatrix}\tag{19}
$$

となる。この擬似的な逆行列 C^+ を使って投影から画像を求めると、

$$
C^+p=\begin{pmatrix}0.375&-0.125&0.375&-0.125\\0.375&-0.125&-0.125&0.375\\-0.125&0.375&0.375&-0.125\\-0.125&0.375&-0.125&0.375\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\tag{20}
$$

となり、画像の数値を再現することができた。ただし、行列 C が退化している場合は、擬似的な逆行列 C^+ は一意的に求まるわけではないので、正確に画像を再現できるとは限らない。

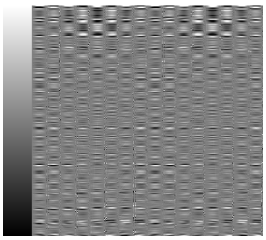


図 5. 特異値分解から求めた擬似的な逆行列 C^+（256 × 256 マトリクス）

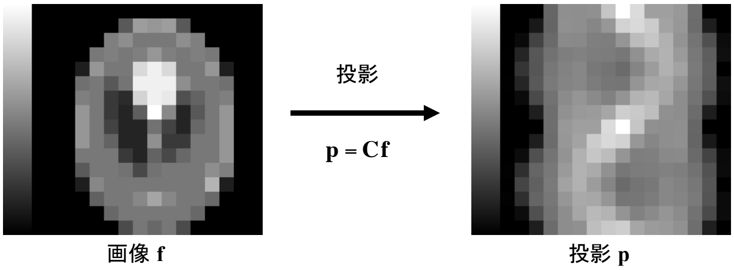


図 6. 検出確率の行列 C を利用して投影を行った結果
16 × 16 画素の画像を拡大して表示している。

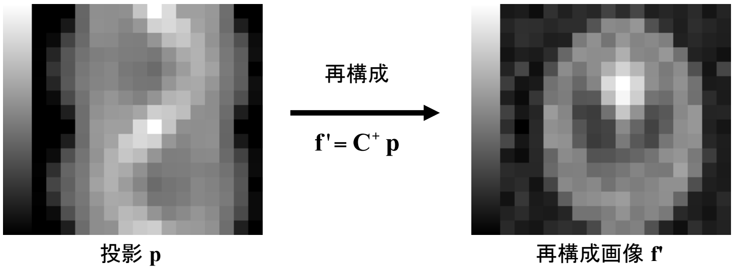


図 7. 擬似的な逆行列 C^+ を利用して再構成を行った結果
16 × 16 画素の画像を拡大して表示している。

3. 画像再構成への応用

実際の画像再構成に最小二乗法である特異値分解を応用した例を示す。まずは画像と投影を 16 × 16 画素と粗いものを考える。16 × 16 画素の画像と投影の場合、検出確率の行列 C は 256 × 256 マトリクスとなる。大きい行列なので**図 3** に画像として示す。この逆行列を求められれば、投影から画像を行列の演算で求めることができる。しかし、この行列を見ると分かるように要素が 0 になっているところが非常に多く存在する。階数を計算すると 148 となり、256 に比べて明らかに小さく、行列 C は大きく退化している。よって、擬似的な逆行列を特異値分解で求める必要がある。特異値分解により行列 C を 3 つに分けたものを**図 4** (a) ～ (c) に示す。(a) ～ (c) はそれぞれ行列 U、W、V^T を画像で表している。この行列から擬似的な逆行列 C^+ を求めたものを**図 5** に画像で示す。

16 × 16 画素の画像を用いて、投影と再構成を検証する。検出確率の行列 C を用いて投影を作成する様子を**図 6** に示す。作成した 16 × 16 画素の投影 p を**図 5** に示した擬似的な逆行列 C^+ を用いて行列の演算で再構成する様子を**図 7** に示す。**図 7** で再構成された画像 f'は、計算誤差によるノイズは含まれているが、もとの画像を再現している。検出確率の行列 C は退化しているので、擬似的な逆行列 C^+ は一意的に求まるわけではない。計算誤差をもっと少なくするような擬似的な逆行列を求めることにより、再構成の精度を上げることは可能であると考えられる。

最後に 64 × 64 画素の画像について同様のものを示す。64 × 64 画素の画像と投影の場合、検出確率の行列 C は 4096 × 4096 マトリクスとなる。画像としても非常に大きくなるので、256 × 256 マトリクスに縮小した画像を**図 8** に示す。また、特異値分解により**図 8** に示した行列 C を 3 つに分けたものを**図 9** (a) ～ (c) に示す。(a) ～ (c) はそれぞれ行列 U,W、

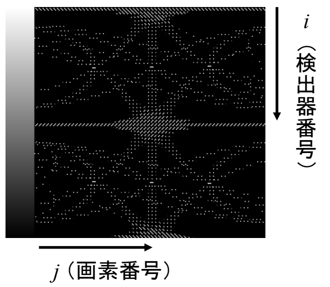
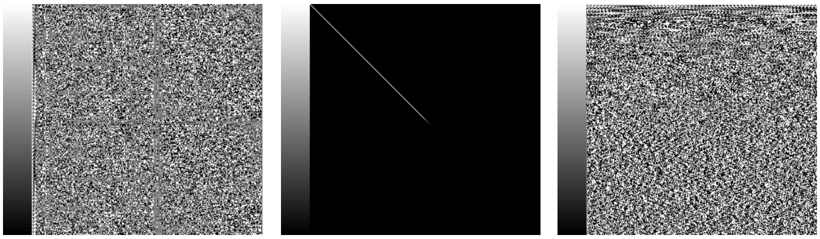


図 8. 64 × 64 画素の画像と 64 × 64 投影の投影データから作成した検出確率の行列 C の画像（4096 × 4096 マトリクス）
表示は 256 × 256 マトリクスに縮小している。

V^T を表している。これらの行列も 256 × 256 マトリクスで表示しているが、実際には 4096 × 4096 マトリクスとなっている。この行列から擬似的な逆行列 C^+ を求めたものを**図 10** に画像で示す。この行列のサイズも同様である。

64 × 64 画素の画像を用いて、投影と再構成を検証した結果をそれぞれ**図 11** と**図 12** に示す。再構成された画像は、16 × 16 画素の場合と同様に計算誤差が目立っているが、もとの画像をそれなりに再現している。このように擬似的にでも逆行列をうまく求めることで、再構成を行列の演算として実行することが可能である。ただし、検出確率の行列 C はとてつもなく大きくなるので、臨床で使われるような 256 × 256 画素や 512 × 512 画素のような画像では、パソコンレベルでの計算はまだまだ難しい。繰り返しの方法がそうであるように、計算機の性能が上がれば、このような再構成法も実用化される可能性がある。

謝辞：本研究で使用したプログラムの開発は平成 17 年度〜平成 22 年度首都大学東京共同研究費（富士フィルム RI ファーマ株式会社）によるものである。



a | b | c

図 9.
行列 C を特異値分解した画像
（4096 × 4096 マトリクス）
(a) 正規直交行列 U
(b) 対角行列 W
(c) 正規直交行列 V^T

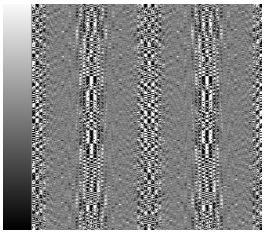


図 10. 特異値分解から求めた擬似的な逆行列 C^+（4096 × 4096 マトリクス）

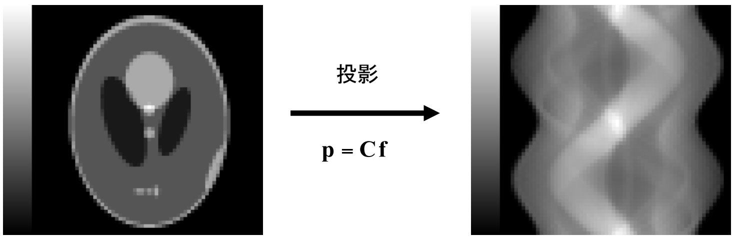


図 11. 検出確率の行列 C を利用して
投影を行った結果
64 × 64 画素の画像と投影で計算している。

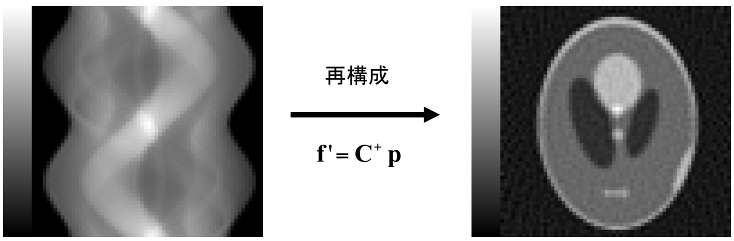


図 12. 擬似的な逆行列 C^+ を利用して
再構成を行った結果
64 × 64 画素の投影から再構成を行っている。