論文

鉄と鋼 Tetsu-to-Hagané Vol. 96 (2010) No. 7

モード切替え時刻の最適条件を用いたハイブリッドモデル予測制御による熱延仕上ミル張力・ルーパ系のスタートアップ制御

増田 士朗*・浅野 一哉*2・今井 築*3

A Hybrid MPC for Start-up Phase Tension and Looper Control in Hot Strip Finishing Mills Using an Optimal Condition for Mode Transition Time

Shiro MASUDA, *Kazuya* ASANO and *Kizuku* IMAI

Synopsis : This paper gives a design method for a model predictive control (MPC) approach by using a unified performance index throughout the start-up phase tension and looper control which consists of the non-contact and contact modes in order to suppress the deviation of the strip tension while the looper contacts with the strip as quickly as possible. In this paper, the control problem is formulated as a bi-modal hybrid MPC design using an optimal condition for mode transition. In addition, the paper gives a method using a continuation method to achieve on-line implementation. The efficiency of the proposed method is shown through numerical simulations.

Key words: tension and looper control; hot strip mill; piecewise affine systems; model predictive control; continuation method.

1. はじめに

熱延仕上げミル張力・ルーパ系においては，圧延材先端部が通板するたびに，ルーパの立ち上げ動作を行い，定常状態においてフィードバック制御を主体とした定常部張力制御が行われる。圧延材の安定な張力を維持するためには，ルーパの立ち上げ動作から速やかに定常部張力制御へと移行することが必要となるが，ルーパの急速な立ち上げは，ルーパと圧延材の接触による過大な張力変動を引き起こし，圧延材の品質低下を招く可能性がある。したがって，ルーパの立ち上げ制御では，ルーパの速やかな立ち上げを実現する一方で，圧延材との接触による張力変動をできる限り抑制することが求められる。しかし，定常部張力制御に対してはモデルベースの高度制御手法の適用が行われているのに対し[1-4]，非定常部の制御を含む研究は少なく，簡単なルーパ駆動参照トルクを定数で与える方法やヒューリスティックな試行錯誤的な方法が主要なアプローチとなっている。

これに対して最近，ルーパ系と圧延材の接触前後によって動特性が大きく異なることを考慮したハイブリッドモデル予測制御手法が提案された[5]。この手法により，ルーパの参照駆動トルクを定数で与える従来法に比べて，同程度の立ち上がり時間の速さを確保しながら，接触時における圧延材の張力変動を大幅に抑制できることが示されている。しかし，そこでは制約条件つき2次計画問題を繰り返し解くことによって最適なモード切替え時刻を求めるため，制御則導出のための計算量が多くなるという問題があった。すなわち，オンライン実装を実現するため，制御則導出のための計算量をいかに削減するかが課題として残されている。

そこで本論文では，最適なモード切替え時刻を求めるための探索計算を回避するため，モード切替え時刻の最適条件を導入する手法を与える。本論文の定式化では，先行研究と同様に

1. 接触モード，非接触モードに対し，それぞれの平衡点を中心に線形近似したのち，接触モードの平衡点に対するレギュレータ問題として定式化することによって，非接触モードは区分的アファイン(PWA; Piecewise Affine)モデル，接触モードは線形モデルで記述する。
2. モード遷移は，非接触モードから接触モードへと一方向に1回だけ切り替わるとする。
3. 接触モードでは，平衡点への安定化問題に帰着されるので，最適レギュレータを制御則として用いる。
4. 非接触モードでは，終端時刻において接触モードに移行する状態に到達することを示す終端状態の拘束条件と接触モード移行後の制御性能を評価する終端状態評価を

平成21年10月30日受付 平成22年1月14日受理 (Received Oct. 30, 2009; Accepted Jan. 14, 2010)
* 首都大学東京大学院システムデザイン専攻 (Department of System Design, Tokyo Metropolitan University, 6-6 Asahigaoka Hino Tokyo 191-0065)
*2 JFEスチール株式会社スチール研究所 (Steel Research Laboratory, JFE Steel Corporation)
*3 日本航空電子工業株式会社コネクタ事業部 (Japan Aviation Electronics Industry, Limited)

組み入れた有限時間最適レギュレータ問題として定式化する。

ことを用いる。しかし，先にも述べたように，上記の問題設定のままでは，最適なモード切替え時刻を求めるための探索計算が必要となる。したがって，本論文では，非接触モードにおける有限時間最適レギュレータ問題においてモード切替え時刻に相当する終端時刻の最適条件[7]を与え，モード切替え時刻の最適値を条件式から直接求められるようにする。また，その終端時刻の最適条件が比較的な複雑な非線形方程式になるため，連続変形法を適用し，解の導出における計算量の軽減も行う。

本論文は，以下の構成をとる。2章で，本論文で扱う張力・ルーパ系のモデルの導出を行う。3章で，2章で得られたモデルを線形近似し，同じ動作点をとることによってPWAモデルを導出し，そのPWAモデルを用いて本論文で取り組むMPC制御問題を与える。4章では，本論文の特徴であるモード切替え時刻の最適条件の導出を行ったのち，最適条件から導かれる非線形方程式の効率的な計算法として連続変形法を利用した手法を与える。5章では，数値例により提案法の有効性を示し，6章でまとめを行う。

2. 張力・ルーパ系モデル

Fig. 1で与えられる1組の隣接するスタンドからなる熱延仕上げミル張力ルーパ系においてルーパのスタートアップ動作における動特性のモデルの導出を行う。このとき，モデリングで用いられる各変数は，Table 1で与えられるものとする。なお，ここでの張力・ルーパ系のモデルは，先行研究[5]と同じものを使っているとする。

まず，ルーパの動特性は，次式で与えられる。

$$J\ddot{\theta}=q-\delta\{K_\sigma(\theta)\sigma+K_s(\theta)\}-K_L(\theta)-D\dot{\theta} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\dot{q}=-\frac{1}{T_{ACR}}(q-q_{\mathrm{ref}}) \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，K_σ，K_s，K_Lは，それぞれ圧延材の張力によるトルク，圧延材の重量によるトルク，ルーパの自重によるトルクを表しているとし，次式で与えられているとする。

$$K_\sigma(\theta)\triangleq 2bhr\cos\theta\sin\beta \quad \cdots\cdots (3)$$

$$K_s(\theta)\triangleq 2\rho hbg\frac{1}{\cos\beta}r\cos\theta \quad \cdots\cdots (4)$$

$$K_L(\theta)\triangleq W_L g r_L\cos(\theta+\theta_G) \quad \cdots\cdots (5)$$

δは，0-1変数でルーパのスタートアップ動作においてどの動作モードにあるのかを示すものとする。すなわち，$\delta=1$は，接触（ルーパが圧延材に接触している）状態（Cモード）を表し，$\delta=0$は，非接触（ルーパが圧延材から離れている）状態（Nモード）を表しているとする。なお，モード遷移の規則は次式で与えられているとする。

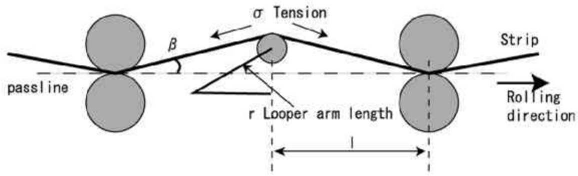

Fig. 1. Looper geometry.

Table 1. Nomenclature in the Tension and Looper Control System Model.

J	Looper inertia
θ	Looper angle
σ	Interstand tension
q	Looper torque
q_{ref}	Looper torque reference
D	Looper damping constant
T_{ACR}	Time constant of looper motor ACR
h	Strip thickness
b	Strip width
β	Strip angle with passline
ρ	Strip density
g	Gravitational constant
l	Half of length beween stands
r	Looper arm length
W_L	Looper weight
r_L	Distance between axis and center of gravity of looper
θ_G	Offset angle between center of gravity of looper and looper angle
E	Young's modulus of strip
f	Forward slip
L	Interstand strip length
V_R	Roll velocity
V_{Rref}	Roll velocity reference
T_{ASR}	Time constant of mill motor ASR

$$\delta=\begin{cases}0 & \text{if } \theta\le\theta_{\min}\\ 1 & \text{if } \theta\ge\theta_{\min}\end{cases} \quad \cdots\cdots (6)$$

ここで，$\theta_{\min}$は，ルーパがパスライン（圧延材が通過する高さ）に達するときのルーパの角度を表すとする。

次に，張力の動特性は，次式のように与えられる。

$$\dot{\sigma}=\frac{E}{2l}\left[-\{1+f(\sigma)\}V_R+\frac{\partial L}{\partial\theta}\dot{\theta}\right] \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\dot{V}_R=-\frac{1}{T_{ASR}}(V_R-V_{R_{\mathrm{ref}}}) \quad \cdots\cdots (8)$$

NモードからCモードへ遷移するときのルーパの角速度と張力は次式で与えられるとする。

$$\dot{\theta}(t)=\varepsilon_1\dot{\theta}(t\_),\quad \text{if N-mode}\rightarrow\text{C-mode} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\sigma(t)=\sigma(t\_)+\varepsilon_2\dot{\theta}(t\_),\quad \text{if N-mode}\rightarrow\text{C-mode} \quad \cdots\cdots (10)$$

ここで，ε_1とε_2は，ルーパが圧延材に接触したときに生じる状態の不連続的な変化を表す量であり，これらは，なんらかの方法で推定できるものとする。また，$\dot{\theta}(t\_)$，$\sigma(t_)$は，$\dot{\theta}(t_)\triangleq\lim_{\tau\uparrow t}\dot{\theta}(\tau)$，$\sigma(t_)\triangleq\lim_{\tau\uparrow t}\theta\sigma(\tau)$で定義されるものとする。

3. 張力・ルーパ系のスタートアップ制御に対するハイブリッドモデル予測制御の問題設定

3・1 PWA(Piecewise Affine)モデル

Fig. 2に示されるようにルーパが，Nモードである初期状態から，Cモードである最終状態までスタートアップ時に動作する場合に対して，PWAモデルの導出を行う。

最初に，Cモードの動特性を動作点まわりで線形近似を行う。Cモードの動作点は，ルーパが立ち上がり安定して定常部張力制御が行われているときの状態(θ_c, 0, σ_c, q_c, V_{Rc})を表しているとし，下記の関係式が成り立っているとする。

$$q_c = q_{\mathrm{ref}c} = K_\sigma(\theta_c)\sigma + K_s(\theta_c) + K_L(\theta_c) \quad \cdots\cdots(11)$$

$$V_{Rc} = V_{Rfefc} \quad \cdots\cdots(12)$$

それから，$\delta=1$として，(1)~(10)式の線形モデルを与える。

$$J\ddot{\bar{\theta}} = \bar{q} - K_\sigma(\theta_c)\bar{\sigma} - K(\theta_c, \sigma_c)\bar{\theta} - D\dot{\bar{\theta}} \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = F_1(\sigma_c)\bar{V}_R + F_2(\sigma_c, V_{Rc})\bar{\sigma} + F_3(\theta_c)\dot{\bar{\theta}} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\dot{\bar{q}} = -\frac{1}{T_{ACR}}(\bar{q} - \bar{q}_{\mathrm{ref}}) \quad \cdots\cdots(15)$$

$$\dot{\bar{V}}_R = -\frac{1}{T_{ASR}}(\bar{V}_R - \bar{V}_{R\mathrm{ref}}) \quad \cdots\cdots(16)$$

$$\dot{\bar{\theta}}(t) = \varepsilon_1\dot{\bar{\theta}}(t_-), \qquad \text{if N-mode}\rightarrow\text{C-mode} \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}(t) + \varepsilon_2\dot{\bar{\theta}}(t_-), \qquad \text{if N-mode}\rightarrow\text{C-mode} \quad \cdots\cdots(18)$$

ここで

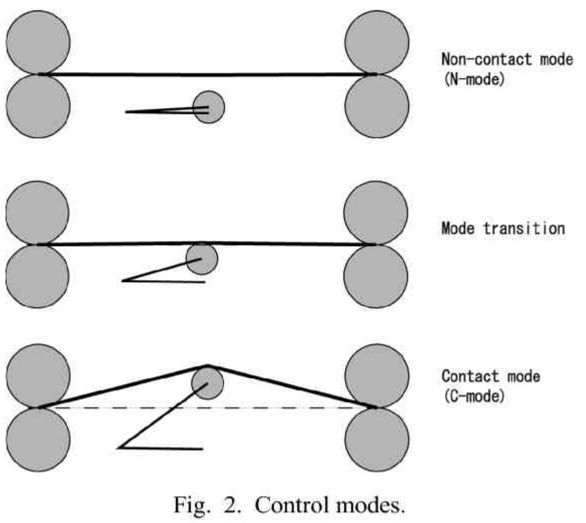

Fig. 2. Control modes.

$$K(\theta_c, \sigma_c) \triangleq \sigma_c \left.\frac{\partial K_\sigma}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_c} + \left.\frac{\partial K_s}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_c} + \left.\frac{\partial K_L}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_c} \quad \cdots\cdots(19)$$

$$F_1(\sigma_c) \triangleq -\frac{E}{2l}\{1 + f(\sigma_c)\} \quad \cdots\cdots(20)$$

$$F_2(\sigma_c, V_{Rc}) \triangleq -\frac{EV_{Rc}}{2l}\left.\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_c} \quad \cdots\cdots(21)$$

$$F_3(\theta_c) \triangleq \frac{E}{2l}\left.\frac{\partial L}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_c} \quad \cdots\cdots(22)$$

である。

次に，Nモードの動作点まわりで線形近似を行う。Nモードの動作点は，ルーパがパスラインに到達した状態$\theta_n=\theta_{\min}$とし，Nモードの動作点の状態変数を(θ_n, 0, q_n)，で与えられるとする。なお，Nモードの動作点におけるルーパトルクにおいて

$$q_n = q_{\mathrm{ref}n} = K_L(\theta_n) \quad \cdots\cdots(23)$$

が成り立っているとする。このとき，$\delta=0$とした場合の(1)~(10)式の線形近似モデルは，次式で与えられる。

$$J\ddot{\tilde{\theta}} = \tilde{q} - \left.\frac{\partial K_L}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_n}\tilde{\theta} - D\dot{\tilde{\theta}} \quad \cdots\cdots(24)$$

$$\dot{\tilde{q}} = -\frac{1}{T_{ACR}}(\tilde{q} - \tilde{q}_{\mathrm{ref}}) \quad \cdots\cdots(25)$$

ここで圧延材の張力が，ルーパ上に取り付けられた張力メータによって計測されることに注意すると，ルーパが圧延材に接触していないNモードでは，張力は計測できないことに注意する必要がある。したがって，張力とワークロール速度に関する動特性は，Nモードでは含まれないと仮定し，ワークロール速度の参照信号$V_{R\mathrm{ref}}$は，Nモードでは一定に保たれていると仮定する。

次に，Nモードの線形モデルの状態変数とCモードの線形モデルの状態変数を同じ座標系で表現することによって，張力・ルーパ系のNモードからCモードまでの一連の動作過程を一つの評価関数のもとで統一的に評価できるようにする。そのため，Nモードの線形近似モデルにおける動作点をCモードの線形近似モデルの動作点に変換する。これにより，Cモードの線形モデルは，次式のようになる。

$$J\ddot{\bar{\theta}} = \bar{q} - \left.\frac{\partial K_L}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_n}\bar{\theta} - D\dot{\bar{\theta}} + \Delta S_\theta \quad \cdots\cdots(26)$$

$$\dot{\bar{q}} = -\frac{1}{T_{ACR}}(\bar{q} - \bar{q}_{\mathrm{ref}}) \quad \cdots\cdots(27)$$

ここで，

$$\Delta S_\theta \triangleq q_c - q_n - \left.\frac{\partial K_L}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_n} \quad (\theta_c = \theta_n) \quad \cdots\cdots(28)$$

である。

以上，(13)~(18)式，(26)~(27)式をまとめると，張力・ルーパ系におけるルーパのスタートアップ制御モデルは，次のPWAモデルによって記述することができる。

N-mode:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{B}_1 u_1(t) + \boldsymbol{a},$$
$$\text{if } \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(t) - p_0 \le 0 \quad \cdots\cdots(29)$$

NC-mode:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{E}_{nc}\boldsymbol{x}(t\_) + \boldsymbol{e}_{nc},$$
$$\text{if } \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t\_) - p_0 = 0,$$
$$\text{and N-mode}\rightarrow\text{C-mode} \quad \cdots\cdots(30)$$

C-mode:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t),$$
$$\text{if } \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t) - p_0 \ge 0 \quad \cdots\cdots(31)$$

ここで，

$$\boldsymbol{x} \triangleq [\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}, \bar{q}, \bar{\sigma}, \bar{V}_R]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{u} \triangleq [\bar{q}_{\mathrm{ref}}, \bar{V}_{\mathrm{ref}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{x}_1 \triangleq [\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}, \bar{q}]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_2 \triangleq [\bar{\sigma}, \bar{V}_R]^{\mathrm{T}}, \quad u_1 \triangleq \bar{q}_{\mathrm{ref}}$$

$$\boldsymbol{A}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(32)$$

$$\boldsymbol{A}_2 \triangleq \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & a'_{42} & 0 & a'_{44} & a'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{array}\right] \quad \cdots\cdots(33)$$

$$\boldsymbol{B}_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{nc} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(34)$$

$$\boldsymbol{e}_{nc} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{nc1} \\ \boldsymbol{e}_{nc2} \end{bmatrix} \triangleq \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \sigma_n - \sigma_c \\ 0 \end{array}\right] \quad \cdots\cdots(35)$$

$$\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}} \triangleq [1\ 0\ 0], \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \triangleq [1\ 0\ 0\ 0\ 0], \quad p_0 \triangleq \theta_n - \theta_c \quad \cdots\cdots(36)$$

$$a_{21} \triangleq -\frac{1}{J}\left.\frac{\partial K_L}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_n}, \quad a_{22} \triangleq -\frac{1}{J}D, \quad a_{23} \triangleq \frac{1}{J}$$

$$a_{33} \triangleq -\frac{1}{T_{ACR}}, \quad b_1 \triangleq \frac{1}{T_{ACR}}, \quad f \triangleq \frac{1}{J}\Delta S_\theta$$

$$a'_{21} \triangleq -\frac{1}{J}K(\theta_c, \sigma_c), \quad a'_{22} \triangleq -\frac{1}{J}D, \quad a'_{23} \triangleq -\frac{1}{J}$$

$$a'_{24} \triangleq -\frac{1}{J}K_\sigma(\theta_c), \quad a'_{42} \triangleq -F_3(\theta_c)$$

$$a'_{44} \triangleq F_2(\sigma_c, V_{Rc}), \quad a'_{45} \triangleq F_1(\sigma_c)$$

$$a'_{55} \triangleq -\frac{1}{T_{ASR}}, \quad b_2 \triangleq \frac{1}{T_{ASR}}$$

である。なお，スタートアップ制御の初期状態は，Cモードの動作点に変換するので，

$$\boldsymbol{x}_{10} \triangleq [\theta_n - \theta_c, 0, 0]^{\mathrm{T}}$$

で与えられるとする。本論文では，先行研究[5)]と同様に(29)~(31)式のPWAモデルに対してモデル予測制御を構成する問題を考える。実装時においては，モデル予測制御の設計が下位のルーパトルク制御やワークロール速度制御に影響を与える可能性も検討する必要が生じるが，本論文では，動作モードが複数含まれる場合のモデル予測制御手法のオンライン実装可能性を検討することが主たる課題なので，以下ではモデル予測制御の設計は下位の制御器と独立に設計できるという仮定のもとで議論を進める。

3・2 MPC問題の定式化

本節では，本論文で扱うPWAモデルで記述されたNモードからCモードまでの二つの動作モードを含むシステムに対して，次の一つの評価関数を最適化するMPC問題を与える。

$$J_t = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t,\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t,\tau) + \boldsymbol{u}(t,\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t,\tau)\}\,d\tau$$
$$\rightarrow \min, \quad \boldsymbol{Q} \ge 0, \quad \boldsymbol{R} > 0 \quad \cdots\cdots(37)$$

MPCでは，Receding Horizon法に基づき，時刻tごとに最適化問題を考えるので，評価関数に時刻のパラメータtを含めてJ_tと記す。また，最適計算を行うためには，仮想的に未来を予測することを行うので，そのための時間変数τを用意し，状態変数，入力変数ともに実時間tと仮想的な時間変数τの二つの時間変数が含まれているとする。制御対象には，(37)式を最適にする最適制御則$u(t, \tau)$，$0 \le \tau \le \infty$の中で，最初の瞬間$\boldsymbol{u}(t, 0)$，もしくは，近似的に$\boldsymbol{u}(t, \tau)$，$t \le \tau \le t+\varepsilon$，$\varepsilon > 0$が制御対象に適用される。

このとき，先行研究[5)]でも行ったように，

1. モード遷移は，NモードからCモードへと一方向に1回だけ切り替わるとする。

2. Cモードでは，平衡点への安定化問題に帰着されるので，最適レギュレータによる制御則が用いられる。
3. Nモードでは，終端時刻において接触モードに移行する状態に到達することを示す終端状態の拘束条件とCモード移行後の制御性能を評価する終端状態評価を組み入れた有限時間最適レギュレータ問題として定式化する。

と仮定する。その仮定のもとでは，Cモードでの制御は基本的な最適レギュレータを適用することになるので，制御則の決定に議論すべき問題はない。したがって，以降の議論では，Nモードでの制御則の決定に注意を集中する。Nモードに限定した場合，MPC制御問題は次式のようになる。

$$J_t=\int_0^{t_s}\{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(t,\tau)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_1(t,\tau)+r_1u_1(t,\tau)^2\}d\tau + \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t,t_s)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t,t_s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t,t_s)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t,t_s)\end{bmatrix}\rightarrow \min, \quad \cdots\cdots(38)$$

$$\boldsymbol{Q}_1\geq 0,\quad r_1>0$$

$$\text{s.t.}\quad \frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{x}_1(t,\tau)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t,\tau)+\boldsymbol{B}_1u_1(t,\tau)+\boldsymbol{a} \quad \cdots\cdots(39)$$

$$\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(t_s)-p_0=0 \quad \cdots\cdots(40)$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t_s)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t_s)\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{nc}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t_s)\\ \boldsymbol{x}_2(t_s)\end{bmatrix}+\boldsymbol{e}_{nc} \quad \cdots\cdots(41)$$

ここで，$\boldsymbol{P}$は，$\boldsymbol{C}$モードのモデルと(37)式の評価関数の重み行列$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$に対するリカッチ方程式の対称正定解とする。また，(38)式の重み行列$\boldsymbol{Q}$および重み係数r_1は，(37)式の評価関数の重み行列$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$からNモードの状態変数および入力変数に対応するものを取り出したものである。

さらに，t_sは，NモードからCモードへ切替わる切替え時刻を表しているとする。したがって，(38)式右辺第2項は，モード切替え時刻におけるCモードの初期状態に関する2次形式を表していることになる。このとき，$\boldsymbol{P}$は，Cモードのモデルのリカッチ方程式の対称正定解であることに注意すると，(38)式右辺第2項は時刻t_s以降，Cモードで最適レギュレータを適用した場合の時刻t_s以降の2次形式評価関数の評価値を表していると言える。このことから，(38)式の評価関数は有限時刻の評価関数であるが，(37)式の無限時間の評価関数に相当していると考えられる。また，時刻t_sにおける初期状態は(41)式を用いてNモードの終端状態によって記述でき，(40)式はモード切替え時刻においてルーパがパスラインに到達している条件を表している。このように，t_sは(38)式の中では，評価関数の終端時刻を表しているが，モード切替え時刻としての意味をもち，(37)式の無限時間区間の評価関数を有限時間の最適制御問題に帰着させるうえで重要な役割を果たしている。したがって，このモード切替え時刻は，(38)式の評価関数を最適にする最適制御則を決めるときの決定変数の中の一つと考える必要がある。先行研究では，この切替え時刻の最適値を求めるため，切替え時刻の考えられるパターンを探索することを行うが，本論文では，モード切替え時刻の探索を回避するため，最適な切替え時刻を与える条件を陽に与えているところに特徴がある。

4. モード切替え時刻の最適条件と連続変形法の適用

(38)~(41)式のMPC問題は最適制御問題の観点からみると，終端時刻未知，終端状態拘束条件付き最適制御問題とみなすことができ，この問題に対する最適性の必要条件は，次式のように与えられている[7]。

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{\lambda}(t,\tau)=-H_{x_1}^{\mathrm{T}},\quad H_{u_1}=0 \quad \cdots\cdots(42)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{x}_1(t,\tau)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t,\tau)+\boldsymbol{B}_1u_1(t,\tau)+\boldsymbol{a} \quad \cdots\cdots(43)$$

$$\boldsymbol{x}_1(t_0,0)=\boldsymbol{x}_{10},\quad \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(t,t_s)-p_0=0 \quad \cdots\cdots(44)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t,t_s)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_1(t,t_s)+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\nu}(t)\boldsymbol{c}_1 \quad \cdots\cdots(45)$$

$$[H]_{\tau=0}=0 \quad \cdots\cdots(46)$$

ここで，ハミルトニアンHは次の式で定義されるものである。

$$H=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_1(\tau)+r_1u_1(\tau)^2 +\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\tau)(\boldsymbol{A}_1u_1)+\boldsymbol{B}_1u_1(\tau)+\boldsymbol{a}) \quad \cdots\cdots(47)$$

また，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{L}$は次式で定義されるものである。

$$\boldsymbol{K}\triangleq 2(\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}_1+2\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{E}_2)$$

$$\boldsymbol{L}\triangleq 2(\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3)\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{x}_2(t_s) +2(\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2)\boldsymbol{e}_{nc2} \quad \cdots\cdots(48)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1 & 0\\ \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{E}_3\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{E}_{nc},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_3\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{P} \quad \cdots\cdots(49)$$

(46)式が，終端時刻の最適条件を表しているので，この条件式が，モード切替え時刻の最適条件を表している。

それでは，(42)~(46)式の条件式から制御則の導出を行う。条件(42)式より，MPC制御則は，

$$u_1(t,0)=-\frac{1}{2r_1}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t,0) \quad \cdots\cdots(50)$$

と記述される。したがって，$\boldsymbol{\lambda}(t,0)$が求められれば，MPC

制御則が決定するが，この$\boldsymbol{\lambda}(t, 0)$を求めるためには，(42)~(46)式より，未知ベクトル$\boldsymbol{U}(t)=[\boldsymbol{\lambda}(t, 0)^{\mathrm{T}}, \nu(t), t_s(t)]^{\mathrm{T}}$に関する次の非線形方程式の解を求める必要がある。

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) \\ F_2(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) \\ F_3(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) \end{bmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots(51)$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) \\ &\triangleq \{\boldsymbol{M}_4(t_s(t)) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{M}_2(t_s(t))\}\boldsymbol{\lambda}(t,0) \\ &\quad - \boldsymbol{c}_1\nu(t) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{W}_1(t_s(t)) + \boldsymbol{W}_2(t_s(t)) - \boldsymbol{L} \quad \cdots\cdots(52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F_2(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) \\ &\triangleq \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{M}_2(t_s(t)) - p_0 + \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_1(t_s(t)) \quad \cdots\cdots(53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F_3(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) \\ &\triangleq \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(t,0)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_1(t,0) - \frac{1}{4r_1}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t,0)\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t,0) \\ &\quad + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t,0)\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t,0) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t,0)\boldsymbol{a} \quad \cdots\cdots(54) \end{aligned}$$

さらに，ここで

$$\boldsymbol{M} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & -\frac{1}{2r_1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \\ -2\boldsymbol{Q}_1 & -\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(55)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1(t_s(t)) & \boldsymbol{M}_2(t_s(t)) \\ \boldsymbol{M}_3(t_s(t)) & \boldsymbol{M}_4(t_s(t)) \end{bmatrix} \triangleq \exp(\boldsymbol{M}t_s(t)) \quad \cdots\cdots(56)$$

$$\boldsymbol{W}_1(t_s(t)) \triangleq \boldsymbol{M}_1(t_s(t))\boldsymbol{x}_1(t,0) + \boldsymbol{a}_1(t_s(t)) \quad \cdots\cdots(57)$$

$$\boldsymbol{W}_2(t_s(t)) \triangleq \boldsymbol{M}_3(t_s(t))\boldsymbol{x}_1(t,0) + \boldsymbol{a}_2(t_s(t)) \quad \cdots\cdots(58)$$

$$\begin{bmatrix} a_1(t_s(t)) \\ a_2(t_s(t)) \end{bmatrix} \triangleq \int_0^{t_s(t)} \exp(\boldsymbol{M}\tau)\,d\tau \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(59)$$

である。この式の導出は，線形微分方程式の解析解を用いて容易に導出できるので，導出の詳細な説明は省略する。

非線形方程式(51)式において，もし終端時刻$t_s(t)$が既知ならば，(51)式は最適条件の(42)~(45)式から導かれる(52)式，(53)式からなる線形方程式に帰着される。したがって，終端時刻$t_s(t)$の最適条件を表す(46)式から導かれた(54)式がMPC制御則の計算を難しくしていることがわかる。

それでは，この非線形方程式の解の計算を効率化するため，連続変形法の導入を行う。連続変形法では，一度求めた非線形方程式の解を用いて微小変化した非線形方程式の解を求めることができる。(51)式の非線形方程式は，制御対象の状態変化に基づいて微小変化していくので連続変形法の適用に適している。

すなわち，制御実行前に一度，非線形方程式を解いておけば，毎時刻に非線形方程式を解く必要がなく，連続的に変化する制御対象の状態の変化に応じて非線形方程式の解を追跡していくことができる。

それでは，連続変形法による解の導出が具体的にどのようになるか示す。

非線形方程式(51)式の条件を平衡点とする安定な微分方程式として次式を与える。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) = -\zeta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{x}_1(t,0)) \quad \cdots\cdots(60)$$

この微分方程式の解は，非線形方程式(51)式の解を満足するような解軌道を与える。ここで，$\zeta>0$である。

この微分方程式から，非線形方程式(51)式の解に関する微分方程式を導出する。(60)式から，

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{F}_U^{-1}\left(-\zeta\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_{x_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}_1(t,0)\right) \quad \cdots\cdots(61)$$

となる。このとき，$\boldsymbol{F}$をそれぞれ$\boldsymbol{U}$および$\boldsymbol{x}_1$で偏微分した$\boldsymbol{F}_U$と$\boldsymbol{F}_{x_1}$を求める。やや煩雑であるが陽に解くことができ，次のように求められる。

$$\boldsymbol{F}_U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_4(t_s(t)) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{M}_2(t_s(t)) & -\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2(t_s(t)) & 0 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(62)$$

$$\boldsymbol{F}_{x_1} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}_1(t_s(t)) + \boldsymbol{M}_3(t_s(t)) \\ \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1(t_s(t)) \\ 2\boldsymbol{x}_1(t,0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{\lambda}(t,0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(63)$$

ここで，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} &\triangleq \begin{bmatrix} -\boldsymbol{K} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \exp(\boldsymbol{M}t_s(t)) \\ &\quad \times \left\{ \boldsymbol{M}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t,0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t,0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right\} \quad \cdots\cdots(64) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{X}_3 \triangleq -\frac{1}{2r_1}\boldsymbol{\lambda}(t,0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{x}(t,0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \quad \cdots\cdots(65)$$

となる。すなわち，(51)式の微分方程式の右辺が$\boldsymbol{U}$および$\boldsymbol{x}_1$で計算でき，実時間の進行に伴って$\boldsymbol{U}$の値が更新される。したがって，$\boldsymbol{\lambda}(t, 0)$が求められるので，(50)式より，求めるMPC制御則が得られる。

5. 数値例

ここでは，提案法の有効性を数値例により示す。なお，システムパラメータ(32)~(36)式は先行研究[5]と同じもの

を用いたので，ここでの記述は省略する。シミュレーションは，先行研究と同様に(29)~(31)式で与えられたPWAモデルに対して行う。制御目的は，ルーパ角度を水平方向$\theta=0[°]$からパスライン$\theta=10[°]$を経由して定常部の動作点である$\theta=20[°]$まで立ち上げる制御を行うことである。このとき，ルーパがパスラインを超えて，圧延材と接触したときの張力変動をできるかぎり定常状態の動作点$\sigma_n=\sigma_c=1.0^6[\mathrm{kg}/(\mathrm{m})^2]$から変動させないことを目的とする。なお，ここで，Nモードの重み行列$\boldsymbol{Q}_1$とr_1は，

$$\boldsymbol{Q}_1=\mathrm{diag}\,[100,\ 10000,\ 0.001],\quad r_1=0.0001$$

と与えられているとする。また，Cモードの重み行列$\boldsymbol{Q}$と$\boldsymbol{R}$は，

$$\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}\,[100,\ 10000,\ 0.001,\ 1000,\ 1],$$

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}\,[0.001,\ 0.001]$$

と与えられているとする。

なお，シミュレーションでは，外乱が加わった場合でも妥当な制御則が求められることを確認するため，外乱を加えた場合と外乱を加えなかった場合のシミュレーションを両方行った。なお，外乱はルーパトルクにブレーキをかける一定外乱とする。ここではオンライン計算に問題がないことを確認することが主目的なので，外乱の影響がわかりやすくなるように大きめの外乱を加えた。

Fig. 3より，提案法は期待どおり，ルーパの圧延材への接触による圧延材の張力の変動が接触時に大きく変動しているものの約1秒後には回復している様子がわかる。このことは，外乱が加わった場合にも同様の応答が実現されている。

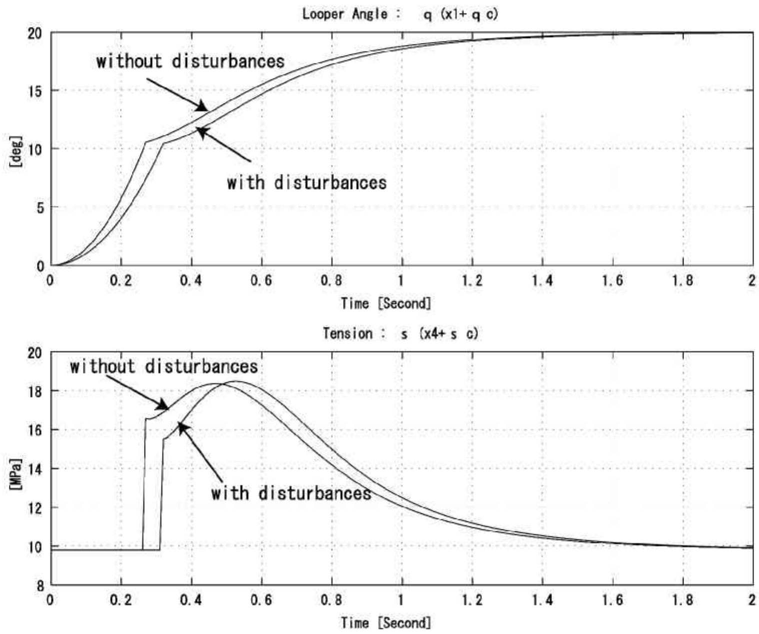

Fig. 3. Looper angle, interstand tension by the proposed MPC.

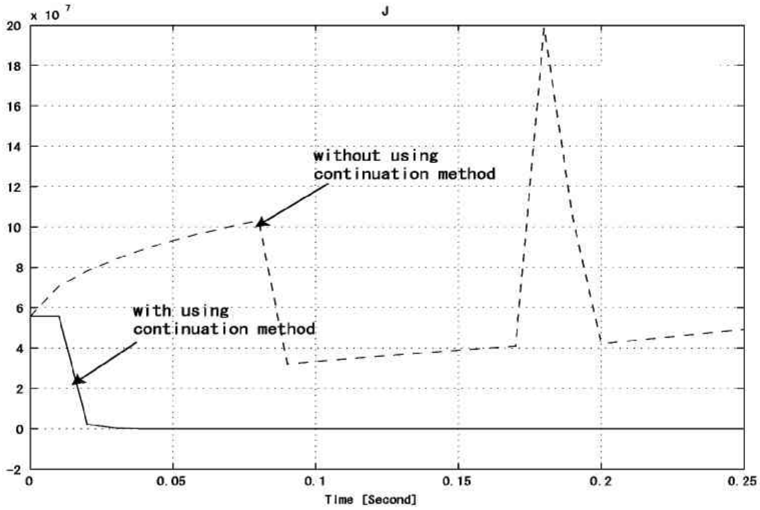

Fig. 4. The norm of nonlinear function F without using a continuation method (dashed line) and with using the continuation method (solid line).

さらに，このシミュレーションを行ったときのNモードにおける制御則導出のための計算時間は，1.1 [ms]であった。これに対し先行研究では，平均で100 [ms]計算時間がかかった。以上のことから，提案法の有効性が確認できる。

なお，シミュレーションは，Workstation Astrike Windows XP Preinstallation Model, Xeon (TM) CPU 3.06 GHz 1.00 GB RAM, Matlab Ver 7.1.0.246 (R14).で行った。

さらに，Fig. 4では，非線形方程式の解の精度を非線形方程式を毎回解く方法と連続変形法によって解を求める方法を比較した。Fig. 4の横軸は，Nモードの動作中の時刻を表し縦軸は，得られた解をもとの非線形方程式に代入することによって得られる誤差ノルムを表している。これより，解の精度も連続変形法のほうが優れていることがわかる。なお，非線形方程式の誤差ノルムが大きな値になっているが，非線形方程式そのものに10^7程度の大きな値が含まれており，さらに，(54)式のモード切替え時刻の最適条件の非線形性が強く，非線形方程式のパラメータと同程度の誤差が生じているためである。

6. おわりに

本論文では，最適なモード切替え時刻を求めるための探索計算を回避するため，モード切替え時刻の最適条件を導入する方法を与えた。具体的には，モード切替え時刻に相当する非接触モードの有限時間最適レギュレータ問題における終端時刻の最適条件を与え，その条件式から直接最適なモード切替え時刻を求められるようにした。また，その最適条件件の解の導出における計算量を軽減するため，連続変形法を適用することも行った。本研究の有効性は数値シミュレーションで確認され，制御則導出のための計算量の軽減が十分に達成されていることを確認した。

本研究と同様に，張力・ルーパ系のスタートアップ制御をオンライン実装可能なレベルまで計算時間の短縮を行う手法としてパラメトリック最適化手法を用いる手法が提案されている[6]。そこでは，テーブル参照型の制御則を事前に計算することによって，オンライン計算を回避する手法である。本研究では，オンラインでの計算量の軽減を行っているが，オフラインでの計算を有効に利用しているとはいえない。したがって，両者の利点を生かした研究が興味深いと考えられる。今後の課題としたい。

本研究の一部は日本鉄鋼協会「オンライン最適化技術を核とした次世代鉄鋼プロセス制御」を通して行われた。記して謝意を表する。

文　献

1) K.Asano, K.Yamamoto, T.Kawase and N.Nomura: *Control. Eng. Pract.*, **8** (1999), 337.
2) H.Imanari, Y.Morimatsu, K.Sekiguchi, H.Ezure, R.Matuoka, A.Tokuda, and H.Otobe: *IEEE Trans. Ind. Appl.*, **3** (1997).
3) Y.Seki, K.Sekiguchi, Y.Anbe, K.Fukushima, Y.Tsuji, and S.Ueno: *IEEE Trans. Ind. Appl.*, **27**-1 (1991).
4) Y.Kotera and F.Watanabe: *Proc. of IFAC 8th World Cong.*, **18** (1981), 1.
5) J.Imura, A.Kojima, S.Masuda, K.Tsuda and K.Asano: *Tetsu-to-Hagané*, **90** (2004), 925.
6) N.Morooka and A.Kojima: *Tetsu-to-Hagané*, **93** (2007), 525.
7) 加藤寛一郎：東京大学出版(1988).