日本機械学会論文集(C編)
73巻731号(2007-7)

論文 No. 06-1191

ポイントセンサ群による波動フィルタを基調とした柔軟はり自由端におけるフィードバック型波動制御に関する研究*
(基本特性の理論的検証)

岩本宏之*1, 田中信雄*2

Active Wave Feedback Control at a Free End of a Flexible Beam Using a Wave Filter Constructed with Point Sensors
(Theoretical Verification of Basic Properties)

Hiroyuki IWAMOTO*3 and Nobuo TANAKA

*3 Department of Aerospace Engineering, Tokyo Metropolitan University,
6-6 Asahigaoka, Hino-shi, Tokyo, 191-0065 Japan

This paper deals with the feedback wave control of a flexible beam using the wave filter constructed with four point sensors. The objective of this paper is to theoretically lay out the active wave control at free end of the beam which is independent of the disturbance positions. Firstly, the transfer matrix method and wave filtering method are extended to the Laplace domain. Next, based on the relation between the incident and reflected wave vectors at a free end, the control laws and characteristic equation of the control system are derived. Moreover, the control effects are presented from a viewpoint of a numerical analysis. It is found that the proposed method can eliminate the designated wave even if a disturbance acts around the control point. Finally, the stability of the control system is clarified by using root loci, showing that all poles are close to the critical damping.

Key Words: Vibration, Flexural Wave, Flexible Beam, Active Wave Control, Wave Filter

1. 緒言

これまでに，分布定数系柔軟構造物の振動制御問題を取り扱った報告は相当数に上るが，その主流はモード制御法[(1),(2)]に基礎を置くものであった．しかしながら，当該手法においてはスピルオーバ現象が問題となり，これを回避しようとすると，必要となるセンサ・アクチュエータの個数は，対象とする振動モードの数の2～3倍となることが指摘されている[(2)]．したがって，制御対象が大型宇宙構造物のように，狭帯域に多数の振動モードを有する場合，その適用には限界がある．このような問題に対する有効な制振手法としてDVFB(Direct Velocity Feedback)法[(3)]と波動制御法[(4)～(10)]が挙げられる．

DVFB法の特徴は高い安定余裕を持ち，全ての振動モードにダンピングを付加できる点にある．しかしながら，当該手法はそれぞれの周波数において最適なフィードバックゲインが存在することが経験的に知られており，広帯域における十分な振動抑制には至らない．これに対し，波動制御法は構造物中を伝播する波動を抑制することにより，従来手法では実現し得ない制御効果を得ることが可能である．特に，田中らは，振動モードの励起因子である反射波を完全に除去することで，全ての振動モードを不活性化させるアクティブ・シンク法[(7)]を提案し，その優位性を立証している．

著者らはこれまでに，波動フィルタ[(10)]を用いることにより，波動振幅信号を基調としたフィードバック型波動制御法[(8),(9)]を提案し，その基本特性を理論的に検証した．その概要図を図1に示す．当該手法の従来手法に対する利点としては，制御則が境界条件や外乱点の位置に依存しないことが挙げられる．特に，フィー

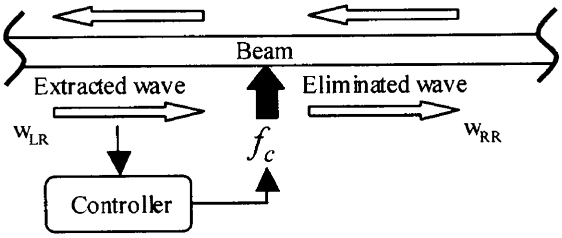

Fig. 1 Schematic diagram of a conventional active wave control system using a wave filter

* 原稿受付 2006年12月6日．
*1 正員，首都大学東京システムデザイン学部(〒191-0065 日野市旭が丘6-6)．
*2 正員，フェロー，首都大学東京システムデザイン学部．
E-mail : hiwamoto@cc.tmit.ac.jp

ドバック制御の特性に鑑みると，外乱に関する情報は一切必要ないことがその利点であるので，この点が改善された意義は大きい．しかしながら，図1より明らかなように，除去する進行波成分の上流に波動フィルタを設置せねばならず，当該手法を柔軟はりの自由端に適用することは出来ない．

そこで，本論文では制御点を自由端に設置した場合を対象に，そこに流入する波動成分を波動フィルタによってセンシングし，その信号をフィードバックすることで，外乱の位置によらず常に反射波吸収制御を達成する手法を提案する．まず，本論文はラプラス領域において伝達マトリクスを誘導することから始める．次に，4つのポイントセンサを用いた波動フィルタの構成式を明らかにし，当該フィルタによって得られた波動振幅をフィードバック信号とすることで，外乱の位置に依存しない制御則の導出を行う．さらに，数値解析により，制御効果を明らかにするとともに，根軌跡を用いることで，制御系の安定性を明らかにする．

2. はりの記述

波動制御法においては，波動の観点から振動現象について考察する必要があるため，はりの進行波解を基調とした伝達マトリクスが用いられる．しかし，これまでの伝達マトリクス法は時間依存項を $e^{j\omega t}$ とおくことで，変数分離を行い，波動解を導出していた(7)～(10)．しかし，数値解析の際に根軌跡を計算するには，ラプラス変数 s によって特性方程式を記述しなくてはならない．そこで，本論文では，従来の伝達マトリクス法をラプラス領域に拡張することから始める．まず，任意の境界条件を有する柔軟はりに，外乱力 $f(x,t)$ が作用する場合，オイラー・ベルヌーイはりの運動方程式は次のように表される．

$$EI\frac{\partial^4 \xi(x,t)}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t) \tag{1}$$

ここで，E, I, ξ, x, t, ρ, A は，各々縦弾性係数，断面二次モーメント，曲げ振動の変位，はりの左端からの距離，時間，密度，断面積を表す．次に，ラプラス領域における波動解を導出するため，式(1)の斉次方程式を考え，それを時間に関してラプラス変換すると(初期条件は零とおく)，次式を得る．

$$\frac{\partial^4 \bar{\xi}(x,s)}{\partial x^4}-\kappa^4 s^2 \bar{\xi}(x,s)=0 \tag{2}$$

ただし，κ は以下のように定義される．

$$\kappa^4=-\rho A/EI \tag{3}$$

次に，はりの座標系を図2のようにとると(11)，式(2)の一般解は次のように求まる．

$$-\bar{\xi}(x,s)=c_1 e^{-\kappa\sqrt{s}x}+c_2 e^{j\kappa\sqrt{s}x}+c_3 e^{\kappa\sqrt{s}x}+c_4 e^{-j\kappa\sqrt{s}x} \tag{4}$$

ただし，j, c_1, c_2, c_3, c_4 はそれぞれ虚数単位，進行波振幅，要素の左側から減衰するニア・フィールドの振幅，後退波振幅，はりの要素の右側から減衰するニア・フィールドの振幅を表す．なお，これ以降はラプラス変数の関数であることの記述は省略する．

次に，振動変位が求まると，材料力学の公式により傾き角 θ，曲げモーメント M，せん断力 Q が決定され，これらを用いることにより，はりの任意点 x における状態ベクトル $\mathbf{z}$ が次のように定義される．

$$\mathbf{z}(x)=\begin{pmatrix}-\bar{\xi}(x) & \bar{\theta}(x) & \bar{M}(x)/EI & \bar{Q}(x)/EI\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

ただし，$^{\mathrm{T}}$ は転置を表す．ここで，状態ベクトル $\mathbf{z}$ はさらに次のように展開される．

$$\mathbf{z}(x)=\mathbf{KD}(x)\mathbf{c} \tag{6}$$

ただし，

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -\kappa\sqrt{s} & j\kappa\sqrt{s} & \kappa\sqrt{s} & -j\kappa\sqrt{s}\\ \kappa^2 s & -\kappa^2 s & \kappa^2 s & -\kappa^2 s\\ -\kappa^3 s & -j\kappa^3 s\sqrt{s} & \kappa^3 s\sqrt{s} & j\kappa^3 s\sqrt{s}\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{D}(x)=\begin{bmatrix}e^{-\kappa\sqrt{s}x} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{j\kappa\sqrt{s}x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\kappa\sqrt{s}x} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-j\kappa\sqrt{s}x}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

次に，図2に示すように，長さ r のはり部材を考え，その左端の x 座標を便宜的に原点とする．さらに，境界条件を $x=0$ で $\mathbf{z}(0)=\mathbf{z}_{i-1}$，$x=r$ で $\mathbf{z}(r)=\mathbf{z}_i$ とおくと，式(6)より，次式を得る．

$$\mathbf{z}_{i-1}=\mathbf{KD}(0)\mathbf{c}=\mathbf{Kc} \tag{10}$$

$$\mathbf{z}_i=\mathbf{KD}(r)\mathbf{c} \tag{11}$$

すると，式(10)および(11)より，次の関係を得る．

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_i&=\mathbf{KD}(r)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{z}_{i-1}\\&=\mathbf{T}(r)\mathbf{z}_{i-1}\end{aligned} \tag{12}$$

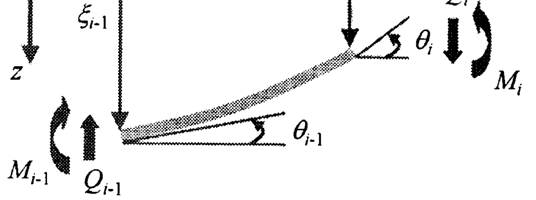

Fig. 2 Coordinate system of an Euler-Bernoulli beam

ただし，$\mathbf{T}$は状態ベクトルの伝達マトリックスを表し，次のように定義される．

$$\mathbf{T}(r)=\begin{bmatrix} t_1 & t_4 & t_3 & t_2 \\ \kappa^4 s^2 t_2 & t_1 & t_4 & t_3 \\ \kappa^4 s^2 t_3 & \kappa^4 s^2 t_2 & t_1 & t_4 \\ \kappa^4 s^2 t_4 & \kappa^4 s^2 t_3 & \kappa^4 s^2 t_2 & t_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

ただし，

$$t_1=(\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r})/4 \tag{14}$$

$$t_2=(-\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}r}-\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r})/4\kappa^3 s\sqrt{s} \tag{15}$$

$$t_3=(\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}r}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}r}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r})/4\kappa^2 s \tag{16}$$

$$t_4=(-\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}r}-\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}r}+\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}r})/4\kappa\sqrt{s} \tag{17}$$

次に，式(6)より，波動ベクトル$\mathbf{w}$が以下のように定義される．

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(x)&=\mathbf{D}(x)\mathbf{c}\\ &=(c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}x}\quad c_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}x}\quad c_3\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}x}\quad c_4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}x})^{\mathrm{T}}\\ &=(w_1(x)\quad w_2(x)\quad w_3(x)\quad w_4(x))^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{18}$$

状態ベクトルの場合と同様に，波動ベクトルについても基礎要素に対する境界条件を適用すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_i&=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T}(r)\mathbf{K}\mathbf{w}_{i-1}\\ &=\mathbf{D}(r)\mathbf{w}_{i-1}\end{aligned} \tag{19}$$

上式より明らかなように，マトリクス$\mathbf{D}$は波動ベクトルにおける伝達マトリクスとなる．

次に，図3に示すように，境界条件が自由・任意の柔軟はりに対して，フィードバック制御力f_cがはりの自由端に，外乱力f_dがはりの任意点に作用するものとし，それぞれの境界をはりの左端から節点0，1，2とする．この場合，はりの状態方程式は次のように記述される．

$$\mathbf{z}_2=\mathbf{T}_{20}(\mathbf{z}_0+\mathbf{f}_c)+\mathbf{T}_{21}\mathbf{f}_d \tag{20}$$

ただし，$\mathbf{f}_c$, $\mathbf{f}_d$は制御力および外乱力の作用ベクトルを表し，それぞれ次のように定義される．

$$\mathbf{f}_c=[0\quad 0\quad 0\quad f_c/EI]^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

$$\mathbf{f}_d=[0\quad 0\quad 0\quad f_d/EI]^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

次に，はりの右端（節点2）における任意の境界条件は，式(5)で示される4つの状態量の内2つを零とする事で与えられる．そこで，はり右端のi,j番目の状態

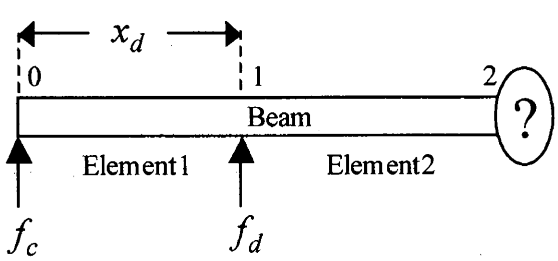

Fig. 3 Beam model with disturbance force and control force

変数を零とすると，式は次のように展開される．

$$0_i=-{}_{20}t_{i1}\bar{\xi}_0+{}_{20}t_{i2}\bar{\theta}_0+{}_{20}t_{i4}f_c/EI+{}_{21}t_{i4}f_d/EI \tag{23}$$

$$0_j=-{}_{20}t_{j1}\bar{\xi}_0+{}_{20}t_{j2}\bar{\theta}_0+{}_{20}t_{j4}f_c/EI+{}_{21}t_{j4}f_d/EI \tag{24}$$

ここで，0_iはi番目のベクトル要素が零であることを意味し，${}_{ij}t_{kl}$は伝達マトリックス$\mathbf{T}_{ij}$のk行l列要素を表す．すると，式(23)および(24)より，自由端（節点0）での非零状態量は次のように求まる．

$$-\bar{\xi}_0=-\frac{1}{EI\Delta}(\alpha_{11}f_c+\alpha_{12}f_d) \tag{25}$$

$$\bar{\theta}_0=-\frac{1}{EI\Delta}(\alpha_{21}f_c+\alpha_{22}f_d) \tag{26}$$

ただし，

$$\Delta={}_{20}t_{j1}\,{}_{20}t_{i2}-{}_{20}t_{i1}\,{}_{20}t_{j2} \tag{27}$$

$$\alpha_{11}={}_{20}t_{j2}\,{}_{20}t_{i4}-{}_{20}t_{i2}\,{}_{20}t_{j4} \tag{28}$$

$$\alpha_{12}={}_{20}t_{j2}\,{}_{21}t_{i4}-{}_{20}t_{i2}\,{}_{21}t_{j4} \tag{29}$$

$$\alpha_{21}={}_{20}t_{i1}\,{}_{20}t_{j4}-{}_{20}t_{j1}\,{}_{20}t_{i4} \tag{30}$$

$$\alpha_{22}={}_{20}t_{i1}\,{}_{21}t_{j4}-{}_{20}t_{j1}\,{}_{21}t_{i4} \tag{31}$$

式(25)，(26)により初期状態ベクトル$\mathbf{z}_0$が求まったので，任意点における状態ベクトルは，初期状態ベクトル，伝達マトリックスおよび各作用ベクトルを用いて表すことができる．

3．ポイントセンサ群による波動フィルタ

本章では，既報において提案したポイントセンサ群による波動フィルタリング法[10]をラプラス領域において展開する．当該手法では，ニア・フィールドの影響を考慮する場合，4個以上のセンサが必要となる．本論文では，理論展開の簡素化のため，4つのポイントセンサによる波動フィルタの構成式を導出する．

まず，はりに4個の変位センサを等間隔に設置した場合を考える．この際，各ポイントセンサの座標を左側からx_{s1}，x_{s2}，x_{s3}，x_{s4}とする．すると，各センサの出力は次のように表される．

$$-\bar{\xi}(x_{s1})=c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}x_{s1}}+c_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}x_{s1}}+c_3\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}x_{s1}}+c_4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}x_{s1}} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}-\bar{\xi}(x_{s2})=&c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+L_s)}+c_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+L_s)}\\ &+c_3\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+L_s)}+c_4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+L_s)}\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}-\bar{\xi}(x_{s3})=&c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+2L_s)}+c_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+2L_s)}\\ &+c_3\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+2L_s)}+c_4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+2L_s)}\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}-\bar{\xi}(x_{s4})=&c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+3L_s)}+c_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+3L_s)}\\ &+c_3\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+3L_s)}+c_4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}(x_{s1}+3L_s)}\end{aligned} \tag{35}$$

ただし，L_sはセンサ間隔である．上式群をマトリックス形式にまとめると次のようになる．

$$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{L}\mathbf{w}(x_{s1}) \tag{36}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\xi}=\left(-\bar{\xi}(x_{s1})\quad -\bar{\xi}(x_{s2})\quad -\bar{\xi}(x_{s3})\quad -\bar{\xi}(x_{s4})\right)^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{bmatrix} \tag{38}$$

さらに，

$$a=\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}L_s} \tag{39}$$

$$b=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}L_s} \tag{40}$$

$$c=\mathrm{e}^{\kappa\sqrt{s}L_s} \tag{41}$$

$$d=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}L_s} \tag{42}$$

式(36)より，波動フィルタの構成式が次のように求まる．

$$\mathbf{w}(x_1)=\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\xi} \tag{43}$$

ただし，

$$\mathbf{L}^{-1}=\begin{bmatrix}-c/M_1 & (bc+cd+1)/M_1 & -(b+c+d)/M_1 & 1/M_1\\ -d/M_2 & (cd+ad+1)/M_2 & -(a+c+d)/M_2 & 1/M_2\\ -a/M_3 & (ab+ad+1)/M_3 & -(a+b+d)/M_3 & 1/M_3\\ -b/M_4 & (ab+bc+1)/M_4 & -(a+b+c)/M_4 & 1/M_4\end{bmatrix} \tag{44}$$

ただし，

$$M_1=(a-b)(a-c)(a-d) \tag{45}$$

$$M_2=(b-a)(b-c)(b-d) \tag{46}$$

$$M_3=(c-a)(c-b)(c-d) \tag{47}$$

$$M_4=(d-a)(d-b)(d-c) \tag{48}$$

この場合，波動フィルタの概要図は図4のようになる．図より明らかなように，センサの数と同数のサブフィルタが波動フィルタを構成する．例えば，$x=x_1$における進行波をセンシングする場合，サブフィルタF1, F2, F3，F4の周波数特性はそれぞれ$-c/M_1$，$(bc+cd+1)/M_1$，$-(b+c+d)/M_1$，$1/M_1$となる．

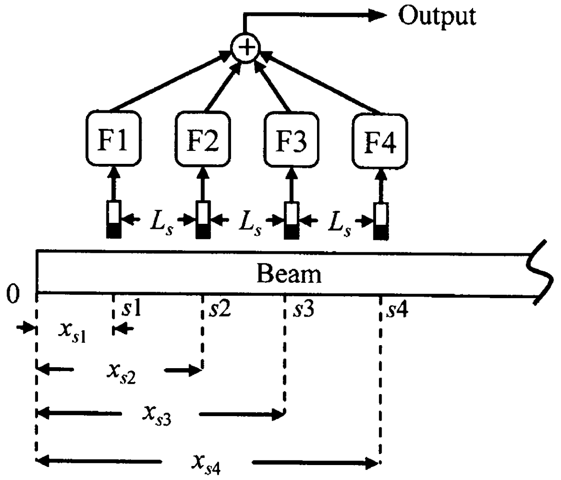

Fig. 4 Schematic diagram of a wave filter using four point sensors

4. 制御則と特性方程式の導出

本章では，制御則と特性方程式の導出を行う．制御点（節点0）における状態ベクトルと波動ベクトルの関係を考えると，式(6)および(18)より次のようになる．

$$\begin{bmatrix}\mathbf{w}_0^+\\ \mathbf{w}_0^-\end{bmatrix}=\mathbf{K}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_{0s}\\ \mathbf{f}_{cs}\end{bmatrix} \tag{49}$$

ただし，

$$\mathbf{w}_0^+=\left[w_1(0)\quad w_2(0)\right]^{\mathrm{T}} \tag{50}$$

$$\mathbf{w}_0^-=\left[w_3(0)\quad w_4(0)\right]^{\mathrm{T}} \tag{51}$$

$$\mathbf{z}_{0s}=\left[-\bar{\xi}_0\quad \bar{\theta}_0\right]^{\mathrm{T}} \tag{52}$$

$$\mathbf{f}_{cs}=\left[0\quad f_c/EI\right]^{\mathrm{T}} \tag{53}$$

ここで，$\mathbf{w}_0^+$と$\mathbf{w}_0^-$はそれぞれ反射波ベクトルおよび入射波ベクトルと呼ぶこととする．次に，式(49)を展開し，反射波ベクトルについて解くと次式を得る．

$$\mathbf{w}_0^+=\begin{bmatrix}-\mathrm{j} & 1+\mathrm{j}\\ 1-\mathrm{j} & \mathrm{j}\end{bmatrix}\mathbf{w}_0^- +\begin{bmatrix}(1+\mathrm{j})/2\kappa^2 s & (-1+\mathrm{j})/2\kappa^3 s\sqrt{s}\\ (-1+\mathrm{j})/2\kappa^2 s & (-1+\mathrm{j})/2\kappa^3 s\sqrt{s}\end{bmatrix}\mathbf{f}_{cs} \tag{54}$$

上式は，自由端に入射波，外乱より減衰するニア・フィールド，制御力f_cの3つの要素が入力されることによって，反射波および自由端より減衰するニア・フィールドが出力されることを示している．ここで，自由端における変位フィードバックを考えると，制御力は次のように定義される．

$$f_c=EI\left[G\quad 0\right]\mathbf{z}_{0s} \tag{55}$$

ただし，Gはフィードバック制御則を表す．上式を式(54)に代入し，入射波ベクトルと反射波ベクトルの関係性を表すと次のようになる．

$$\mathbf{w}_0^+=\begin{bmatrix}-\mathrm{j}(\kappa^3 s\sqrt{s}-\mathrm{j}G-G)/\Delta_s & (1+\mathrm{j})\kappa^3 s\sqrt{s}/\Delta_s\\ (1-\mathrm{j})\kappa^3 s\sqrt{s}/\Delta_s & \mathrm{j}(\kappa^3 s\sqrt{s}+\mathrm{j}G+G)/\Delta_s\end{bmatrix}\mathbf{w}_0^- \tag{56}$$

ただし，

$$\Delta_s=\kappa^3 s\sqrt{s}-\mathrm{j}G+G \tag{57}$$

式(56)より明らかなように，フィードバック制御則Gは入射波から反射波への伝達関数，あるいは外乱より減衰するニア・フィールドから自由端より減衰するニア・フィールドへの伝達関数を零とおくことしかできない．このことは，変位情報を基調としたフィード

バック制御の場合，制御点近傍の情報のみで完全に反射波を除去することは不可能であることを示している．したがって，反射波を完全に除去するには，外乱より減衰するニア・フィールドが制御点に与える影響を考慮する必要がある．すなわち，従来のフィードバック型アクティブ・シンク法[7]が制御則の導出に外乱の位置情報を必要とする理由がここにある．

そこで，前章にて提示した波動フィルタを用いることで，制御点における入射波ベクトル成分そのものをセンシングし，入射波と外乱より減衰するニア・フィールドのそれぞれに制御則を与えることを考える．この場合，制御力は次のように定義される．

$$f_c = EI\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix}\mathbf{w}_0^- \tag{58}$$

ただし，G_1，G_2はそれぞれ入射波および外乱より減衰するニア・フィールドの信号に対するフィードバック制御則を表す．次に，式(43)を式(58)に代入すると次式を得る．

$$\mathbf{w}_0^+ = \begin{bmatrix} -\mathrm{j}+(\mathrm{j}-1)G_1/2\kappa^3 s\sqrt{s} & 1+\mathrm{j}+(\mathrm{j}-1)G_2/2\kappa^3 s\sqrt{s} \\ 1-\mathrm{j}+(\mathrm{j}-1)G_1/2\kappa^3 s\sqrt{s} & \mathrm{j}+(\mathrm{j}-1)G_2/2\kappa^3 s\sqrt{s} \end{bmatrix}\mathbf{w}_0^- \tag{59}$$

ここで，上式右辺にある行列の1行1列成分と1行2列成分を零とおくことで（すなわち，$w_1(0)=0$），フィードバック波動制御則が次のように求まる．

$$G_1 = (1-\mathrm{j})\kappa^3 s\sqrt{s} \tag{60}$$

$$G_2 = 2\mathrm{j}\kappa^3 s\sqrt{s} \tag{61}$$

式(60)および(61)より明らかなように，当該制御則は制御対象の物理特性のみによって決定され，外乱情報およびはり右端での境界条件に依存しないことがわかる．この場合の制御系の概要図を図5に示す．

次に，制御系の特性方程式を導出する．まず，式(58)に式(43)を代入すると次のようになる．

$$\begin{aligned} f_c = EI\Big\{ & G_1\left(-F_{31}\bar{\xi}(x_1) - F_{32}\bar{\xi}(x_2) - F_{33}\bar{\xi}(x_3) - F_{34}\bar{\xi}(x_4)\right) \\ & + G_2\left(-F_{41}\bar{\xi}(x_1) - F_{42}\bar{\xi}(x_2) - F_{43}\bar{\xi}(x_3) - F_{44}\bar{\xi}(x_4)\right)\Big\} \end{aligned} \tag{62}$$

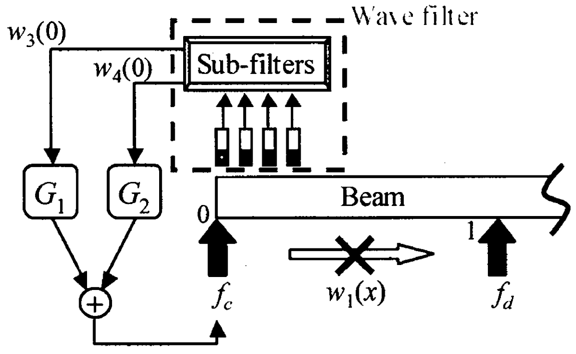

Fig. 5 Schematic diagram of the proposed feedback wave control system using a wave filter

ただし，$F_{m,n}$は行列$\boldsymbol{L}^{-1}$のm行n列の成分を表す．次に，各センサ出力を伝達マトリクス法によって展開し，それぞれを式(62)に代入すると次式が得られる．

$$f_c = EI\left(-\gamma_1\bar{\xi}_0 + \gamma_2\bar{\theta}_0\right) \tag{63}$$

ただし，

$$\gamma_1 = \left(G_1\beta_1 + G_2\beta_4\right)/\left(1 - G_1\beta_3 - G_2\beta_6\right) \tag{64}$$

$$\gamma_2 = \left(G_1\beta_2 + G_2\beta_5\right)/\left(1 - G_1\beta_3 - G_2\beta_6\right) \tag{65}$$

$$\beta_1 = F_{31\,s10}t_{11} + F_{32\,s20}t_{11} + F_{33\,s30}t_{11} + F_{34\,s40}t_{11} \tag{66}$$

$$\beta_2 = F_{31\,s10}t_{12} + F_{32\,s20}t_{12} + F_{33\,s30}t_{12} + F_{34\,s40}t_{12} \tag{67}$$

$$\beta_3 = F_{31\,s10}t_{14} + F_{32\,s20}t_{14} + F_{33\,s30}t_{14} + F_{34\,s40}t_{14} \tag{68}$$

$$\beta_4 = F_{41\,s10}t_{11} + F_{42\,s20}t_{11} + F_{43\,s30}t_{11} + F_{44\,s40}t_{11} \tag{69}$$

$$\beta_5 = F_{41\,s10}t_{12} + F_{42\,s20}t_{12} + F_{43\,s30}t_{12} + F_{44\,s40}t_{12} \tag{70}$$

$$\beta_6 = F_{41\,s10}t_{14} + F_{42\,s20}t_{14} + F_{43\,s30}t_{14} + F_{44\,s40}t_{14} \tag{71}$$

ここで，各センサ点を左側からそれぞれ節点$s1$, $s2$, $s3$, $s4$とした．ただし，当該手法においては制御点（自由端）における入射波ベクトル成分が必要なので$s1=0$となる，次に，式(25)を式(26)に代入すると，初期状態ベクトル$\mathbf{z}_0$の非零要素$\mathbf{z}_{0s}$が次のように求まる．

$$\mathbf{z}_{0s} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}f_d/EI \tag{72}$$

ただし，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta+\alpha_{11}\gamma_1 & \alpha_{21}\gamma_2 \\ \alpha_{21}\gamma_1 & \Delta+\alpha_{21}\gamma_2 \end{bmatrix} \tag{73}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{74}$$

すると，$\mathbf{A}$の行列式は次のようになる．

$$\det\mathbf{A} = \Delta^2 + \Delta\left(\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2\right) \tag{75}$$

ここで，非制御（G_1=G_2=0，すなわちγ_1=γ_2=0）の場合，上式はΔで約分されることから，制御系の特性方程式が次のように決定される．

$$\Delta + \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 = 0 \tag{76}$$

5. 数値解析

本章では，表1に示されるはりの諸元を用いて波動制御系の数値解析を行う．なお，根軌跡以外の数値解析においては，モード周波数におけるオーバーフローを避けるため，損失係数0.001を与えて計算を行う．また，境界条件は自由・固定とし，波動フィルタにおけるセンサ間隔はL_s=0.05m, 外乱力はf_d=0.0001Nとする．

Table 1 Design parameters of a beam

Total length	Thickness	Width
1.105 m	1.5 mm	4.5cm
Young's modulus	Density	Material
7.4×10^{10} N/m^2	2770 kg/m^3	Duralumin

5・1 波動制御法の制御効果 まず，柔軟はりの変位波動包絡線と各波動成分の分布の観点から，1次モード周波数(f=1.026Hz)を対象に，制御効果の評価を行う．既報[10]において示したように，自由・固定はりの1次モードにおけるニア・フィールド成分の割合が最低でも35.4%以上であり，提案した手法の有用性を吟味するのに都合が良い．

図6は，外乱がx_d=1mの点に作用した場合の，非制御時および制御時の波動包絡線と各波動成分の分布図を示している．非制御の場合，当然のことながら，1次の振動モードが励起され，その最大変位は0.6mmとなっている．また，各波動成分の分布に注目すると，分布がすべて滑らかであることがわかる．伝達マトリクス法の観点からすると，柔軟はりにおける波動分布の式は，外力によって分断された各要素部材によって異なる(図3参照)．しかし，この場合は，1つの振動モードのみが支配的になっているため，外乱点において波動分布は必ず滑らかになる．

次に，制御時の場合について考える．波動包絡線に注目すると，その最大変位は0.38μmとなっており，非制御時の0.06%にまで抑制されている．これは，波動制御法によって，半無限構造物の特性が実現された結果である．実際，波動成分の分布に注目すると，制御領域（Element1）において，反射波成分が完全に零になっているのがわかる．ここで，Element2において，波動成分の値が波動包絡線と比べて非常に大きい点に留意されたい．これは，当該分布図が絶対値をプロットしていることに起因しており，実際の振動現象においては，それぞれの波動成分の間に位相差が存在するため，これらの振幅がダイレクトにはりの変位分布に寄与することはない．

次に，外乱が制御点付近に作用する場合を考える．図7は，外乱がx_d=0.3mの点に作用した場合の波動包絡線と各波動成分の分布図を示している．非制御の場合に注目すると，図6と同様の変位・波動分布を示しているのがわかる．ただし，外乱点が自由端に近づいたことで振動振幅が大きくなっており，その最大変位は24.9mmとなっている．これに対し，波動制御を適用した場合，最大変位は12.8μmであり，非制御時の0.05%にまで抑制されている．ここで注目すべき点が2つある．その第一点は，制御点において外乱より減衰するニア・フィールドの影響が比較的大きいのにもかかわらず，完全に反射波が除去されていることである．第5章において既に述べたとおり，従来のフィードバック型アクティブ・シンク法[7]は制御則の導出に，外乱より減衰するニア・フィールドに関する情報（すなわち，外乱の位置）を必要とする．したがって，ニア・フィールドの影響が設計段階において与えられた値を逸脱すると，完全な反射波吸収は達成されない．これに対し，本論文で提案した手法は波動フィルタリング法によって，制御点におけるニア・フィールドの振幅を個別に得ているため，その影響がいかに大きくとも，完全な反射波吸収が阻害されることはない．

注目すべき第二点は，図6の場合と比較すると，外乱点が移動したことによって制御領域の大きさが変化したにもかかわらず，両者の制御効果にほとんど差が

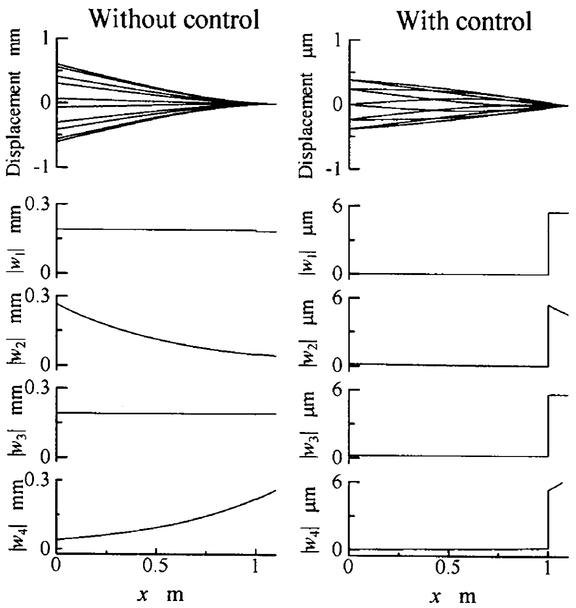

Fig. 6 Envelope of displacement distribution and waves distribution at the first modal frequency with and without control when a disturbance is acting at x_d=1m

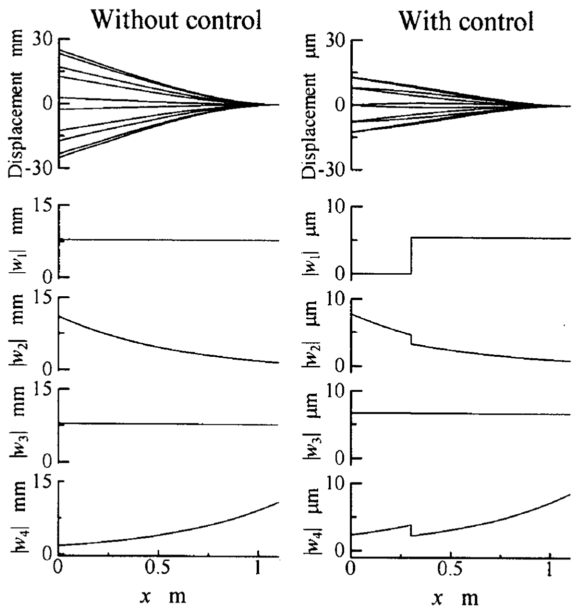

Fig. 7 Envelope of displacement distribution and waves distribution at the first modal frequency with and without control when a disturbance is acting at x_d=0.3m

現れないことである．これは，波動制御法が構造物中を伝播する波動の除去を目的とした空間的な制御であろうとも，フィードバック制御である以上，極の位置は必ず変化し，その結果振動が抑制されることを意味している．したがって，最大変位の抑制率は制御領域の大きさに対してほとんど影響を受けない．

次に，周波数特性の観点から，DVFB法と波動制御法の比較を行う．外乱がx_d=1mの点に作用した場合の，制御時および非制御時におけるDVFB系（制御点はx_c=0m）の駆動点コンプライアンスが図8(a)および(b)に，波動制御系のコンプライアンスが図8(c)に示されている．ただし，図中のG_vは速度フィードバックゲインを示す．DVFB系においてG_v=1kg/sの場合，全てのモードにダンピングが付加されているものの，高次のモードになるほど制御効果が劣化しているのがわかる．これに対し，フィードバックゲインをG_v=10kg/sにあげた場合，非制御時のモード周波数では振動が抑制されるが，それよりやや低い周波数で新たな共振ピークが発生しようとしているのがわかる．これは，フィードバックゲインを上げすぎると，制御力が単純支持の境界条件を生成するように振る舞い，制御点において振動エネルギが消散しなくなることを示している．

上記の問題を解決するのが波動制御法である．図8(c)に注目すると，非制御時に存在するピークとノッチが制御時には消滅し，ゲイン特性が漸近線に収束しているのがわかる．これは反射波吸収制御の典型的な制御効果であり，制御対象に半無限構造物の特性を与えたことで，全ての振動モードが不活性化されていることを示している．

5・2　制御系の安定性　フィードフォワード制御とは異なり，フィードバック制御においては安定性をチェックする必要がある．そこで，式(76)に示される特性方程式から3次までの極の特性を明らかにすることで，その安定性を評価する．なお，ここで得られる結果は4次以上の極に関しても当てはまることをここに付記しておく．

波動制御則G_1およびG_2に0から1まで0.1きざみの係数Cを乗じた場合の根軌跡を図9に示す．ここで注意すべきは，軌跡が実軸に対して非対称となっている点である．従来の制御理論においては，制御則はラプラス変数sの実関数で定義されることから，特性方程式の係数は実数となり，制御系の極は複素共役の形をとる．したがって，その根軌跡は必然的に実軸に対して対称となる．しかし，波動制御の場合，その制御則は虚数単位を陽に含む形で表現される．よって，特性方程式の係数は複素数となり，その根軌跡は実軸に対して対称とはならない．

周波数が正の場合に注目すると，C=0（非制御状態）からC=1（完全制御状態）間での状態において，全ての極は複素平面の左半平面に存在している．また，C=1

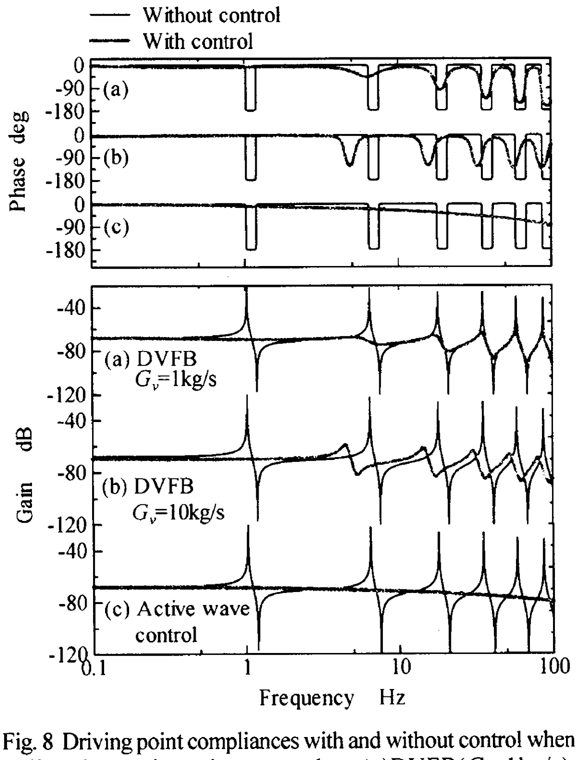

Fig. 8 Driving point compliances with and without control when a disturbance is acting at x_d=1m: (a)DVFB(G_v=1kg/s), (b)DVFB(G_v=10kg/s), (c)Active wave control

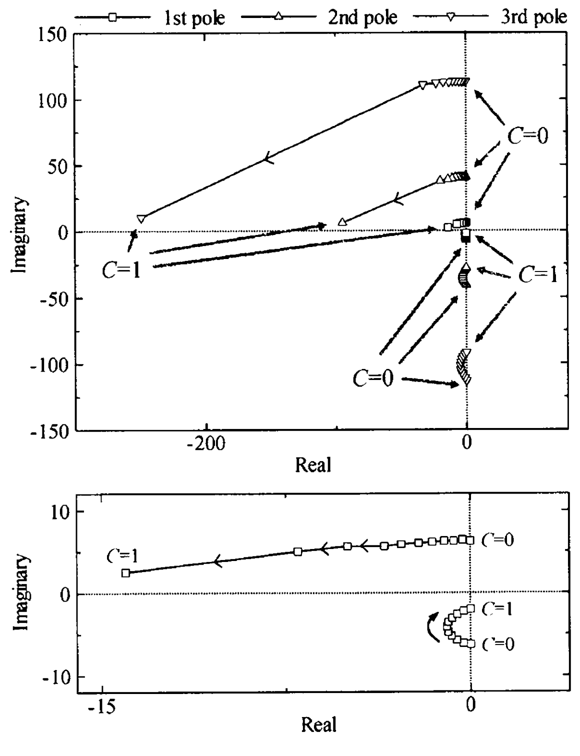

Fig. 9 Root loci of the first three poles when the coefficient C varies from 0 to 1 with an interval of 0.1

のときに全ての極が実軸近傍に移動し，臨界減衰に非常に近い状態になっている．これは，前節において示した波動制御の高い制御効果の根拠となるものである．これに対し，下半平面にある極の場合（周波数が負の場合），C=0からC=0.5までは減衰が増加するが，それ以降は減少し，完全制御状態では全ての極は虚軸上に移動する．これは周波数が正の場合と非常に対照的である．その理由は以下のように説明できる．

まず，柔軟はりが周波数ω_nの正弦波によって加振されている場合（すなわち$s=\mathrm{j}\omega_n$），除去の対称となる反射波は次のように表される．

$$w_1(x)=c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}x}=c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{\mathrm{j}\omega_n}x} \tag{77}$$

ここで，加振周波数が$-\omega_n$に変化した場合，上式は次のように変化する．

$$w_1(x)=c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{s}x}=c_1\mathrm{e}^{-\kappa\sqrt{-\mathrm{j}\omega_n}x}=c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa\sqrt{s}x} \tag{78}$$

上式より明らかなように，周波数の符号が反転するのに伴い，反射波の項がニア・フィールドに転じているのがわかる．したがって，周波数が負の場合，反射波吸収制御はニア・フィールドを除去する制御となり，物理的な特性が大きく異なることになる．

実際に波動制御系を構築する際，複素非有理関数で表現される波動制御則（波動フィルタのサブフィルタも含む）をアナログまたはディジタルフィルタなどによって近似的に実現しなければならない(4)~(7)．したがって，実際の制御系においては，図9のような特性は現れず，極の位置は実軸に対して必ず対称となる．換言すれば，提案した手法の安定性を数値解析において吟味する場合，周波数が正の場合のみを考慮しなければならない．したがって，図9より明らかなように，全ての極が臨界減衰に近い特性を有していることから，当該制御系の安定性は非常に高いと結論される．

6. 結言

本論文は，柔軟はりを対象として，波動フィルタを基調とした自由端での波動制御法を提案し，その基本特性を明らかにした．本論文で得られた成果を要約すると以下のようになる．

1．従来の伝達マトリクス法と波動フィルタリング法をラプラス領域において展開するとともに，制御点（自由端）における入射波ベクトル成分をフィードバック信号とすることで，外乱の位置に依存しない波動制御則を導出した．

2．波動制御法は波動の除去を目的とした空間的な制御であるが，フィードバック制御である以上，極の位置は必ず変化し，その結果振動が抑制される．したがって，最大変位の抑制率は制御領域の大きさに対してほとんど影響を受けない．

3．従来のDVFB法が全ての共振ピークを抑制できないのに対し，波動制御法は反射波を吸収することで全振動モードを不活性化するので，全ての共振ピークは漸近線に収束する．

4．波動制御の場合，その制御則は虚数単位を陽に含む形で表現されるため，特性方程式の係数は複素数となり，その根軌跡は実軸に対して対称とはならない．

5．波動制御適用時の極の位置は臨界減衰に非常に近いことを明らかにし，制御系の安定性が高いことを示した．この際，周波数の符号が反転すると制御系の物理的な意味が異なることから，正の周波数における極の位置のみを検証する必要がある．

最後に，本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金若手研究（スタートアップ）課題番号18860062によるものである．ここに記して謝意を表する．

文献

(1) Meirovitch, I. and Baruh, H., "The Implementation of Modal Filters for Control of Structure", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.8, No.6 (1985), pp.707-716.
(2) Tanaka, N. et al., "Distributed Parameter Modal Sensors", *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.62, No.596 (1996), pp.1418-1425.
(3) Balas, M.J., "Direct Velocity Feedback Control of large space structure", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.2, No.3 (1979), pp.252-253.
(4) von Flotow, A.H. and Shafer, B.E., "Wave Absorbing Controllers for a Flexible Beam", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.9, No.6 (1986), pp.673-680.
(5) MacMartin, D.G. and Hall, S.R., "Structural Control Experiments Using an H ∞ Power Flow Approach", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.148, No.2 (1991), pp.223-241.
(6) Mace, B.R. and Jones, R.W., "Feedback Control of Flexural Waves in Beams", *Journal of Structural Control*, Vol.3, (1996), pp.89-98.
(7) Tanaka, N. and Kikushima, Y., "Optimal Vibration Feedback Control of an Euler-Bernoulli Beam: Toward realization of the active sink method", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol.121, No.2 (1999), pp.174-182.
(8) Iwamoto, H. and Tanaka, N., "Active Wave Feedback Control of a Flexible Beam Using Wave Filter (Theoretical verification of basic properties)", *Transaction of the Japan Society of Mechanical Eingineers, Series C*, Vol.70, No.689 (2004), pp.46-53.
(9) Iwamoto, H. and Tanaka, N., "Active Wave Feedback Control of a Flexible Beam Using Wave Amplitudes", *Proc. of the Asia-Pacific Vibration Conference 2005*, Vol.1, (2005), pp.306-311.
(10) Iwamoto, H. and Tanaka, N., "Wave Filtering Method for a Flexible beam (Design of a wave filter using point sensors)", *Transaction of the Japan Society of Mechanical Eingineers, Series C*, Vol.68, No.675 (2002), pp3246-3253.
(11) Pestel, E.C., and Leckie, F.A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, (1963), McGraw-Hill Book Co.