

研究速報

CIP 法を用いた電磁界解析における異なる媒質の境界の取扱い

大久保 寛^{†a)}(正員) 竹内 伸直[†]

A Treatment of the Boundary between the Different Media in the Electromagnetic Analysis Using the CIP Method

Kan OKUBO^{†a)}, Member and
Nobunao TAKEUCHI[†], Nonmember

[†] 秋田県立大学システム科学技術学部, 本荘市

Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University, 84-4 Tsuchiya-Ebinokuchi, Honjo-shi, 015-0055 Japan

a) E-mail: kanne@akita-pu.ac.jp

あらまし 本論文では CIP 法による電磁界解析を行う際の異なる媒質の境界の取り扱いについて検討を行っている。CIP 法による移流項の解析手順に、境界面での電磁界の境界条件を満足する取扱いを加えることで精度の高い計算が行うことができることを明らかにしている。

キーワード CIP 法, 境界, 電磁界, 数値解析, FDTD 法

1. まえがき

電磁界の時間領域数値解析法の開発は、近年、工学的に非常に注目されている [1]~[6]。CIP 法は、従来の解析法のもつ欠点である数値分散を解決する手法として近年提案されているものである [7]~[10]。この CIP 法の特徴は格子点上の値に加えて、格子点上の微分値も伝搬させる点にある。筆者らは CIP 法による電磁界解析法を初めて三次元の電磁界解析に適用しその有効性を示した [11]。

しかし、文献 [11] を含め、これまで CIP 法を用いた電磁界解析における異なる媒質間の境界の取り扱いについては検討が行われていない。実際の解析対象では自由空間だけではなく、導体や誘電体などの媒質が存在する空間が考えられ、それらの空間に対する CIP 法解析を検討する必要がある。そこで本論文では CIP 法を用いた電磁界解析における異なる媒質間の境界の取り扱いについて検討を行う。

2. CIP 法を用いた電磁界数値解析

式 (1) 及び式 (2) にファラデーの法則及びアンペールの法則を示す。

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2)$$

ただし、 σ 、 μ 及び ϵ はそれぞれ導電率、透磁率及び誘電率とする。ここで、以下の展開を分かりやすくするために、 $\vec{H} = (H_x, 0, 0)$ 及び $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ とし、 z 方向のみの一次元解析と仮定する。また、ここでは、媒質は無損失として、 $\sigma = 0$ とすると、式 (1) 及び式 (2) は以下の式 (3) 及び式 (4) のように表すことができる。

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

更に、これらの 2 式から、和と差をとることで、式 (5) 及び式 (6) を得る。

$$\frac{\partial(E_y - ZH_x)}{\partial t} + v \frac{\partial(E_y - ZH_x)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(E_y + ZH_x)}{\partial t} - v \frac{\partial(E_y + ZH_x)}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

ここで、 $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 、 $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ とする。更に、微分値についても、式 (7) 及び式 (8) のように表すことができる。

$$\frac{\partial(E'_y - ZH'_x)}{\partial t} + v \frac{\partial(E'_y - ZH'_x)}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(E'_y + ZH'_x)}{\partial t} - v \frac{\partial(E'_y + ZH'_x)}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

ここで、 $E'_y = \frac{\partial E_y}{\partial z}$ 及び $H'_x = \frac{\partial H_x}{\partial z}$ とする。式 (5)、式 (6)、式 (7) 及び式 (8) は $E_y \pm ZH_x$ 及び $E'_y \pm ZH'_x$ の移流方程式であるから、これらの 4 式に CIP 法を適用することによって z 方向の電磁界の伝搬を解くことができる [7], [11]。

3. 異なる境界の取扱い

図 1 に異なる媒質の境界を含む解析領域を示す。同図より $U = E_y - ZH_x$ 、 $V = E_y + ZH_x$ 、 $P = E'_y - ZH'_x$ 及び $Q = E'_y + ZH'_x$ とおくと、 $+z$ 方向へ U 及び P が移流し、 $-z$ 方向へ V 及び Q が移流する。 v は格子点間の媒質の誘電率及び透磁率より導出され、例えば、 U_{k-2}^n を計算する場合は $v_1 = 1/\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$ となり、 V_{k+2}^n を計算する場合は $v_2 = 1/\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$ となる。ここで、 $X_{k_0}^n$ は $z = k_0$ における n ステップ目の X の値を示している。

次に、境界面についての取扱いを検討する。図 1 に示すように、媒質 1 (μ_1, ϵ_1) と媒質 2 (μ_2, ϵ_2) の境界を $z = k$ とする。 $z = k$ での電磁界の境界条件は、

$$E_{y1} = E_{y2}, \quad (9)$$

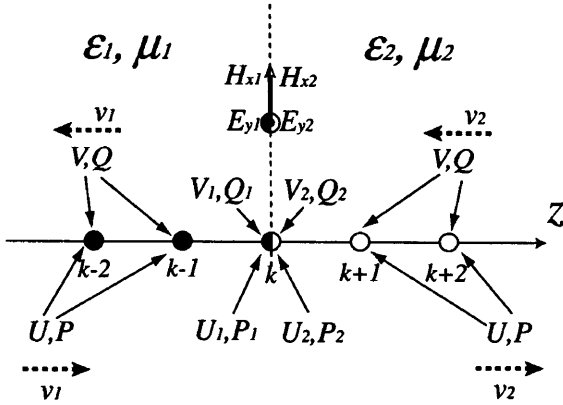


図 1 CIP 法解析における境界の取扱いの模式図
Fig. 1 One-dimensional grid model of the calculation by the CIP method including a boundary.

$$H_{x1} = H_{x2} \quad (10)$$

となる。これより、

$$U_1^n = E_{y1}^n - Z_1 H_{x1}^n \quad (11)$$

$$= \frac{U_2^n + V_2^n}{2} - Z_1 \frac{-U_2^n + V_2^n}{2Z_2}, \quad (12)$$

$$V_2^n = E_{y2}^n + Z_2 H_{x2}^n \quad (13)$$

$$= \frac{U_1^n + V_1^n}{2} + Z_2 \frac{-U_1^n + V_1^n}{2Z_1}. \quad (14)$$

ここで、 $Z_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ 及び $Z_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$ である。更に、式 (12) 及び式 (14) より、

$$U_2^n = T_{12}U_1^n + \Gamma_{21}V_2^n, \quad (15)$$

$$V_1^n = \Gamma_{12}U_1^n + T_{21}V_2^n \quad (16)$$

と求めることができる。ただし、 $T_{12,21}$ 及び $\Gamma_{12,21}$ はそれぞれ以下の式で与えられる透過係数及び反射係数である。

$$T_{12} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (17)$$

$$\Gamma_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (18)$$

$$T_{21} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (19)$$

$$\Gamma_{21} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (20)$$

また、微分値 P 及び Q についても同様に、

$$P_2^n = T_{12}P_1^n + \Gamma_{21}Q_2^n, \quad (21)$$

$$Q_1^n = \Gamma_{12}P_1^n + T_{21}Q_2^n \quad (22)$$

と求めることができる。

CIP 法による移流方程式を解く場合、境界ではこれらのことを考慮する。すなわち、境界 $z = k$ の隣の格子点上では U_{k+1}^{n+1} を求める場合、 $U_{2,k}^n$ 及び U_{k+1}^n を用い、また V_{k-1}^{n+1} を求める場合、 $V_{1,k}^n$ 及び V_{k-1}^n を用いる。例として以下に U_{k+1}^{n+1} 及び P_{k+1}^{n+1} の計算式を示す。

$$U_{k+1}^{n+1} = a_{k+1}\xi^3 + b_{k+1}\xi^2 + P_{k+1}^n\xi + U_{k+1}^n, \quad (23)$$

$$P_{k+1}^{n+1} = 3a_{k+1}\xi^2 + 2b_{k+1}\xi + P_{k+1}^n \quad (24)$$

となる。ただし、

$$a_{k+1} = \frac{P_{k+1}^n + P_{2,k}^n}{(-\Delta z)^2} + \frac{2(U_{k+1}^n - U_{2,k}^n)}{(-\Delta z)^3}, \quad (25)$$

$$b_{k+1} = \frac{3(U_{2,k}^n - U_{k+1}^n)}{(-\Delta z)^2} - \frac{2P_{k+1}^n + P_{2,k}^n}{-\Delta z} \quad (26)$$

である。ここで、 Δz 及び Δt はそれぞれ格子サイズ及び時間刻みとする。また、 $\xi = -v\Delta t$ としている。

4. 計算結果

異なる媒質を含んだ解析例として、前章の定式化を用いて計算した結果を示す。伝搬は z 方向のみの一次元とし、格子サイズは $\Delta z = 0.002\text{m}$ 、時間刻みは $\Delta t = 3.0 \times 10^{-12}\text{s}$ とする。また、 z 方向の格子数は 200 とする。媒質の境界は $z = 0.28\text{m}$ とし、 $z > 0.28\text{m}$ では $\epsilon_r = 9$ 及び $\mu_r = 1$ とし、 $z \leq 0.28\text{m}$ は真空 ($\epsilon_r, \mu_r = 1$) としている。ただし、 ϵ_r 及び μ_r はそれぞれ格子点間の媒質中の比誘電率及び比透磁率とする。

初期電界として $t = 0$ において $E_y = e^{\frac{1}{10}(\frac{z-0.18}{2})^2}$ ($0.14 < z < 0.22$) を与えた場合の $t = 5.1 \times 10^{-10}\text{s}$ 及び $t = 8.7 \times 10^{-10}\text{s}$ における電界の分布をそれぞれ図 2 及び図 3 に示す。また、同図には CIP 法による計算と同じ条件 (セルサイズ $\Delta z = 0.002\text{m}$ 、時間刻み $\Delta t = 3.0 \times 10^{-12}\text{s}$) で FDTD 法を用いて計算した結果及び厳密解による結果も重ねて示す。ただし、FDTD 法の計算では境界面の誘電率は両媒質の平均値としている [4]。

図 2 及び図 3 より、FDTD 法では誘電体中で数値振動が発生しているのに対して、CIP 法では数値振動はほとんど発生せず厳密解とほぼ一致し、非常に正確に電磁界伝搬を解くことができている。更に、CIP 法と FDTD 法の差異を定量的に評価するため、図 3 に対して

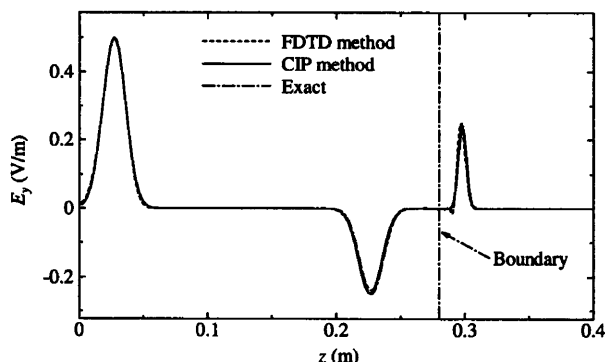


図2 電界 E_y の z 方向分布 ($t = 5.1 \times 10^{-10}$ s)
Fig.2 z distribution of E_y . ($t = 5.1 \times 10^{-10}$ s)

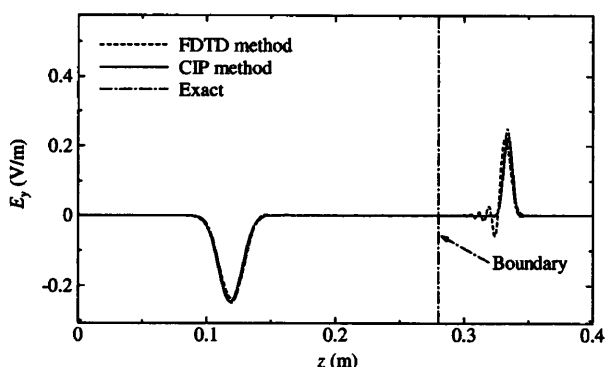


図3 電界 E_y の z 方向分布 ($t = 8.7 \times 10^{-10}$ s)
Fig.3 z distribution of E_y . ($t = 8.7 \times 10^{-10}$ s)

$$S = \frac{\sum_{n=0}^{200} (E_y(n\Delta z) - E_y^{(ex.)}(n\Delta z))^2}{\sum_{n=0}^{200} E_y^{(ex.)}(n\Delta z)^2} \quad (27)$$

を計算する。ここで、 $E_y^{(ex.)}$ は厳密解による電界である。CIP法及びFDTD法によって計算した電界を式(27)の E_y に代入し S を求めた結果、 $S^{(CIP)} = 0.00961$ 及び $S^{(FDTD)} = 0.0367$ となり、CIP法の計算結果の方が厳密解との差が小さいことが分かった。FDTD法を用いる場合、セルサイズを十分に細かくすることで数値振動を低減することは可能であるが、同じ条件で計算した場合はCIP法を用いる方が精度が高いといえる[11]。

これより、CIP法を用いて異なる媒質間の境界を含んだ計算を行う場合、境界面による移流方程式を3.のように取り扱うことで精度の良い電磁界解析が可能

となることが明らかになった。また、本論文では z 方向のみの一次元の電磁界伝搬に関して検討を行ったが、本論文で報告した方法は多次元の計算にも応用することが可能である。本論文では媒質の導電率については扱っていないが、式(1)及び式(2)を解く際に移流項と非移流項に分離することで解析することが可能である[10],[11]。

5. むすび

本論文では、CIP法によって異なる媒質の境界を含む空間に対して電磁界解析を行う場合の境界の取扱いについて検討を行った。その結果、CIP法による移流計算に境界面での境界条件を組み込むことで非常に精度の高い解析が可能であることを明らかにした。

今後は多次元の電磁界解析に本論文の結果を応用する予定である。

文 献

- [1] 電気学会, 計算電磁気学, 培風館, 2003.
- [2] 電子情報通信学会, 電磁波問題の基礎解析法, コロナ社, 1987.
- [3] C. Christopoulos (著), 加川幸雄 (訳), TLM 伝送線路行列法入門, 培風館, 1999.
- [4] 宇野 亨, FDTD法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社, 1998.
- [5] K.S. Kunz and R.J. Luebbers, The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics, CRC Press, 1993.
- [6] 大久保寛, 佐藤慎也, 竹内伸直, “FDTD法を用いた落雷放射電磁界信号のピーク時間に対する大地の影響の検討,” 信学論 (B), vol. J88-B, no.4, pp.837-840, April 2005.
- [7] T. Yabe, F. Xiao, and T. Utsumi, “The constrained interpolation profile method for multiphase analysis,” J. Computational Physics, vol.169, pp.556-593, 2001.
- [8] T. Yabe and T. Aoki, “A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solvers,” Computer Physics Communications, vol.66, pp.219-232, 1991.
- [9] T. Aoki, “Multi-dimensional advection of CIP (Cubic-Interpolated Propagation) Scheme,” Computational Fluid Dynamics Journal, vol.4, no.3, pp.279-291, Oct. 1995.
- [10] 矢部 孝, 内海隆行, 尾形陽一, CIP法, 森北出版, 2003.
- [11] 大久保寛, 竹内伸直, “CIP法による線電流源から発生する電磁界の数値解析,” 信学技報, A-P2004-336, March 2005.

(平成 17 年 3 月 18 日受付, 4 月 14 日再受付)