理論地理学ノート，No. 11(1998)，1～8

都市人口に関する順位規模法則と対数正規分布モデルの整合性について

井　上　　　孝

I　はじめに

都市の人口規模別分布は，あらゆる国や地域においてほぼ安定均衡することが知られている．これらの分布パターンの記述を試みたモデルは，いずれも分布が安定的であることを前提としているが[1]，理論の視点の違いによって大きく二つに分けられる[2]．その一つは，都市の人口規模と順位の関係を検証しようとするものであり，順位規模法則 (rank-size rule) がその議論の中心となっている．もう一つは，都市の規模別分布そのもののパターンを探るものであり，おもに対数正規分布 (lognormal distribution) を用いて説明がなされてきた．

以上の二つのモデルのうち都市の順位規模法則は，ある範囲内に立地する都市の人口規模とその順位がパレート分布 (Pareto distribution) で表されることを意味する(鈴木，1980，pp.371-372)．パレート分布は，所得の不平等度を説明するために19世紀末期に Pareto が導入したものであり，これを用いたパレート分布モデルは所得分布を表すモデルとして著名である（山本ほか，1997，p. 378)．このモデルは，特に高所得者層に対して当てはまることが知られている．都市の人口規模とその順位は，パレート分布に従うならばそれぞれの対数に線形関係が生じる．この関係に初めて着目したのは Auerbach (1913) とされるが，法則として定式化したのは Zipf (1949) である（鈴木，1985，pp.55-60；森川，1990，pp.110-112；林，1991，pp.62-70)．後述するように，この法則は，適合度に多少の差異はあるものの多くの国や地域において成立することが検証されている．

これに対して，都市の人口規模別分布が対数正規分布によって表されるモデル，すなわち，都市人口の対数が正規分布に従うとする考えは，Gibrat (1931) によって初めて提示された（鈴木，1980, pp.389-390)．対数正規分布モデルは，パレート分布モデルが低所得者層に対して適合しにくい点を解消するために，Gibrat 自身が考案したものである．その後，この分布の応用に関する研究は，事業所の規模別分布や生物の個体分布など多様な現象について数多く試みられたが (Crow and Shimizu, 1988)，地域人口の分布については，後述する2，3の研究以外にほとんどみられない．

一方，これらの二つのモデル，すなわち，パレート分布モデル（順位規模法則）と対数正規分布モデルの関係に言及した研究もきわめて少ない．Beckmann (1958) は，この二つのモデルを都市の規模別分布に関する議論の出発点として位置づけたが，その関係については言及しなかった．Berry (1961) は，都市の規模別分布が「片側の切れた対数正規分布 (truncated lognormal distribution)」に従うときにパレート分布モデルが成立しうることを示唆した（鈴木，1980，pp.389-390)．篠崎 (1951) と Parr and Suzuki (1973) は，ある条件下において近似的に両者が整合することを示している．また，これらの研究に先立って Lotka (1941) は，パレート分布モデルが（対数正規分布から導かれるのではなく)，Pearson 型分布族の中のある特定の分布型から導かれると述べている[3]．

このように，パレート分布モデルと対数正規分布モデルは都市の規模別分布に関する基本モデルと考えられているにもかかわらず，両者の論理的対応関係については考察が十分でない．そこで本稿は，この二つのモデルが論理的に両立しうるのか否か，すなわち二つの理論の整合性を数学的に証明し，その関係について新しい知見を与えることを目的とする．

II　都市の規模別分布に関する二つのモデル

本章では，パレート分布モデルと対数正規分布

モデルの基本概念およびいくつかの研究成果を紹介する．

1．パレート分布モデル（順位規模法則）

Zipf (1949) により定式化されたパレート分布モデルは，以下のように表される．

$$p=kr^{-a} \tag{1}$$

ただし，p は順位が第 r 位の都市における人口規模であり，a と k は定数である．通常 k は首位都市 (primate city) の人口を意味する．ここで，(1)式の両辺に対数をとり $\log k=b$ とおけば，

$$\log p=-a\log r+b \tag{2}$$

となるので，前述のように，人口規模の対数 $\log p$ と順位の対数 $\log r$ は線形関係にあることがわかる．定数 a はその直線の傾きに相当し，地域内の人口の分散化が進むほど小さな値となる．Simon (1955) は，この法則が都市の規模別分布だけでなく，生態学，生物学，経済学などが扱う諸分布に当てはまることを指摘している．さらに，その後の地理学的研究によって，この法則は多くの国や地域において成立することが示された（Isard, 1956；Stewart, 1958；Berry and Garrison, 1958；Berry, 1961；Clark, 1967；高阪，1978；鈴木，1982；Suzuki, 1982；北川，1985；河邊ほか，1988；小島・幡谷編，1995）．

これらの研究の中で Berry and Garrison (1958) および Berry (1961) は，この法則の適合度に応じて国や地域の類型化を行なっている．Berry らは，このモデルをさまざまな国の都市人口データに当てはめ，適合度のよいパターンを rank-size 型，首位都市の人口が極端に大きいパターンを primate 型とした．

2．対数正規分布モデル

人口規模 p の対数 $q(=\log p)$ が平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ に従うとき，すなわち，q が次の確率密度関数を満たすとき，都市の人口規模別分布は対数正規分布となる．

$$g(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3}$$

このとき，人口規模 p の確率密度関数は次式で表される（Crow and Shimizu, 1988, pp. 2－3）．

$$f(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma p}\exp\left[-\frac{(\log p-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (p>0\text{ のとき}),$$
$$f(p)=0 \quad (p\leq 0\text{ のとき}) \tag{4}$$

対数正規分布は，$p>0$ の範囲において $f(p)>0$ となり事実上定義される．またこの分布は，正規分布とは異なりモードが平均よりも小さい．したがって，分布のピークが左側に片寄った，非対称のカーブを描く（Crow and Shimizu, 1988, pp. 1－12）．Berry (1961) は自らが主張した「片側の切れた対数正規分布」の関数形を示していないが，その確率密度関数を(4)式にならって表現すると，非負の定数 p_0 に対して，

$$f(p)=\frac{1}{p}\exp\left[-\frac{(\log p-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\Big/\int_{p_0}^{\infty}\frac{1}{p}\exp\left[-\frac{(\log p-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dp \quad (p\geq p_0\text{ のとき}),$$
$$f(p)=0 \quad (p<p_0\text{ のとき}) \tag{5}$$

となる[4]．定数 p_0 は関数を切断する位置を表わす．

Gibrat (1931) は，対数正規分布を実際にヨーロッパの大都市の人口に適用して理論の有効性を主張した．しかし，Gibrat 以降この分布は，鈴木 (1960a, 1960b, 1978) によって地域別の人口密度の値に応用されてはいるものの[5]，都市の規模別分布に適用された例は皆無に近い．なお，Gibrat (1931) は，都市人口がなぜ対数正規分布に従うのかについて理論的な検討も行なっている（鈴木，1985, pp.11-18）．

III　整合性の検証

本章は，パレート分布モデルと対数正規分布モデルの整合性について厳密な議論を試みる．

1．検証方法

一般に，モデル間の論理的対応関係としては次の三つの場合が想定できる．すなわち，①論理的に同等である，もしくは数学的に等値である，②論理的に矛盾する，もしくは互いに否定しあう関係にある，③少なくとも論理的に同等ではなく互いに否定しあう関係でもない，つまり①と②のい

ずれでもない[6]，の三つの場合が考えられる．このうち①と③の場合は，それが判明した時点で当面の目的である検証作業が終了するが，②の場合はさらなる考察が必要である．なぜなら，②の場合でも条件（たとえば，変数の範囲を限定するなどの条件）によっては三つのモデルの形を一致または近似させることが可能だからである．通常のモデル論では，こうした場合でも事実上整合しているモデルとして扱われる．

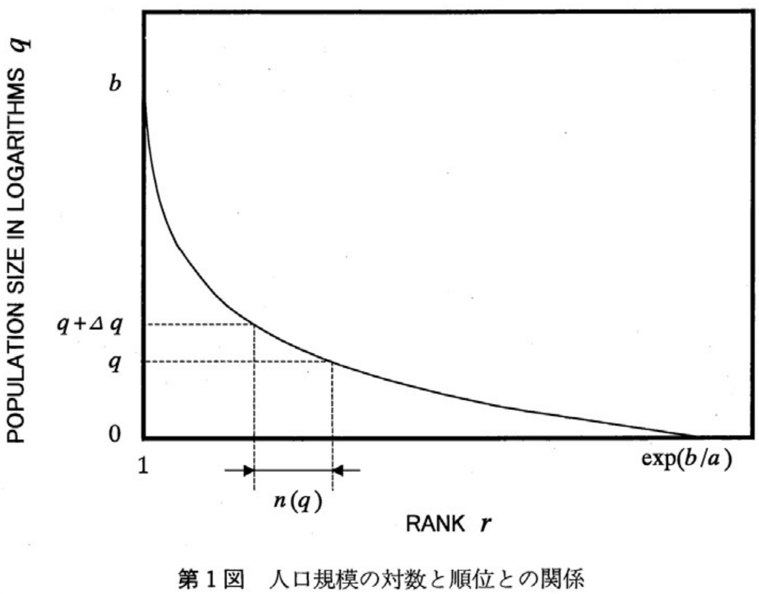
本稿では，上述したような広い意味での整合性を検証するために，一方のモデルにおける独立・従属変数のペアをもう一方のモデルのペアに組み替える．この方法は，具体的には，パレート分布モデルにおける順位（rank）—人口規模（population size）関係を，対数正規分布における人口規模—頻度（frequency）関係に変換するか，もしくは，その逆の変換を行なうことである．このうち，人口規模—頻度関係から順位—人口規模関係を導く手順は，前述した篠崎(1951)と Parr and Suzuki(1973)の研究で既に採用されている．そこで本稿は，これまで議論されていない，順位—規模関係から規模—頻度関係への変換を行なう．この変換手順は，(2)式に示したように線形関係（すなわち，順位—規模関係）から議論が始まるので数学的に扱いやすく，とくに代数的な考察が可能な点において有利である．これに対して，対数正規分布における規模—頻度関係から順位—規模関係を見出すためには，対数正規分布の積分が必要となるが，その解は特定の関数で表わすことができず近似計算で得るしかない[7]．したがって，この変換手順は解析的な考察しかできない点において不利と判断される．

かくして本章では，続く第2・3節において，順位—規模関係から規模—頻度関係への変換を行ない，モデル間の整合性を検証する．まず第2節では，規模—頻度関係を表す関数の増減を調べることによって，いわゆる論理の無矛盾性，すなわち，二つのモデルの関係が上記の①～③のどれに相当するかを判断する．次に第3節では，パレート分布モデルを規模—頻度関係を表わすモデルへ変形させることにより，より広い意味での整合関係について吟味を行なう．

2．関数の増減からみた整合性の検証

ここでは，順位—規模関係がパレート分布モデルに従うとき，人口規模の対数 $q(=\log p)$ の確率密度関数 $g(q)$ がどのような増減の型を示すかを考察し，それに基づいて整合性の検証を行なう．

まず変数 q を用いて(2)式を，



第1図　人口規模の対数と順位との関係

$$q=-a\log r+b \tag{6}$$

と変形する．このとき，人口規模の対数 q と順位 r の関係は第１図で表される．変数 q は非負の範囲で定義されるので，(6)式の定義域（すなわち，順位 r の変域）は $[1, \exp(b/a)]$ となる[8]．さらに，(6)式を順位 r について解くと，

$$r=\exp\left(\frac{b-q}{a}\right) \tag{7}$$

が得られる．ここで，Δq を十分に小さい正の定数とし，人口規模の対数が区間 $(q, q+\Delta q)$ に含まれるような都市の頻度（すなわち，都市の個数）を $n(q)$ とおくと（第１図），(7)式より，

$$n(q)=\exp\left(\frac{b-q}{a}\right)-\exp\left(\frac{b-q-\Delta q}{a}\right) \tag{8}$$

が導かれる[9]．したがって，変数 q 上の任意の２実数 $q_1, q_2(q_1<q_2)$，および，任意の正定数 Δq に対して，

$$\begin{aligned} n(q_2)-n(q_1)=&\exp(b/a)[\exp(-q_2/a)\\ &-\exp(-q_1/a)][1-\exp(-\Delta q/a)]<0 \end{aligned} \tag{9}$$

が成立する．

ここで，変数 q 上の，ある１組の実数 $q_1, q_2(q_1<q_2)$ に対して，確率密度関数 $g(q)$ が $g(q_1)<g(q_2)$ なる性質を有していると仮定する．このとき，不等式 $n(q_1)<n(q_2)$ を満たすある正定数 Δq が必ず存在するが，この不等式は(9)式と矛盾する．ゆえに，変数 q 上の任意の２実数 $q_1, q_2(q_1<q_2)$ について，

$$g(q_1)\geq g(q_2) \tag{10}$$

が成り立つ．(10)式は，変数 q の確率密度関数 $g(q)$ が単調減少関数であることを意味する．これに対して，正規分布（(3)式）が変数 q の単調減少関数でないことは明らかであり，ゆえに，変数 p は対数正規分布（(4)式）に従わない．したがって，パレート分布モデルと対数正規分布モデルの間に論理的な整合関係はないと判断できる．

なお，Berry (1961) が主張した「片側の切れた対数正規分布」((5)式)に関しては，多少の注意を要する．なぜなら，この分布は，切断の軸が対数正規分布（(4)式）のモード[10]の右側に位置する場合，すなわち，

$$p_0\geq\exp(\mu-\sigma^2) \tag{11}$$

が成り立つ場合に単調減少となり，整合性を有する可能性がでてくるからである．(11)式は，対数正規分布のカーブから，右側の減少する部分だけを抜き出すことを意味するので，これによって表わされる分布はもはや対数正規分布の特徴をもっているとは言い難い．しかし，この特殊な分布は，前述の Parr and Suzuki (1973) の研究とも関連があるので，次節において改めて議論する．

３．モデルの変形による整合性の検証

本節では，まず，パレート分布モデルから規模―頻度型モデルへの変形を行なう．すなわち，順位―規模関係がパレート分布モデルに従うときの確率密度関数 $g(q)$ の形を決定する．

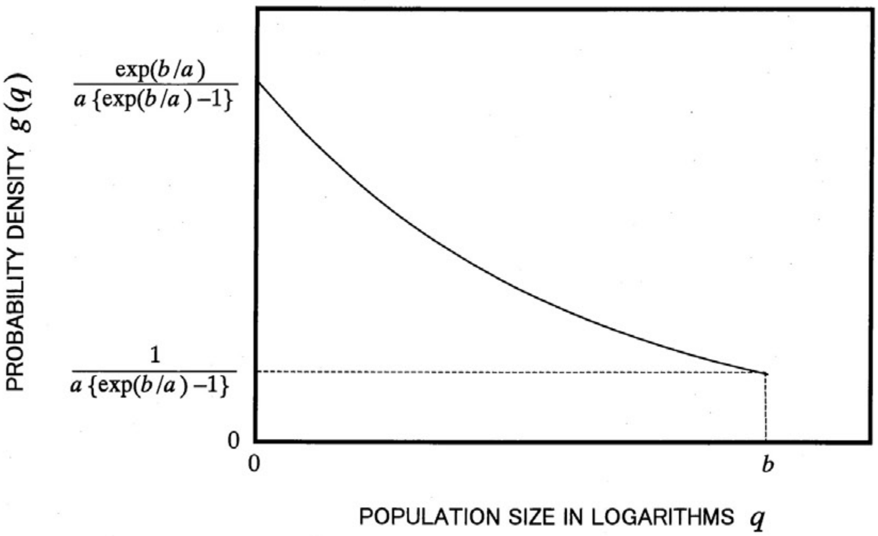
パレート分布モデルの対象となる全都市の個数は，(6)式の定義域の長さに相当すると考えられるので，$[\exp(b/a)-1]$ となる．このとき，この値に対する都市の頻度 $n(q)$（(8)式）の比率は，全都市の中から人口規模の対数が q より大きく $(q+\Delta q)$ より小さい都市を抜き出す確率に他ならない．ゆえに，Δq を限りなくゼロに近づけたときこの比率と $g(q)\Delta q$ は等しくなり，(8)式より，

$$\begin{aligned} g(q)&=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{n(q)}{[\exp(b/a)-1]\Delta q}\\ &=\frac{1}{\exp(b/a)-1}\lim_{\Delta q\to 0}\frac{1}{\Delta q}\left[\exp\left(\frac{b-q}{a}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\exp\left(\frac{b-q-\Delta q}{a}\right)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．当然ながら(12)式は，(6)式における変数 q の値域，すなわち $[0, b]$ の範囲で成り立つものであり，$g(q)$ はそれ以外の区間でゼロとなる．したがって，人口規模の対数 q の確率密度関数 $g(q)$ は，(12)式の極限値を求めることにより，以下のように定式化される．

$$\begin{aligned} &g(q)=\frac{\exp[(b-q)/a]}{a[\exp(b/a)-1]}\quad(0\leq q\leq b\text{ のとき}),\\ &g(q)=0\quad(q<0,\text{ または，}b<q\text{ のとき}) \end{aligned} \tag{13}$$

(13)式は，人口密度の対数 q が指数分布に従うことを意味し，第２図に示したように指数逓減型の



第2図　人口規模の対数の確率密度関数

カーブを描く．さらにこの事実は，変数 p が対数正規分布（(4)式）ばかりでなく，「片側の切れた対数正規分布」((5)式)にも従わないことを意味する．

変数 q の累積分布関数は(13)式を積分すれば得られるが，パレート分布モデルから直接導くこともできる．人口規模の対数が0より大きく q より小さい都市の数は，(7)式より $\{\exp(b/a)-\exp[(b-q)/a]\}$ で表されるので，この値の，全都市の個数に対する比率 $G(q)$ は，

$$G(q)=\frac{\exp(b/a)-\exp[(b-q)a]}{\exp(b/a)-1} \tag{14}$$

となる．累積分布関数はまさにこの比率 $G(q)$ と一致する．実際，$G(q)$ を q で微分すると(13)式が得られ，また，$G(0)=0$, $G(b)=1$ が成り立つ．

つづいて，指数分布((13)式)と正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ とを比較することによって，パレート分布モデルと対数正規分布モデルの，近似的な意味での整合性について検討する．指数分布は，第2図に示したように全域において単調減少であり，しかも，q が小さくなるほどその減少の幅が大きくなる．したがって，指数分布と正規分布とは，q が比較的小さい範囲において著しく異なる．ゆえに，近似的な意味においても，パレート分布モデルと対数正規分布モデルとは整合しない，つまり，前節で示した②の関係にあると結論づけられる．

以上の結論は，ある条件下で二つのモデルが近似するという，篠崎(1951)および Parr and Suzuki (1973) の主張と隔たりがある．そこで，なぜこのような一見異なる主張が現われるかについて以下で考察する．

Parr and Suzuki (1973) は，(3)式で表わされる正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の，$q \geq q_0$ (q_0 は任意の定数) となる部分のカーブがどの程度パレート分布に整合するかを，詳細な数値シミュレーションによって検証している．このシミュレーションでは，定数 q_0 にさまざまな値が与えられ，その結果，おおむね q_0 の値が大きくなるほど整合の程度がよくなることがわかった．言い換えれば，「片側の切れた対数正規分布」((5)式)は，切断の位置 p_0 が右側に移るほど，パレート分布により近似した分布を導くことになる．この結果は，本節で証明された「パレート分布から指数分布が得られる」ことと矛盾しない．なぜなら，正規分布から切り取られるカーブは，その切り取り区間が右側に移るほど指数分布のカーブに類似していくからである．また，この結果は，前節で示した「(11)式の条件下において(5)式がパレート分布と整合しうる」という予見に対する答えにもなっている．なお，篠崎(1951)は，証明を行なってはいないが，二つのモデルの

整合性について Parr and Suzuki (1973) とほぼ同様の主張をしている.

さらに,「片側の切れた対数正規分布」((5)式)において $p \geq p_0$ となる部分のカーブが大都市の分布を表すものとするならば,この部分はパレート分布に近似するので,次のような命題が導かれる.すなわち,「a)都市人口とその順位は一般に対数正規分布に従うが,b)大都市に限ればパレート分布に従う」と考えることができる.この命題は,第I章で紹介した,所得分布に関して得られている法則「所得分布は一般に対数正規分布に従うが,高所得者層に限るとパレート分布に従う」からも容易に推論できるが,二つのモデルの整合性について一つの答えを与えることは確かである.なお,この命題の前半部a)と後半部b)は互いに無矛盾であるが,論理的にはa)がb)を包含する形であり同等ではない.したがって,その論理関係は前節の分類では③となる.

最後に,前述の Lotka (1941) の主張を確認するために,(13)式から人口規模 p の確率密度関数 $f(p)$ を導く.この手続きは,確率密度関数 $g(q)$ に対して,$p=\exp(q)$ なる変数変換(ただし,$1 \leq p \leq \exp(b)$) を行なうことを意味する.このとき,一般に,$f(p)=g(\log p)/p$ が成り立つので,

$$f(p)=\frac{\exp(b/a)}{a[\exp(b/a)-1]}p^{-\frac{a+1}{a}}$$
$$(1 \leq p \leq \exp(b) \text{ のとき}),$$
$$f(p)=0$$
$$(p<1,\ \text{または},\ \exp(b)<p \text{ のとき}) \qquad (15)$$

が導かれる.ゆえに,人口規模 p の確率密度関数は,奇しくも(1)式と同形になりパレート分布に従うことになる.(15)式は,Pearson 型分布族の第6型(注3参照)の特別な場合($s=0$ の場合)とみなされるが,第6型のカーブがもつ性質を継承しているとは言い難い.したがって,Lotka の主張の確認にはさらなる議論を要するが,この問題については,本稿の主題からはずれるので稿を改めて論じたい.

IV 二つのモデルは両立しうるのか?
—むすびに代えて—

本稿は,都市の規模別分布に関する二つのモデル,すなわち,パレート分布モデル(順位規模法則)と対数正規分布モデルの整合性について検証を行なった.その結果,順位—規模関係がパレート分布モデルに従うとき,人口規模の対数に関する確率密度関数が指数分布((13)式)となることがわかった.これは,上記の二つのモデルが論理的にも近似的にも整合しないことを意味する.

ただし,Berry (1961) が主張した「片側の切れた対数正規分布」((5)式)については,その切断の位置 p_0 が右側に移動するほど,パレート分布により近似した分布を導くことがわかった.そして,この事実から,都市人口に関する命題「都市人口とその順位は一般に対数正規分布に従うが,大都市に限ればパレート分布に従う」を提示することができた.これは,本稿の主題に対して一つの解答を示した形となっている.しかし,この命題は,都市人口分布に固有の性質を考慮して打ち立てられたものではなく,所得分布に関する知見からの簡単なアナロジーに過ぎない.そこで本章では,都市人口分布をモデル化する際の,何らかの固有の問題によって不整合が生じると考え,この前提に基づく一試論を以下に示す.

筆者は,二つのモデルが整合しないのは,「都市人口」の意味に「自治体別人口」と「市街地(または集落)別人口」の2種類があるからではないかと考える.自治体別人口は,市町村界によって画定された範囲の人口であり,統計データとして掲載される都市人口は通常これをさす.これに対して市街地別人口は,一つの市街地あるいは集落を単位として市町村界とは無関係に定まる人口を意味する.二つのモデルが整合しないのは,「対数正規分布モデルが自治体別人口の分布に適合し,パレート分布モデルが市街地別人口の分布に適合する」からではないかと考えるのである.当然ながら,この仮説が正しければ二つのモデルは両立する.

このような仮説を提示する理論的根拠は二つある.その一つは,1)対数正規分布モデルが都道府県別人口やアメリカ合衆国の州別人口の分布にきわめてよく適合する点であり(鈴木, 1960a, 1960b, 1978),もう一つは,本稿の結果からも示されているとおり,2)二つのモデルが人口規模の小さい都市群において著しく乖離し,大きい都市群では比較的整合する点である.このうち1)から,対数正

規分布モデルが「自治体別の都市人口」の分布に当てはまることは容易に推論できる．他方，市街地別人口の分布は，すべての自治体が一つの市街地のみを有するとき自治体別人口の分布と一致するはずである．しかし，通常大都市圏ではいくつかの自治体がまとまって一つの市街地をなし，逆に，非大都市圏では一つの自治体の中にいくつもの市街地が立地する．したがって，分布のレンジは，市街地別人口の方が自治体別人口に比べてかなり広い．とくに分布の左側（人口規模が小さい側）では，市街地の頻度が自治体の頻度を大きく上回ると予想される．この予想および上述の1)，2)の事実は，パレート分布モデルが「市街地別の都市人口」の分布に適合すると仮定すれば，すべて合理的に説明できるのである．

かくして，パレート分布モデルと対数正規分布モデルの不整合を説明する一つの仮説が示され，これらのモデルが両立しうることがわかった．この仮説を検証するためには，正確な市街地別人口のデータが入手しにくいため，数値シミュレーションが有効な手段になると考えられるが，これについては今後の課題としたい．

本稿の骨子は，1998年度日本地理学会秋季学術大会（於・北海道大学）で発表した。

（青山学院大学経済学部）

注

1) 都市の人口規模別分布が安定均衡に至るための諸条件，すなわち，この前提が成立するための諸条件については，Okabe (1979, 1980)，Haag and Weidlich (1984)，Sheppard (1985)，Tabuchi (1986) などの一連の研究において詳細な議論が行なわれている．

2) 高坂（1978）は，都市の規模別分布に関するモデルを，1)順位規模分布型，2)パレート分布型，3)対数正規分布型，の三つに分類したが，都市の順位規模法則で表される分布はパレート分布と数学的に同等なので，本稿では二つに分けた．

3) Pearson 型分布族とは，次の微分方程式を満たす確率密度関数 $f(x)$ を意味し，種々の条件に応じて12の型に分類される（竹内，1989，pp.44-45）．

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{(x+a)f(x)}{bx^2+cx+d} \tag{16}$$

ただし，a, b, c, d はパラメータである．Lotka (1941) は，この分布族の第6型もしくは第11型から順位規模法則を導出できるとした．このうち第6型は以下のように定式化できる（k, α, s, t はパラメータである）．

$$f(x)=k(x-\alpha)^s x^{-t} \tag{17}$$

この確率密度関数は，左端が $x=\alpha$ によって限られた非対称曲線となる．

4) (5)式の分母の積分式は，$\int_{-\infty}^{\infty}f(p)dp=1$ とするための調整項である．

5) 鈴木（1960a，1960b，1978）は，都道府県別人口密度およびアメリカ合衆国の州別人口密度の値が対数正規分布に従うことを確かめたが，これらのデータは都市人口データとは別個のものであり性格も異なると考えられる．

6) これについては，二つのモデルが論理的に独立している場合と，一方のモデルが他方のモデルを包含している場合が考えられる．

7) 標準正規分布 N(0, 1) の区間 $(-\infty, z)$ における積分は，一般に関数 $\Phi(z)$ で表記されるが，この値を特定の関数で表現することはできない．すなわち，関数 $\Phi(z)$ を積分記号を用いずに表現することはできない．

8) 一般に $\exp(b/a)$ は整数とはならないので厳密には $\max r \neq \exp(b/a)$ であるが，順位 r の概念を拡張してこれを実数とみなせば，$[1, \exp(b/a)]$ が(6)式の定義域となる．

9) 一般に(8)式の右辺は整数とならないので，$n(q)$ を離散変数と考えれば(8)式は近似式でしかない．しかし，$n(q)$ の概念を拡張してこれを連続変数とみなせば，(8)式が成立すると考えられる．

10) (11)式の右辺 $\exp(\mu-\sigma^2)$ が対数正規分布のモード（最大値を与える p の値）となる．通常，この値と正規分布のモード μ を変換した値 $\exp(\mu)$ とは一致しない（Crow and Shimizu，1988，p. 9）．

文　献

河邊　宏・栗原尚子・内藤正典・佐藤哲夫・佐藤克彦（1988）：『発展途上国の都市システム』アジア経済研究所，164p.

北川健次（1985）：インドの都市システム．山口岳志編：『世界の都市システム―新しい地誌の試み―』古今書院，205-224.

高阪宏行（1978）：都市規模分布の動態的分析―新潟県を事例として―．地理学評論，**51**，223-234.

小島麗逸・幡谷則子編（1995）：『発展途上国の都市化と貧困層』アジア経済研究所，449p.

篠崎吉郎(1951)：等比級数法則に関する諸問題．生理生態，**6**，127-144．
鈴木啓祐（1960a)：わが国の人口密度に見られるギブラート分布．医学と生物学，**57**，27-29．
鈴木啓祐（1960b)：アメリカ合衆国の人口密度に見られるギブラート分布．医学と生物学，**57**，189-191．
鈴木啓祐(1978)：人口の分布と移動の数理解析．数理科学，**16**，10-17．
鈴木啓祐（1980)：『空間人口学（下)』大明堂，466p．
鈴木啓祐(1982)：ジップの順位規模法則の可分解性について．地域学研究，**12**，35-52．
鈴木啓祐（1985)：『人口分布の構造解析』大明堂，248p．
竹内　啓編（1989)：『統計学辞典』東洋経済新報社，1185p．
林　上(1991)：『都市の空間システムと立地』大明堂，269p．
森川　洋（1990)：『都市化と都市システム』大明堂，254p．
山本正三・奥野隆史・石井英也・手塚　章編（1997)：『人文地理学辞典』朝倉書店，525p．
Auerbach, F. (1913): Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration. *Petermann's Geographische Mitteilungen*, **59**, 74-76.
Beckmann, M.J. (1958): Hierarchies and the distribution of city size. *Economic Development and Cultural Change*, **6**, 243-248.
Berry, B.J.L. (1961): City size distribution and economic development. *Economic Development and Cultural Change*, **9**, 573-588.
Berry, B.J.L. and Garrison, W.L. (1958): Alternate explanations of urban rank-size relationships. *Annals, Association of American Geographers*, **48**, 83-91.
Clark (1967): *Population Growth and Land Use*. Macmillan, London, 406p. 馬場啓之助監修，杉崎真一訳(1969)：『人口増加と土地利用』大明堂，480p.
Crow, E.L. and Shimizu, K. (1988): *Lognormal Distribution: Theory and Applications*. Marcel Dekker, New York, 387p.
Gibrat, R. (1931): *Les Inégalités Économiques*. Recueil Sirey, Paris, 296p.
Haag, G. and Weidlich, W. (1984): A stochastic theory of interregional migration. *Geographical Analysis*, **16**, 331-357.
Isard, W. (1956): *Location and Space-economy*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 350p. 木内信藏監訳，細野昭雄・岡郎　敬・加藤諦三・糠谷真平共訳(1964)：『立地と空間経済』朝倉書店，304p.
Lotka, A.J. (1941): The law of urban concentration. *Science*, **94**, 164.
Okabe, A. (1979): Population dynamics of cities in a region: conditions for a state of simultaneous growth. *Environment and Planning A*, **11**, 609-628.
Okabe, A. (1980): Stable state conditions of population-dependent migration models under a zero natural growth rate. *Journal of Regional Science*, **20**, 353-364.
Parr, J.B. and Suzuki, K. (1973): Settlement populations and the lognormal distribution. *Urban Studies*, **10**, 335-352.
Sheppard, E. (1985): Urban system population dynamics: incorporating nonlinearities. *Geographical Analysis*, **17**, 47-73.
Simon, H.A. (1955): On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, **42**, 425-440.
Stewart, J.C.T. (1958): The size and spacing of cities. *Geographical Review*, **48**, 222-245.
Suzuki, K. (1982): On the homogeneous structure found in the system of the population of cities in Japan. *Jinkogaku Kenkyu (The Journal of Population Studies)*, **5**, 49-56.
Tabuchi, T. (1986): Existence and stability of city-size distribution in the gravity and logit models. *Environment and Planning A*, **18**, 1375-1389.
Zipf, G.K. (1949): *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. Addition Wesley Press, Cambridge, Massachusetts, 573p.