

【学位論文審査の要旨】

1 研究の目的

物理現象はそれを数学的に記述する方程式が得られたときに、理解できたといえる。しかし方程式は得られても、多くの場合、その解を任意の初期条件について決定することは難しく、従って現象の振る舞いを正確に予測することはできない。

力学系において、任意の初期条件の下ですべての解を解析的に決定できるものは可積分系と呼ばれ、物理現象のあらゆる場面で重要な役目を果たしている。しかし、系の運動方程式が任意に与えられたとき、その可積分性を判定する方法は殆んど知られていない。本研究の目的の一つは、離散力学系が与えられたときにそれが可積分かどうかを判定する充分条件を導くことである。

物理量が連続的であっても、時間発展が離散的な系は離散力学系と呼ばれる。可積分性が知られている離散力学系では、その時間変数を連続にした極限でも可積分性は保存されることが知られている。また、可積分な離散系で時間だけでなく物理量も離散化した超離散系(セル・オートマトンなど)も可積分性を保つ例が沢山知られている。こうした理由から、離散力学系の可積分性を調べて分かったことは、力学系の広い対象にも適用されると考えられる。

本研究のもう一つの目的は、これまで物理現象に応用されることのなかった数学の定理や概念が、可積分性という観点から見ると様々な側面に登場し、必要とされること、更にそれらがどのように関わるのかを示すことにある。

例えば、最近進化した代数計算を可能にする計算機ソフト(Maple 等)を用いて多数の高次元代数多様体の間に成り立つ関係を調べるとき、予測できない現象が次々に現れ、それらが数学的にどこまで既知なのか、どんな定理が適用可能なのか、判断することは難しい。また本論文の後半で議論されるように、離散力学系の可積分条件は、数学的には圏論の中の三角圏を用いて記述することができ、このことは、これまで物理的に考察されることのなかった数学の新しい分野が、物理現象の理解に深く関わっていることを示唆している。

2 研究の方法と結果

離散力学系の可積分性について、本研究に先立ち次のことが知られていた。

A 特異点閉じ込め(SC)現象：

可積分有理写像の多くで、一度発散した点が有限のステップの後に有限領域に戻る。

B 不変周期点多様体(IVPP)定理：

十分な数の不変量を持つ可積分有理写像において、或る周期の周期点が代数多様体を成せば、すべての周期の周期点が周期毎に異なり、不変量で定まる多様体を成す。

C IVPP 系列の生成：

B の条件下では、SC 現象によりすべての周期の IVPP が反復写像で生成される。

SC 現象は2階常微分方程式に対する Painleve テストの一般化として 1991 年に提案されたが、後に反例が示され、可積分条件としては不十分であることが分かった。B の IVPP 定理は強い制限の下で成り立つ可積分性の充分条件であって、その一般化が期待されていた。更に C は現象としては認められるものの、それが数学的にどのような意味を持つのかは不明だった。

本研究は先ず IVPP 定理の成り立つ条件を緩め、それを一般化することから始められた。

(1) 有理写像から代数差分方程式(ADE)への一般化：

有理写像は反復写像の振る舞いを陽に表現するのに便利であるが、ADE の立場からは制限が強すぎる。そこで代数式の離散的な時間発展を調べる方法として、隣接する2つの ADE 代数式から共通する時刻の力学変数を消去イデアルの方法で消去することで時間発展を記述することに注目する。この方法で得られたイデアル形式の時間系列は、共通因子を除いて代数多様体の完全列を成すことが示された。

(2) 不変量とパラメータの双対性：

不変量を用いて独立な力学変数の数を減らせば、不変量をパラメータとする次元の低い ADE が得られる。パラメータを周期 n の IVPP 上に制限すれば、周期 n の再帰方程式、即ちすべての初期値に対してその解が n 周期をもつ ADE が得られる。

パラメータ空間で異なる周期の IVPP を重ねて描いてみると、それらは特定の複数の点で交わる。そのような点は、異なる周期の周期点が同時に存在する特異点である。その中には IVPP が縮退する特異点として先行研究 B で知られていたものの他に、新しい交点も含まれることが分かった。

(3) 特異点閉じ込めを用いた IVPP 系列生成の一般化：

d 次元離散力学系について、不変量の数 p が $d-1$ 個在る場合についてのみ先行研究 C の結果は得られていた。本研究ではそれを $p \geq d/2$ の場合にまで一般化するアルゴリズムを得ることに成功し、具体的にそれを例示することができた。

(4) 特異点閉じ込め現象の数学的な解釈：

非可積分系の周期点は、Julia 集合の存在から示唆されるように、離散的な点のフラクタル

集合になる。これを仮説として認めれば、IVPP 定理は可積分性の充分条件と言える。このとき、IVPP がどのように特異点閉じ込めの機構で生成されるのかを、広田・三輪方程式を用いて調べた。広田・三輪方程式は4次元格子上的 τ 関数と呼ばれる従属変数に対する完全可積分な ADE であり、その解は素粒子の弦理論におけるタキオン相関関数で明示的に与えられる。

タキオン頂点関数がフェルミオンの性質を持つことから、 τ 関数は数学の圏論、特に三角圏の対象としての、またその間の情報伝達は射としての条件を満たすことが本研究で示された。この対応を更に詳細に調べることによって、SC 現象は三角圏の射影分解に他ならないことが明らかにされた。このとき重要な役目を果たすのは、IVPP が交差する特異点集合であり、それらは三角圏のゼロ系に同定された。

(5) 非可積分系から可積分系への相転移：

力学系の可積分性は、それに対応する非可積分系との違いを明確にすることによって、正しく理解できる。本研究では、可積分性が明らかな有理写像系に連続に変化するパラメータを導入して写像を変形し、得られる非可積分写像の周期点の振る舞いを調べた。フラクタル集合を成す非可積分系の周期点は、可積分極限で IVPP に漸近することが期待される。しかし実際にはパラメータが変化するに連れて異なる周期毎に定まる代数曲線上を周期点は移動し、IVPP に漸近する他に、周期によらずに無数の点が代数曲線の特異点に縮退して行くことが分かった。

3 審査の結果

本研究の目的の一つであった離散力学系の可積分条件の一般化は、(1)で示されたように有理写像を離散代数方程式に置き換えることで達成された。その結果、(2), (3)で示されたように、代数演算を扱う計算ソフトを駆使して既知の結果を超える様々な現象が発見された。これらの現象は数学的な意味でまだ完全に理解されたものではないが、それらを明らかにすることで可積分性に関する新しい知見の得られることが期待できる。

力学系の可積分性を特徴付けるのに必要な数学の枠組みはこれまで知られていない。本研究のもう一つの課題は、必要となる枠組みを見つけることであった。著者は本研究において、不可解な現象として捉えられてきた特異点閉じ込め現象が、数学的には三角圏の射影分解として記述

できることを明らかにした。これまで想像もされなかったこの結果は、物理現象と数学の関係の新しい展開の方向を示しているといえる。

以上の結果、本論文は博士（理学）の学位に充分値するものと判定した。

4 最終試験の結果

本学の学位規定にしたがって、最終試験を行った。公開の席上で論文内容の発表を行い、物理学専攻教員による質疑応答を行った。また、論文審査委員による本論文および関係分野の試問を行った。これらの結果を総合的に審査した結果、合格と判定した。