

# 学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名 加瀬 肇

論文題名 : 3 種の食物連鎖型 prey-predator モデルに現れる反応拡散系の  
定常解の a priori 評価と非定数定常解の存在

prey-predator モデルは被食者 (prey) と捕食者 (predator) との関係をモデル化したものであり、昔から多くの研究がなされている。prey-predator モデルには様々なモデルが考えられているが、拡散効果を考えたもっとも単純なモデルは次の古典的な Lotka-Volterra モデルである。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = u(a - kv), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = v(-b + hu), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & \text{in } \bar{\Omega}, \end{cases}$$

但し,  $a, b, k, h, d_1, d_2 > 0$ ,  $n$  は外向き単位法線ベクトル,  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) は滑らかな境界をもつ有界領域とし,  $u_0(x)$  と  $v_0(x)$  は恒等的に 0 でない  $\bar{\Omega}$  上の連続関数とする。  $u(x, t), v(x, t)$  はそれぞれ被食者, 捕食者の場所  $x$ , 時間  $t$  での密度を表している。この Lotka-Volterra モデルに対しては, Murray(1975) によって空間不均一な定常解は存在しないことが証明されている。このことは拡散がない場合には安定であった平衡点が拡散を入れることで不安定化し非一様な定常パターンが生まれるという Turing の拡散誘導不安定化が古典的な Lotka-Volterra モデルでは起こらないことを示している。Turing の拡散誘導不安定化が起こり, 非一様な定常パターンをもつ prey-predator モデルとして Allee 効果と呼ばれる効果を含んだモデルが考えられている。Allee 効果とはある密度までは繁殖率に良い影響があるが, 大きすぎると悪い影響を及ぼしてしまう効果である。Mimura, Murray(1980), Sakamoto(1990), Bie(2011) では次の Allee 効果を含んだ被食, 捕食関係にある 2 種の prey-predator モデルを考察しており, そこでの定常問題は以下の通りである。

$$\begin{cases} -d_1 \Delta u = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv), & \text{in } \Omega, \\ -d_2 \Delta v = v(-1 + u - v), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

但し,  $a_1 \geq 0, a_2 > 0, a_3, k, d_1, d_2 > 0$  とする。  $a_1 + a_2 > a_3$  ならばこの方程式はただ 1 つの正値定数解  $(u_*, v_*)$  をもつ。Mimura, Hosono, Tabata(1980) では特異摂動法を用いて 1 次元の (1) に対して  $d_1$  が小さい場合に  $u$  と  $v$  が棲み分けを起こす定常解を構成し, Sakamoto(1990) では定常解の構成だけでなくその安定性も解析している。また  $f(u, v) = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv)$  とおいて  $\theta_* = \frac{\partial f}{\partial u}(u_*, v_*)$  とするとき, Bie(2011) において  $\theta_* < 0$  ならば  $(u_*, v_*)$  は常微分方程式としてだけでなく, いかなる拡散係数  $d_1, d_2$  に対しても漸近安定となることがわかっている。さらに  $\theta_* > 0$  な

らば  $d_1$  が小さく  $d_2$  が大きいときに写像度の理論を用いて (1) の正值非定数解が存在することが示されている.  $\theta_* > 0$  が小さいときは常微分方程式として  $(u_*, v_*)$  は漸近安定になるので, (1) は Turing の拡散誘導不安定化が起こる一例となっている.

本論文では (1) の 2 種のモデルに  $v$  を捕食する  $w$  という種を加えた 3 種の食物連鎖モデルを考察する. その定常問題は以下ようになる.

$$\begin{cases} -d_1 \Delta u = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv), & \text{in } \Omega, \\ -d_2 \Delta v = v(-1 + u - v - w), & \text{in } \Omega, \\ -d_3 \Delta w = w(-\alpha + \beta v - \gamma w), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

但し,  $\alpha, \beta, \gamma, d_3 > 0$  とする.  $a_1 + a_2 > a_3$ ,  $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_* - 1}$  ならば (2) の正值定数解  $(u^*, v^*, w^*)$  がただ 1 つ存在し,  $(u^*, v^*, w^*) \rightarrow (u_*, v_*, 0)$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) となることがわかる.

本論文で得られた主な結果として (2) の正值解に対する a priori 評価と正值非定数解の存在に関する定理を述べる.

**定理 1 (上からの a priori 評価)**  $a_1 + a_2 > a_3$  とすると (2) の正值解は次を満たす.

$$\max_{\Omega} u < u_+^{**}, \max_{\Omega} v < u_+^{**} - 1, \max_{\Omega} w < \frac{\beta}{\gamma}(u_+^{**} - 1).$$

但し,  $u_+^{**}$  は  $a_1 + a_2 u - a_3 u^2 = 0$  の正值解であり  $a_1 + a_2 > a_3$  より  $u_+^{**} > 1$  である.

**定理 2 (下からの a priori 評価)**  $a_1 + a_2 > a_3$  とすると,  $d > 0$  に対して  $\Lambda = \Lambda(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$  ( $\Lambda \leq u_* - 1$ ) が定まる (詳細は本論文を参照). その  $\Lambda$  に対して  $\beta\Lambda > \alpha$  とする. このとき, ある定数  $C_1 = C_1(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$ ,  $C_i = C_i(a_1, a_2, a_3, k, \alpha, \beta, \gamma, d, \Omega) > 0$  ( $i = 2, 3$ ) が存在して,  $d_i \geq d$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ならば (2) の正值解は次を満たす.

$$\min_{\Omega} u > C_1, \min_{\Omega} v > C_2, \min_{\Omega} w > C_3.$$

今,  $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$  を  $-\Delta$  の相異なる Neumann 固有値とし,  $\theta^* = \frac{\partial f}{\partial u}(u^*, v^*)$  とする. このとき,  $\theta^* \rightarrow \theta_*$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) となっていることに注意する. 定理 1, 2 の a priori 評価を用いて以下の正值非定数解の存在に関する結果を得ることができる.

**定理 3 (非定数解の存在)**  $a_1 + a_2 > a_3$ ,  $\theta_* = u_*(a_2 - 2a_3 u_*) > 0$  とする.  $\mu_1$  は単純とし,  $\frac{\theta_*}{d_1} \in (\mu_1, \mu_2)$  とする. すると定理 2 で述べた  $d = \frac{\theta_*}{2\mu_2}$  に対する  $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(a_1, a_2, a_3, k, \Omega) > 0$  ( $\hat{\Lambda} \leq u_* - 1$ ) が定まる.  $\beta\hat{\Lambda} > \alpha$  とし, 十分大きい  $\gamma_0$  に対して  $\gamma \geq \gamma_0$  とする. このとき, ある  $\hat{d} > 0$  が存在して  $d_2, d_3 \geq \hat{d}$  に対して (2) は正值非定数解をもつ.

定理 3 は (2) に対して Turing の拡散誘導不安定化が起こる 1 つの十分条件を与えたことになるが, 本論文ではより一般的な十分条件も得ている. また, 上で述べた定理以外にも 2 種のモデル (1) とその非定常問題に対する Bie(2011) の結果を 3 種のモデルに拡張した結果も与えている.