3種の食物連鎖型prey-predatorモデルに現れる反応拡散系の定常解のa priori評価と非定数定常解の存在

加瀬　肇

1　導入と主結果

prey-predator モデルは被食者 (prey) と捕食者 (predator) との関係をモデル化したものであり, 昔から多くの研究がなされている. prey-predator モデルには様々なモデルが考えられているが, 拡散効果を考えたもっとも単純なモデルは次の古典的な Lotka-Volterra モデルである.

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = u(a-kv), & \text{in } \Omega, \\ -d_2\Delta v = v(-b+hu), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

但し, $a, b, k, h, d_1, d_2 > 0$, n は外向き法線ベクトル, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geq 1)$ は滑らかな境界をもつ有界領域とし, $u(x), v(x)$ はそれぞれ被食者, 捕食者の場所 x での密度を表している. この Lotka-Volterra モデルに対しては [17] において空間不均一な定常解は存在しないことが証明されている. ここで Turing の拡散誘導不安定化という現象を紹介する. これは拡散がない場合には安定であった平衡点が拡散を入れることで不安定化し非一様な定常パターンが生まれるというものである. Turing の拡散誘導不安定化が起こり, 非一様な定常パターンをもつ prey-predator モデルとして Allee 効果と呼ばれる効果を含めたモデルが考えられている. Allee 効果とはある密度までは繁殖率に良い影響があるが大きすぎると悪い影響を及ぼしてしまう効果である. [15], [20], [3] では次の Allee 効果を含んだ被食, 捕食関係にある 2 種のモデルが考察されている.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv), & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2\Delta v = v(-1 + u - v), & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & \text{in } \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv), & \text{in } \Omega, \\ -d_2\Delta v = v(-1 + u - v), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

但し, $a_1 \geq 0,\ a_3, k, d_1, d_2 > 0$ とし, $u_0(x)$ と $v_0(x)$ は恒等的に 0 でない $\bar{\Omega}$ 上の連続関数とする. Allee 効果は $a_2 > 0$ の場合が対応するが本論文では a_2 の符号は不定とする. $a_1 + a_2 > a_3$ ならばこの方程式はただ 1 つの正値定数解 (u_*, v_*) をもつ.

[15] では特異摂動法を用いて 1 次元の (1.2) に対して d_1 が小さい場合に遷移層をもつ解を構成し, [20] では解の構成だけでなくその安定性も解析している. また $f(u,v) = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv)$ とおき, $\theta_* = \frac{\partial f}{\partial u}(u_*, v_*) = u_*(a_2 - 2a_3 u_*)$ とするとき, [3] において $\theta_* \leq 0$ ならば (u_*, v_*) は常微分方程式としてだけでなく, いかなる拡散係数 d_1, d_2 に対しても漸近安定であることがわかっている. さらに $\theta_* > 0$ ならば d_1 が小さく d_2 が大きいときに写像度の理論を用いて (1.2) の正値非定数解が存在することが示されている. θ_* が正であってもある程度小さいならば常微分方程式として (u_*, v_*) は漸近安定になるので, この結果は (1.2) が Turing の拡散誘導不安定化が起こる一例であることを示唆している.

本論文では, 2 種のモデル (1.1),(1.2) に v を捕食する w という種を加えた次の 3 種の食物連鎖モデルを考える.

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\
\frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = v(-1 + u - v - w), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\
\frac{\partial w}{\partial t} - d_3 \Delta w = w(-\alpha + \beta v - \gamma w), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\
\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\
u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0,\ w(x,0) = w_0(x) \geq 0, & \text{in } \bar{\Omega},
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

$$
\begin{cases}
-d_1 \Delta u = u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv), & \text{in } \Omega, \\
-d_2 \Delta v = v(-1 + u - v - w), & \text{in } \Omega, \\
-d_3 \Delta w = w(-\alpha + \beta v - \gamma w), & \text{in } \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

但し, $\alpha, \beta, \gamma, d_3 > 0,\ w_0(x)$ は恒等的に 0 でない $\bar{\Omega}$ 上の連続関数とする. 2 節で詳しく述べるが $a_1 + a_2 > a_3$, $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_* - 1}$ ならば, (1.3) の正値定数解 (u^*, v^*, w^*) がただ 1 つ存在して $(u^*, v^*, w^*) \to (u_*, v_*, 0)$ $(\gamma \to \infty)$ となることがわかる.

本論文で得られた主な結果として (1.4) の正値解に対する a priori 評価と正値非定数解の非存在, 存在に関する定理を述べる.

定理 1.1 (上からの a priori 評価) $a_1 + a_2 > a_3$ とすると (1.4) の正値解は次を満たす.

$$
\max_{\bar{\Omega}} u < u_+^{**},\ \max_{\bar{\Omega}} v < u_+^{**} - 1,\ \max_{\bar{\Omega}} w < \frac{\beta}{\gamma}(u_+^{**} - 1).
$$

但し, u_+^{**} は $a_1 + a_2 u - a_3 u^2 = 0$ の正値解であり $a_1 + a_2 > a_3$ より $u_+^{**} > 1$ である.

定理 1.2 (下からの a priori 評価) $a_1 + a_2 > a_3$ とすると, $d > 0$ に対して $\Lambda = \Lambda(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$ $(\Lambda \leq u_* - 1)$ が定められる (詳細は 4 節で述べる). その Λ に対して $\beta\Lambda > \alpha$ とする. このとき,

ある定数 $C_1 = C_1(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$, $C_i = C_i(a_1, a_2, a_3, k, \alpha, \beta, \gamma, d, \Omega) > 0$ $(i = 2, 3)$ が存在して, $d_i \geq d$ $(i = 1, 2, 3)$ ならば (1.4) の正値解は次を満たす.

$$\min_{\bar{\Omega}} u > C_1,\ \min_{\bar{\Omega}} v > C_2,\ \min_{\bar{\Omega}} w > C_3.$$

今, $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots$ を Ω 上の $-\Delta$ の相異なる Neumann 固有値とする. また $\theta^* = \frac{\partial f}{\partial u}(u^*, v^*) = u^*(a_2 - 2a_3 u^*)$ とする. このとき, $\theta^* \to \theta_*$ $(\gamma \to \infty)$ となっていることに注意する. 定理 1.1 の a priori 評価を用いて次の正値非定数定常解の非存在定理を得ることができる.

定理 1.3 (非定数解の非存在) $a_1 + a_2 > a_3$とする.このとき,

1. ある $\tilde{d}_1 > 0$ と $\tilde{d}_3 > 0$ が存在して, $\mu_1 d_1 > \tilde{d}_1$, $\mu_1 d_2 > u_+^{**} - 1$, $\mu_1 d_3 > \tilde{d}_3$ ならば (1.4) は正値非定数解をもたない.

2. ある $\tilde{d}_2 > 0$ が存在して, $\mu_1 d_1 > a_1 + 2|a_2| u_+^{**}$, $\mu_1 d_2 > \tilde{d}_2$, $\mu_1 d_3 > \beta \left(u_+^{**} - 1\right)$ ならば (1.4) は正値非定数解をもたない.

さらに定理 1.1 と 1.2 を用いることで以下の正値非定数定常解の存在定理が得られる.

定理 1.4 (非定数解の存在) $a_1 + a_2 > a_3$, $\theta_* > 0$ とする. μ_1 は単純とし, $\frac{\theta_*}{d_1} \in (\mu_1, \mu_2)$ とする. すると定理 1.2 で述べた $d = \frac{\theta_*}{2\mu_2}$ に対する $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(a_1, a_2, a_3, k, \Omega) > 0$ $(\hat{\Lambda} \leq u_* - 1)$ が定まる. $\beta\hat{\Lambda} > \alpha$ とし, 十分大きい $\gamma_0 > 0$ に対して $\gamma \geq \gamma_0$ とする. このとき, ある $\hat{d} > 0$ が存在して $d_2, d_3 \geq \hat{d}$ に対して (1.4) は正値非定数解をもつ.

μ_1 が単純となる領域については 2 次元の細長い楕円領域 [2], 握り手の部分が細長いダンベル型領域 [11], [1] などがある.

定理 1.4 は (1.4) に対して Turing の拡散誘導不安定化が起こる 1 つの十分条件を示唆したことになるが, 本論文ではより一般的な十分条件も得ている. また, 上で述べた定理以外にも 2 種のモデル (1.1), (1.2) に対する [3] の結果を 3 種のモデル (1.3) に拡張した結果も与えている.

本論文の内容は以下の通りである. 2 節で (1.3) の定数解の構造とこの論文で用いる知られている結果を述べて, 3 節では (1.3) の解の時間発展の挙動と $\theta^* \leq 0$ のときの (u^*, v^*, w^*) の局所的, 大域的漸近安定性を調べる. 4 節では定理 1.1 と 1.2 の証明を与える. 5 節では定理 1.3 の証明を与え, さらに定理 1.4 をより一般的な形で述べてその証明を与える. また 6 節では (1.2) で $d_2 \to \infty$ とした shadow 系と (1.4) で $d_2, d_3 \to \infty$ とした shadow 系の正値非定数解の存在を示す. 7 節では (1.1) と (1.3) についての数値シミュレーションの結果を紹介する.

2　準備

2.1　定数解の構造

この小節では (1.3) の定数解について考える.

(u, v, w) を (1.3) の 0 でない定数解とする. (1.3)2 式は $w = -1 + u - v$ と書き換えられる. これを (1.3) の 1 式と 3 式に代入すると, それぞれ $v = -\frac{1}{k}\left(a_3u^2 - a_2u - a_1\right)$, $v = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}u + \frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}$ となる. ここで $f_1(u) = -\frac{1}{k}\left(a_3u^2 - a_2u - a_1\right)$, $f_2(u) = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}u + \frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}$, $f_3(u) = u - 1$ とおく. $a_1 + a_2 > a_3$ は $f_1(1) > 0$ と同値であり, これを仮定することで $v = f_1(u)$ と $v = f_3(u)$ の交点 (u_*, v_*) がただ 1 つ存在する. (u_*, v_*) は (1.1) の正値定数解で次のように書ける.

$$u_* = \frac{a_2 - k + \sqrt{(a_2-k)^2 + 4a_3(a_1+k)}}{2a_3} > 0,\ v_* = u_* - 1 > 0.$$

また, $\theta_* = u_*(a_2 - 2a_3u_*) = u_*\left\{a_2 - (a_2 - k + \sqrt{(a_2-k)^2 + 4a_3(a_1+k)}\right\} < ku_*$ が成立している.

(1.3) の正値定数解がただ 1 つ存在するための十分条件は $a_1 + a_2 > a_3$, $0 < f_2(u_*) < u_* - 1$ である. $0 < f_2(u_*)$ は常に成立しているので, $f_2(u_*) < u_* - 1$ だけを考えればよい. この条件を書き換えると $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_*-1}$ になる. しかし $f_1(u)$ の頂点 $\left(\frac{a_2}{2a_3}, \frac{a_2^2+4a_1a_3}{4a_3k}\right)$ の位置に注目して 2 つの場合に分けて考えるとより詳しい情報が得られる.

1. $a_1 + a_2 > a_3$, $\frac{a_2}{2a_3} \le u_*$ ($\theta_* \le 0$ と同値) の場合.
   この場合は $0 < f_2(u_*) < u_* - 1$ は (1.3) の正値定数解がただ 1 つ存在するための必要十分条件になっている. また正値定数解が 2 つあることはない.

2. $a_1 + a_2 > a_3$, $\frac{a_2}{2a_3} > u_*$ ($\theta_* > 0$ と同値) の場合.
   この場合は「$f_2(u_*) < u_* - 1$」または「$f_2(u_*) = u_* - 1$, $\frac{\gamma}{\beta+\gamma} < f_1'(u_*)$」ならば (1.3) の正値定数解がただ 1 つ存在する. $\frac{\gamma}{\beta+\gamma} < f_1'(u_*)$ を書き換えると $f_1'(u_*) = \frac{a_2-2a_3u_*}{k}$, $k > a_2 - 2a_3u_*$ より, $\gamma < \frac{a_2-2a_3u_*}{k-(a_2-2a_3u_*)}$ になる.
   また (1.3) の正値定数解が 2 つ存在するための必要十分条件は $f_2(u_*) > u_* - 1$, $f_2\left(\frac{a_2}{2a_3}\right) \le \frac{a_2^2+4a_1a_3}{4a_3k}$ である. 条件を書き換えるとそれぞれ $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{u_*-1}$, $4a_3k\alpha - (a_2^2 + 4a_1a_3)\beta \le \{a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1+k)\}\gamma$ となる. しかし $\theta_* > 0$ は $a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1+k) < 0$ と同値なので $4a_3k\alpha - (a_2^2 + 4a_1a_3)\beta < 0$ でなければならない. この条件を書き換えると $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{4a_3k}{a_2^2+4a_1a_3}$ となる. グラフより $\frac{a_2^2+4a_1a_3}{4a_3k} > u_* - 1$ となっているので, $\frac{4a_3k}{a_2^2+4a_1a_3} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{u_*-1}$, $\gamma \le \frac{a_2^2+4a_1a_3}{|a_2^2-2a_2k+4a_3(a_1+k)|}\beta - \frac{4a_3k\alpha}{|a_2^2-2a_2k+4a_3(a_1+k)|}$ が正値定数解が 2 つ存在するための必要十分条件である.

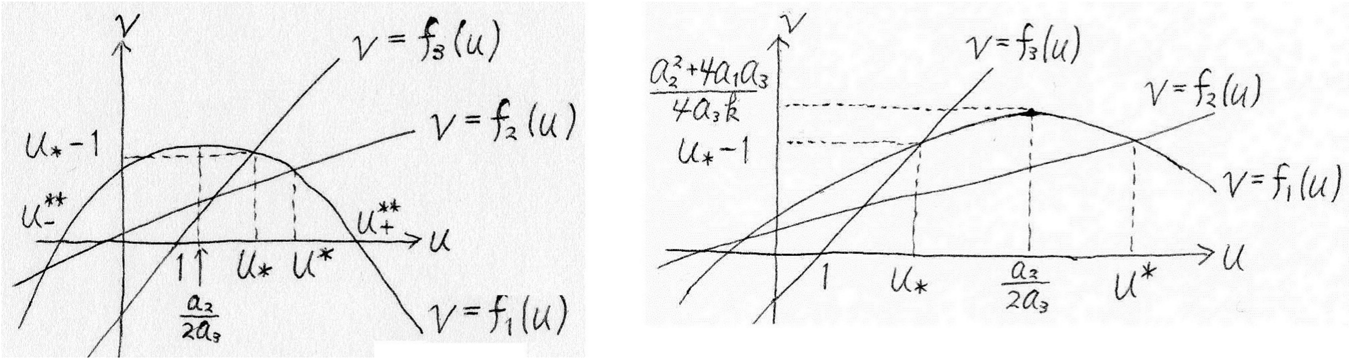

図 1. $\frac{a_2}{2a_3} \le u_*$ $(\theta_* \le 0)$ のグラフ (左) と $\frac{a_2}{2a_3} > u_*$ $(\theta_* > 0)$ のグラフ (右).

以上のことをまとめると次の命題が得られる.

命題 2.1 $a_1 + a_2 > a_3$ とする. (1.3) の正値定数解がただ 1 つ存在するための十分条件は,

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_* - 1} \text{ または } \frac{a_2}{2a_3} > u_*,\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{u_* - 1},\ \gamma < \frac{a_2 - 2a_3 u_*}{k - (a_2 - 2a_3 u_*)}$$

である. また (1.3) の正値定数解が 2 つ存在するための必要十分条件は

$$\frac{a_2}{2a_3} > u_*,\ \frac{4a_3 k}{a_2^2 + 4a_1 a_3} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{u_* - 1},\ \gamma \le \frac{a_2^2 + 4a_1 a_3}{|a_2^2 - 2a_2 k + 4a_3(a_1 + k)|}\beta - \frac{4a_3 k \alpha}{|a_2^2 - 2a_2 k + 4a_3(a_1 + k)|} \text{ である.}$$

そこでただ 1 つの正値定数解を (u^*, v^*, w^*) とすると, (u^*, v^*) は $v = f_1(u)$ と $v = f_2(u)$ の交点なので次のように書ける.

$$u^* = \frac{a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma} + \sqrt{\left(a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 - 4a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right)}}{2a_3},\ v^* = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}u^* + \frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma},\ w^* = -1 + u^* - v^*.$$

故に $(u^*, v^*, w^*) \to (u_*, v_*, 0)$ $(\gamma \to \infty)$ となる. また, グラフより $u_* < u^*$ となっていることもわかる. θ^* は次の不等式を満たしている.

$$\theta^* = u^*(a_2 - 2a_3 u^*) = u^*\left\{a_2 - \left(a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma} + \sqrt{\left(a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 - 4a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right)}\right)\right\} < \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}u^*$$

この節で述べた θ_* と θ^* が満たす不等式は重要なのでここでまとめておく.

命題 2.2 $a_1 + a_2 > a_3$ とする. このとき, $\theta_* < ku_*$ が成立する. さらに $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_*-1}$ を仮定すると, $\theta^* < \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}u^*$ が成立する.

2.2 準備

この小節では記号の定義や知られている結果を紹介する. この小節で紹介するもの以外にも利用する補題があるがそれらはそれぞれの節で紹介する.

$u \in C(\bar{\Omega})$ に対して, $\|u\|_\infty = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)|$ とする. $0 < \sigma < 1$ に対して,

$$C^{1,\sigma}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^1(\bar{\Omega}) \mid \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|^\sigma} < \infty \right\} \text{である.}$$

さらに非負の整数 m, n に対して,

$$C^{m;n}(\Omega\times(0,\infty)) = \left\{ u \in C(\Omega \times (0,\infty)) \mid D_x^s u, \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in C(\Omega \times (0,\infty)) \ (1 \leq |s| \leq m,\ 1 \leq j \leq n) \right\} \text{とする.}$$

但し, $s = (s_1, s_2, \cdots, s_N)$, $|s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_N$, $D_x^s u = \frac{\partial^{|s|} u}{\partial^{s_1} x_1 \partial^{s_2} x_2 \cdots \partial^{s_N} x_N}$ である.
また $0 < l < 1$, $\rho > 0$, $r = 0, 1$, $D_t^r = \frac{d^r}{dt^r}$ に対して,

$$C^{2+l}(\bar{\Omega}) = \left\{ D^s u \in C(\bar{\Omega}) \ (|s| \leq 2) \mid \sup_{0<|x-y|\leq\rho,\ x,y\in\bar{\Omega}} \frac{|D^s u(x) - D^s u(y)|}{|x-y|^l} < \infty \ (|s| = 2) \right\}.$$

$$C^{2+l;\frac{2+l}{2}}(\bar{\Omega} \times [0,T]) = \left\{ D_x^s D_t^r u \in C(\bar{\Omega} \times [0,T]) \ (2r + |s| \leq 2) \mid A < \infty,\ B < \infty \right\}.$$

但し,

$$A = \sup_{0<|x-y|\leq\rho,\ (x,t),(y,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T]} \frac{|D_x^s D_t^r u(x,t) - D_x^s D_t^r u(y,t)|}{|x-y|^l} \ (2r + |s| \leq 2).$$

$$B = \sup_{0<|t-t\prime|\leq\rho,\ (x,t),(x,t\prime)\in\bar{\Omega}\times[0,T]} \frac{|D_x^s D_t^r u(x,t) - D_x^s D_t^r u(x,t\prime)|}{|t-t\prime|^{\frac{l+2-2r-|s|}{2}}} \ (1 \leq 2r + |s| \leq 2).$$

補題 2.1 (L^p 評価 [4]) $u \in H^1(\Omega)$ は次の方程式の弱解とする.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

このとき, $f \in L^\infty(\Omega)$ ならば任意の $p > 1$ に対して $u \in W^{2,p}(\Omega)$ であり, $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})$ となる定数 $C(p, N, |\Omega|) > 0$ が存在する.

補題 2.2 (埋め込み定理) $p > N$ ならば $W^{2,p}(\Omega)$ は $C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ にコンパクトに埋め込める.

証明.
[4] より, $p > N$ に対して $W^{2,p}(\Omega)$ は $C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ に連続に埋め込める. さらに $0 < \sigma\prime < \sigma < 1$ に対して, $C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ は $C^{1,\sigma\prime}(\bar{\Omega})$ にコンパクトに埋め込める. よって定理の主張がいえる.

補題 2.3 (放物型の最大値原理) $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ を有界な開集合, $D(x,t), b(x,t), c(x,t) \in C(\bar{\Omega} \times [0,T]$, $D \geq D_0 > 0$ とし, $u(x,t) \in C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ を次の不等式の古典解とする.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x,t)\Delta u + b(x,t) \cdot \nabla u + c(x,t)u, \text{ in } \Omega \times (0,T).$$

このとき, $\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u \geq 0$ on $\partial\Omega \times (0,T]$ $(\beta(x) \geq 0)$ とすると $u \geq 0$ in $\bar{\Omega} \times [0,T]$ となる.
さらに Ω が連結ならば,

1. $u \geq 0$ in $\bar{\Omega} \times [0,T]$, $u(x_0,t_0) = 0$ $(x_0 \in \Omega,\ t_0 > 0)$ とすると, $u(x,t) \equiv 0$ $(x \in \bar{\Omega},\ t \in [0,t_0])$ となる.

2. $u \geq 0$ in $\bar{\Omega} \times [0,T]$, $u(x_0,t_0) = 0$ $(x_0 \in \partial\Omega,\ t_0 > 0)$ とすると, $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0,t_0) < 0$ または $u(x,t) \equiv 0$ $(x \in \bar{\Omega},\ t \in [0,t_0])$ となる.

証明は [6] と [7] を参照.

補題 2.4 (フルビッツの安定性条件 [21]) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の全ての解の実部が負であるための必要十分条件は $a, b, c > 0$, $ab - c > 0$ である.

補題 2.5 (Poincare の不等式) $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$ とすると,

$$\mu_1 \int_\Omega (u - \bar{u})^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla(u - \bar{u})|^2 dx.$$

証明.

[5] より, μ_1 は次のように特徴付けられる.

$$\mu_1 = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} \mid 0 \neq u \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega u dx = 0\right\}.$$

$\int_\Omega (u - \bar{u}) dx = 0$ なので, $\mu_1 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2 dx}{\int_\Omega (u-\bar{u})^2 dx}$ となる. よって, $\mu_1 \int_\Omega (u - \bar{u})^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla(u - \bar{u})|^2 dx$ が得られる.

3 (1.3) の解の特性と (u^*, v^*, w^*) の安定性

3.1 (1.3) の時間発展に対する挙動

この小節では (1.3) の解の時間発展に対する挙動を調べる.
[23] より $(u_0, v_0, w_0) \in \{C^{2+l}(\bar{\Omega})\}^3$ $(0 < l < 1)$, $\frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ とすれば任意の $T > 0$ に対して (1.3) の解 $(u, v, w) \in \{C^{2+l; \frac{2+l}{2}}(\bar{\Omega} \times [0,T])\}^3$ が存在する. また補題 2.3 より, (1.3) の解は非負になることがわかる. さらに $u(x_0, t_0) = 0$ $(x_0 \in \bar{\Omega},\ t_0 > 0)$ と仮定すると, $u(x,t) \equiv 0$ $(x \in \bar{\Omega},\ t \in [0,t_0])$ となるがこれは初期条件に矛盾する. よって (1.3) の解は $t > 0$ に対して正値となることがわかる.
ここで次の補題を認める. 証明は [22] を参照.

補題 3.1 $0 < f(s) \in C^1$ $(s \geq 0)$, $d > 0$, $\beta \geq 0$, $T \in [0, \infty)$ とする.
$0 < \omega \in C^{2;1}(\Omega \times (0,\infty)) \cap C^{1;0}(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$ に対して,

1. $\alpha > 0$ とし, ω が次の方程式を満たすとする.

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - d\Delta\omega \leq (\geq) \omega^{1+\beta} f(\omega)(\alpha - \omega), & \text{in } \Omega \times (T, \infty), \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [T, \infty), \end{cases}$$

このとき,

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} \omega(\cdot, t) \leq \alpha \ \left(\liminf_{t\to\infty} \min_{\bar{\Omega}} \omega(\cdot, t) \geq \alpha \right).$$

2. $\alpha \geq 0$ とし, ω が次の方程式を満たすとする.

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - d\Delta\omega \leq \omega^{1+\beta} f(\omega)(\alpha - \omega), & \text{in } \Omega \times (T, \infty), \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [T, \infty), \end{cases}$$

このとき,

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} \omega(\cdot, t) \leq 0.$$

定理 3.1 (解の挙動) $(u(x,t), v(x,t), w(x,t))$ を初期値 $(u_0, v_0, w_0) \in \{C^{2+l}(\bar{\Omega})\}^3$ $(0 < l < 1)$, $\frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ に対する (1.3) の解とする.

1. $a_1 = 0,\ a_2 \leq 0$ とすると,

$$\lim_{t\to\infty} (u(\cdot,t), v(\cdot,t), w(\cdot,t)) = (0,0,0), \text{ uniformly on } \bar{\Omega}.$$

2. 「$a_1 = 0,\ 0 < a_2 \leq a_3$」または「$a_1 > 0,\ a_1 + a_2 \leq a_3$」とすると,

$$\lim_{t\to\infty} (u(\cdot,t), v(\cdot,t), w(\cdot,t)) = (u_+^{**}, 0, 0), \text{ uniformly on } \bar{\Omega}.$$

3. $a_1 \geq 0,\ a_1 + a_2 > a_3$ とする. 任意の $0 < \epsilon \ll 1$ に対してある t_0 が存在して全ての $x \in \bar{\Omega},\ t \geq t_0$ に対して次が成立する.

$$u(x,t) \leq u_+^{**} + \epsilon, \ v(x,t) \leq u_+^{**} - 1 + \epsilon,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_+^{**} - 1} \text{ ならば } w(x,t) \leq \frac{\beta}{\gamma} \left(u_+^{**} - 1 + \epsilon \right),$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{1}{u_+^{**} - 1} \text{ ならば } \lim_{t\to\infty} w(\cdot,t) = 0, \text{ uniformly on } \bar{\Omega}.$$

証明.

1. (1.3)1 式より,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = u(a_2 u - a_3 u^2 - kv) \leq a_3 u^2 \left(\frac{a_2}{a_3} - u \right).$$

$\frac{a_2}{a_3} \leq 0$ なので補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} u(\cdot, t) \leq 0.$$

u は正なので,

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t)=0,\ \text{uniformly on } \bar{\Omega}.$$

故に, 任意の $\epsilon>0$ に対してある $t_1>0$ が存在して全ての $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_1$ に対して $u(x,t)\leq\epsilon$ となる. (1.3)2 式より $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_1$ に対して,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-d_2\Delta v\leq v(-1+\epsilon-v-w)<v(-1+\epsilon-v).$$

$\epsilon<1$ とすれば補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t)\leq 0.$$

v は正なので,

$$\lim_{t\to\infty} v(\cdot,t)=0,\ \text{uniformly on } \bar{\Omega}.$$

故に, ある $t_2>0$ が存在して全ての $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_2$ に対して $v(x,t)\leq\epsilon$ となる. (1.3)3 式より $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_2$ に対して,

$$\frac{\partial w}{\partial t}-d_3\Delta w\leq w(-\alpha+\beta\epsilon-\gamma w)=\frac{w}{\gamma}\left(\frac{-\alpha+\beta\epsilon}{\gamma}-w\right).$$

$\epsilon<\frac{\alpha}{\beta}$ とすれば補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} w(\cdot,t)\leq 0.$$

w は正なので,

$$\lim_{t\to\infty} w(\cdot,t)=0,\ \text{uniformly on } \bar{\Omega}.$$

3. (1.3)1 式より,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-d_1\Delta u\leq u(a_1+a_2u-a_3u^2)=a_3u(u-u_-^{**})(u_+^{**}-u).$$

$u_+^{**}>1$ なので補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t)\leq u_+^{**}. \tag{3.1}$$

故に, 任意の $\epsilon>0$ に対してある $t_1>0$ が存在して全ての $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_1$ に対して,

$$u(x,t)\leq u_+^{**}+\epsilon.$$

(1.3)2 式より $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_1$ に対して,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-d_2\Delta v\leq v(-1+u_+^{**}+\epsilon-v-w)<v(-1+u_+^{**}+\epsilon-v). \tag{3.2}$$

$-1+u_+^{**}+\epsilon>0$ なので補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t)\leq -1+u_+^{**}+\epsilon.$$

故に, ある $t_2>0$ が存在して任意の $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_2$ に対して,

$$v(x,t)\leq u_+^{**}-1+\epsilon.$$

(1.3)3 式より $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_2$ に対して,

$$\frac{\partial w}{\partial t}-d_3\Delta w\leq w\left\{-\alpha+\beta(u_+^{**}-1+\epsilon)-\gamma w\right\}<\gamma w\left\{\frac{-\alpha+\beta(u_+^{**}-1+\epsilon)}{\gamma}-w\right\}.$$

$\frac{\beta}{\alpha}\leq\frac{1}{u_+^{**}-1}$ ならば $-\alpha+\beta(u_+^{**}-1)\leq 0$ なので補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}}w(\cdot,t)\leq\frac{\beta\epsilon}{\gamma}.$$

故に,

$$\lim_{t\to\infty}w(\cdot,t)=0,\ \text{uniformly on }\bar{\Omega}.$$

$\frac{\beta}{\alpha}>\frac{1}{u_+^{**}-1}$ ならば $-\alpha+\beta(u_+^{**}-1+\epsilon)>0$ なので補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}}w(\cdot,t)\leq\frac{\beta}{\gamma}\left(u_+^{**}-1+\epsilon\right).$$

故に, ある $t_3>0$ が存在して全ての $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_3$ に対して,

$$w(x,t)\leq\frac{\beta}{\gamma}\left(u_+^{**}-1+\epsilon\right).$$

以上より, $t_0=\max\{t_1,t_2,t_3\}$ とすれば $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_0$ に対して定理の主張がいえる.

2. 2.1 $a_1=0$, $0<a_2\leq a_3$ の場合.

(1.3)1 式より,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-d_1\Delta u=u(a_2u-a_3u^2-kv)\leq a_3u^2\left(\frac{a_2}{a_3}-u\right).$$

$0<\frac{a_2}{a_3}=u_+^{**}\leq 1$ なので補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}}u(\cdot,t)\leq u_+^{**}.$$

故に, 任意の $\epsilon>0$ に対してある $t_1>0$ が存在して全ての $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_1$ に対して $u(x,t)\leq u_+^{**}+\epsilon$ となる. (1.3)2 式より $x\in\bar{\Omega}$, $t\geq t_1$ に対して,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-d_2\Delta v\leq v\left(-1+u_+^{**}+\epsilon-v-w\right)\leq v(\epsilon-v-w)<v(\epsilon-v).$$

故に補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}}v(\cdot,t)\leq\epsilon.$$

よって,

$$\lim_{t\to\infty}v(\cdot,t)=0,\ \text{uniformly on }\bar{\Omega}.$$

2.2 $a_1 > 0,\ a_1 + a_2 \le a_3$ の場合.

(3.2) までは 3. と同様にできる. $-1 + u_+^{**} \le 0$ なので (3.2) より, $\frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v < v(\epsilon - v)$.

故に補題 3.1 より,

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} v(\cdot, t) \le \epsilon.$$

よって,

$$\lim_{t\to\infty} v(\cdot, t) = 0,\ \text{uniformly on } \bar{\Omega}.$$

以上より, どちらの場合でも (3.1) が成立していて,

$$\lim_{t\to\infty} v(\cdot, t) = 0,\ \text{uniformly on } \bar{\Omega}.$$

1. と同様にして,

$$\lim_{t\to\infty} w(\cdot, t) = 0,\ \text{uniformly on } \bar{\Omega}.$$

さらにある $t_2 > 0$ が存在して全ての $x \in \bar{\Omega},\ t \ge t_2$ に対して $v(x,t) \le \epsilon$ となる. (1.3)1 式より $x \in \bar{\Omega},\ t \ge t_2$ に対して,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u \ge u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - k\epsilon) = a_3 u(u - u_{\epsilon,-})(u_{\epsilon,+} - u).$$

但し, $u_{\epsilon,\pm}$は $a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - k\epsilon = 0$ の根で,

$$u_{\epsilon,-} < 0 < u_{\epsilon,+},\ u_{\epsilon,\pm} = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4a_3(a_1 - k\epsilon)}}{2a_3} \to u_\pm^{**}\ (\epsilon \to 0).$$

故に補題 3.1 より,

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{\bar{\Omega}} u(\cdot, t) \ge u_{\epsilon,+}.$$

よって (3.1) と合わせて,

$$u_+^{**} \ge \limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} u(\cdot, t) \ge \liminf_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} u(\cdot, t) \ge \liminf_{t\to\infty} \min_{\bar{\Omega}} u(\cdot, t) \ge u_+^{**}.$$

したがって,

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot, t) = u_+^{**},\ \text{uniformly on } \bar{\Omega}.$$

3.2 (u^*, v^*, w^*) の安定性

この小節では定数解 (u^*, v^*, w^*) の局所的, 大域的安定性を調べる. 初めに記号を定義する. $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $\mathbf{X} = \{\mathbf{u} \in \{C^1(\bar{\Omega})\}^3 \mid \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, $\mathbf{X}_j = \{\mathbf{u} \in \mathbf{X} \mid -\Delta \mathbf{u} = \mu_j \mathbf{u}\}$ とおく. $m(\mu_j)$ を μ_j の多重度, $\{\phi_{jl} \mid l = 1, 2, \cdots, m(\mu_j)\}$ を $\mathbf{X}_j$ の正規直交基底とし, $\mathbf{X}_{jl} = \{\mathbf{c}\phi_{jl} \mid \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3\}$ とおくと,

$$\mathbf{X} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbf{X}_j,\ \mathbf{X}_j = \bigoplus_{l=1}^{m(\mu_j)} \mathbf{X}_{jl} \text{と書ける.}$$

定理 3.2 (局所的安定性) $a_1 + a_2 > a_3$, $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_* - 1}$ とする. $\theta^* \leq 0$ ならば, (u^*, v^*, w^*) は局所的漸近安定となる.

注 1. $\theta^* = u^*(a_2 - 2a_3 u^*) \leq 0$ は $\frac{k\gamma}{\beta+\gamma} \leq \sqrt{\left(a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 - 4a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right)}$ と書き換えられる. 両辺を 2 乗することで $\theta^* \leq 0$ であるための必要十分条件は, $a_2^2 - \frac{2k\gamma}{\beta+\gamma}a_2 - 4a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right) \geq 0$ であることがわかる. (1.2) のただ 1 つの定数解 (u_*, v_*) の局所的漸近安定性を示すための対応する条件は $\theta_* \leq 0$ である. $u_* < u^*$ が成立しているので, $\theta_* \leq 0$ ならば $\theta^* < 0$ となる. 故に 2 種の定数解 (u_*, v_*) が局所的漸近安定ならば 3 種の定数解 (u^*, v^*, w^*) は自動的に局所的漸近安定になる. また $\theta_* > 0$ のときに $\theta^* \leq 0$ となるには次の不等式が成立していなければならない.

$$\gamma \leq \frac{4a_3k\alpha - (a_2^2 + 4a_1a_3)\beta}{a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1 + k)} = \frac{a_2^2 + 4a_1a_3}{|a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1 + k)|}\beta - \frac{4a_3k\alpha}{|a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1 + k)|}.$$

但し, 2 節でも述べたように $\theta_* > 0$ より $a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1 + k) < 0$ であり, さらに $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_* - 1} > \frac{4a_3k}{a_2^2 + 4a_1a_3}$ より $(a_2^2 + 4a_1a_3)\beta - 4a_3k\alpha > 0$ となっている.

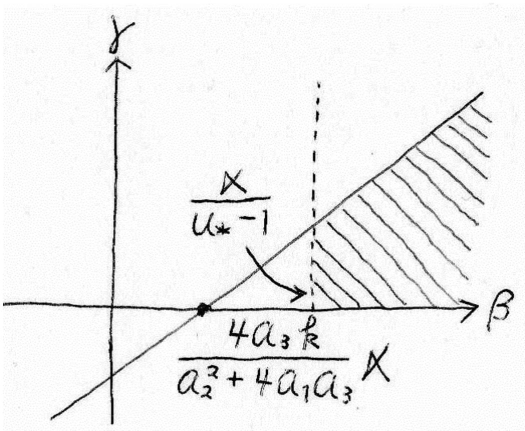

図 2. $\theta_* > 0$ のときに $\theta^* \leq 0$ となる β と γ の領域.

定理の証明.

(u^*, v^*, w^*) での (1.3) の線型化作用素 $\mathcal{L}$ は次のように書ける.

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\Delta + \theta^* & -ku^* & 0 \\ v^* & d_2\Delta - v^* & -v^* \\ 0 & \beta w^* & d_3\Delta - \gamma w^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

即ち, $\mathcal{L} = \mathbf{D\Delta} + \mathbf{A}$ である. 但し $\mathbf{A}$ は (u^*, v^*, w^*) での線形化行列で,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \theta^* & -ku^* & 0 \\ v^* & -v^* & -v^* \\ 0 & \beta w^* & -\gamma w^* \end{pmatrix} \text{である.}$$

ここで, $\mathcal{L}\mathbf{u}=\xi\mathbf{u}$ on $\mathbf{X}$ $(\mathbf{u}\neq\mathbf{0})$ を考える. $\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{c}_j\phi_j$ $(\mathbf{c}_j\in\mathbf{R}^3,\ \mathbf{c}_j\phi_j\in\mathbf{X}_j)$ と固有関数展開すると,

$$-\sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{D}\mu_j\mathbf{c}_j\phi_j+\mathbf{A}\mathbf{c}_j\phi_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi\mathbf{c}_j\phi_j.$$

$\phi_i\neq 0$ な $i\geq 0$ が存在するので ϕ_i を掛けて Ω 上で積分すると $\int_\Omega\phi_i\phi_j dx=\delta_{ij}$ より,

$$(-\mu_i\mathbf{D}+\mathbf{A})\mathbf{c}_i=\xi\mathbf{c}_i.$$

故に $\mathbf{A}_i=-\mu_i\mathbf{D}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-d_1\mu_i+\theta^* & -ku^* & 0\\ v^* & -d_2\mu_i-v^* & -v^*\\ 0 & \beta w^* & -d_3\mu_i-\gamma w^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -b & 0\\ c & -d & -c\\ 0 & e & -f\end{pmatrix}$ とおく (対角成分は i に依っているが符号は同じなので番号を省略して書く. 文字は $a\geq 0$ で他は正の定数とする) と, $\mathcal{L}$ の固有値は A_i (いずれかの $i\geq 0$) の固有値である. $B_i=df+ce+af+ad+bc$ (対角成分の余因子の和) とすると,

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}_i)=\lambda^3-(\mathrm{tr}\mathbf{A}_i)\lambda^2+B_i\lambda-\det\mathbf{A}_i.$$

補題 2.4(フルビッツの安定性条件) より, $\mathbf{A}_i$ の固有値の実部が全て負であるための必要十分条件は次のようになる.

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}_i<0,\ B_i>0,\ \det\mathbf{A}_i<0,\ -B_i(\mathrm{tr}\mathbf{A}_i)+\det\mathbf{A}_i>0.$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}_i=-(a+d+f)<0,\ B_i=df+ce+af+ad+bc>0,\ \det\mathbf{A}_i=-(adf+bcf+ace)<0.$$

$$\begin{aligned}-B_i(\mathrm{tr}\mathbf{A}_i)+\det\mathbf{A}_i &= (a+d+f)(df+ce+af+ad+bc)-(adf+bcf+ace)\\ &= a(af+ad+bc)+d(af+ce+af+ad+bc)+f(df+ce+af+ad)\\ &> 0.\end{aligned}$$

よって全ての $i\geq 0$ に対して, $\mathbf{A}_i$ の固有値の実部は負となるので (u^*,v^*,w^*) は漸近安定である. また, $i\geq 1$ に対して

$$\mathbf{A}_i=\mu_i\begin{pmatrix}-d_1+\frac{\theta^*}{\mu_i} & -\frac{ku^*}{\mu_i} & 0\\ \frac{v^*}{\mu_i} & -d_2-\frac{v^*}{\mu_i} & -\frac{v^*}{\mu_i}\\ 0 & \frac{\beta w^*}{\mu_i} & -d_3-\frac{\gamma w^*}{\mu_i}\end{pmatrix}=\mu_i\tilde{\mathbf{A}}_i \text{とすると,}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_i\text{は } \tilde{\mathbf{A}}_i=\begin{pmatrix}-d_1 & 0 & 0\\ 0 & -d_2 & 0\\ 0 & 0 & -d_3\end{pmatrix}+\frac{1}{\mu_i}\begin{pmatrix}\theta^* & -ku^* & 0\\ v^* & -v^* & -v^*\\ 0 & \beta w^* & -\gamma w^*\end{pmatrix} \text{と書ける.}$$

$\mathbf{A}_i$の固有値を$\lambda_i^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{A}}_i$の固有値を$\tilde{\lambda}_i^{(l)}$ とする $(l=1,2,3)$. ここで次の補題を用いる. 証明は [12] を参照.

補題 3.2 (行列の固有値の正則摂動理論) $A_0+\epsilon B$ を $n\times n$ 行列, $\lambda^l(\epsilon)$ $(l=1,2,\cdots,n)$ を $A_0+\epsilon B$ の固有値とすると, $\lambda^{(l)}(\epsilon)$ はϵ に関して連続で $\lambda^{(l)}(\epsilon)\to\lambda^{(l)}(0)$ $(\epsilon\to 0)$.

故に $\tilde{\lambda}_i^{(l)}\to\lambda^{(l)}\in\{-d_j \mid j=1,2,3\}$ $(i\to\infty)$ となり, 任意の $\epsilon>0$ に対してある $i_0>0$ が存在して, 全ての $i\geq i_0$ に対して $Re\tilde{\lambda}_i^{(l)}<\lambda^{(l)}+\epsilon$ となる. よって $\delta_1=\min_{j=1,2,3}d_j$ とおき, $-\delta_1+\epsilon<-\frac{\delta_1}{2}<0$ となるように ϵ を小さく取ると $i\geq i_0$ に対して,

$$Re\lambda_i^{(l)}=\mu_i Re\tilde{\lambda}_i^{(l)}\leq\mu_1 Re\tilde{\lambda}_i^{(l)}<-\frac{\delta_1}{2}\mu_1 \ (l=1,2,3).$$

$0\leq i<i_0$ に対しては次が成立する.

$$Re\lambda_i^{(l)}\leq-\min_{0\leq i<i_0,\ l=1,2,3}|Re\lambda_i^{(l)}|.$$

よって全ての $i\geq 0$ に対して $Re\lambda_i<-\delta$ となる $\delta>0$ が存在する.

注 2. (1.3) の定数解は (u^*,v^*,w^*) 以外にも $(0,0,0)$, $(u_+^{**},0,0)$, $(u_*,v_*,0)$ がある. それぞれの線形化行列は順番に

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u_+^{**}(a_2-2a_3u_+^{**}) & -ku_+^{**} & 0\\ 0 & u_+^{**}-1 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\theta_* & -ku_* & 0\\ v_* & -v_* & -v_*\\ 0 & 0 & -\alpha+\beta v_*\end{pmatrix} \text{と書ける.}$$

故に常微分方程式として考えると $a_1+a_2>a_3$, $\frac{\beta}{\alpha}>\frac{1}{u_*-1}$, $\theta_*<0$ の下で $(0,0,0)$ は u 方向に不安定で v と w 方向に安定, $(u_+^{**},0,0)$ は u と w 方向に安定で v 方向に不安定, $(u_*,v_*,0)$ は u と v 方向に安定で w 方向に不安定になる. 一方で (1.1) の定数解 (u_*,v_*) は安定である. よって 2 種の定数解としては安定な (u_*,v_*) は 3 種の定数解 $(u_*,v_*,0)$ として見ると不安定で (u^*,v^*,w^*) に近づくことになる.

また (u^*,v^*,w^*) の線形化行列 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0$ は $\theta^*\leq v^*$ ならばフルビッツの安定性条件を満たす. 実際, 命題 2.2 を用いて以下のようにして示せる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\mathbf{A}_0 &= \theta^*-v^*-\gamma w^*<0,\\
B_0 &= (\beta+\gamma)v^*w^*-\gamma\theta^*w^*+v^*(ku^*-\theta^*)=\gamma w^*(v^*-\theta^*)+\beta v^*w^*+v^*(ku^*-\theta^*)>0,\\
\det\mathbf{A}_0 &= \gamma\theta^*v^*w^*-k\gamma u^*v^*w^*+\beta\theta^*v^*w^*=\{(\beta+\gamma)\theta^*-k\gamma u^*\}v^*w^*<0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-B_0(\mathrm{tr}\mathbf{A}_0)+\det\mathrm{A}_0 &= (v^*+\gamma w^*-\theta^*)\{\gamma w^*(v^*-\theta^*)+\beta v^*w^*+v^*(ku^*-\theta^*)\}+\{(\beta+\gamma)\theta^*-k\gamma u^*\}v^*w^*\\
&= v^*\{\gamma w^*(v^*-\theta^*)+\beta v^*w^*+v^*(ku^*-\theta^*)\}+\gamma\theta^*\{\gamma w^*(v^*-\theta^*)+\beta v^*w^*\}\\
&- \theta^*\{\gamma w^*(v^*-\theta^*)+v^*(ku^*-\theta^*)\}\\
&= (v^*-\theta^*)\{\gamma w^*(v^*-\theta^*)+v^*(ku^*-\theta^*)\}+\beta(v^*)^2w^*+\gamma w^*\{\gamma w^*(v^*-\theta^*)+\beta v^*w^*\}\\
&> 0.
\end{aligned}$$

故に $\theta^*\leq v^*$ ならば (u^*,v^*,w^*) は拡散がないときには漸近安定となる.

定理 3.3 (定数解の大域的安定性) $a_1 + a_2 > a_3$, $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_* - 1}$ とする． $a_2 - a_3 u^* \le 0$ ならば, (u^*, v^*, w^*) は大域的漸近安定となる．

注 2. この定理の条件は局所的漸近安定性の定理のものより厳しい条件である． $a_2 - a_3 u^* \le 0$ は $\sqrt{\left(a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 - 4a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right)} \ge a_2 + \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}$ と書き換えられる． $-\frac{k\gamma}{\beta+\gamma}a_2 - a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right) \ge 0$ ならば

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 - 4a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right)} &\ge \sqrt{\left(a_2 - \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 + \frac{4k\gamma}{\beta+\gamma}a_2} \\
&= \left|a_2 + \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}\right| \\
&\ge a_2 + \frac{k\gamma}{\beta+\gamma}.
\end{aligned}$$

故に $a_2 - a_3 u^* \le 0$ であるための十分条件は $-\frac{k\gamma}{\beta+\gamma}a_2 - a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right) \ge 0$ である．

定理の証明.

Lyapunov 関数を作ることを考える． $E(u)(t)$, $E(v)(t)$, $E(w)(t)$ を次のように定める．

$$\begin{aligned}
E(u)(t) &= \int_\Omega \left(u - u^* - u^* \log\frac{u}{u^*}\right) dx, \\
E(v)(t) &= \int_\Omega \left(v - v^* - v^* \log\frac{v}{v^*}\right) dx, \\
E(w)(t) &= \int_\Omega \left(w - w^* - w^* \log\frac{w}{w^*}\right) dx.
\end{aligned}$$

$F(s) = s - u^* - u^* \log\frac{s}{u^*}$ $(s \ge 0)$ とおくと, $F(s)$ は $s = u^*$ で最小値 0 を取る. 故に $E(u)(t) \ge 0$ $(t \ge 0)$ で, $E(u)(t) = 0$ と $u = u^*$ は同値である． $E(v)(t)$, $E(w)(t)$ についても同様のことが成立する．

$$\begin{aligned}
\frac{dE(u)}{dt} &= \int_\Omega \left(1 - \frac{u^*}{u}\right)\dot{u}dx \\
&= \int_\Omega \left\{\left(1 - \frac{u^*}{u}\right)d_1\Delta u + (u - u^*)(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv)\right\}dx \\
&= \int_\Omega \left\{-d_1\frac{u^*|\nabla u|^2}{u^2} + (u - u^*)[a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv - (a_1 + a_2 u^* - a_3 u^{*2} - kv^*)]\right\}dx \\
&= \int_\Omega \left\{-d_1\frac{u^*|\nabla u|^2}{u^2} - [a_3(u + u^*) - a_2](u - u^*)^2 - k(u - u^*)(v - v^*)\right\}dx.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(v)}{dt} &= \int_\Omega \left(1-\frac{v^*}{v}\right)\dot{v}dx \\
&= \int_\Omega \left\{\left(1-\frac{v^*}{v}\right)d_2\Delta v + (v-v^*)(-1+u-v-w)\right\}dx \\
&= \int_\Omega \left\{-d_2\frac{v^*|\nabla v|^2}{v^2} + (v-v^*)[-1+u-v-w-(-1+u^*-v^*-w^*)]\right\}dx \\
&= \int_\Omega \left\{-d_2\frac{v^*|\nabla v|^2}{v^2} - (v-v^*)^2 + (u-u^*)(v-v^*) - (v-v^*)(w-w^*)\right\}dx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(w)}{dt} &= \int_\Omega \left(1-\frac{w^*}{w}\right)\dot{w}dx \\
&= \int_\Omega \left\{\left(1-\frac{w^*}{w}\right)d_3\Delta w + (w-w^*)(-\alpha+\beta v-\gamma w)\right\}dx \\
&= \int_\Omega \left\{-d_3\frac{w^*|\nabla w|^2}{w^2} + (w-w^*)[-\alpha+\beta v-\gamma w-(-\alpha+\beta v^*-\gamma w^*)]\right\}dx \\
&= \int_\Omega \left\{-d_3\frac{w^*|\nabla w|^2}{w^2} - \gamma(w-w^*)^2 + \beta(v-v^*)(w-w^*)\right\}dx.
\end{aligned}
$$

$E(u,v,w)(t) = E(u)(t) + kE(v)(t) + \frac{k}{\beta}E(w)(t)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(u,v,w)(t)}{dt} &= \int_\Omega \left\{-d_1\frac{u^*|\nabla u|^2}{u^2} - d_2\frac{kv^*|\nabla v|^2}{v^2} - d_3\frac{kw^*|\nabla w|^2}{\beta w^2}\right\}dx \\
&\quad - \int_\Omega \left\{(u-u^*)^2[a_3(u+u^*)+a_2] + k(v-v^*)^2 + \frac{k\gamma}{\beta}(w-w^*)^2\right\}dx \\
&\leq -\int_\Omega \left\{(u-u^*)^2[a_3(u+u^*)-a_2] + k(v-v^*)^2 + \frac{k\gamma}{\beta}(w-w^*)^2\right\}dx.
\end{aligned}
$$

$a_3u^* - a_2 \geq 0$ なので $\frac{dE(u,v,w)(t)}{dt} \leq 0$ であり, $\frac{dE(u,v,w)(t)}{dt} = 0$ と $(u,v,w) = (u^*,v^*,w^*)$ は同値である.

[16], [23], [10] の放物型方程式のグリーン関数を用いた議論より, $\{u(\cdot,t), v(\cdot,t), w(\cdot,t) \mid t \geq 0\}$ は $\{C(\bar{\Omega})\}^3$ で相対コンパクトであることが示せる. 故に Lasalle の不変原理 [9](定理 4.3.4) より, E を $F = \left\{(u,v,w) \in \{C(\bar{\Omega})\}^3 \mid \frac{dE(u,v,w)(t)}{dt} = 0\right\}$ の最大な不変部分集合として $(u(\cdot,t), v(\cdot,t), w(\cdot,t)) \to E$ $(t \to \infty)$ となる. しかし $F = \{(u^*,v^*,w^*)\}$ で $\{(u^*,v^*,w^*)\}$ が不変集合なので $E = \{(u^*,v^*,w^*)\}$ となり, 大域的漸近安定性が示せたことになる.

4 (1.4) の正値解に対する a priori 評価

この小節では (1.4) の正値解に対する a priori 評価を示す. 上からの評価には次の補題を用いる.

補題 4.1 (最大値原理) $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbf{R})$, $\omega \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ とする.

1. ω が次の方程式を満たすとする.

$$\begin{cases} \Delta\omega + g(x,\omega(x)) \geq 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} \leq 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

このとき,

$$\omega(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} \omega \text{ ならば } g(x_0,\omega(x_0)) \geq 0.$$

2. ω が次の方程式を満たすとする.

$$\begin{cases} \Delta\omega + g(x,\omega(x)) \leq 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} \geq 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

このとき,

$$\omega(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} \omega \text{ ならば } g(x_0,\omega(x_0)) \leq 0.$$

証明は [14] に書かれているが簡単なので 1. の証明を述べておく (2. の証明は 1. と同様にできる). ω は $x_0 \in \bar{\Omega}$ で最大値を取るとする. $x_0 \in \Omega$ ならば $\Delta\omega(x_0) \leq 0$ なので $g(x_0,\omega(x_0)) \geq -\Delta\omega(x_0) \geq 0$ となる. そこで $x_0 \in \partial\Omega$ の場合を考える. $g(x_0,\omega(x_0)) < 0$ と仮定して矛盾を導く. g と ω の連続性より, $\partial B \cap \partial\bar{\Omega} = \{x_0\}$, $g(x,\omega(x)) < 0$ $(x \in B)$ となるような小さい近傍 $B \subset \bar{\Omega}$ が取れる. 故に任意の $x \in B$ に対して, $\Delta\omega(x) \leq -g(x,\omega(x)) > 0$ となる. また, 任意の $x \in \Omega$ に対して $w(x_0) = \max_{\bar{B}} \omega > \omega(x)$ が成立しているので Hopf の補題より $\frac{\partial \omega}{\partial n}(x_0) > 0$ となる. しかしこれは Neumann 条件に矛盾する. 以上より 1. の証明が完了した.

定理 4.1 (上からの a priori 評価) $a_1 + a_2 > a_3$ とすると, (1.4) の正値解 (u,v,w) は次を満たす.

$$\max_{\bar{\Omega}} u < u_+^{**},\ \max_{\bar{\Omega}} v < u_+^{**} - 1,\ \max_{\bar{\Omega}} w < \frac{\beta}{\gamma}\left(u_+^{**} - 1\right).$$

証明.

(u,v,w) を (1.4) の正値解とし, u, v, w はそれぞれ $x_1 \in \bar{\Omega}$, $x_2 \in \bar{\Omega}$, $x_3 \in \bar{\Omega}$ で最大値を取るとする. (1.4) に補題 4.1 を用いて,

$$a_1 + a_2 u(x_1) - a_3 u(x_1)^2 - kv(x_1) \geq 0, \tag{4.1}$$

$$-1 + u(x_2) - v(x_2) - w(x_2) \geq 0, \tag{4.2}$$

$$-\alpha + \beta v(x_3) - \gamma w(x_3) \geq 0. \tag{4.3}$$

(4.1) より, $a_3 u(x_1)^2 - a_2 u(x_1) - a_1 \leq -kv(x_1) < 0$ である. $a_1 + a_2 > a_3$ より $u_-^{**} < 0$, $u_+^{**} > 1$ なので $u(x_1) < u_+^{**}$ となる. すると (4.2), (4.3) より,

$$v(x_2) \leq u(x_2) - 1 - w(x_2) < u_+^{**} - 1,\ w(x_3) \leq \frac{1}{\gamma}\{-\alpha + \beta v(x_3)\} < \frac{\beta}{\gamma}(u_+^{**} - 1).$$

次に下からの a priori 評価を示すためにいくつかの補題を用意する.

補題 4.2 (Harnack の不等式) $c \in C(\bar{\Omega})$, $\|c\|_\infty \le M$ に対して, $0 < \omega \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ は次の方程式を満たすとする.

$$\begin{cases} \Delta\omega + c\omega = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

このとき, 次を満たすような定数 $C = C(M, \Omega) > 0$ が存在する.

$$\max_{\bar{\Omega}} \omega \le C \min_{\bar{\Omega}} \omega.$$

証明は [13] を参照.

補題 4.3 ((1.2) の正値解に対する a priori 評価) $a_1 + a_2 > a_3$ とすると, (1.2) の正値解 (u, v) は次を満たす.

$$\max_{\bar{\Omega}} u < u_+^{**},\ \max_{\bar{\Omega}} v < u_+^{**} - 1.$$

さらに $d > 0$ に対してある定数 $\bar{C}_i(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0\ (i = 1, 2)$ が存在して, $d_i \ge d\ (i = 1, 2)$ ならば (1.2) の正値解 (u, v) は次を満たす.

$$\min_{\bar{\Omega}} u > \bar{C}_1,\ \min_{\bar{\Omega}} v > \bar{C}_2.$$

証明は [3](定理 3.2, 3.3) を参照.

補題 4.4 (2 種の shadow 系の正値解に対する a priori 評価) $a_1 + a_2 > a_3$ とし, (U, V) を次の方程式の正値解とする (U は非定数で V は定数).

$$\begin{cases} -d_1 \Delta U = U(a_1 + a_2 U - a_3 U^2 - kV), & \text{in } \Omega, \\ V = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (U - 1) dx, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

このとき (U, V) は次を満たす.

$$\max_{\bar{\Omega}} U < u_+^{**},\ V < u_+^{**} - 1.$$

また $d > 0$ に対してある定数 $\tilde{C}_i = \tilde{C}_i(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0\ (i = 1, 2)$ が存在して, $d_1 \ge d$ ならば (U, V) は次を満たす.

$$\min_{\bar{\Omega}} U > \tilde{C}_1,\ V > \tilde{C}_2.$$

証明.

(U, V) を (4.4) の正値解とし, U は $x_1 \in \bar{\Omega}$ で最大値を取るとする. 補題 4.1 の証明と同様にして,

$$U(x_1) < u_+^{**}.$$

すると (4.4)2 式より,

$$V \le \max_{\bar{\Omega}} U - 1 < u_+^{**} - 1.$$

故に $1 \le \max_{\bar{\Omega}} U$ であり, (4.4)1 式に補題 4.2 を用いると次を満たす定数 $C = C(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$ が存在する.

$$\min_{\bar{\Omega}} U \ge \frac{1}{C} \max_{\bar{\Omega}} U \ge \frac{1}{C}.$$

V の下からの評価は背理法で示す. $d_{1,n} \ge d$ な $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ とそれに対応する $V_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるような (4.4) の正値解列 (U_n, V_n) が存在したと仮定して矛盾を導く. (U_n, V_n) は次の方程式を満たしている.

$$\begin{cases} -d_{1,n}\Delta U_n = U_n(a_1 + a_2 U_n - a_3 U_n^2 - kV_n), & \text{in } \Omega, \\ V_n = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (U_n - 1)dx, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

(4.5)1 式は $-\Delta U_n = \frac{1}{d_{1,n}} U_n(a_1 + a_2 U_n - a_3 U_n^2 - kV_n)$ と書ける. 右辺は有界なので L^p 評価より $p > N$ として,

$$U_n \in \ W^{2,p}(\Omega), \ \|U_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C(\|f(U_n, V_n)\|_{L^p(\Omega)} + \|U_n\|_{L^p(\Omega)}) \le M.$$

埋め込み定理より $W^{2,p}(\Omega)$ は $C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ にコンパクトに埋め込めるので, 部分列を取ることで (同じ記号で書く) $U_n \to \tilde{U}$ in $C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(n \to \infty)$ となるような $0 \le \tilde{U} \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ が存在する. (4.5)1 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると,

$$\int_\Omega \tilde{U}(a_1 + a_2\tilde{U} - a_3\tilde{U}^2)dx = 0.$$

$0 < \frac{1}{C} \le \tilde{U} \le u_+^{**}$ なので $\tilde{U} = u_+^{**}$ となる. しかし (4.5)2 式で $n \to \infty$ とすると, $0 = u_+^{**} - 1 > 0$ となり矛盾する. よって定理の主張が示された.

以上の補題を用いて下からの a priori 評価を証明する.

定理 4.2 (下からの a priori 評価) $a_1 + a_2 > a_3$ とする. 補題 4.3, 4.4 より, $d > 0$ に対して $\bar{C}_2$, $\tilde{C}_2 > 0$ が存在するので $\Lambda = \min\{\bar{C}_2, \tilde{C}_2, v_*\} > 0$ とおいて $\beta\Lambda > \alpha$ とする. このときある定数 $C_1 = C_1(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$, $C_i = C_i(a_1, a_2, a_3, k, \alpha, \beta, \gamma, d, \Omega) > 0$ $(i = 2, 3)$ が存在して, $d_i \ge d$ $(i = 1, 2, 3)$ ならば (1.4) の正値解は次を満たす.

$$\min_{\bar{\Omega}} u > C_1, \ \min_{\bar{\Omega}} v > C_2, \ \min_{\bar{\Omega}} w > C_3.$$

証明.

(1.4)2 式を Ω 上で積分すると $\int_\Omega v(-1+u-v-w)dx = 0$ なので, $v(x_0)(-1+u(x_0)-v(x_0)-w(x_0)) = 0$ となるような $x_0 \in \bar{\Omega}$ が存在する. 故に

$$\max_{\bar{\Omega}} u \ge u(x_0) = 1 + v(x_0) + w(x_0) > 1.$$

(1.4)1 式に補題 4.2 を用いると, 次を満たすような定数 $C_1 = C_1(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$ が存在する.

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq \frac{1}{C_1} \max_{\bar{\Omega}} u > \frac{1}{C_1}.$$

v と w の評価は背理法で示す. $d_{i,n} \geq d$ $(i = 1, 2, 3)$ な $\{d_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ とそれに対応する $\min_{\bar{\Omega}} v_n \to 0$ または $\min_{\bar{\Omega}} w_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるような (1.4) の正値解列 (u_n, v_n, w_n) が存在したと仮定して矛盾を導く.

1. $\min_{\bar{\Omega}} v_n \to 0$ $(n \to \infty)$ の場合.
   (1.4)2 式 (u_n, v_n, w_n が満たす方程式) に補題 4.2 を用いると, $\max_{\bar{\Omega}} v_n \leq C \min_{\bar{\Omega}} v_n$ となる定数 $C = C(a_1, a_2, a_3, \beta, \gamma, d, \Omega) > 0$ が存在する. 故に,

$$v_n \to 0, \text{ uniformly on } \bar{\Omega} \ (n \to 0).$$

   $\tilde{v}_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty}$ とおくと, $(u_n, \tilde{v}_n, w_n)$ は次の方程式を満たしている.

$$\begin{cases} -d_{1,n}\Delta u_n = u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - k v_n), & \text{in } \Omega, \\ -d_{2,n}\Delta \tilde{v}_n = \tilde{v}_n(-1 + u_n - v_n - w_n), & \text{in } \Omega, \\ -d_{3,n}\Delta w_n = w_n(-\alpha + \beta v_n - \gamma w_n), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial n} = \frac{\partial w_n}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

   3 つの式を Ω 上で積分して,

$$\begin{cases} 0 = \int_\Omega u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - k v_n)dx, & \text{in } \Omega, \\ 0 = \int_\Omega \tilde{v}_n(-1 + u_n - v_n - w_n)dx, & \text{in } \Omega, \\ 0 = \int_\Omega w_n(-\alpha + \beta v_n - \gamma w_n)dx, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

   $p > N$ に対する L^p 評価と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $(u_n, \tilde{v}_n, w_n) \to (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ $(n \to \infty)$ となるような $0 \leq \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ が存在する. $\|\tilde{v}_n\|_\infty = 1$ より, $\|\tilde{v}\|_\infty = 1$ である. (4.7) で $n \to \infty$ とすると,

$$\int_\Omega \tilde{u}(a_1 + a_2\tilde{u} - a_3\tilde{u}^2)dx = 0, \ \int_\Omega \tilde{v}(-1 + \tilde{u} - \tilde{w})dx = 0, \ \int_\Omega \tilde{w}(-\alpha - \gamma\tilde{w})dx = 0.$$

   $-\alpha - \gamma\tilde{w} < 0$ なので, $\tilde{w} = 0$ となる. さらに $0 < \frac{1}{C_1} \leq \tilde{u} \leq u_+^{**}$ なので, $\tilde{u} = u_+^{**} > 1$ である. 故に $-1 + \tilde{u} - \tilde{w} > 0$ となり $\tilde{v} = 0$ が得られるが, これは $\|\tilde{v}\|_\infty = 1$ に矛盾する.

2. $\min_{\bar{\Omega}} v_n \geq \delta > 0$, $\min_{\bar{\Omega}} w_n \to 0$ の場合.
   $\tilde{w}_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_\infty}$ とおくと, $(u_n, v_n, \tilde{w}_n)$ は次の方程式を満たしている.

$$\begin{cases} -d_{1,n}\Delta u_n = u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - k v_n), & \text{in } \Omega, \\ -d_{2,n}\Delta v_n = v_n(-1 + u_n - v_n - w_n), & \text{in } \Omega, \\ -d_{3,n}\Delta \tilde{w}_n = \tilde{w}_n(-\alpha + \beta v_n - \gamma w_n), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

$p > N$ に対する L^p 評価と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $(u_n, v_n, \tilde{w}_n) \to (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ $(n \to \infty)$ となるような $0 \le \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ が存在する. $\|\tilde{w}\|_\infty = 1$ であり, (4.8)3 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると,

$$\int_\Omega \tilde{w}(-\alpha + \beta\tilde{v})dx = 0. \tag{4.9}$$

ここで $d_{1,n}$ と $d_{2,n}$ が有界かどうかで場合分けする.

(a) $d_{1,n}$ と $d_{2,n}$ が有界な場合.

部分列を取ることで, $d_{i,n} \to d_i$ $(n \to \infty)$ となる $d_i \ge d$ $(i = 1, 2)$ が存在する. (4.8)1 式の弱形式は任意の $\phi \in H^1(\Omega)$ に対して次のように書ける.

$$-d_{1,n} \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - k v_n)dx.$$

$n \to \infty$ とすると,

$$-d_1 \int_\Omega \nabla\tilde{u} \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \tilde{u}(a_1 + a_2\tilde{u} - a_3\tilde{u}^2 - k\tilde{v})dx.$$

故に $\tilde{u}$ は次の方程式を満たしている.

$$-d_1\Delta\tilde{u} = \tilde{u}(a_1 + a_2\tilde{u} - a_3\tilde{u}^2 - k\tilde{v}), \ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

(4.8)2 式についても同様にして, $\tilde{v}$ は次の方程式を満たしていることがわかる.

$$-d_2\Delta\tilde{v} = \tilde{v}(-1 + \tilde{u} - \tilde{v}), \ \frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

補題 4.3 より, $\min_{\bar{\Omega}} \tilde{v} > \bar{C}_2$ となる定数 $\bar{C}_2 = \bar{C}_2(a_1, a_2, a_3, k, d, \Omega) > 0$ が存在する. Λ の定義より, $\beta\tilde{v} > \beta\bar{C}_2 > \alpha$ である. よって (4.9) より $\tilde{w} = 0$ となるが, これは $\|\tilde{w}\|_\infty = 1$ に矛盾する.

(b) $d_{i,n} \to \infty$ $(i = 1, 2, \ n \to \infty)$ の場合.

(4.8)1 式の弱形式は任意の $\phi \in H^1(\Omega)$ に対して次のように書ける.

$$-\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\phi \, dx = \frac{1}{d_{1,n}} \int_\Omega u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - k v_n)dx.$$

$u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - k v_n)$ は有界なので $n \to \infty$ とすると, $\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\phi \, dx = 0$ となる. 故に $\tilde{u}$ は $-\Delta\tilde{u} = 0$, $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ を満たしているので, $\tilde{u} =$ 定数 > 0 である. 同様にして, $\tilde{v} =$ 定数 > 0 であることがわかる. (4.8)1 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると,

$$\int_\Omega \tilde{u}(a_1 + a_2\tilde{u} - a_3\tilde{u}^2 - k\tilde{v})dx = 0.$$

故に $a_1 + a_2\tilde{u} - a_3\tilde{u}^2 - k\tilde{v} = 0$ が成立している. (4.8)2 式に対しても同様にして, $-1 + \tilde{u} - \tilde{v} = 0$ が成立していることがわかる. $a_1 + a_2 > a_3$ より, (1.2) は唯一つの正値定数解 (u_*, v_*) を持つので, $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_*, v_*)$ でなければならない. Λ の定義より, $\beta\tilde{v} = \beta v_* > \alpha$ である. よって (4.9) より $\tilde{w} = 0$ となるが, これは $\|\tilde{w}\|_\infty = 1$ に矛盾する.

(c) $d_{1,n} \to \infty$ $(n \to 0)$ で, $d_{2,n}$ が有界な場合.

(a), (b) より $\tilde{u} =$ 定数 > 0 であり,

$$\begin{cases} -d_2 \Delta \tilde{v} = \tilde{v}(-1 + \tilde{u} - \tilde{v}), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

(4.10) の両辺に $\tilde{v}$ を掛けて Ω 上で積分すると, $d_2 \int_\Omega |\nabla \tilde{v}|^2 dx = \int_\Omega \tilde{v}^2(-1 + \tilde{u} - \tilde{v}) dx$ が得られる. 即ち,

$$0 < d_2 \int_\Omega |\nabla \tilde{v}|^2 \, dx + \int_\Omega \tilde{v}^3 dx = (\tilde{u} - 1) \int_\Omega \tilde{v}^2 dx.$$

故に $\tilde{u} > 1$ でなければならない. また $f(t) = t(-1 + \tilde{u} - t)$ とおくと, $\frac{f(t)}{t}$ は t に関して単調減少なので (4.10) の解は一意的である. $\tilde{u} - 1$ は (4.10) の解なので, $\tilde{v} = \tilde{u} - 1 > 0$ となる. $\tilde{u}$ と $\tilde{v}$ が正の定数であることが分かったので, (b) と同様にして矛盾が示せる.

(d) $d_{1,n}$ が有界で, $d_{2,n} \to \infty$ $(n \to \infty)$ の場合.

(a), (b) より $\tilde{v} =$ 定数 > 0 であり,

$$\begin{cases} -d_1 \Delta \tilde{u} = \tilde{u}(a_1 + a_2 \tilde{u} - a_3 \tilde{u}^2 - k\tilde{v}), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

(4.8)2 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると, $\int_\Omega \tilde{v}(-1 + \tilde{u} - \tilde{v}) dx = 0$ が得られる. 即ち,

$$\tilde{v} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (\tilde{u} - 1) dx.$$

故に補題 4.4 より, $\min_{\bar{\Omega}} \tilde{v} > \tilde{C_2}$ となる定数 $\tilde{C_2} = \tilde{C_2}(a_1, a_2, a_3, k, \alpha, \beta, \gamma, d, \Omega) > 0$ が存在する. Λ の定義より, $\beta \tilde{v} > \beta \tilde{C_2} > \alpha$ である. よって (4.9) より $\tilde{w} = 0$ となるが, これは $\|\tilde{w}\|_\infty = 1$ に矛盾する.

以上より, $\min_{\bar{\Omega}} v > C_2$, $\min_{\bar{\Omega}} w > C_3$ となる定数 $C_i = C_i(a_1, a_2, a_3, k, \alpha, \beta, \gamma, d, \Omega) > 0$ $(i = 2, 3)$ が存在することが示された.

5 (1.4) の正値非定数解の非存在と存在について

5.1 (1.4) の正値非定数解の非存在

この小節では (1.4) の正値非定数解が存在しないという定理を述べる. 次の定理は拡散係数がどれもある程度大きく, 特にある拡散係数に比べて他の拡散係数が十分大きいときに定数解しか存在しないことを示すものである.

定理 5.1 (正値非定数定常解の非存在) $a_1+a_2>a_3$とする.このとき,

1. ある $\tilde{d_1}>0$ と $\tilde{d_3}>0$ が存在して, $\mu_1 d_1>\tilde{d_1}$, $\mu_1 d_2>u_+^{**}-1$, $\mu_1 d_3>\tilde{d_3}$ ならば (1.4) は正値非定数解をもたない.

2. ある $\tilde{d_2}>0$ が存在して, $\mu_1 d_1>a_1+2|a_2|u_+^{**}$, $\mu_1 d_2>\tilde{d_2}$, $\mu_1 d_3>\beta\left(u_+^{**}-1\right)$ ならば (1.4) は正値非定数解をもたない.

証明. $\bar{u}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$ とする. この証明では補題 2.5 の Poincare の不等式を用いる.

1. (u,v,w) を (1.4) の正値解とする. (1.4)1 式に $u-\bar{u}$を掛けてΩ 上で積分すると $\int_\Omega(u-\bar{u})dx=0$ より,

$$\begin{aligned} d_1\int_\Omega|\nabla(u-\bar{u})|^2dx &= \int_\Omega\left\{a_1u+a_2u^2-a_3u^3-kuv-(a_1\bar{u}+a_2\bar{u}^2-a_3\bar{u}^3-k\bar{u}\bar{v})\right\}(u-\bar{u})dx \\ &= \int_\Omega\left\{a_1(u-\bar{u})+a_2(u^2-\bar{u}^2)-a_3(u^3-\bar{u})^3-k(uv-\bar{u}\bar{v})\right\}(u-\bar{u})dx \\ &= \int_\Omega\left\{a_1+a_2(u+\bar{u})-a_3(u^2+u\bar{u}+\bar{u}^2)-kv\right\}(u-\bar{u})^2dx \\ &- k\bar{u}\int_\Omega(u-\bar{u})(v-\bar{v})dx \\ &\le \int_\Omega(a_1+2|a_2|u_+^{**})(u-\bar{u})^2dx-k\bar{u}\int_\Omega(u-\bar{u})(v-\bar{v})dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -k\bar{u}\int_\Omega(u-\bar{u})(v-\bar{v})dx &\le \int_\Omega\left(\frac{k\bar{u}}{\sqrt{2\epsilon}}|u-\bar{u}|\right)\left(\sqrt{2\epsilon}|v-\bar{v}|\right)dx \quad (\forall\epsilon>0) \\ &\le \frac{k^2\bar{u}^2}{4\epsilon}\int_\Omega(u-\bar{u})^2dx+\epsilon\int_\Omega(v-\bar{v})^2dx \\ &\le \frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon}\int_\Omega(u-\bar{u})^2dx+\epsilon\int_\Omega(v-\bar{v})^2dx. \end{aligned} \tag{5.1}$$

よって,

$$d_1\int_\Omega|\nabla(u-\bar{u})|^2dx\le\left\{a_1+2|a_2|u_+^{**}+\frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon}\right\}\int_\Omega(u-\bar{u})^2dx+\epsilon\int_\Omega(v-\bar{v})^2dx. \tag{5.2}$$

(1.4)2 式に $v-\bar{v}$を掛けてΩ 上で積分すると,

$$\begin{aligned} -d_2\int_\Omega|\nabla(v-\bar{v})|^2dx &= \int_\Omega\left\{-v+uv-v^2-vw-(-\bar{v}+\bar{u}\bar{v}-\bar{v}^2-\bar{v}\bar{w})\right\}(v-\bar{v}) \\ &= \int_\Omega\{-1+u-(v+\bar{v})-w\}(v-\bar{v})^2dx \\ &+ \bar{v}\int_\Omega(u-\bar{u})(v-\bar{v})dx-\bar{v}\int_\Omega(v-\bar{v})(w-\bar{w})dx \\ &\le \int_\Omega(u_+^{**}-1)(v-\bar{v})^2dx+\bar{v}\int_\Omega(u-\bar{u})(v-\bar{v})dx-\bar{v}\int_\Omega(v-\bar{v})(w-\bar{w})dx. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}\int_\Omega (u-\bar{u})(v-\bar{v})dx &\le \int_\Omega \left(\frac{\bar{v}}{\sqrt{2\epsilon}}|u-\bar{u}|\right)\left(\sqrt{2\epsilon}|v-\bar{v}\right)dx \quad (\forall\epsilon>0)\\
&\le \frac{\bar{v}^2}{4\epsilon}\int_\Omega (u-\bar{u})^2dx+\epsilon\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx\\
&\le \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}\int_\Omega (u-\bar{u})^2dx+\epsilon\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx. \qquad (5.3)\\
-\bar{v}\int_\Omega (v-\bar{v})(w-\bar{w})dx &\le \epsilon\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx+\frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}\int_\Omega (w-\bar{w})^2dx. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
d_2\int_\Omega |\nabla(v-\bar{v})|^2dx &\le \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}\int_\Omega (u-\bar{u})^2dx+(u_+^{**}-1+2\epsilon)\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx\\
&+ \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}\int_\Omega (w-\bar{w})^2dx. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

(1.4)3 式に $w-\bar{w}$を掛けてΩ 上で積分すると,

$$
\begin{aligned}
d_3\int_\Omega |\nabla(w-\bar{w})|^2dx &= \int_\Omega \left\{-\alpha w+\beta vw-\gamma w^2-(\alpha\bar{w}+\beta\bar{v}\bar{w}-\gamma\bar{w}^2)\right\}(w-\bar{w})dx\\
&= \int_\Omega \{-\alpha+\beta v-\gamma(w+\bar{w})\}(w-\bar{w})^2dx+\beta\bar{w}\int_\Omega (v-\bar{v})(w-\bar{w})dx\\
&\le \beta(u_+^{**}-1)\int_\Omega (w-\bar{w})^2dx+\beta\bar{w}\int_\Omega (v-\bar{v})(w-\bar{w})dx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta\bar{w}\int_\Omega (v-\bar{v})(w-\bar{w})dx &\le \int_\Omega (\sqrt{2\epsilon}|v-\bar{v}|)\left(\frac{\beta\bar{w}}{\sqrt{2\epsilon}}|w-\bar{w}|\right)dx \quad (\forall\epsilon>0)\\
&\le \epsilon\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx+\frac{\beta^2\bar{w}^2}{4\epsilon}\int_\Omega (w-\bar{w})^2dx\\
&\le \epsilon\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx+\frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2}\int_\Omega (w-\bar{w})^2dx. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
d_3\int_\Omega |\nabla(w-\bar{w})|^2dx \le \epsilon\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx+\left\{\beta(u_+^{**}-1)+\frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2}\right\}\int_\Omega (w-\bar{w})^2dx. \qquad (5.7)
$$

(5.2),(5.5),(5.7) より,

$$
\begin{aligned}
&d_1\int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2dx+d_2\int_\Omega |\nabla(v-\bar{v})|^2dx+d_3\int_\Omega |\nabla(w-\bar{w})|^2dx\\
\le\ &\left\{a_1+2|a_2|u_+^{**}+\frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon}+\frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}\right\}\int_\Omega (u-\bar{u})^2dx+(u_+^{**}-1+4\epsilon)\int_\Omega (v-\bar{v})^2dx\\
+\ &\left\{\beta(u_+^{**}-1)+\frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}+\frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2}\right\}\int_\Omega (w-\bar{w})^2dx.
\end{aligned}
$$

Poincare の不等式より,

$$\begin{aligned}
&\mu_1 d_1 \int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2 dx + \mu_1 d_2 \int_\Omega |\nabla(v-\bar{v})|^2 dx + \mu_1 d_3 \int_\Omega |\nabla(w-\bar{w})|^2 dx \\
\leq\ & \left\{a_1 + 2|a_2|u_+^{**} + \frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon} + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}\right\} \int_\Omega (u-\bar{u})^2 dx + (u_+^{**} - 1 + 4\epsilon) \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx \\
+\ & \left\{\beta(u_+^{**}-1) + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon} + \frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2}\right\} \int_\Omega (w-\bar{w})^2 dx.
\end{aligned}$$

ここで, $\mu_1 d_2 > u_+^{**} - 1$ とし $\mu_1 d_2 > u_+^{**} - 1 + 4\epsilon$ となるように ϵ を小さく取って固定する. そして $\tilde{d}_1 > a_1 + 2|a_2|u_+^{**} + \frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon} + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon}$, $\tilde{d}_3 > \beta(u_+^{**}-1) + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon} + \frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2}$ な $\tilde{d}_1$ と $\tilde{d}_3$ を取ると, $\mu_1 d_1 > \tilde{d}_1$, $\mu_1 d_3 > \tilde{d}_3$ ならば次を満たすような $\delta_i > 0$ $(i = 1,2,3)$ が存在する.

$$\delta_1 \int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2 dx + \delta_2 \int_\Omega |\nabla(v-\bar{v})|^2 dx + \delta_3 \int_\Omega |\nabla(w-\bar{w})|^2 dx \leq 0.$$

よって, $(u,v,w) = (\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ となる.

2. (5.1), (5.3), (5.4), (5.6) で ϵ を出す方を換えると,

$$\begin{aligned}
-k\bar{u} \int_\Omega (u-\bar{u})(v-\bar{v}) dx &\leq \epsilon \int_\Omega (u-\bar{u})^2 dx + \frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx, \\
\bar{v} \int_\Omega (u-\bar{u})(v-\bar{v}) &\leq \epsilon \int_\Omega (u-\bar{u})^2 dx + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx, \\
-\bar{v} \int_\Omega (v-\bar{v})(w-\bar{w}) dx &\leq \frac{(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 + \epsilon \int_\Omega (w-\bar{w})^2 dx, \\
\beta\bar{w} \int_\Omega (v-\bar{v})(w-\bar{w}) dx &\leq \frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx + \epsilon \int_\Omega (w-\bar{w})^2 dx.
\end{aligned}$$

すると, (5.2),(5.5),(5.7) は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
d_1 \int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2 dx &\leq (a_1 + 2|a_2|u_+^{**} + \epsilon) \int_\Omega (u-\bar{u})^2 dx + \frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx, \\
d_2 \int_\Omega |\nabla(v-\bar{v})|^2 dx &\leq \epsilon \int_\Omega (u-\bar{u})^2 dx + \left\{u_+^{**} - 1 + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{2\epsilon}\right\} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx + \epsilon \int_\Omega (w-\bar{w})^2 dx, \\
d_3 \int_\Omega |\nabla(w-\bar{w})|^2 dx &\leq \frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 + \{(\beta(u_+^{**}-1) + \epsilon\} \int_\Omega (w-\bar{w})^2 dx.
\end{aligned}$$

この 3 つの式と Poincare の不等式より,

$$\begin{aligned}
&\mu_1 d_1 \int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2 dx + \mu_1 d_2 \int_\Omega |\nabla(v-\bar{v})|^2 dx + \mu_1 d_3 \int_\Omega |\nabla(w-\bar{w})|^2 dx \\
\leq\ & (a_1 + 2|a_2|u_+^{**} + 2\epsilon) \int_\Omega (u-\bar{u})^2 dx \\
+\ & \left\{u_+^{**} - 1 + \frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon} + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{2\epsilon} + \frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2}\right\} \int_\Omega (v-\bar{v})^2 dx \\
+\ & \{\beta(u_+^{**}-1) + 2\epsilon\} \int_\Omega (w-\bar{w})^2 dx.
\end{aligned}$$

ここで, $\mu_1 d_1 > a_1 + 2|a_2|u_+^{**}$, $\mu_1 d_3 > \beta(u_+^{**} - 1)$ とし $\mu_1 d_1 > a_1 + 2|a_2|u_+^{**} + 2\epsilon$, $\mu_1 d_3 > \beta(u_+^{**} - 1) + 2\epsilon$ となるように ϵ を小さく取って固定する. そして $\tilde{d}_2 > u_+^{**} - 1 + \frac{k^2(u_+^{**})^2}{4\epsilon} + \frac{(u_+^{**}-1)^2}{2\epsilon} + \frac{\beta^4(u_+^{**}-1)^2}{4\epsilon\gamma^2}$ な $\tilde{d}_2$ を取ると, $\mu_1 d_2 > \tilde{d}_2$ ならば次を満たすような $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ が存在する.

$$\delta_1 \int_\Omega (u - \bar{u})^2 dx + \delta_2 \int_\Omega (v - \bar{v})^2 dx + \delta_3 \int_\Omega (w - \bar{w})^2 dx \leq 0.$$

よって, $(u, v, w) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ となる.

5.2 (1.4) の正値非定数解の存在

この小節では (1.4) の正値非定数解が存在するという定理を述べる. 次の定理は Ω と各パラメータがある条件を満たしているときに u の拡散係数が小さく, v と w の拡散係数が十分大きいならば非定数解が存在することを示すものである.

定理 5.2 (正値非定数定常解の存在) $a_1 + a_2 > a_3$, $\theta_* > 0$ とし, ある $s \geq 1$ に対して $\frac{\theta_*}{d_1} \in (\mu_s, \mu_{s+1})$ とする. すると定理 4.2 で述べた $d = \frac{\theta_*}{2\mu_{s+1}}$ に対する $\Lambda = \Lambda(a_1, a_2, a_3, k, \Omega) > 0$ が定まる. その Λ に対して $\beta\Lambda > \alpha$ とし, $\frac{\theta^*}{d_1} \in (\mu_s, \mu_{s+1})$ となるほど γ は十分大きいとする. このとき $\sum_{j=1}^{s} m(\mu_j)$ が奇数ならば, ある $\hat{d} > 0$ が存在して $d_2, d_3 \geq \hat{d}$ に対して (1.4) は正値非定数解をもつ.

注 3. 3 節の注 2. で述べたように $\theta^* \leq v^*$ ならば拡散がないときに (u^*, v^*, w^*) は安定となるので, この定理は $0 < \theta^* \leq v^*$ のときには Turing の拡散誘導不安定化が起きることを示唆している.

また, $\theta^* > 0$ となるための必要十分条件は $a_2^2 - \frac{2k\gamma}{\beta+\gamma}a_2 - 4a_3\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta+\gamma}k - a_1\right) < 0$ である. (1.2) の非定数解の存在を示すための対応する条件は $\theta_* > 0$ である. 3 節の注 1. で述べたように $u_* < u^*$ が成立しているので, $\theta^* \geq 0$ ならば $\theta_* > 0$ となる. $\theta_* > 0$ のときに $\theta^* > 0$ となる必要十分条件は 3 節の注 1. と同様にして次の不等式が成立することである.

$$\gamma > \frac{4a_3k\alpha - (a_2^2 + 4a_1a_3)\beta}{a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1 + k)} = \frac{a_2^2 + 4a_1a_3}{|a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1 + k)|}\beta - \frac{4a_3k\alpha}{|a_2^2 - 2a_2k + 4a_3(a_1 + k)|}.$$

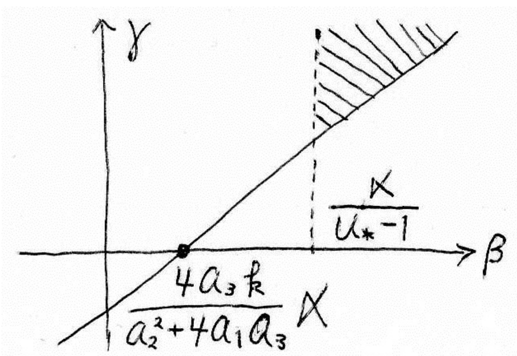

図 3. $\theta_* > 0$ のときに $\theta^* > 0$ となる β と γ の領域.

定理の証明.

次のように記号を定める.

$$\mathbf{u} = (u, v, w),\ \mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*),\ D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u(a_1 + a_2 u - a_3 u^2 - kv) \\ v(-1 + u - v - w) \\ w(-\alpha + \beta v - \gamma w) \end{pmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \theta^* & -ku^* & 0 \\ v^* & -v^* & -v^* \\ 0 & \beta w^* & -\gamma w^* \end{pmatrix}.$$

すると $D_{\mathbf{u}}\mathbf{G}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{A}$ であり, (1.4) は次のように書き換えられる.

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

故に $f(d_1, d_2, d_3; \mathbf{u}) = \mathbf{u} - (\mathbf{I} - \Delta)^{-1}\{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}\}$ とすると, $\mathbf{u}$ が (1.4) の解であるということは $f(d_1, d_2, d_3; \mathbf{u}) = 0$ on $\mathbf{X}$ の解であることと同値である. 故に $f(d_1, d_2, d_3; \mathbf{u}^*) = 0$ である. また,

$$D_{\mathbf{u}} f(d_1, d_2, d_3; \mathbf{u}^*) = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \Delta)^{-1}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{I}),\ D_{\mathbf{u}} f(d_1, d_2, d_3; \mathbf{u}^*) = 0.$$

(1.4) の正値解に対する a priori 評価より $\partial\Theta$ に $f(d_1, d_2, d_3; \mathbf{u}) = 0$ の解が存在しないような定数 $C > 0$ が存在する. 但し,

$$\Theta = \left\{ \mathbf{u} \in \{C^1(\bar{\Omega})\}^3 \mid \frac{C}{2} < u, v, w < \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) u_+^{**} \right\}.$$

$K = (\mathbf{I} - \Delta)^{-1}\{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}\} : \Theta \to \{C^1(\bar{\Omega})\}^3$ はコンパクトである. 実際, $\mathbf{u}_n$ を有界列とすると $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}$ も各成分で有界である. $K\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n$ とすると, $(\mathbf{I} - \Delta)\mathbf{v}_n = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{u}_n$ となる. $p > N$ に対する L^p 評価と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ となる $\mathbf{v} \in \{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ $(0 < \sigma < 1)$ が存在する.

非定数解の存在を示すために写像度の理論を用いる.

補題 5.1 (Leray-Schauder の定理) X をバナッハ空間, $\Omega \subset X$ を有界な開集合, $\phi \in C^1(\bar{\Omega}, X)$, $\phi|_{\partial\Omega} \neq 0$, $K = I - \phi$ をコンパクト, $x_0 \in \Omega$ を $\phi(x_0) = 0$ の孤立点, $\phi_x(x_0) = I - K_x(x_0)$ は可逆 (即ち, 1 が $K_x(x_0)$ の固有値でない) とする. このとき $B_\epsilon(x_0)$ を x_0 を中心とする十分小さい半径 ϵ の球, $m(\xi)$ を ξ の多重度として,

$$\text{index}(\phi, x_0) = (-1)^r,\quad r = \sum_{\xi \in EV(K_x(x_0)),\ \lambda > 1} m(\lambda).$$

証明は [18] を参照.

後に $\mathbf{u}^*$ しか $f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u})=0$ の解がない状況を考えるので Leray-schauder の定理より, 1 が $\mathbf{I}-D_{\mathbf{u}}f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u}^*)$ の固有値でないならば,

$$\mathrm{index}(f(d_1,d_2,d_3;\cdot),\mathbf{u}^*)=(-1)^r,\quad r=\sum_{\xi\in EV(\mathbf{I}-D_{\mathbf{u}}f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u}^*)),\ \xi>1} m(\xi).$$

即ち, 0 が $D_{\mathbf{u}}f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u}^*)$ の固有値でないならば,

$$\mathrm{index}(f(d_1,d_2,d_3;\cdot),\mathbf{u}^*)=(-1)^r,\quad r=\sum_{\xi\in EV(D_{\mathbf{u}}f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u}^*)),\ \xi<0} m(\xi).$$

ここで, $D_{\mathbf{u}}f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u}^*)$ の固有値について考える. $D_{\mathbf{u}}f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u}^*)\mathbf{u}=\xi\mathbf{u}$ on $\mathbf{X}$ $(\mathbf{u}\neq\mathbf{0})$ とすると, $(1-\xi)(\mathbf{I}-\Delta)\mathbf{u}=(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{u}$ である. $\mathbf{u}=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{c}_j\phi_j$ $(\mathbf{c}_j\in\mathbf{R}^3,\ \mathbf{c}_j\phi_j\in\mathbf{X}_j)$ と固有関数展開すると,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-\xi)(1+\mu_j)\mathbf{c}_j\phi_j=\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{c}_j\phi_j.$$

$\phi_i\neq 0$ となる $i\geq 0$ が存在するので ϕ_i を掛けて Ω 上で積分すると $\int_\Omega\phi_i\phi_j dx=\delta_{ij}$ より,

$$(1-\xi)(1+\mu_i)\mathbf{c}_i=(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{c}_i.$$

即ち,

$$(\mu_i\mathbf{I}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{c}_i=\xi(1+\mu_i)\mathbf{c}_i.$$

故に

$$\mathbf{M}(\mu_j)=\mu_j\mathbf{I}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mu_j-\frac{\theta^*}{d_1} & \frac{ku^*}{d_1} & 0\\ -\frac{v^*}{d_2} & \mu_j+\frac{v^*}{d_2} & \frac{v^*}{d_2}\\ 0 & \frac{-\beta w^*}{d_3} & \mu_j+\frac{\gamma w^*}{d_3}\end{pmatrix}\text{とおくと},$$

0 が $D_{\mathbf{u}}f(d_1,d_2,d_3;\mathbf{u}^*)$ の固有値でないということは全ての $j\geq 0$ に対して 0 が $\mathbf{M}(\mu_j)$ の固有値でないことと同値である. よって全ての $j\geq 0$ に対して $\mathbf{M}(\mu_j)$ が正則ならば

$\mathrm{index}(f(d_1,d_2,d_3;\cdot),\mathbf{u}^*)=(-1)^r$, r は $\mathbf{M}(\mu_j)$ $(j\geq 0)$ の固有値の中で負の値を取るときの $m(\mu_j)$ の和.

$\mathbf{M}(\mu_j)$ の固有多項式 $I_j(\lambda)$ は次のように書ける.

$$I_j(\lambda)=\lambda^3-\{tr\mathbf{M}(\mu_j)\}\lambda^2+\{\mathbf{M}(\mu_j)\text{ の対角成分の余因子の和 }\}-\det\mathbf{M}(\mu_j).$$

命題 2.2 より, $\det\mathbf{M}(\mu_0)=\frac{v^*w^*}{d_1d_2d_3}\{k\gamma u^*-(\beta+\gamma)\theta^*\}>0$ となる. すると $I_0(\lambda)=0$ の解は「正の解 3 つ」または「正の解 1 つと負の解 2 つ」であることがわかる. よって index を計算する上で $j=0$ は除いてよい. そこで $j\geq 1$ として $\mathbf{M}(\mu_j)$ の固有値について, 拡散係数が全て大きい場合と d_2 と d_3 のみが大きい場合に分けて考える.

1. 拡散係数が全て大きい場合.

   定理 5.1 の 1. より, $\bar{d} = \max\{\frac{\tilde{d}_1}{\mu_1}, \frac{u_+^{**}-1}{\mu_1}, \frac{\tilde{d}_3}{\mu_1}\}$ とすると, $d_i > \bar{d}$ $(i = 1, 2, 3)$ に対して (1.4) は正値非定数解をもたない. また $\frac{2\theta^*}{\tilde{d}} = \mu_1$ な $\tilde{d} > 0$ を取ると, $d_1 > \tilde{d}$ に対して $\frac{\theta^*}{d_1} < \mu_1$ である. そこで $d_i > \max\{\bar{d}, \tilde{d}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ とする. $\mathbf{M}(\mu_j)$ で d_2, $d_3 \to \infty$ とすると,

$$\mathbf{M}(\mu_j) \to \mathbf{M}_\infty(\mu_j) = \begin{pmatrix} \mu_j - \frac{\theta^*}{d_1} & \frac{ku^*}{d_1} & 0 \\ 0 & \mu_j & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j \end{pmatrix} \quad (d_2, d_3 \to \infty).$$

   $\mu_j - \frac{\theta^*}{d_1} \geq \mu_1 - \frac{\theta^*}{d_1} > 0$ なので, $\mathbf{M}_\infty(\mu_j)$ $(j \geq 1)$ の固有値は全て正である. また $\mathbf{M}(\mu_j)$ は,

$$\mathbf{M}(\mu_j) = \mathbf{M}_\infty(\mu_j) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v^*}{d_2} & \frac{v^*}{d_2} & \frac{v^*}{d_2} \\ 0 & -\frac{\beta w^*}{d_3} & \frac{\gamma w^*}{d_3} \end{pmatrix} \text{と書ける.}$$

   故に補題 3.2(行列の正則摂動理論) より, 任意の $j \geq 1$ に対してある $D_j > 0$ が存在して d_2, $d_3 \geq D_j$ ならば $\mathbf{M}(\mu_j)$ の固有値は正となる. $\mathbf{M}(\mu_{j+1}) = \mathbf{M}(\mu_j) + c_j\mathbf{I}$ $(c_j \geq 0)$ より, $\mathbf{M}(\mu_j)$ の固有値が正ならば $\mathbf{M}(\mu_{j+1})$ の固有値も正である. よって d_2, $d_3 \geq D_1$ に対して $\mathbf{M}(\mu_j)$ $(j \geq 1)$ の固有値は全て正となる. 以上より $\check{d} > \max\{\bar{d}, \tilde{d}, D_1\}$ とすると, $\mathbf{u}^*$ は $f(\check{d}, \check{d}, \check{d}; \mathbf{u}) = 0$ のただ 1 つの解となるので,

$$\mathrm{index}(f(\check{d}, \check{d}, \check{d}; \cdot), \mathbf{u}^*) = (-1)^0 = 1. \tag{5.8}$$

2. $\frac{\theta^*}{d_1} \in (\mu_s, \mu_{s+1})$ (ある $s \geq 1$) であり, d_2 と d_3 のみが大きい場合.

   $\mu_{s+1} - \frac{\theta^*}{d_1} > 0$ なので 1. と同様にして, d_2, $d_3 \geq D_{s+1}$ ならば $\mathbf{M}(\mu_j)$ $(j \geq s+1)$ の固有値は全て正となる. 故に $\mathbf{M}(\mu_j)$ が負の固有値をもつのは $1 \leq j \leq s$ のときのみである. そこで $\hat{d} > D_{s+1}$ を取り, d_2, $d_3 \geq \hat{d}$ に対して (1.4) は正値非定数解をもたないと仮定する. すると $\mathbf{u}^*$ は $f(d_1, d_2, d_3; \mathbf{u}) = 0$ のただ 1 つの解となるので,

$$\mathrm{index}(f(d_1, d_2, d_3; \cdot), \mathbf{u}^*) = (-1)^r = -1, \quad r = \sum_{j=1}^{s} m(\mu_j). \tag{5.9}$$

次に写像度を計算することで矛盾を導く. d_2, $d_3 \geq \hat{d}$, $t \in [0, 1]$ に対して,

$$\mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} td_1 + (1-t)\check{d} & 0 & 0 \\ 0 & td_2 + (1-t)\check{d} & 0 \\ 0 & 0 & td_3 + (1-t)\check{d} \end{pmatrix} \text{とし,次の方程式を考える.}$$

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{u} = \mathbf{D}(t)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

$h(\mathbf{u},t)=\mathbf{u}-(\mathbf{I}-\Delta)^{-1}\{\mathbf{D}^{-1}(t)\mathbf{G}(\mathbf{u})+\mathbf{u}\}$ とすると, $d_i=\check{d}$ のときと $d_2,\ d_3\geq\hat{d}$ のときの (1.4) の解はそれぞれ $h(\mathbf{u},0)=0$, $h(\mathbf{u},1)=0$ の解になる.

また, $g(\mathbf{u},t)=(\mathbf{I}-\Delta)^{-1}\{\mathbf{D}^{-1}(t)\mathbf{G}(\mathbf{u})+\mathbf{u}\}:\Theta\times[0,1]\to\{C^1(\bar{\Omega})\}^3$ はコンパクトである. 実際, $(\mathbf{u}_n,t_n)$ を$\Theta\times[0,1]$ の有界列とすると, 部分列を取ることで t_n はある $t\in[0,1]$ に収束し, $\mathbf{D}^{-1}(t_n)\mathbf{G}(\mathbf{u}_n)+\mathbf{u}_n$ も各成分で有界となる. $g(\mathbf{u}_n,t_n)=\mathbf{v}_n$ とすると, $(\mathbf{I}-\Delta)\mathbf{v}_n=\mathbf{D}^{-1}(t_n)\mathbf{G}(\mathbf{u}_n)+\mathbf{u}_n$ となる. 故に $p>N$ に対する L^p 評価と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $\mathbf{v}_n\to\mathbf{v}$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ $(n\to\infty)$ となる $\mathbf{v}\in\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ $(0<\sigma<1)$ が存在する.

故に $\deg(h(\mathbf{u},t),\Theta,0)$ は well-defined である. deg のホモトピー不変性より,

$$\deg(h(\cdot,0),\Theta,0)=\deg(h(\cdot,1),\Theta,0). \tag{5.10}$$

しかし $\check{d}$ と $\hat{d}$ の取り方から $h(\mathbf{u},0)=0$ と $h(\mathbf{u},1)=0$ は Θ でただ 1 つの解 $\mathbf{u}^*$ をもつので, B_ϵ を $\mathbf{u}^*$ を中心とする十分小さい半径 ϵ の球として (5.8), (5.9) より,

$$\begin{aligned}\deg(h(\cdot,0),\Theta,0) &= \deg(h(\cdot,0),B_\epsilon,0)=\mathrm{index}(h(\cdot,0),\mathbf{u}^*)=\mathrm{index}(f(\check{d},\check{d},\check{d};\cdot),\mathbf{u}^*)=1.\\ \deg(h(\cdot,1),\Theta,0) &= \mathrm{index}(f(d_1,d_2,d_3;\cdot),\mathbf{u}^*)=-1.\end{aligned}$$

これは (5.10) に矛盾するので, $d_2,\ d_3\geq\hat{d}$ に対して (1.4) が非定数解をもつことが示せた.

6 Shadow 系について

shadow 系の非定数解の存在については [19] などで議論されている. この節では (1.2) で $d_2\to\infty$ としたときの shadow 系と (1.4) で $d_2,d_3\to\infty$ としたときの shadow 系の正値非定数解の存在を示す.

定理 6.1 ((1.2) の shadow 系の正値非定数解の存在) $a_1+a_2>a_3$, $\theta_*>0$, $\frac{\theta_*}{d_1}\neq\mu_j$ $(j\geq1)$ とする. このとき, (1.2) の正値非定数解列 (u_n,v_n) が存在するならば部分列を取ることで, $(u_n,v_n)\to(U,V)$ in $\{C^1(\bar{\Omega})\}^2$ $(d_{2,n}\to\infty)$ となるような $U,V\in C^1(\bar{\Omega})$ が存在する. さらに U は正の非定数, V は正の定数で次の方程式を満たす.

$$\begin{cases}-d_1\Delta U=U(a_1+a_2U-a_3U^2-kV)dx, & \text{in }\Omega,\\ V=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega(U-1)dx, & \text{in }\Omega,\\ \frac{\partial U}{\partial n}=0, & \text{on }\partial\Omega,\end{cases}$$

証明.

$d_{2,n}\to\infty$ な $\{d_{2,n}\}_{n=1}^\infty$ とそれに対応する (1.2) の正値非定数解列 (u_n,v_n) を取る. (u_n,v_n) は次の方程式を満たしている.

$$\begin{cases}-d_1\Delta u_n=u_n(a_1+a_2u_n-a_3u_n^2-ku_nv_n), & \text{in }\Omega,\\ -d_{2,n}\Delta v_n=v_n(-1+u_n-v_n), & \text{in }\Omega,\\ \frac{\partial u_n}{\partial n}=\frac{\partial v_n}{\partial n}=0, & \text{on }\partial\Omega,\end{cases} \tag{6.1}$$

$p > N$ に対する L^p評価と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $(u_n, v_n) \to (U, V)$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^2$ となる $0 < U, V \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ が存在する. (6.1)1 式の弱形式で $n \to \infty$ とすると任意の $\phi \in H^1(\Omega)$ に対して,

$$d_1 \int_\Omega \nabla U \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega U(a_1 + a_2 U - a_3 U^2 - kUV)\phi dx.$$

$p > N$ に対する L^p 評価より $U \in W^{2,p}(\Omega)$ なので, U は次の方程式を満たしている.

$$\begin{cases} -d_1 \Delta U = U(a_1 + a_2 U - a_3 U^2 - kV), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

(6.1)2 式についても同様にして, V は次の方程式を満たしていることがわかる.

$$\begin{cases} \Delta V = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

故に V は正の定数である. さらに (6.1)2 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると, $\int_\Omega V(-1 + U - V)dx = 0$ となる. 即ち,

$$V = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (U - 1)dx.$$

ここで U が定数と仮定して矛盾を導く. U と V が満たす方程式は次のようになる.

$$a_1 + a_2 U - a_3 U^2 - kV = 0, \ -1 + U - V = 0.$$

$a_1 + a_2 > a_3$ より, (u_*, v_*) は (1.2) のただ 1 つの正値定数解なので $(U, V) = (u_*, v_*)$ となる. ここで次のように関数を定める.

$$f_n = u_n - u_*, \ g_n = v_n - v_*, \ \tilde{f}_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty}, \ \tilde{g}_n = \frac{g_n}{\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty}.$$

(6.1) の右辺を次のように書きかえる.

$$\begin{aligned} u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - kv_n) &= u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - kv_n) - u_n(a_1 + a_2 u_* - a_3 u_*^2 - kv_*) \\ &= u_n\{a_2 f_n - a_3 f_n(u_n + u_*) - kg_n\} \\ &= u_n f_n\{a_2 - a_3(u_n + u_*)\} - ku_n g_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_n(-1 + u_n - v_n) &= v_n(-1 + u_n - v_n) - v_n(-1 + u_* - v_*) \\ &= v_n(f_n - g_n). \end{aligned}$$

すると (u_n, v_n) の方程式は次のように書ける.

$$\begin{cases} -d_1 \Delta \tilde{f}_n = u_n \tilde{f}_n\{a_2 - a_3(u_n + u_*)\} - ku_n \tilde{g}_n, & \text{in } \Omega, \\ -d_{2,n} \Delta \tilde{g}_n = v_n(\tilde{f}_n - \tilde{g}_n), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{g}_n}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

$p > N$ に対する L^p 評価と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $(\tilde{f}_n, \tilde{g}_n) \to (\tilde{f}, \tilde{g})$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^2$ となる $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ が存在する. この証明の最初の議論と同様に弱形式を考えることで次の方程式を得る.

$$\begin{cases} -d_1 \Delta \tilde{f} = \theta_* \tilde{f} - k u_* \tilde{g}, & \text{in } \Omega, \\ \Delta \tilde{g} = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

故に $\tilde{g}$ は定数である. また次の式が成立している.

$$-\Delta \left(\tilde{f} - \frac{k u_*}{\theta_*} \tilde{g} \right) = \frac{\theta_*}{d_1} \tilde{f} - \frac{k u_*}{d_1} \tilde{g} = \frac{\theta_*}{d_1} \left(\tilde{f} - \frac{k u_*}{\theta_*} \tilde{g} \right).$$

$\frac{\theta_*}{d_1} \neq \mu_j$ $(j \geq 0)$ なので, $\tilde{f} - \frac{k u_*}{\theta_*} \tilde{g} = 0$ でなければならない. 即ち, $\tilde{f} = \frac{k u_*}{\theta_*} \tilde{g}$ であるので $\tilde{f}$ も定数となる. 故に $\|\tilde{f}_n\|_\infty + \|\tilde{g}_n\|_\infty = 1$ より,

$$1 = \|\tilde{f}\|_\infty + \|\tilde{g}\|_\infty = \left(1 + \frac{k u_*}{\theta_*} \right) \|\tilde{g}\|_\infty. \tag{6.3}$$

一方, (6.2)2 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると,

$$0 = v_* \int_\Omega (\tilde{f} - \tilde{g}) dx = \frac{v_*}{\theta_*} (k u_* - \theta_*) \int_\Omega \tilde{g} dx = \frac{v_*}{\theta_*} (k u_* - \theta_*) |\Omega| \tilde{g}.$$

命題 2.2 より $\tilde{g} = 0$ となるが, これは (6.3) に矛盾する. よって定理の主張が示された.

定理 6.2 ((1.4) の shadow 系の正値非定数解の存在) $a_1 + a_2 > a_3$, $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{u_* - 1}$, $\theta^* > 0$, $\frac{\theta_*}{d_1} \neq \mu_j$ $(j \geq 1)$ とする. このとき, (1.4) の正値非定数解列 (u_n, v_n, w_n) が存在するならば部分列を取ることで, $(u_n, v_n, w_n) \to (U, V, W)$ in $\{C^1(\bar{\Omega})\}^3$ $(d_{2,n}, d_{3,n} \to \infty)$ となるような $(U, V, W) \in \{C^1(\bar{\Omega})\}^3$ が存在する. さらに U は正の非定数, V と W は正の定数で次の方程式を満たす.

$$\begin{cases} -d_1 \Delta U = U(a_1 + a_2 U - a_3 U^2 - kV) dx, & \text{in } \Omega, \\ V = \frac{1}{(\beta + \gamma)|\Omega|} \int_\Omega \{\alpha + \gamma(U - 1)\} dx, & \text{in } \Omega, \\ W = \frac{-\alpha + \beta V}{\gamma}, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

証明.

$d_{2,n}, d_{3,n} \to \infty$ な $\{d_{2,n}\}_{n=1}^\infty$, $\{d_{3,n}\}_{n=1}^\infty$ とそれに対応する (1.4) の正値非定数解列 (u_n, v_n, w_n) を取る. (u_n, v_n, w_n) は次の方程式を満たしている.

$$\begin{cases} -d_1 \Delta u_n = u_n(a_1 + a_2 u_n - a_3 u_n^2 - k u_n v_n), & \text{in } \Omega, \\ -d_{2,n} \Delta v_n = v_n(-1 + u_n - v_n - w_n), & \text{in } \Omega, \\ -d_{3,n} \Delta w_n = w_n(-\alpha + \beta v_n - \gamma w_n), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{\partial w_n}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.4}$$

$p>N$ に対する L^p評価 と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $(u_n,v_n,w_n)\to(U,V,W)$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ となる $0<U,V,W\in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0<\sigma<1)$ が存在する．(6.4)1 式の弱形式で $n\to\infty$ とすると任意の $\phi\in H^1(\Omega)$ に対して,

$$d_1\int_\Omega \nabla U\cdot\nabla\phi dx=\int_\Omega U(a_1+a_2U-a_3U^2-kUV)\phi dx.$$

$p>N$ に対する L^p 評価より $U\in W^{2,p}(\Omega)$ なので, U は次の方程式を満たしている.

$$\begin{cases} -d_1\Delta U=U(a_1+a_2U-a_3U^2-kV), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n}=0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

(6.1)2 式と 3 式についても同様にして, V と W は次の方程式を満たしていることがわかる.

$$\begin{cases} \Delta V=0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial V}{\partial n}=0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta W=0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial W}{\partial n}=0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

故に V と W は正の定数である. さらに (6.4)3 式を Ω 上で積分して $n\to\infty$ とすると, $\int_\Omega W(-\alpha+\beta V-\gamma W)dx=0$ となる．即ち,

$$W=\frac{-\alpha+\beta V}{\gamma}.$$

(6.4)2 式についても同様にして, $\int_\Omega V\left(-1+U-V-\frac{-\alpha+\beta V}{\gamma}\right)dx=0$ を得る. 即ち,

$$V=\frac{1}{(\beta+\gamma)|\Omega|}\int_\Omega\{\alpha+\gamma(U-1)\}dx.$$

ここで U が定数と仮定して矛盾を導く. U,V,W が満たす方程式は次のようになる.

$$a_1+a_2U-a_3U^2-kV=0,\ -1+U-V-W=0,\ -\alpha+\beta V-\gamma W=0.$$

$a_1+a_2>a_3$, $\frac{\beta}{\alpha}>\frac{1}{u_*-1}$ より, $(u^*,v^*.w^*)$ は (1.4) のただ 1 つの正値定数解なので $(U,V,W)=(u^*,v^*,w^*)$ となる. ここで次のように関数を定める.

$$\begin{aligned} &f_n=u_n-u_*,\ g_n=v_n-v_*,\ h_n=w_n-w^*. \\ &\tilde{f}_n=\frac{f_n}{\|f_n\|_\infty+\|g_n\|_\infty+\|h_n\|_\infty},\ \tilde{g}_n=\frac{g_n}{\|f_n\|_\infty+\|g_n\|_\infty+\|h_n\|_\infty},\ \tilde{h}_n=\frac{h_n}{\|f_n\|_\infty+\|g_n\|_\infty+\|h_n\|_\infty}. \end{aligned}$$

(6.4) の右辺を次のように書きかえる.

$$\begin{aligned} u_n(a_1+a_2u_n-a_3u_n^2-kv_n) &= u_n(a_1+a_2u_n-a_3u_n^2-kv_n)-u_n\{a_1+a_2u^*-a_3(u^*)^2-kv^*\} \\ &= u_n\{a_2f_n-a_3f_n(u_n+u^*)-kg_n\} \\ &= u_nf_n\{a_2-a_3(u_n+u^*)\}-ku_ng_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_n(-1+u_n-v_n-w_n) &= v_n(-1+u_n-v_n-w_n)-v_n(-1+u^*-v^*-w^*) \\ &= v_n(f_n-g_n-h_n). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_n(-\alpha+\beta v_n-\gamma w_n) &= w_n(-\alpha+\beta v_n-\gamma w_n)-w_n(-\alpha+\beta v^*-\gamma w^*)\\
&= w_n(\beta g_n-\gamma h_n).
\end{aligned}
$$

すると (u_n, v_n, w_n) の方程式は次のように書ける.

$$
\begin{cases}
-d_1\Delta\tilde{f}_n = u_n\tilde{f}_n\{a_2-a_3(u_n+u^*)\}-ku_n\tilde{g}_n, & \text{in } \Omega,\\
-d_{2,n}\Delta\tilde{g}_n = v_n(\tilde{f}_n-\tilde{g}_n-\tilde{h}_n), & \text{in } \Omega,\\
-d_{3,n}\Delta\tilde{h}_n = w_n(\beta\tilde{g}_n-\gamma\tilde{h}_n), & \text{in } \Omega,\\
\frac{\partial\tilde{f}_n}{\partial n}=\frac{\partial\tilde{g}_n}{\partial n}=\frac{\partial\tilde{h}_n}{\partial n}=0, & \text{on } \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{6.5}
$$

$p > N$ に対する L^p 評価と埋め込みの議論より, 部分列を取ることで $(\tilde{f}_n, \tilde{g}_n, \tilde{h}_n) \to (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h})$ in $\{C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})\}^3$ となる $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} \in C^{1,\sigma}(\bar{\Omega})$ $(0 < \sigma < 1)$ が存在する. この証明の最初の議論と同様に弱形式を考えることで次の方程式を得る.

$$
\begin{cases}
-d_1\Delta\tilde{f} = \theta^*\tilde{f}-ku^*\tilde{g}, & \text{in } \Omega,\\
\Delta\tilde{g} = 0, & \text{in } \Omega,\\
\Delta\tilde{h} = 0, & \text{in } \Omega,\\
\frac{\partial\tilde{f}}{\partial n}=\frac{\partial\tilde{g}}{\partial n}=\frac{\partial\tilde{h}}{\partial n}=0, & \text{on } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

故に $\tilde{g}$ と $\tilde{h}$ は定数である. また次の式が成立している.

$$
-\Delta\left(\tilde{f}-\frac{ku^*}{\theta^*}\tilde{g}\right)=\frac{\theta^*}{d_1}\tilde{f}-\frac{ku^*}{d_1}\tilde{g}=\frac{\theta^*}{d_1}\left(\tilde{f}-\frac{ku^*}{\theta^*}\tilde{g}\right).
$$

$\frac{\theta^*}{d_1} \neq \mu_j$ $(j \geq 0)$ なので, $\tilde{f}-\frac{ku^*}{\theta^*}\tilde{g}=0$ でなければならない. 即ち, $\tilde{f}=\frac{ku^*}{\theta^*}\tilde{g}$ であるので $\tilde{f}$ も定数となる. さらに (6.5)3 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると, $\int_\Omega w^*(\beta\tilde{g}-\gamma\tilde{h})dx = 0$ を得る. 即ち, $\tilde{h}=\frac{\beta}{\gamma}\tilde{g}$ である. 故に $\|\tilde{f}_n\|_\infty+\|\tilde{g}_n\|_\infty+\|\tilde{h}_n\|_\infty = 1$ より,

$$
1=\|\tilde{f}\|_\infty+\|\tilde{g}\|_\infty+\|\tilde{h}\|_\infty=\left(1+\frac{ku^*}{\theta^*}+\frac{\beta}{\gamma}\right)\|\tilde{g}\|_\infty. \tag{6.6}
$$

一方, (6.5)2 式を Ω 上で積分して $n \to \infty$ とすると,

$$
0=v^*\int_\Omega(\tilde{f}-\tilde{g}-\tilde{h})dx=\frac{v^*}{\theta^*}\left(ku^*-\theta^*-\frac{\beta}{\gamma}\theta^*\right)\int_\Omega\tilde{g}dx=\frac{v^*}{\gamma\theta^*}\{k\gamma u^*-(\beta+\gamma)\theta^*\}|\Omega|\tilde{g}.
$$

命題 2.2 より $\tilde{g}=0$ となるが, これは (6.6) に矛盾する. よって定理の主張が示された.

7 数値シミュレーションの結果

この節では 1 次元 $[0, L]$ での (1.1) と (1.3) の数値シミュレーションの結果を紹介する. $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $k = 6$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = 30$ とすると, $u_+^{**} \approx 4.23$, $(u_*, v_*) \approx (1.8, 0.8)$, $\theta_* \approx 0.72$, $(u^*, v^*, w^*) \approx (1.94, 0.83, 0.11)$, $\theta^* \approx 0.22$ となる. また $\mu_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \approx 10\left(\frac{j}{L}\right)^2$ $(j \geq 0)$ である. 初期値は $u_0(x) = 1$, $v_0(x) = 0.5$, $w_0(x) = 0.1$ とする. これらのパラメータの下で拡散係数を以下のように変えてシミュレーションした.

1. (1.1) に対して $L = 10$, $d_1 = 0.03$, $d_2 = 30$.

2. (1.3) に対して $L = 10$, $d_1 = 0.009$, $d_2 = 20$, $d_3 = 30$.

3. (1.3) に対して $L = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.4$, $d_3 = 5$.

1. の場合. $\frac{\theta_*}{d_1} \approx 24$ となり, $\mu_{15} = 22.5 < \frac{\theta_*}{d_1} < 25.6 = \mu_{16}$ が成立する. ここで [3] の結果を紹介する.

定理 7.1 ((1.2) に対する正値非定数解の存在) $a_1 + a_2 > a_3$, $\theta_* > 0$ とし, ある $s \geq 1$ に対して $\frac{\theta_*}{d_1} \in (\mu_s, \mu_{s+1})$ とする. このとき $\sum_{j=1}^{s} m(\mu_j)$ が奇数ならば, ある $\hat{d} > 0$ が存在して $d_2 \geq \hat{d}$ に対して (1.2) は正値非定数解をもつ.

証明は [3](定理 4.2) を参照.

今 $\sum_{j=1}^{s} m(\mu_j) = 15$ なので, この定理の仮定を満たしている. 数値シミュレーションの結果は以下の通りである.

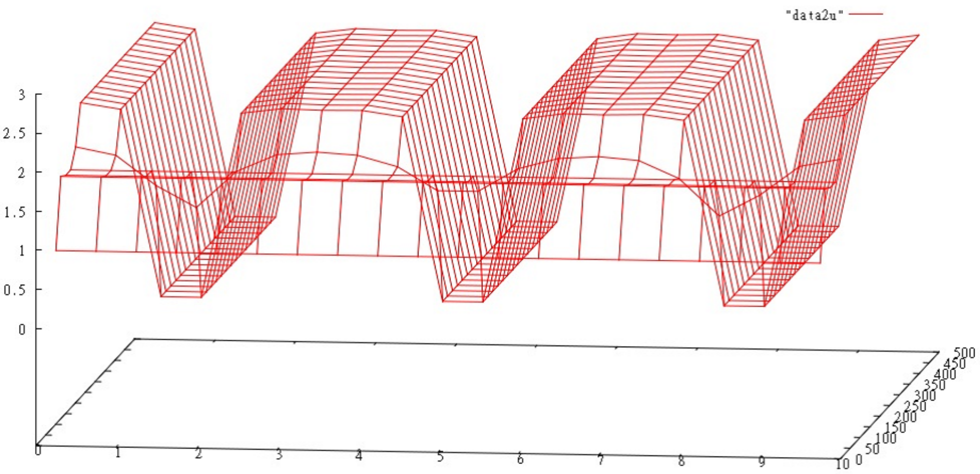

図 4. (1.1) の解 u の挙動.

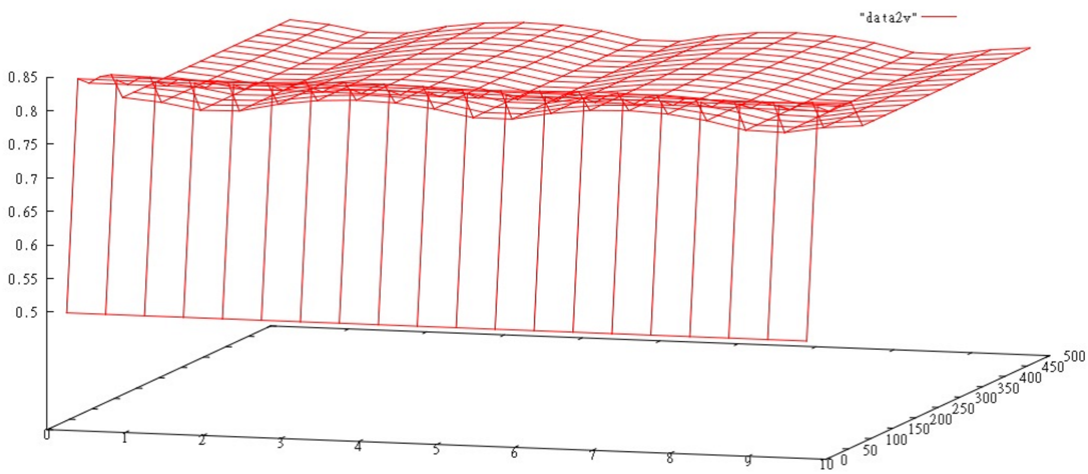

図 5. (1.1) の解 v の挙動.

2. の場合. $\frac{\theta^*}{d_1} \approx 24.4$ となり, $\mu_{15} = 22.5 < \frac{\theta^*}{d_1} < 25.6 = \mu_{16}$ が成立する. 故に $\sum_{j=1}^{s} m(\mu_j) = 15$ なので, 定理 5.2 の仮定を満たしている. 数値シミュレーションの結果は以下の通りである.

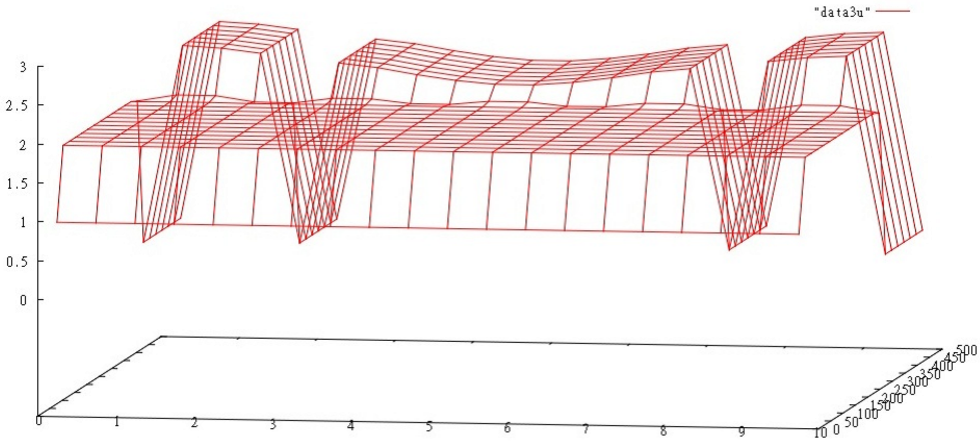

図 6. (1.3) の解 u の挙動.

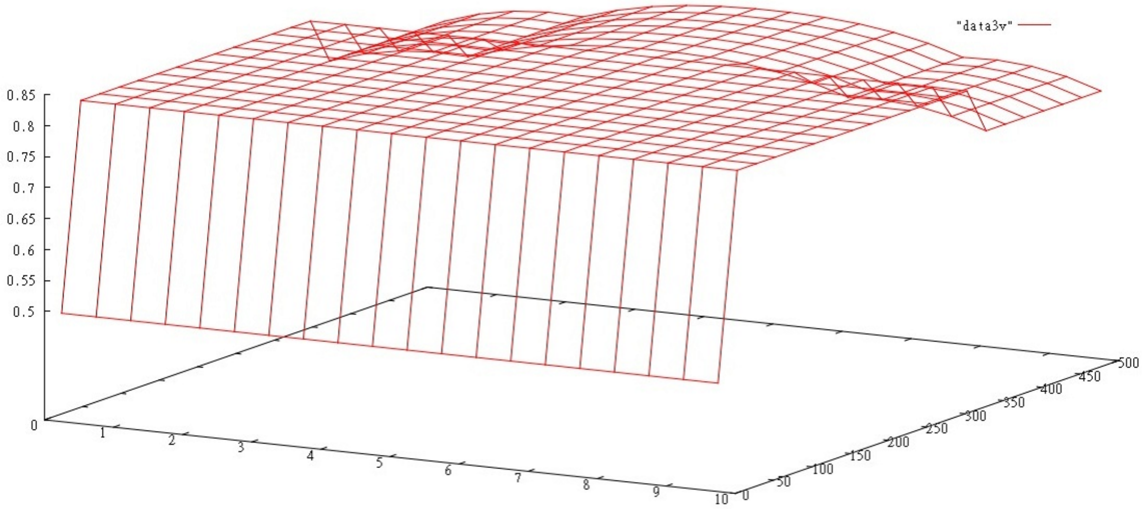

図 7. (1.3) の解 v の挙動.

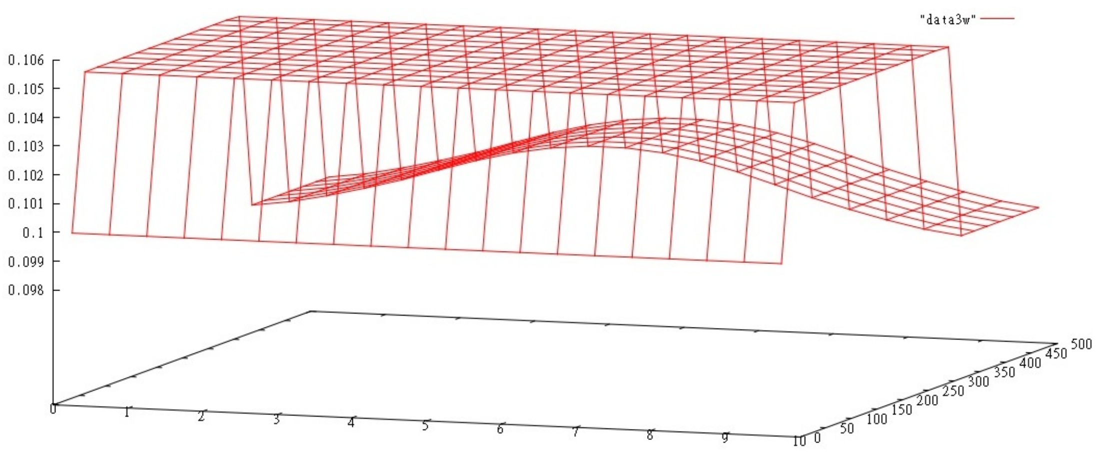

図 8. (1.3) の解 w の挙動.

今 $\theta^* < v^*$ が成立しているので注 2. より (u^*, v^*, w^*) は拡散がないときには漸近安定である. 一方, 数値シミュレーションの結果から (u^*, v^*, w^*) が不安定化して空間不均一な定常パターンが生まれているので, Turing の拡散誘導不安定化が起きていることが確認できる.

3. の場合. $\mu_1 = 10$ となり, $d_2 > \frac{u_+^{**}-1}{\mu_1} (\approx 0.323)$ が成立している. このとき定理 5.1 によると非定数定常解は存在しないことになる. 数値シミュレーションの結果は以下の通りである.

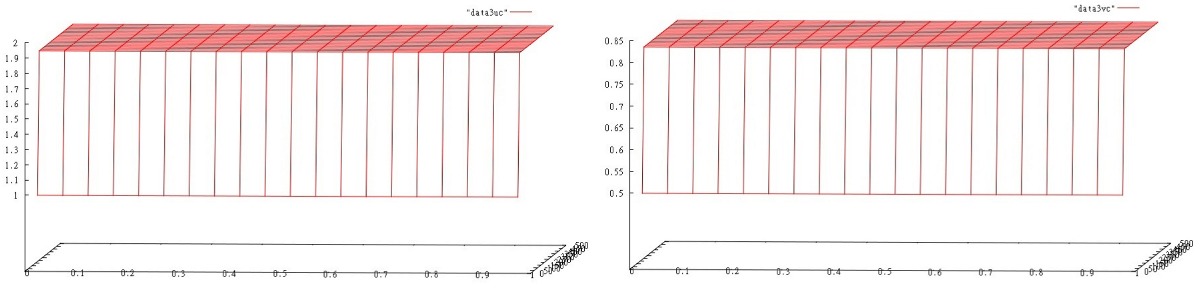

図 9. (1.3) の解 u(左) と v(右) の挙動.

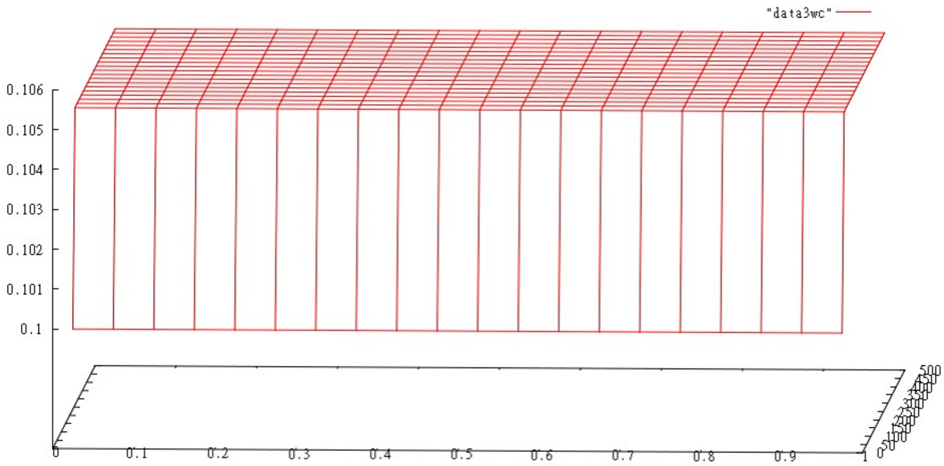

図 10. (1.3) の解 w の挙動.

このように拡散係数が全て大きい場合は空間不均一な定常パターンは生まれないことがわかる.

8 今後の課題

本論文で (1.4) の非定数解の存在を証明することができたが, 解の形状についての情報は何も得られていない. 導入でも紹介したが [15] では 1 次元で (1.2) に対して遷移層をもつ解を構成し, 特に [20] では解の構成だけでなく安定性解析も行っている. これらの論文には [8] の考え方が使われ

ている. これらの方法を用いることで 1 次元の場合ではあるが (1.4) の解を構成し, その安定性も示せるのではと考えている.

参考文献

[1] J. M. Arrieta, *Rates of eigenfunctions on a dumbbell domain. Simple eigenvalue case*, Transactions of the American Mathematical Society, 347(1995), 3503-3531.

[2] R. Banuelos and K. Burdzy, *On the "hot spot" conjecture of J. Rauch*, J. Functional Analysis, 164(1999), 1-33.

[3] Q. Bie, *Qualitative analysis on a cubic prey-predator system with diffusion*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 26(2011), 1-15.

[4] H. Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer(2010).

[5] C. Bundle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman, London(1980).

[6] C. Cosner, *Reaction-diffusion equations and ecological modeling*, Lecture Notes in Math. Vol. 1922(2008), 77-115.

[7] A. Friedman, *partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey(1964).

[8] J. K. Hale, K. Sakamoto, *Existence and stability of transition layers*, Japan J. Appl. Math. 5(1988), 367-405.

[9] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math. Vol. 840(1981), Springer-Verlag, Berlin, New York.

[10] S. Ito, *A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type*, Duke Math. J. 24(1957), 299-312.

[11] S. Jimbo, *The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with neumann boundary condition*, J. Differential Equations, 77(1989), 322-350.

[12] J. P. Keener, キーナー応用数学 変換論と近似論 下 発展編, 日本評論社 (2007).

[13] C. S. Lin, W. M. Ni and I. Takagi, *Large amplitude stationary solutions to a chemotais systems*, J. Differential Equations, 72(1988), 1-27.

[14] Y. Lou and W. M. Ni, *Diffudion, self-diffusion and cross-diffusion*, J. Differential Equations, 131(1996), 79-131.

[15] M. Mimura, M. Tabata, Y. Hosono, *Multiple solutions of two-point boundary value problems of neumann type with a small parameter*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 11, No. 4(1980), 613-631.

[16] P. De Mottoni and F. Rothe, *Convergence to Homogeneous Equilibrium state for generalized Volterra-Lotka systems with diffusion*, SIAM J. Appl. Math. Vol. 37, No. 3(1979), 648-663.

[17] J. D. Murray, *Non-existence of wave solutions for the class of reaction-diffusion equations given by the Volterra interacting-population equations with diffudion*, J. Theoret. Biol. 52(1975), 459-469.

[18] L. Nirenberg, *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI.(2001).

[19] R. Peng, J. Shi, M. Wang, *On stationary patterns of a reaction-diffusion model with autocatalysis and saturation law*, IOP Science Nonlinearity, 21(2008), 1471-1488.

[20] K. Sakamoto, *Construction and stability analysis of transition layer solutions in reaction-diffusion systems*, Tohoku Math. J. 42(1990), 17-44.

[21] 関村利朗, 竹内康博, 梯正之, 山村則男, 理論生物学入門, 現代図書 (2007).

[22] M. X. Wang and P. Y. H. Pang, *Qualitative analysis of a diffusive variable-territory prey-predator model*, Discrete Contin. Dyn.Syst. 23(3)(2009), 1061-1072.

[23] S. A. Williams and Pao-Liu Chow, *Nonlinear reaction-diffusion models for interacting populations*, J. Math. Anal. Appl. 62(1978), 157-169.