修 士 学 位 論 文

題　名

　種々の多変数多重ゼータ関数の値と関数関係式

指導教授　　津村　博文　　教授

平成２４年　１月　１０日　　提出

首都大学東京大学院

理工学研究科　数理情報科学　専攻

学修番号　１０８７８３２６

氏　名　　山田　拓人

種々の多変数多重ゼータ関数の値と関数関係式

学位論文要旨（修士（理学）），　山田 拓人（学修番号 10878326）

現在では Riemann のゼータ関数と呼ばれている $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s \in \mathbb{C},\ \sigma := \Re(s) > 1)$ に関する，Euler の公式 $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ がよく知られている。この結果に対応して，$\zeta_{\mathrm{MT},2}(2,2,2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2 (m+n)^2} = \frac{4}{3}\zeta(2)\zeta(4) - 2\zeta(6) = \frac{\pi^6}{2835}$ という，多重ゼータ関数の値への類似結果 (Mordell [4], 1958) がよく知られている。このように，多変数多重ゼータ関数の値を，1 重ゼータ関数の値の $\mathbb{Q}$-係数多項式で表す公式を導くことが，本論文の研究目標である。以下にその研究結果を述べる。

定義 1 ([3], [4], [7] を参照).

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\theta n}}{n^s}, \quad \text{特に，} \zeta_{\mathrm{L}}(s;0) = \zeta(s), \tag{1}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1,s_2,s_3) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}, \tag{2}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1,s_2,s_3;\theta_1,\theta_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\theta_1 m} e^{2\pi i\theta_2 n}}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}, \tag{3}$$

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1,s_2,s_3,s_4) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4}}, \tag{4}$$

$$\zeta_{\mathrm{W},2}^{\langle 2\rangle}(s_1,s_2,s_3,s_4) = \sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4}}. \tag{5}$$

主結果 1. $m \in \mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N}\colon n \geq 2\}, \alpha_j \in \mathbb{C}, \Re(\alpha_j) > 0\ (j=1,2)$ かつ，$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_1, 1, m+\alpha_2; \theta_1+\theta_2, \theta_2) - \zeta_{\mathrm{MT},2}(m+\alpha_2, 1, \alpha_1; \theta_1, \theta_2) \\
&+ \zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_2, 1, m+\alpha_1; \theta_1+\theta_2, \theta_1) - \zeta_{\mathrm{MT},2}(m+\alpha_1, 1, \alpha_2; \theta_2, \theta_1) \\
&= m \cdot \zeta_{\mathrm{L}}(m+1+\alpha_1+\alpha_2; \theta_1+\theta_2) - \sum_{j=0}^{m-1} \zeta_{\mathrm{L}}(j+1+\alpha_1;\theta_1)\zeta_{\mathrm{L}}(m-j+\alpha_2;\theta_2).
\end{aligned} \tag{6}$$

系 1. $n \in \mathbb{N}_{\geq 3} = \{n \in \mathbb{N}\colon n \geq 3\}$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(n,1,1) = \frac{n+3}{2}\zeta(n+2) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \zeta(j+1)\zeta(n+1-j). \tag{7}$$

注意 1. (7) は Tornheim [7] の定理 3 に含まれる結果の別証明 (金光-谷川-吉元 [2] の応用) である。

主結果 2. 任意に選んだ $a, b \in \mathbb{N}$ を固定すれば，特異点を除く，全ての $s \in \mathbb{C}$ に対して，次の関数関係式が成り立つ。但し，$a \vee b = \max\{a, b\}$, $\lfloor x \rfloor = \max \mathbb{Z}_{\leq x} = \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\}$ である。

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{W},2}(a, s, 0, b) + (-1)^{a+b}\zeta_{\mathrm{W},2}(b, s, 0, a) + (-1)^a 2^s \zeta_{\mathrm{MT},2}(a, b, s) \\
&\quad - (-1)^a 2^{s-b}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(a, b, 0, s) - (-1)^a 2^{s-a}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(b, a, 0, s) \\
&= \frac{(-1)^a}{a!b!2^{a+b-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a\vee b}{2} \rfloor} \left\{ a\binom{b}{2j} + b\binom{a}{2j} \right\} 2^{2j}(2j)!(a+b-2j-1)!\zeta(2j)\zeta(s+a+b-2j). \qquad (8)
\end{aligned}$$

系 2. $a \in 2\mathbb{N} - 1 = \{2n - 1 \colon n \in \mathbb{N}\}$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(a, a, 0, a) = -\sum_{j=0}^{(a-1)/2} \frac{2^{3a} + 2 + 2^{2j}}{2^{2a}} \binom{2a - 2j - 1}{a - 1} \zeta(2j)\zeta(3a - 2j). \qquad (9)$$

注意 2. 上述の (9) の左辺が，ある $\mathbb{Q}$-係数の Riemann ゼータ値 $\zeta(m)$ $(m \in \mathbb{N}_{\geq 2})$ の多項式で表せることを Zhao ([8], 2010) が示しているが，(9) の右辺は明示的に係数を決定している点が新しい結果である。更に，この結果は Huard, Williams and Zhang ([1], 1996) による $\zeta_{\mathrm{MT},2}(a, a, a) = \zeta_{\mathrm{W},2}(a, a, a, 0)$ に対する結果の類似にもなっている。証明方法は中村隆 [5], [6] の手法を応用している。

参考文献

[1] J. G. Huard, K. S. Williams and Z. Y. Zhang. *On Tornheim's double series.* Acta Arithmetica, Vol. 75 (1996).

[2] S. Kanemitsu, Y. Tanigawa and M. Yoshimoto. *Convolution of Riemann zeta-values.* J. Math. Soc. Japan, Vol. 57, No. 4 (2005).

[3] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura. *Multiple zeta values and zeta-functions of root systems.* Proc. Japan Acad. , Vol. 87, Ser. A (2011).

[4] L. J. Mordell. *On the evaluation of some multiple series.* J. London Math. Soc. , Vol. 33 (1958).

[5] T. Nakamura. *A functional relation for the Tornheim double zeta function.* Acta Arithmetica, Vol. 125.3 (2006).

[6] T. Nakamura. *Double Lerch Value Relations and Functional Relations for Witten Zeta Functions.* Tokyo J. Math. , Vol. 31, No. 2 (2008).

[7] L. Tornheim. *Harmonic Double Series.* American Journal of Mathematics, Vol. 72, No. 2 (1950).

[8] J. Zhao. *Alternating Euler sums and special values of the Witten multiple zeta function attached to so(5).* J. Aust. Math. Soc. , Vol. 89 (2010).

種々の多変数多重ゼータ関数の値と関数関係式

山田　拓人（首都大学東京）

平成23年度　博士前期課程　修士（理学）学位論文　学修番号10878326

目次

本論文での記号，記法と内容について

本論文では，自然数（$\Leftrightarrow$ 正の有理整数）全体の集合を $\mathbb{N}$ で，有理整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ で，有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ で，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ でそれぞれ表す。x が y を超えない（即ち，x が y 以下である）ことを $x \leq y$ で表す。$x \leq y$ と $y \geq x$ は同じ意味である。例えば，

$$\mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq 2\}$$

のように，集合の要素が満たす条件を，その集合の右下に書く場合がある。差集合は $A \setminus B$ で表す。つまり 2 つの集合 A, B に対して，

$$A \setminus B = \{x \in A \colon x \notin B\}$$

と定義する。$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して，$m \mid n$ とは，ある $l \in \mathbb{Z}$ が存在して $lm = n$ が成り立つということである。$a \equiv b \pmod c$ は $c \mid a - b$ と同じ意味である。$(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して，m と n の最大の公約数を $\mathrm{G.C.D.}\,(m, n)$ で表す。一般に $\mathrm{G.C.D.}\,(m, n) \in \mathbb{N}$ が成り立つ。演算の記法については，除法 $a/b = c$ は $a = cb$ の意味であって，積 xy を意図的に $x \times y$ あるいは $x \cdot y$ と書く場合がある。$a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ に対して，区間 $(a, b]$ と書いたらこれは，

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} : a < x \leq b\}$$

によって定義される集合である。その他の区間 $(a, b)\,, [a, b]\,, [a, b)$ についても同様である。断りなく単体で π と書いたら，これは円周率の意味である。虚数単位は i で表す（つまり $i \in \mathbb{C}$ で $i^2 = -1$ である)。また，$s \in \mathbb{C}$ に対して，s の実部を $\Re\,(s)$ で，s の虚部を $\Im\,(s)$ でそれぞれ表す。従って $s \in \mathbb{C}$ に対して $s = \Re\,(s) + i\Im\,(s)$ $(\Re\,(s), \Im\,(s) \in \mathbb{R})$ である。$\log z$ と書いたらこれは自然対数の意味で用い，偏角 $\arg\,(z)$ は $(-\pi, \pi]$ の範囲で選ぶ（従って 1 価関数として考える)。つまり，

$$\begin{aligned}
&e^z = \exp\,(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (\forall z \in \mathbb{C})\,,\\
&e = e^1 = 2.718281828459045235360287471352 \cdots\,,\\
&\log z = \log\,(z) = w \iff e^w = \exp\,(w) = z \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\,,
\end{aligned}$$

が成り立つものとする。オーダー評価に関する記号についても説明しておく。$f(x), g(x)$ は複素数値関数とする。

$$f(x) = O\,(g(x)) \quad (x \to +\infty \text{ のとき})$$

と書いたらこれは，

> ある正の定数 $C > 0$ が存在して，十分に大きい正の定数 $M > 0$ に対して，
> $x > M$ を満たす全ての x について，$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$ が成り立つ。

という主張が成り立つという意味である。M は C に依存しても構わない。$x \to +\infty$ を $x \to 0$ に置き換えたら，その場合『十分に大きい正の定数 $M > 0$ に対して，$x > M$ を満たす全ての x について』の部分を『十分に小さい正の定数 $\delta > 0$ に対して，$|x| < \delta$ を満たす全ての x について』に置き換えればよい。δ は C に依存しても構わない。移項のように $f(x) = g(x) + O(h(x))$ は $f(x) - g(x) = O(h(x))$ と同じ意味である。

$$f(x) \ll g(x)$$

は $f(x) = O(g(x))$ と同じ意味である。不等号のように，$f(x) \gg g(x)$ は $g(x) \ll f(x)$ と同じ意味である。

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to +\infty \text{ のとき})$$

と書いたらこれは，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

が成り立つという意味である。$x \to 0$ の場合も同様である。移項のように $f(x) = g(x) + o(h(x))$ は $f(x) - g(x) = o(h(x))$ と同じ意味である。

本論文の主結果について，第 1 節にて導入として簡潔に述べている。第 2 節以降の内容についてここで説明する。本論文で示すのは，論文題名にもあるように多重ゼータ関数についての結果である。多重ゼータ関数の研究は，その名前からもわかるように，最初のゼータ関数である Riemann のゼータ関数から始まった，ゼータ研究の流れのうちの 1 つである。従って，まず第 2 節で Riemann のゼータ関数および（1 重）ゼータ関数，そして Dirichlet の L 関数の歴史について述べ，第 3 節で多重ゼータ値と多重ゼータ関数の歴史を，第 4 節から第 6 節にて筆者の研究結果を述べることにする。内容としては，第 4 節と第 5 節にて，値としての等式と，関数としての等式について，第 6 節にて解析接続と複素関数としての性質について論じている。本論文では，『定理』は（その証明方法は別として，結果は）既知のもので，『結果』は筆者の研究結果として区別して表記する。

1　本論文の導入

現在では，Riemann のゼータ関数と呼ばれている

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots \tag{1.1}$$

（但し，$s \in \mathbb{C}$, $\sigma := \Re(s) > 1$）に関する，Euler の公式

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.2}$$

がよく知られている。この結果に対応して，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(2,2,2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2 (m+n)^2} = \frac{\pi^6}{2835} \tag{1.3}$$

という，多重ゼータ関数の値への類似結果 (Mordell [22], 1958) がよく知られている。この結果を得るために，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(2,2,2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2 (m+n)^2} = \frac{4}{3}\zeta(2)\zeta(4) - 2\zeta(6) \tag{1.4}$$

という値の等式が示されている。このように，多変数多重ゼータ関数の値を，1 重ゼータ関数の値の $\mathbb{Q}$-係数多項式で表す公式を導くことが，本論文の研究目標である。以下にその研究結果を述べる。

定義 1.1 ([11], [22], [31] を参照).

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\theta n}}{n^s}, \quad \text{特に，} \zeta_{\mathrm{L}}(s;0) = \zeta(s), \tag{1.5}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1,s_2,s_3) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}, \tag{1.6}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1,s_2,s_3;\theta_1,\theta_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\theta_1 m} e^{2\pi i\theta_2 n}}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}, \tag{1.7}$$

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1,s_2,s_3,s_4) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4}}, \tag{1.8}$$

$$\zeta_{\mathrm{W},2}^{\langle 2\rangle}(s_1,s_2,s_3,s_4) = \sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4}}. \tag{1.9}$$

主結果 1.1. $m \in \mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq 2\}, \alpha_j \in \mathbb{C}, \Re(\alpha_j) > 0 \ (j = 1, 2)$ かつ，$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_1, 1, m + \alpha_2; \theta_1 + \theta_2, \theta_2) - \zeta_{\mathrm{MT},2}(m + \alpha_2, 1, \alpha_1; \theta_1, \theta_2) \\
&+ \zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_2, 1, m + \alpha_1; \theta_1 + \theta_2, \theta_1) - \zeta_{\mathrm{MT},2}(m + \alpha_1, 1, \alpha_2; \theta_2, \theta_1) \\
&= m \cdot \zeta_{\mathrm{L}}(m + 1 + \alpha_1 + \alpha_2; \theta_1 + \theta_2) - \sum_{j=0}^{m-1} \zeta_{\mathrm{L}}(j + 1 + \alpha_1; \theta_1) \zeta_{\mathrm{L}}(m - j + \alpha_2; \theta_2).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

系 1.1. $n \in \mathbb{N}_{\geq 3} = \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq 3\}$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(n, 1, 1) = \frac{n+3}{2} \zeta(n+2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \zeta(j+1) \zeta(n+1-j). \tag{1.11}$$

注意 1.1. (1.11) は，Tornheim [31] の定理 3 に含まれる結果の，別証明 (金光-谷川-吉元 [7] の応用) である。

主結果 1.2. 任意に選んだ $a, b \in \mathbb{N}$ を固定すれば，特異点を除く，全ての $s \in \mathbb{C}$ に対して，次の関数関係式が成り立つ。但し，$a \vee b = \max\{a, b\}$, $\lfloor x \rfloor = \max \mathbb{Z}_{\leq x} = \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\}$ である。

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{W},2}(a, s, 0, b) + (-1)^{a+b} \zeta_{\mathrm{W},2}(b, s, 0, a) + (-1)^a 2^s \zeta_{\mathrm{MT},2}(a, b, s) \\
&\quad - (-1)^a 2^{s-b} \zeta^{\langle 2 \rangle}_{\mathrm{W},2}(a, b, 0, s) - (-1)^a 2^{s-a} \zeta^{\langle 2 \rangle}_{\mathrm{W},2}(b, a, 0, s) \\
&= \frac{(-1)^a}{a! b! 2^{a+b-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a \vee b}{2} \rfloor} \left\{ a \binom{b}{2j} + b \binom{a}{2j} \right\} 2^{2j} (2j)! (a + b - 2j - 1)! \zeta(2j) \zeta(s + a + b - 2j).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

系 1.2. $a \in 2\mathbb{N} - 1 = \{2n - 1 \colon n \in \mathbb{N}\}$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(a, a, 0, a) = -\sum_{j=0}^{(a-1)/2} \frac{2^{3a} + 2 + 2^{2j}}{2^{2a}} \binom{2a - 2j - 1}{a - 1} \zeta(2j) \zeta(3a - 2j). \tag{1.13}$$

注意 1.2. 上述の (1.13) の左辺が，ある $\mathbb{Q}$-係数の Riemann ゼータ値 $\zeta(m)$ $(m \in \mathbb{N}_{\geq 2})$ の多項式で表せることを Zhao ([32], 2010) が示しているが，(1.13) の右辺は明示的に係数を決定していることが新しい結果である。更に，この結果は Huard, Williams and Zhang ([6], 1996) による $\zeta_{\mathrm{MT},2}(a, a, a) = \zeta_{\mathrm{W},2}(a, a, a, 0)$ に対する結果の類似にもなっている。証明方法は Zagier-中村隆 [24], [25] の手法を応用している。

2 ゼータ関数

本節の内容については，参考文献 [1], [4], [19], [27], [28], [29], [30] の内容を参照した。

2.1 Riemann のゼータ関数

定義 2.1 (Riemann のゼータ関数). $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1$ に対して，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.1}$$

と定義して，これを Riemann のゼータ関数と呼ぶ。(2.1) は $\Re(s) > 1$ を満たす各 $s \in \mathbb{C}$ で絶対収束し，かつ，収束は領域 $\Re(s) > 1$ においてコンパクト一様である。従って $\zeta(s)$ はこの領域で正則な複素関数である。

コンパクト性や収束の定義については，[21], [27], [28], [29], [30] などを参照した。無限級数 (2.1) の値は昔から興味の対象として存在していた。$s \in \mathbb{N}$ の場合がまず最初に考えられ，次に $s \in (1, +\infty)$ の場合を，そして複素関数論の発展と共に $s \in \mathbb{C}$ へと範囲が広がっていった。$\zeta(s)$ の解析接続については後述する。

$s = 1$ のときの (2.1) の右辺を考える。これを調和級数と呼ぶが，調和級数が発散する事実は 14 世紀のフランスの僧侶 N. Oresme（オレーム，1323?-1382）が既に知っていたそうで，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots && (2.2)\\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots && (2.3)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = +\infty\end{aligned}$$

からその主張がわかる。この調和級数は正項級数なので，その極限は和の順序には依らない。

定理 2.1 (Euler, 1735). Euler が

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.4}$$

を主張する論文を，ペテルスブルクのアカデミーに提出した。しかしこのときの証明法は，少し厳密性を欠いたものであったという。

Euler はその後，更に研究を重ねて，より説得力のある議論を見出すことに成功した。更に，任意の正の偶数への一般化である次の定理も Euler は示している。

定理 2.2 (Euler). $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n} \left(= \left\{q\pi^{2n} \colon q \in \mathbb{Q}\right\}\right) \tag{2.5}$$

が成り立つ。

具体的にいくつか例を挙げると，

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \tag{2.6}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \tag{2.7}$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \tag{2.8}$$

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} \tag{2.9}$$

などである。

2.2 Euler の無限積表示

定理 2.3 (Euler, 1737)**.** Euler は，$s = \sigma > 1$ に対しての Euler 積表示

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \prod_{p \text{ は素数}} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \tag{2.10}$$

が成り立つことを発見する。これは素数を小さい方から順に $p_1, p_2, p_3, p_4, \cdots$ と表せば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - p_n^{-\sigma}\right)^{-1} \tag{2.11}$$

が成り立つという意味である。

無限積の定義や収束性については，[28], [29], [30] などを参照した。

2.3 素数定理

Euler 積の発見により，Riemann のゼータ関数と素数の関係が研究対象として注目されてきた。素数分布論の基本定理として，素数定理がある。

定義 2.2 (x 以下の素数の個数)**.** 有限集合 S の要素の個数を $\#S$ で表す。$x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\pi(x) = \#\{p\colon p \text{ は素数で，} p \leq x \text{ を満たす。}\} \tag{2.12}$$

と定義する。

予想 2.1 (A. M. Legendre, 1798 年に言及（定式化は 1808 年）)**.** $\pi(x)$ の $x \to +\infty$ のときの近似式は

$$\frac{x}{\log x - B(x)} \tag{2.13}$$

であろう。但し $B(x)$ はある関数で，$\lim_{x \to +\infty} B(x) = 1.08366\cdots$ を満たす。

予想 2.2 (C. F. Gauss, 公表されたのは Gauss の死後). $\pi(x)$ の $x \to +\infty$ のときの近似式は

$$\mathrm{Li}\,(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t}\mathrm{d}t = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{1}{\log t}\mathrm{d}t \tag{2.14}$$

であろう。

定理 2.4 (P. L. Chebyshev, 1850 年頃). 次の極限値

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}\pi(x) \tag{2.15}$$

が存在すれば，その極限値は 1 である。更に，ある正の実数の定数 C_1, C_2 が存在して，十分に大きい $x(\geq 2)$ について,

$$C_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C_2 \frac{x}{\log x} \tag{2.16}$$

が成り立つ。しかも十分に大きい $x(\geq 2)$ を考えれば，$C_1 = 0.92129 \cdots, C_2 = 1.10555 \cdots$ として取れる。

定理 2.5 (素数定理，Hadamard, Poussin（2 人は独立に示した），1986). $\pi(x)$ は $x \to +\infty$ のとき，$x/\log x$ で近似される。すなわち,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}\pi(x) = 1 \tag{2.17}$$

が成り立つ。

2.4 Riemann のゼータ関数の性質

ここで，Riemann のゼータ関数のよく知られた性質をまとめる。そのためにガンマ関数を導入する。

定義 2.3 (ガンマ関数). $s \in \mathbb{C}$ とする。このとき,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \quad (\Re(s) > 0 \text{ のとき}), \tag{2.18}$$

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s) \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq 0\} \text{ のとき}), \tag{2.19}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbb{N} \text{ のとき}) \tag{2.20}$$

が成り立つ。正確には，(2.18) が定義で（特に $s \in (0, +\infty)$ の場合），(2.19) により $\mathbb{C}$ 全体へ有理型関数として解析接続される。(2.20) は (2.18) を部分積分（それが (2.19) なのだが）すればわかる。

ガンマ関数はそれ自体が非常に興味深い関数であるし，ゼータ関数の理論では欠かせない道具と言っても過言ではない。ガンマ関数については，[4], [19], [27], [28], [29], [30] などを参照。

定理 2.6. 右半開平面 $D_0 = \{s \in \mathbb{C} \colon \Re(s) = \sigma > 1\}$ において (2.1) と (2.10) はコンパクト一様に絶対収束する。従って，$\zeta(s)$ は D_0 で正則かつ非零である。

定理 2.7. $\zeta(s)$ は複素数平面 $\mathbb{C}$ 全体へ，有理型関数として解析接続できて，$\mathbb{C} \setminus \{1\}$ で正則である。$s = 1$ は 1 位の極で，そこでの留数は 1 である。

定理 2.8 (関数等式)**.** 任意の s に対して，

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{2.21}$$

が成り立つ。

定理 2.9 (Riemann のゼータ関数の自明な零点)**.** 関数等式により，

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta\left(1-s\right)/\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \tag{2.22}$$

であるから，$\zeta(s)$ は負の偶数がそれぞれ 1 位の零点になっている。この零点を Riemann のゼータ関数の自明な零点と呼ぶ。$\Re(s) < 0$ での零点は自明な零点のみである。

残る $0 \leq \Re(s) \leq 1$ の範囲での零点については，この時点では何も言及していない。$\mathbb{C}$ 内の $0 \leq \Re(s) \leq 1$ の範囲を臨界領域と呼ぶ。臨界領域内の $\zeta(s)$ の零点を，Riemann のゼータ関数の非自明な零点と呼ぶ。$\mathbb{C}$ 内の直線 $\Re(s) = \frac{1}{2}$ を臨界線と呼ぶ。

予想 2.3 (Riemann 予想，1859)**.** $\zeta(s)$ の非自明な零点の実部は全て $\frac{1}{2}$ であろう。

2011 年現在，この予想は未解決問題である。しかし，素数定理の証明の中で，$\Re(s) = 1$ において $\zeta(s) \neq 0$ であることは示されている。$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$ と関数等式から，$\Re(s) = 0$ でも $\zeta(s) \neq 0$ である。$\zeta(s)$ の臨界線 $\Re(s) = \frac{1}{2}$ 上の零点の個数については，次の定理がある。

定理 2.10 (Hardy, 1914)**.** $\zeta(s)$ の臨界線上の零点は無限個存在する。$\zeta(s)$ の正則性から，その個数は可算無限個である。

2.5 その他の 1 重ゼータ関数

Riemann のゼータ関数に類似した（一般化した）いくつかのゼータ関数が定義されている。

定義 2.4 (Hurwitz のゼータ関数)**.** $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1, a \in (0, +\infty)$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{H}}(s; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \tag{2.23}$$

$$\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+(a-1))^s}\right) \tag{2.24}$$

と定義する。$\zeta_{\mathrm{H}}(s;a)$ を Hurwitz のゼータ関数と呼ぶ。$\zeta(s,a)$ と書かれることが多い。しかし，この表記の場合は後述する深さ 2 の多重ゼータ値と混同しないように注意して頂きたい。(2.23) の右辺は $\Re(s)>1$ で絶対収束する。$a=1$ とすれば関数として Riemann のゼータ関数に一致する。

Hurwitz のゼータ関数については，[4] などを参照した。

定義 2.5 (Lerch のゼータ関数). $s\in\mathbb{C},\theta\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\theta n}}{n^s} \tag{2.25}$$

と定義する。$\zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta)$ を Lerch のゼータ関数と呼ぶ。(2.25) の右辺は，$\Re(s)>1$ で絶対収束する。周期性から，関数として $\zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta)=\zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta+n)$ $(\forall n\in\mathbb{Z})$ が成り立つ。$\theta\in\mathbb{Z}$ を固定すれば，関数として Riemann のゼータ関数に一致する。

Lerch のゼータ関数については，[4], [14], [25] などを参照した。

2.6 Dirichlet の L 関数

Riemann のゼータ関数のある種の一般化である，Dirichlet の L 関数の定義も紹介しておく。Dirichlet の L 関数について詳しくは参考文献 [4] などを参照した。

定義 2.6 (Dirichlet 指標). $f\in\mathbb{N}$ とする。写像 $\chi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ が f を法とする Dirichlet 指標であるとは，次の 3 つの条件を全て満たすことである。

(i) $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ に対して，$\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ が成り立つ。 (2.26)

(ii) $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ に対して，$\chi(m+nf)=\chi(m)$ が成り立つ。 (2.27)

(iii) $\mathrm{G.C.D.}(n,f)\in\mathbb{N}_{\geq 2}\iff\chi(n)=0.$ (2.28)

但しここで，$\mathrm{G.C.D.}(n,f)$ は n と f の最大公約数を表す。

定義 2.7 (単位指標). Dirichlet 指標 $\chi_0:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ が『$\mathrm{G.C.D.}(n,f)=1$ のとき $\chi_0(n)=1$』を満たすとき，χ_0 を f を法とする単位指標と呼ぶ。

定義 2.8 (Euler 関数 φ). $f\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\varphi(f)=\#\{n\in\mathbb{N}_{\leq f}:\mathrm{G.C.D.}(n,f)=1\} \tag{2.29}$$

と定義する。関数 $\varphi(\cdot)$ を Euler 関数と呼ぶ。

定理 2.11 (初等的整数論における Euler の定理). $f\in\mathbb{N}$ とする。$n\in\mathbb{Z}$ が f と互いに素（つまり $\mathrm{G.C.D.}(n,f)=1$）ならば，

$$n^{\varphi(f)}\equiv 1 \pmod f \tag{2.30}$$

が成り立つ。

定理 2.12. $n \equiv 1 \pmod f$ ならば，$\chi(n) = 1$ が成り立つ。

定理 2.13. G.C.D.$(n, f) = 1$ ならば，$\chi(n)^{\varphi(f)} = 1$ が成り立つ。

定理 2.14.

$$\sum_n \chi(n) = \begin{cases} \varphi(f) & (\chi = \chi_0 \text{のとき}) \\ 0 & (\chi \neq \chi_0 \text{のとき}) \end{cases} \tag{2.31}$$

が成り立つ。但し，和の取り方については，n は f を法とする代表系を動く。

定義 2.9. $f, f' \in \mathbb{N}$ で $f' \mid f$ とする。χ' は f' を法とする Dirichlet 指標とする。

$$\text{G.C.D.}\,(n, f) = 1 \text{ ならば，} \chi(n) = \chi'(n) \tag{2.32}$$

が成り立つときに，χ は f' を法として定義されるという。

定義 2.10 (χ の導手)**.** χ は f を法とする Dirichlet 指標とする。このとき，

$$f_\chi = \min\{f' \colon \chi \text{は } f' \text{を法として定義される。}\} \tag{2.33}$$

と定義する。f_χ を χ の導手と呼ぶ。導手の定義により $f_\chi \mid f$ が成り立つ。

定義 2.11 (原始的指標，指標の偶奇，共役指標)**.** χ は f を法とする Dirichlet 指標とする。$f_\chi = f$ が成り立つときに，χ は原始的であるという。$\chi(-1) = 1$ が成り立つときに χ は偶指標であるという。$\chi(-1) = -1$ が成り立つときに χ は奇指標であるという。全ての $n \in \mathbb{Z}$ について，$\overline{\chi}(n) = \overline{\chi(n)}$ と定めて，$\overline{\chi}$ を χ の共役な指標と呼ぶ。$f_{\overline{\chi}} = f_\chi$ である。

定義 2.12 (Dirichlet の L 関数)**.** χ が f を法とする Dirichlet 指標であるとき，

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{2.34}$$

と定義して，$L(s, \chi)$ を指標 χ 付きの Dirichlet の L 関数と呼ぶ。この関数は，$s \in \mathbb{C}$ の関数として $\Re(s) > 1$ でコンパクト一様に絶対収束する。従ってこの領域で正則である。

Dirichlet の L 関数は，Hurwitz のゼータ関数を用いた表示を持つ。

定理 2.15. χ は f を法とする原始的な Dirichlet 指標とする。このとき，$\Re(s) > 1$ の範囲で，

$$L(s, \chi) = \frac{1}{f^s} \sum_{n=1}^{f} \chi(n) \zeta_{\mathrm{H}}\left(s, \frac{n}{f}\right) \tag{2.35}$$

が成り立つ。しかし，Hurwitz のゼータ関数の解析接続により，この表示から Dirichlet の L 関数の解析接続も得る。解析接続により，Dirichlet の L 関数は整関数である。

3　多重ゼータ関数の歴史

本節の内容については，参考文献 [4], [5], [15], [16], [17], [18], [19], [26] の内容を参照した。

3.1　Euler の 2 重和と多重ゼータ値

定義 3.1 (Euler の 2 重和，1775)**.** $a, b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ に対して，

$$\zeta_2(a,b) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^a(m+n)^b} = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\frac{1}{m^a n^b} \tag{3.1}$$

を Euler の 2 重和と呼ぶが，この 2 重和について最初に論文として発表したのは Euler である。この無限級数は絶対収束する。

定理 3.1 (Euler)**.** $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ に対して，

$$\zeta(n) = \sum_{k=2}^{n-1}\zeta_2(n-k,k) \tag{3.2}$$

が成り立つ。

例 3.1 ($n = 3$ の場合)**.** (3.2) で $n = 3$ を適用すれば，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+n)^2} = \zeta_2(1,2) = \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \tag{3.3}$$

を得る。

後に a, b を複素変数として見て，解析接続をしたのは Atkinson が最初である。より一般に多重化したものがある。

定義 3.2 (多重ゼータ値)**.** $r \in \mathbb{N}$ とする。r を深さと呼ぶ。$k_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$ かつ $k_1 \geq 2$ のとき，

$$\zeta(k_1, k_2, \cdots, k_r) = \sum\cdots\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_r\geq 1}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\times\cdots\times m_r^{k_r}}, \tag{3.4}$$

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_r \tag{3.5}$$

と定義する。k を重さと呼び，$\zeta(k_1, k_2, \cdots, k_r)$ を深さが r で重さが k の多重ゼータ値と呼ぶ。

多重ゼータ値については [5][*1]などを参照した。

$$\zeta(b,a) = \sum_{1\leq m<n}\sum \frac{1}{m^a n^b} = \zeta_2(a,b) \tag{3.6}$$

から，この多重ゼータ値が Euler の 2 重和の一般化にもなっていることがわかる。

3.2　1 変数の多重ゼータ関数

20 世紀初頭，Barnes, Mellin らによって多重ゼータ関数の解析的研究が始まる。多重ゼータ関数の歴史，解析接続，解析的性質などについて詳しくは，参考文献 [4], [15], [16], [17], [18], [19], [24], [25], [26] などを参照した。

定義 3.3 (Barnes の r 重ゼータ関数). $r \in \mathbb{N}$ とする。$\alpha, w_1, w_2, \cdots, w_r \in \mathbb{C}$ を媒介変数として，$s \in \mathbb{C}$ を主変数として，

$$\zeta_{\mathrm{B},r}(s;\alpha,(w_1,w_2,\cdots,w_r)) = \left(\prod_{j=1}^{r}\sum_{m_j=0}^{\infty}\right)\left(\alpha+\sum_{k=1}^{r} w_k m_k\right)^{-s} \tag{3.7}$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}(\alpha+w_1m_1+w_2m_2+\cdots+w_rm_r)^{-s} \tag{3.8}$$

と定義する。これを Barnes の r 重ゼータ関数と呼ぶ。

但し上述において，$\prod\sum$ の $\prod$ は，$\sum_m\sum_n$ を $\sum_m$ と $\sum_n$ の積として考えた場合の総積記号である。従って，

$$\prod_{k=1}^{r}\sum_{m_k} = \underbrace{\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_r}}_{\sum \text{が } r \text{ 個}} \tag{3.9}$$

となる。

Barnes の多重ゼータ関数は，媒介変数も主変数も複素数（つまり連続的に変化する値）である。その点で解析的な研究の対象となり得ることがわかる。更に，和は多重であるが，主変数 s は 1 つであることも特徴である。

3.3　多変数の多重ゼータ関数

和の多重化と，変数の多変数化を両方施したものも考えられる。

[*1] この参考文献は WEB 上から入手可能です。http://gcoe-mi.jp/ にアクセスして，『出版物』→『MI レクチャーノート』→『2010』→『Vol. 23』と進めば，無料でダウンロードすることができます。(平成 23 年 12 月現在)

定義 3.4 (Euler-Zagier 型の多変数多重ゼータ関数).

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{EZ},r}\left(s_1, s_2, \cdots, s_{r-1}, s_r\right) \\
&= \left(\prod_{h=1}^{r} \sum_{m_h=1}^{\infty}\right) \prod_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{j} m_k\right)^{-s_j} && (3.10) \\
&= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} \left(m_1+m_2\right)^{-s_2} \times \cdots \times \left(m_1+m_2+\cdots+m_r\right)^{-s_r} && (3.11)
\end{aligned}
$$

EZ 型の多重ゼータ関数は，前述の Euler の 2 重和と，多重ゼータ値を含んだ一般化である。

定義 3.5 (Mordell-Tornheim 型の多変数多重ゼータ関数（原型は [22], [31] で与えられている。)).

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{MT},r}\left(s_1, s_2, \cdots, s_{r-1}, s_r, s_{r+1}\right) \\
&= \left(\prod_{h=1}^{r} \sum_{m_h=1}^{\infty}\right) \left(\prod_{j=1}^{r} m_j^{-s_j}\right) \left(\sum_{k=1}^{r} m_k\right)^{-s_{r+1}} && (3.12) \\
&= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \times \cdots \times m_{r-1}^{-s_{r-1}} m_r^{-s_r} \left(m_1+m_2+\cdots+m_r\right)^{-s_{r+1}} && (3.13)
\end{aligned}
$$

$\sum$ の個数は r 個だが，変数 s の個数は $r+1$ であることに注意して頂きたい。

定義 3.6 (Apostol-Vu 型の多変数多重ゼータ関数（原型は [2] で与えられている。)).

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{AV},r}\left(s_1, s_2, \cdots, s_{r-1}, s_r, s_{r+1}\right) \\
&= \left(\prod_{h=1}^{r} \sum_{m_h=1}^{\infty}\right) \left\{\prod_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{j} m_k\right)^{-s_j}\right\} \left\{\sum_{l=1}^{r} (r+1-l)\, m_l\right\}^{-s_{r+1}} && (3.14) \\
&= \sum_{m_1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} \left(m_1+m_2\right)^{-s_2} \times \cdots \times \left(m_1+m_2+\cdots+m_{r-1}+m_r\right)^{-s_r} \\
&\qquad \times \left(r m_1+(r-1)\, m_2+\cdots+2 m_{r-1}+m_r\right)^{-s_{r+1}} && (3.15) \\
&= \sum_{1 \le m_1 < m_2 < \cdots < m_{r-1} < m_r} \cdots \sum m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \times \cdots \times m_{r-1}^{-s_{r-1}} m_r^{-s_r} \\
&\qquad \times \left(m_1+m_2+\cdots+m_{r-1}+m_r\right)^{-s_{r+1}} && (3.16)
\end{aligned}
$$

MT 型と同様に変数の個数の方が 1 つ多いことに注意して頂きたい。AV 型は MT 型の部分和になっている。

定義 3.7 (Witten 型の多変数多重ゼータ関数). Witten 型の多変数多重ゼータ関数については [8],

[9], [10], [11], [12] などを参照した。深さ 2 の場合の具体例を以下にいくつか挙げる。

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1, s_2, s_3; A_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}} \tag{3.17}$$

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1, s_2, s_3; B_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(2m+n)^{s_3}} \tag{3.18}$$

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1, s_2, s_3; C_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+2n)^{s_3}} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6; G_2)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}(m+3n)^{s_5}(2m+3n)^{s_6}}\end{aligned} \tag{3.20}$$

となる。もっと一般化（級数の一般項の分子も一般化）したものが定義されているが，ここでは省略する。深さ 2 の場合，A_2 のゼータは MT 型のゼータに一致している。

4 Mellin 変換と畳み込み型積分

本節の証明では，金光滋-谷川好男-吉元昌己 [7] の手法を応用する。

4.1 Mellin 変換とゼータ関数

定義 4.1 (Mellin 変換)**.** 変数 x の関数 $f(x)$ は，少なくとも殆ど全ての $x \in (0, +\infty)$ に対しては定義されているとする。この $f(x)$ に対して，

$$(\mathscr{M}(f))(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) \mathrm{d}x \tag{4.1}$$

と定義する。但し，(4.1) の右辺が存在するような $s \in \mathbb{C}$ に対してのみ定義する。簡便のために，$(\mathscr{M}(f))(s)$ を単に $\mathscr{M}f(s)$ と表すことにする。以上により定められる，s の関数 $\mathscr{M}f(s)$ を，関数 $f(x)$ の Mellin 変換と呼ぶ。積分の線型性から，$\mathscr{M} : f \mapsto \mathscr{M}f$ は $\mathbb{C}$-線型作用素である。

定義 4.2 (Lerch の 2 変数ゼータ関数)**.** $s \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta) \left(= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{2\pi i \theta n}}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \theta n}}{n^s}, \tag{4.2}$$

$$\zeta_{\mathrm{L}}(s;\theta;N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{2\pi i \theta n}}{n^s} \tag{4.3}$$

と定義する。(4.2) の右辺は $\Re(s) > 1$ で絶対収束，$\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ のときは，$s = 1$ で条件収束する。よってこのとき $\zeta_{\mathrm{L}}(1, \theta)$ の値は一意に定まる。例えば,

$$\zeta_{\mathrm{L}}\left(1; \frac{1}{2}\right) = -\log 2 \tag{4.4}$$

が成り立つ。

定義 4.3 (Euler-Zagier 型の 2 変数 2 重ゼータ関数)**.** $\Re(s_2) > 1, \Re(s_1 + s_2) > 2$ を満たす $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{EZ},2}(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}} \tag{4.5}$$

と定義する。右辺の無限級数はこの領域で絶対収束する。

定義 4.4 (Mordell-Tornheim-Lerch 型)**.** $\Re(s_1 + s_3) > 1, \Re(s_2 + s_3) > 1, \Re(s_1 + s_2 + s_3) > 2$ を満たす $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3$ と，$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1, s_2, s_3; \theta_1, \theta_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \theta_1 m} e^{2\pi i \theta_2 n}}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}} \tag{4.6}$$

と定義する。右辺の無限級数はこの領域で絶対収束する。$\theta_1 = \theta_2 = 0$ の場合は通常の MT 型ゼータである。

4.2 本論文の主結果

主結果 4.1. $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \alpha_j \in \mathbb{C}, \Re(\alpha_j) > 0\ (j = 1, 2)$ かつ，$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とする。このとき，

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_1, 1, m+\alpha_2; \theta_1+\theta_2, \theta_2) - \zeta_{\mathrm{MT},2}(m+\alpha_2, 1, \alpha_1; \theta_1, \theta_2) \\
&+ \zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_2, 1, m+\alpha_1; \theta_1+\theta_2, \theta_1) - \zeta_{\mathrm{MT},2}(m+\alpha_1, 1, \alpha_2; \theta_2, \theta_1) \\
&= m \cdot \zeta_{\mathrm{L}}(m+1+\alpha_1+\alpha_2; \theta_1+\theta_2) - \sum_{j=0}^{m-1} \zeta_{\mathrm{L}}(j+1+\alpha_1; \theta_1)\zeta_{\mathrm{L}}(m-j+\alpha_2; \theta_2)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

が成り立つ。

証明. $N \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0$ を媒介変数，$x \in (0, +\infty)$ を独立変数（主変数）として，

$$F_\alpha^{N,\theta}(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{2\pi i k\theta}}{k^\alpha} e^{-kx} \tag{4.8}$$

とおく。更に，

$$I(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty (x+y)^{s-1} F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(x) F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.9}$$

とおく。$s = m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ のとき，2 項定理により，

$$(x+y)^{s-1} = (x+y)^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} x^j y^{(m-1)-j} \tag{4.10}$$

が成り立つ。但し，ここで $\binom{a}{b}$ は 2 項係数である。よって，

$$\begin{aligned}
I(s) = I(m) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} x^j y^{(m-1)-j} \right) F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(x) F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \left(\int_0^\infty x^{(j+1)-1} F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(x) \mathrm{d}x \right) \left(\int_0^\infty y^{(m-j)-1} F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y) \mathrm{d}y \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \mathscr{M} F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(j+1) \mathscr{M} F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(m-j)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

が成り立つ。ここで，Mellin 変換の部分を考えると，

$$\begin{aligned}\mathscr{M}F_{\alpha}^{N,\theta}(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1}F_{\alpha}^{N,\theta}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} x^{s-1}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{e^{2\pi ik\theta}}{k^{\alpha}}e^{-kx}\right)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{e^{2\pi ik\theta}}{k^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-kx}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{e^{2\pi ik\theta}}{k^{\alpha}}\frac{1}{k^s}\Gamma(s) \\ &= \Gamma(s)\zeta_{\mathrm{L}}(s+\alpha,\theta,N) \end{aligned} \tag{4.12}$$

であるから，$I(m)$ は，

$$\begin{aligned} I(s) = I(m) &= \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\Gamma(j+1)\zeta_{\mathrm{L}}(j+1+\alpha_1,\theta_1,N)\Gamma(m-j)\zeta_{\mathrm{L}}(m-j+\alpha_2,\theta_2,N) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{j!(m-1-j)!}j!\zeta_{\mathrm{L}}(j+1+\alpha_1,\theta_1,N)(m-j-1)!\zeta_{\mathrm{L}}(m-j+\alpha_2,\theta_2,N) \\ &= (m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\zeta_{\mathrm{L}}(j+1+\alpha_1,\theta_1,N)\zeta_{\mathrm{L}}(m-j+\alpha_2,\theta_2,N) \end{aligned} \tag{4.13}$$

と変形できる。故に，

$$\frac{I(m)}{(m-1)!} = \sum_{j=0}^{m-1}\zeta_{\mathrm{L}}(j+1+\alpha_1,\theta_1,N)\zeta_{\mathrm{L}}(m-j+\alpha_2,\theta_2,N) \tag{4.14}$$

となる。改めて $s\in\mathbb{C},\Re(s)=\sigma>1$ を複素変数と見て，(4.9) で，積分変数の変数変換 $x+y=z$ を行うと，

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}(x+y)^{s-1}F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(x)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\infty}\left(\int_y^{\infty}z^{s-1}F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(z-y)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{z}z^{s-1}F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(z-y)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\infty}z^{s-1}\left(\int_0^{z}F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(z-y)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{4.15}$$

となる。ここで $I(s)$ は，変数 z の関数 $\int_0^z F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(z-y)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y)\mathrm{d}y$ の Mellin 変換になっている。

まず，畳み込み型の積分 $\int_0^z F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(z-y)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y)\mathrm{d}y$ の部分を考える。

$$\begin{aligned}
F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(z-y)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y) &= \sum_{k=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}}{k^{\alpha_1}}e^{-k(z-y)}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_2 h}}{h^{\alpha_2}}e^{-hy} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}}e^{-kz}e^{(k-h)y} \\
&= F_{\alpha_1+\alpha_2}^{N,\theta_1+\theta_2}(z)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}}e^{-kz}e^{(k-h)y} \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

なので，これを $\int_0^z \cdots \mathrm{d}y$ で積分すると，

$$\begin{aligned}
\int_0^z F_{\alpha_1}^{N,\theta_1}(z-y)F_{\alpha_2}^{N,\theta_2}(y)\mathrm{d}y &= zF_{\alpha_1+\alpha_2}^{N,\theta_1+\theta_2}(z)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}e^{-kz}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}}\frac{e^{(k-h)z}-1}{(k-h)} \\
&= zF_{\alpha_1+\alpha_2}^{N,\theta_1+\theta_2}(z)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}}\frac{e^{-hz}-e^{-kz}}{k-h} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

となるから，(4.17) の右辺最後の 2 重和 $\sum\sum$ の部分の Mellin 変換だけを考える。

$$S_1 = \sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}}\frac{e^{-hz}}{k-h}, \qquad (4.18)$$

$$S_2 = \sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}}\frac{-e^{-kz}}{k-h} \qquad (4.19)$$

とおく。すると，

$$I(s) = \mathscr{M}F_{\alpha_1+\alpha_2}^{N,\theta_1+\theta_2}(s+1)+\int_0^\infty z^{s-1}S_1\mathrm{d}z+\int_0^\infty z^{s-1}S_2\mathrm{d}z \qquad (4.20)$$

がいえる。まず S_1 から，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty z^{s-1}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}e^{-hz}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}(k-h)}\right)\mathrm{d}z &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}(k-h)}\int_0^\infty z^{s-1}e^{-hz}\mathrm{d}z \\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{\alpha_2}(k-h)}\frac{1}{h^s}\Gamma(s) \\
&= \Gamma(s)\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{s+\alpha_2}(k-h)} \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

と変形できる。さて，ここで，

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{N}\sum_{h=1}^{N}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{h=1\\h\neq k}}^{N}=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{h=1}^{k-1}+\sum_{h=k+1}^{N}\right)=\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{\substack{l=1\\(l=k-h)}}^{N-h}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\(l=h-k)}}^{N-k} \tag{4.22}$$

と有限和を分割する（空和の値は 0 であると考える）と，

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{\substack{l=1\\(l=k-h)}}^{N-h}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{s+\alpha_2}(k-h)}\\
&=\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-h}\frac{e^{2\pi i\theta_1 (h+l)}e^{2\pi i\theta_2 h}}{(h+l)^{\alpha_1}h^{s+\alpha_2}l}\\
&=\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-h}\frac{e^{2\pi i\theta_2 h}e^{2\pi i\theta_1 (h+l)}}{h^{s+\alpha_2}l(h+l)^{\alpha_1}}\\
&=\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_2 h}e^{2\pi i\theta_1 (h+l)}}{h^{s+\alpha_2}l(h+l)^{\alpha_1}}-\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{l=N-h+1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_2 h}e^{2\pi i\theta_1 (h+l)}}{h^{s+\alpha_2}l(h+l)^{\alpha_1}}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

である。(4.23) の右辺最後の 2 重和 $\sum\sum$ の項は，

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{l=N-h+1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_2 h}e^{2\pi i\theta_1 (h+l)}}{h^{s+\alpha_2}l(h+l)^{\alpha_1}}\right| &\leq \sum_{h=1}^{N-1}\sum_{l=N-h+1}^{N}\left|\frac{e^{2\pi i\theta_2 h}e^{2\pi i\theta_1 (h+l)}}{h^{s+\alpha_2}l(h+l)^{\alpha_1}}\right|\\
&=\sum_{h=1}^{N-1}\sum_{l=N-h+1}^{N}\frac{1}{h^{\sigma+\Re(\alpha_2)}l(h+l)^{\Re(\alpha_1)}}\\
&\leq\sum_{h=1}^{N}\sum_{l=N-h+1}^{N}\frac{1}{h^{\sigma}l}\\
&\leq\sum_{h=1}^{N}\frac{1}{h^{\sigma}}\cdot\frac{h}{N-h+1}\\
&\ll\frac{1}{N^{\sigma-1}}\cdot\log N\to 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$(\sigma>1 \text{ を固定して，} N\to+\infty \text{ のとき})$$

と評価できる。この評価は参考文献 [7] を参考にした。全く同様に，

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\(l=h-k)}}^{N-k}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 h}}{k^{\alpha_1}h^{s+\alpha_2}(k-h)}=-\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{e^{2\pi i\theta_1 k}e^{2\pi i\theta_2 (k+l)}}{k^{\alpha_1}l(k+l)^{s+\alpha_2}}+O\left(\frac{\log N}{N^{\sigma-1}}\right) \tag{4.25}$$

という評価も得られて，S_1 の Mellin 変換の評価が出来た。S_2 の Mellin 変換の評価については，S_1 の場合の，α_1 と α_2 を，θ_1 と θ_2 を，それぞれ交換したものに他ならない。従って，$\Re(s)=\sigma>1$

を固定して，$N \to +\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{I(s)}{\Gamma(s)} &= s\cdot\zeta_{\mathrm{L}}(s+1+\alpha_1+\alpha_2;\theta_1+\theta_2;N)\\ &\quad+\zeta_{\mathrm{MT},2}(s+\alpha_2,1,\alpha_1;\theta_1,\theta_2;N)-\zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_1,1,s+\alpha_2;\theta_1+\theta_2,\theta_2;N)\\ &\quad+\zeta_{\mathrm{MT},2}(s+\alpha_1,1,\alpha_2;\theta_2,\theta_1;N)-\zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_2,1,s+\alpha_1;\theta_1+\theta_2,\theta_1;N)+o(1)\end{aligned} \tag{4.26}$$

が成り立つ。$s=m\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ として，$N\to+\infty$ とすれば，(4.14) と (4.26) により，

$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_1,1,m+\alpha_2;\theta_1+\theta_2,\theta_2)-\zeta_{\mathrm{MT},2}(m+\alpha_2,1,\alpha_1;\theta_1,\theta_2)\\ &\quad+\zeta_{\mathrm{MT},2}(\alpha_2,1,m+\alpha_1;\theta_1+\theta_2,\theta_1)-\zeta_{\mathrm{MT},2}(m+\alpha_1,1,\alpha_2;\theta_2,\theta_1)\\ &=m\cdot\zeta_{\mathrm{L}}(m+1+\alpha_1+\alpha_2;\theta_1+\theta_2)-\sum_{j=0}^{m-1}\zeta_{\mathrm{L}}(j+1+\alpha_1;\theta_1)\zeta_{\mathrm{L}}(m-j+\alpha_2;\theta_2)\end{aligned} \tag{4.27}$$

が成り立つ。これで主結果の証明が終わる。 □

4.3 主結果から得られる系

系 **4.1.** $n\in\mathbb{N}_{\geq 3}$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(n,1,1)=\frac{n+3}{2}\zeta(n+2)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\zeta(j+1)\zeta(n+1-j) \tag{4.28}$$

が成り立つ。

証明. $\alpha_1=\alpha_2=1,\theta_1=\theta_2=0$ を適用すると，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(m+1,1,1)=\zeta_{\mathrm{MT},2}(1,1,m+1)-\frac{m}{2}\zeta(m+3)+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\zeta(j+2)\zeta(m-j+1) \tag{4.29}$$

となる。一方で，

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathrm{MT},2}(1,1,m+1)&=\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{hk(h+k)^{m+1}}\\ &=\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h+k}{hk(h+k)^{m+2}}\\ &=\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h}{hk(h+k)^{m+2}}+\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{hk(h+k)^{m+2}}\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+h)^{m+2}}+\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{h(h+k)^{m+2}}\\ &=2\zeta_{\mathrm{EZ},2}(1,m+2)\end{aligned} \tag{4.30}$$

が成り立つ。(4.30) を (4.29) に適用すれば,

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(m+1,1,1) = 2\zeta_{\mathrm{EZ},2}(1,m+2) - \frac{m}{2}\zeta(m+3) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\zeta(j+2)\zeta(m-j+1) \tag{4.31}$$

を得る。

補題 4.1 ([7] を参照). $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ に対して,

$$2\zeta_{\mathrm{EZ},2}(1,m) = m\zeta(m+1) - \sum_{j=1}^{m-2}\zeta(j+1)\zeta(m-j) \tag{4.32}$$

が成り立つ。但し，空和の値は 0 とする。

この補題を (4.31) に適用すれば,

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(m+1,1,1) = \frac{m+4}{2}\zeta(m+3) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\zeta(j+1)\zeta(m+2-j) \tag{4.33}$$

となるので，$m+1=n$ とおけば系の主張が得られる。（証明終） □

4.4 主結果とその系から得られる具体例

$n = 3,4,5,6,7$ を適用した結果を以下に挙げておく。

例 4.1 ($n = 3,4,5,6,7$ の場合).

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(3,1,1) = 3\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3), \tag{4.34}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(4,1,1) = \frac{7}{2}\zeta(6) - \zeta(2)\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(3)\zeta(3), \tag{4.35}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(5,1,1) = 4\zeta(7) - \zeta(2)\zeta(5) - \zeta(3)\zeta(4), \tag{4.36}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(6,1,1) = \frac{9}{2}\zeta(8) - \zeta(2)\zeta(6) - \zeta(3)\zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(4)\zeta(4), \tag{4.37}$$

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(7,1,1) = 5\zeta(9) - \zeta(2)\zeta(7) - \zeta(3)\zeta(6) - \zeta(4)\zeta(5) \tag{4.38}$$

5 無限級数の分割と積分表示

本節の証明では，D. B. Zagier-中村隆（[4], [24] など）の手法を応用する。

5.1 Witten のゼータ関数

繰り返しになるが，必要のため定義から始める。

定義 5.1 (Mordell-Tornheim 型)**.** $s_j \in \mathbb{C}$ $(j=1,2,3)$ が $\Re(s_1+s_3)>1, \Re(s_2+s_3)>1, \Re(s_1+s_2+s_3)>2$ を満たしていれば，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1,s_2,s_3)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}} \tag{5.1}$$

であった。

更に新しい多変数多重ゼータ関数を定義する。以下，$a,b,c\in\mathbb{Z}$ に対して，$a\equiv b\ (c)$ と書いたら，これは $a\equiv b \pmod c$ の意味である。$c\mid a-b$ とも同じ意味である。

定義 5.2 (Witten 型の 4 変数 2 重ゼータ関数)**.** $s_j\in\mathbb{C}$ $(j=1,2,3,4)$ が次の 3 つの条件，

$$\begin{cases} \Re(s_1+s_3+s_4)>1, \\ \Re(s_2+s_3+s_4)>1, \\ \Re(s_1+s_2+s_3+s_4)>2 \end{cases} \tag{5.2}$$

を全て満たしているとする。このとき，

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1,s_2,s_3,s_4)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}}, \tag{5.3}$$

$$\zeta_{\mathrm{W},2}^{\langle 2\rangle}(s_1,s_2,s_3,s_4)=\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv 1(2)}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}} \tag{5.4}$$

と定義する。

実は $\zeta_{\mathrm{MT},2}$ は Witten 型の一種であるから，上述の 3 つの関数は全て Witten 型の多変数多重ゼータの枠組みの範疇に在る。上述の 3 つの関数たちの間には次の関係式が成り立つ。

補題 5.1. singularity を除く全ての $(s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{C}^3$ について，

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1,s_2,0,s_3)=\zeta_{\mathrm{W},2}^{\langle 2\rangle}(s_1,s_2,0,s_3)+2^{-s_1-s_3}\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1,s_2,s_3) \tag{5.5}$$

が成り立つ。

証明. $\Re(s_1+s_3)>1, \Re(s_2+s_3)>1, \Re(s_1+s_2+s_3)>2$ であれば,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathrm{W},2}(s_1,s_2,0,s_3) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+2n)^{s_3}} \\
&= \left(\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv 1(2)}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}+\sum_{\substack{m=1\\ m\not\equiv 1(2)}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\right)\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+2n)^{s_3}} \\
&= \zeta_{\mathrm{W},2}^{\langle 2\rangle}(s_1,s_2,0,s_3)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^{s_1}n^{s_2}(2m+2n)^{s_3}} \\
&= \zeta_{\mathrm{W},2}^{\langle 2\rangle}(s_1,s_2,0,s_3)+2^{-s_1-s_3}\zeta_{\mathrm{MT},2}(s_1,s_2,s_3) \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

という関数関係式が成り立つ。しかし，複素関数論の解析接続と一致の定理により，(5.6) は singularity を除く全ての $(s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{C}^3$ で成り立つ。 □

補題と書いたのは，後で系を示すときに用いるからである。

定義 5.3. $x,y\in\mathbb{R}$ に対して，

$$x\vee y=\max\{x,y\} \qquad (5.7)$$

と定義する。

定義 5.4 (Gauss 記号). $x\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\lfloor x\rfloor=\max\mathbb{Z}_{\le x}=\max\{n\in\mathbb{Z}\colon n\le x\} \qquad (5.8)$$

と定義する。$\lfloor x\rfloor$ を x の Gauss 記号と呼ぶ場合がある。$\lfloor x\rfloor$ は x を超えない最大の整数である。

定義 5.5 (一般 2 項係数). $s\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\binom{s}{0}=1, \qquad (5.9)$$

$$\binom{s}{n}=\frac{1}{n!}\cdot\prod_{k=1}^{n}(s-k+1) \qquad (5.10)$$

と定義して，これを一般 2 項係数と呼ぶ。$s,n\in\mathbb{Z}$ で $s\ge n\ge 0$ のときは，通常の 2 項係数に一致する。$n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ を任意に選んで固定すれば，$\binom{s}{n}$ は変数 $s\in\mathbb{C}$ の（有理数係数で最高次係数が 1 の）n 次多項式関数である。

5.2 本論文の主結果

主結果 5.1. 任意に選んだ $a,b\in\mathbb{N}$ を固定すれば，特異点を除く，全ての $s\in\mathbb{C}$ に対して，次の関数関係式

$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathrm{W},2}(a,s,0,b)+(-1)^{a+b}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a)+(-1)^{a}2^{s}\zeta_{\mathrm{MT},2}(a,b,s)\\&\quad-(-1)^{a}2^{s-b}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(a,b,0,s)-(-1)^{a}2^{s-a}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(b,a,0,s)\\&=\frac{(-1)^{a}}{a!b!2^{a+b-1}}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{a\vee b}{2}\rfloor}\left\{a\binom{b}{2j}+b\binom{a}{2j}\right\}2^{2j}(2j)!(a+b-2j-1)!\zeta(2j)\zeta(s+a+b-2j)\end{aligned}\tag{5.11}$$

が成り立つ。

証明.

定義 5.6. 以下，本論文では，$z,w\in\mathbb{C},z\neq 0$ に対して，

$$z^{w}=\exp\left(w\cdot\log z\right),\tag{5.12}$$

$$\log z=|z|+i\cdot\arg\left(z\right),\tag{5.13}$$

$$-\pi<\arg\left(z\right)\leq\pi\tag{5.14}$$

が成り立つように複素数 z の偏角 $\arg\left(z\right)$ を選ぶ。

定義 5.7. $a,b\in\mathbb{N},s\in\mathbb{C},\Re(s)>1$ に対して，

$$S(a,s,b)=\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\m+2n\neq 0}}\sum\frac{1}{m^{a}n^{s}(m+2n)^{b}}\tag{5.15}$$

とおく。

(5.15) の絶対収束性については後述することにして，無限和を分割する。$m,n\in\mathbb{N}$ の部分を考えると，

$$\sum_{m>0}\sum_{n>0}\frac{1}{m^{a}n^{s}(m+2n)^{b}}=\zeta_{\mathrm{W},2}(a,s,0,b)\tag{5.16}$$

となることは $\zeta_{\mathrm{W},2}$ の定義からわかる。$m,n\in\mathbb{Z}_{<0}$ である部分は，

$$\begin{aligned}\sum_{m<0}\sum_{n<0}\frac{1}{m^{a}n^{s}(m+2n)^{b}}&=(-1)^{-a-s-b}\zeta_{\mathrm{W},2}(a,s,0,b)\\&=e^{-\pi i(s+a+b)}\zeta_{\mathrm{W},2}(a,s,0,b)\end{aligned}\tag{5.17}$$

となる。$m<0, n>0, m+2n<0$ の部分は，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m<0\\m+2n<0}}\sum_{n>0}\frac{1}{m^a n^s (m+2n)^b} &= \sum_{\substack{m>0\\-m+2n<0}}\sum_{n>0}\frac{1}{(-m)^a n^s (-m+2n)^b}\\
&= (-1)^{-a-b}\sum_{\substack{m>0\\m-2n>0}}\sum_{n>0}\frac{1}{m^a n^s (m-2n)^b}\\
&= (-1)^{-a-b}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a)\\
&= (-1)^{a+b}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a) \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

となる。$m>0, n<0, m+2n>0$ の部分は，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m>0\\m+2n>0}}\sum_{n<0}\frac{1}{m^a n^s (m+2n)^b} &= \sum_{\substack{m>0\\m-2n>0}}\sum_{n>0}\frac{1}{m^a (-n)^s (m-2n)^b}\\
&= (-1)^{-s}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a)\\
&= e^{-\pi i s}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a)\\
&= e^{-\pi i(s+a+b)}(-1)^{a+b}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a) \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

となる。$m<0, n>0, m+2n>0$ の部分は，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m<0\\m+2n>0}}\sum_{n>0}\frac{1}{m^a n^s (m+2n)^b} &= \sum_{\substack{m>0\\-m+2n>0}}\sum_{n>0}\frac{1}{(-m)^a n^s (-m+2n)^b}\\
&= (-1)^{-a}\sum_{\substack{m>0\\-m+2n>0}}\sum_{n>0}\frac{1}{m^a n^s (-m+2n)^b}\\
&= (-1)^{a}\sum_{\substack{m=1\\m+k\equiv 0(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^a\left(\frac{m+k}{2}\right)^s k^b}\\
&= (-1)^{a}2^s\sum_{\substack{m=1\\m\equiv k(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^a k^b (m+k)^s} \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

となる。$m>0,n<0,m+2n<0$ の部分は，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m>0\\m+2n<0}}\sum_{n<0}\frac{1}{m^a n^s(m+2n)^b} &= \sum_{\substack{m>0\\m-2n<0}}\sum_{n>0}\frac{1}{m^a(-n)^s(m-2n)^b}\\
&= (-1)^{-s-b}\sum_{\substack{m>0\\-m+2n>0}}\sum_{n>0}\frac{1}{m^a n^s(-m+2n)^b}\\
&= e^{-\pi i(s+b)}\sum_{\substack{m=1\\m+k\equiv 0(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^a k^b\left(\frac{m+k}{2}\right)^s}\\
&= e^{-\pi i(s+a+b)}(-1)^a 2^s\sum_{\substack{m=1\\m\equiv k(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^a k^b(m+k)^s} \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

となる。分割した各無限級数が絶対収束していることから，(5.15) も絶対収束していることがわかり，和の順序交換が正当化される。$\sum_{m\equiv k(2)}$ について考えると，

$$\sum_{\substack{m=1\\m\equiv k(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{\substack{m=1\\m\not\equiv k(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{\substack{m\equiv 1(2)\\k\equiv 0(2)}}\sum - \sum_{\substack{m\equiv 0(2)\\k\equiv 1(2)}}\sum \qquad (5.22)$$

と分解できるので，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m=1\\m\equiv k(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^a k^b(m+k)^s}\\
&= \zeta_{\mathrm{MT},2}(a,b,s) - \sum_{\substack{m=1\\m\equiv 1(2)}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^a(2k)^b(m+2k)^s} - \sum_{\substack{k=1\\k\equiv 1(2)}}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^b(2m)^a(k+2m)^s}\\
&= \zeta_{\mathrm{MT},2}(a,b,s) - 2^{-b}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(a,b,0,s) - 2^{-a}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(b,a,0,s) \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで，$s+a+b$ が奇数でなければ，$1+e^{-\pi(s+a+b)}\neq 0$ であって，

$$\begin{aligned}
\frac{S(a,s,b)}{1+e^{-\pi i(s+a+b)}} &= \zeta_{\mathrm{W},2}(a,s,0,b) + (-1)^{a+b}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a) + (-1)^a 2^s\zeta_{\mathrm{MT},2}(a,b,s)\\
&\quad - (-1)^a 2^{s-b}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(a,b,0,s) - (-1)^a 2^{s-a}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(b,a,0,s) \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

が成り立つ。これで (5.11) の左辺が出た。次に，(5.15) の積分表示を考える。

補題 5.2. $n\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$\int_0^1 e^{2\pi inx}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\text{ のとき})\\ 1 & (n=0\text{ のとき})\end{cases} \qquad (5.25)$$

が成り立つ。

補題により，

$$
\begin{aligned}
S(a,s,b) &= \sum\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ m+2n\neq 0}} \frac{1}{m^a n^s (m+2n)^b} \\
&= \sum\sum_{m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\lim_{K\to+\infty} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ |k|\leq K}} \frac{\int_0^1 e^{2\pi i(m+2n-k)x}\mathrm{d}x}{m^a n^s k^b} \right) \\
&= (-1)^b \sum\sum_{m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\lim_{K\to+\infty} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ |k|\leq K}} \int_0^1 \frac{e^{2\pi imx}}{m^a} \frac{e^{2\pi i(-k)x}}{(-k)^b} \frac{e^{4\pi inx}}{n^s} \mathrm{d}x \right) \\
&= (-1)^b \sum\sum_{m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\lim_{K\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{2\pi imx}}{m^a} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ |k|\leq K}} \frac{e^{2\pi i(-k)x}}{(-k)^b} \frac{e^{4\pi inx}}{n^s} \mathrm{d}x \right) \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

と，ここまでは変形できる。しかし，$a=1$ または $b=1$ の可能性があるので，単純には和と積分を交換できない。lim と $\int$ の交換については，参考文献 [3], [23], [27], [28], [29], [30] などを参照した。

定義 5.8 (Bernoulli 数)**.** 次の Maclaurin 級数展開式

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} t^n \tag{5.27}$$

を満たす有理数 B_n を Bernoulli 数と呼ぶ。

定義 5.9 (Bernoulli 多項式)**.** 次の，媒介変数 x を含む Maclaurin 級数展開式

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_n(x)}{n!} t^n \tag{5.28}$$

を満たす x の（有理数係数で最高次係数が 1 の）n 次多項式 $\mathrm{B}_n(x)$ を Bernoulli 多項式と呼ぶ。

補題 5.3 ([1], [4], [24] などを参照)**.** $x\in(0,1)$ でコンパクト一様に

$$\mathrm{B}_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{K\to+\infty} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ |k|\leq K}} \frac{e^{2\pi ikx}}{k} \tag{5.29}$$

が成り立つ。このとき，右辺の無限級数は条件収束する。

補題 5.4 ([1], [4], [24] などを参照). $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ を任意に選んで固定すると，$x \in [0,1]$ で一様に

$$\mathrm{B}_a(x) = -\frac{a!}{(2\pi i)^a} \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^a} \tag{5.30}$$

が成り立つ。このとき，右辺の無限級数は絶対収束する。

補題 5.5. $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1$ を任意に選んで固定すると，$x \in [0,1]$ で一様に

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{4\pi i n x}}{n^s} \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{4\pi i n x}}{n^s} + e^{-\pi i s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-4\pi i m x}}{m^s} = \zeta_{\mathrm{L}}(s; 2x) + e^{-\pi s} \zeta_{\mathrm{L}}(s; -2x) \right) \tag{5.31}$$

は絶対収束する。これは優級数として取れる Riemann のゼータ関数の性質に依る。

これらの補題により，

$$\begin{aligned}
&\sum\sum_{m,n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\lim_{K \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{2\pi i m x}}{m^a} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ |k| \leq K}} \frac{e^{2\pi i (-k) x}}{(-k)^b} \frac{e^{4\pi i n x}}{n^s} \mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\lim_{M \to +\infty} \int_0^1 \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ |m| \leq M}} \frac{e^{2\pi i m x}}{m^a} \frac{-(2\pi i)^b}{b!} \mathrm{B}_b(x) \frac{e^{4\pi i n x}}{n^s} \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{(2\pi i)^{a+b}}{a! b!} \int_0^1 \mathrm{B}_a(x) \mathrm{B}_b(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{4\pi i n x}}{n^s} \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.32}$$

と変形できる。故に，

$$S(a,s,b) = (-1)^b \frac{(2\pi i)^{a+b}}{a! b!} \int_0^1 \mathrm{B}_a(x) \mathrm{B}_b(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{4\pi i n x}}{n^s} \mathrm{d}x \tag{5.33}$$

が成り立つ。

補題 5.6 ([1], [24] などを参照). $a, b \in \mathbb{N}$ のとき，$x \in [0,1]$ で，

$$\mathrm{B}_a(x) \mathrm{B}_b(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a \vee b}{2} \rfloor} \left\{ a \binom{b}{2j} + b \binom{a}{2j} \right\} \frac{\mathrm{B}_{2j} \mathrm{B}_{a+b-2j}(x)}{a+b-2j} - (-1)^a \frac{a! b!}{(a+b)!} \mathrm{B}_{a+b} \tag{5.34}$$

が成り立つ。

よって，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{B}_a(x) \mathrm{B}_b(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{4\pi i n x}}{n^s} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a \vee b}{2} \rfloor} \left\{ a \binom{b}{2j} + b \binom{a}{2j} \right\} \frac{\mathrm{B}_{2j}}{a+b-2j} \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{B}_{a+b-2j}(x) e^{4\pi i n x}}{n^s} \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.35}$$

がいえる。有界区間上の多項式関数は有界なので，無限級数は一様に絶対収束していて，

$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{B}_{a+b-2j}(x)e^{4\pi inx}}{n^s}\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^s}\int_0^1 \mathrm{B}_{a+b-2j}(x)e^{4\pi inx}\mathrm{d}x \tag{5.36}$$

となる。再び，(5.29) と (5.30) を使えば，（コンパクト）一様に収束しているから積分と和の交換ができて，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{B}_{a+b-2j}(x)e^{4\pi inx}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{(a+b-2j)!}{(2\pi i)^{a+b-2j}} \lim_{K\to+\infty} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ |k|\leq K}} \frac{1}{k^{a+b-2j}} \int_0^1 e^{2\pi i(k+2n)x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{(a+b-2j)!}{(2\pi i)^{a+b-2j}} \cdot \frac{1}{(-2n)^{a+b-2j}} \\
&= -\frac{(-1)^{a+b}(a+b-2j)!}{2^{a+b-2j}(2\pi i)^{a+b-2j}} \cdot \frac{1}{n^{a+b-2j}}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

となる。従って，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{B}_{2j}}{a+b-2j} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^s} \int_0^1 \mathrm{B}_{a+b-2j}(x)e^{4\pi inx}\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{B}_{2j}\frac{(-1)^{a+b}(a+b-2j-1)!}{2^{a+b-2j}(2\pi i)^{a+b-2j}} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^{s+a+b-2j}} \\
&= -\mathrm{B}_{2j}\frac{(-1)^{a+b}(a+b-2j-1)!}{2^{a+b-2j}(2\pi i)^{a+b-2j}} \left(1+(-1)^{-s-a-b+2j}\right)\zeta(s+a+b-2j) \\
&= -\mathrm{B}_{2j}\frac{(-1)^{a+b}(a+b-2j-1)!}{2^{a+b-2j}(2\pi i)^{a+b-2j}} \left(1+e^{-\pi i(s+a+b)}\right)\zeta(s+a+b-2j)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

である。

補題 5.7 ([1], [24] などを参照)**.** $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\mathrm{B}_{2j} = -2\frac{(2j)!}{(2\pi i)^{2j}}\zeta(2j) \tag{5.39}$$

が成り立つ。

最後にこの補題を用いれば，$s+a+b$ が奇数でないとき，

$$\begin{aligned}
&\left(1+e^{-\pi i(s+a+b)}\right)^{-1} S(a,s,b) \\
&= \frac{(-1)^a}{a!b!2^{a+b-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{a\vee b}{2}\rfloor} \left\{a\binom{b}{2j}+b\binom{a}{2j}\right\} 2^{2j}(2j)!(a+b-2j-1)!\zeta(2j)\zeta(s+a+b-2j)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

が成り立つ。(5.24) と (5.40) により，$s+a+b$ が奇数でなければ，

$$\begin{aligned}&\zeta_{\mathrm{W},2}(a,s,0,b)+(-1)^{a+b}\zeta_{\mathrm{W},2}(b,s,0,a)+(-1)^a 2^s\zeta_{\mathrm{MT},2}(a,b,s)\\&\quad-(-1)^a2^{s-b}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(a,b,0,s)-(-1)^a2^{s-a}\zeta^{\langle 2\rangle}_{\mathrm{W},2}(b,a,0,s)\\&=\frac{(-1)^a}{a!b!2^{a+b-1}}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{a\vee b}{2}\rfloor}\left\{a\binom{b}{2j}+b\binom{a}{2j}\right\}2^{2j}(2j)!(a+b-2j-1)!\zeta(2j)\zeta(s+a+b-2j)\end{aligned}\tag{5.41}$$

が成り立つことがわかる。しかし $s+a+b$ が奇数になる $s\in\mathbb{C}$ は離散的にしか存在しないため，$a,b\in\mathbb{N}$ を任意に選んで固定することで，複素関数論の解析接続と一致の定理により，(5.41) は特異点を除く全ての $s\in\mathbb{C}$ で成り立つことがわかる。これで主結果の証明が終わる。 □

5.3 主結果から得られる系

系 5.1. $a\in 2\mathbb{N}-1$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{W},2}(a,a,0,a)=-\sum_{j=0}^{(a-1)/2}\frac{2^{3a}+2+2^{2j}}{2^{2a}}\binom{2a-2j-1}{a-1}\zeta(2j)\zeta(3a-2j)\tag{5.42}$$

が成り立つ。

Zhao [32] によって，$p,q,r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $p+q+r+s$（これは重さと呼ばれる）が奇数なら $\zeta_{\mathrm{W},2}(p,q,r,s)$ が，ある $\mathbb{Q}$-係数の Riemann ゼータ値 $\zeta(n)$ $(n\in\mathbb{N}_{\geq 2})$ の多項式で表すことができる，ということは示されている。上述の系は，具体的に明示的に有理数係数を決定しているという点が新しい結果である。$a+a+a+a=2\cdot 2a$ は偶数なので，$\zeta_{\mathrm{W},2}(a,a,a,a)$ は重さが偶数である。Huard, Williams, Zhang らによって，重さが奇数の $\zeta_{\mathrm{MT},2}(a,a,a)=\zeta_{\mathrm{W},2}(a,a,a,0)$ の明示公式は得られている。以下の証明の中で紹介する。

証明.

補題 5.8 (Huard, Williams and Zhang, 1996 [6]). $a\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(a,a,a)=\frac{4}{1+2(-1)^a}\sum_{j=0}^{\lfloor a/2\rfloor}\binom{2a-2j-1}{a-1}\zeta(2j)\zeta(3a-2j)\tag{5.43}$$

が成り立つ。特に，$a\in 2\mathbb{N}-1$ のときは，

$$\zeta_{\mathrm{MT},2}(a,a,a)=-4\sum_{j=0}^{(a-1)/2}\binom{2a-2j-1}{a-1}\zeta(2j)\zeta(3a-2j)\tag{5.44}$$

が成り立つ。

この補題と (5.5) に注意して，(5.11) において，$a=b=s\in 2\mathbb{N}-1$ の場合を考えれば得られる。 □

5.4 主結果とその系から得られる具体例

$a = 1, 3, 5$ の場合の結果を以下に挙げる。

例 5.1 ($a = 1, 3, 5$ の場合).

$$\zeta_{W,2}(1,1,0,1) = \frac{11}{8}\zeta(3), \tag{5.45}$$

$$\zeta_{W,2}(3,3,0,3) = \frac{2575}{64}\zeta(9) - \frac{777}{32}\zeta(2)\zeta(7), \tag{5.46}$$

$$\zeta_{W,2}(5,5,0,5) = \frac{2064573}{1024}\zeta(15) - \frac{573545}{512}\zeta(2)\zeta(13) - \frac{81965}{512}\zeta(4)\zeta(11) \tag{5.47}$$

6 解析接続と Singularity の明示

6.1 Mellin-Barnes の積分公式

本節の証明の中心となる補題をまず述べる。

補題 6.1 (Mellin-Barnes の積分公式). $s, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \Re(s) > 0$ かつ，$c \in (-\Re(s), 0)$ とする。このとき，

$$(1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(s+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s)} \lambda^z \mathrm{d}z, \tag{6.1}$$

が成り立つ。但し上述の積分は，$z = c + it \ (t \in \mathbb{R})$ とおけば，

$$\int_{(c)} \cdots \mathrm{d}z = \lim_{L \to +\infty} \int_{c-iL}^{c+iL} \cdots \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \tag{6.2}$$

が成り立つという意味である。

多重ゼータ関数を解析接続するために，この Mellin-Barnes の積分公式は大変有用である。参考文献 [15], [16], [17], [26] などを参照した。

6.2 EZ 型の部分和になっている，ある 2 変数 2 重ゼータ関数の解析接続

定義 6.1. $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ に対して，$\sigma_1 = \Re(s_1), \sigma_2 = \Re(s_2)$ とおく。

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{3}{2}, \\ \sigma_2 > \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{6.3}$$

を満たす $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \ (= \mathbb{C} \times \mathbb{C})$ に対して，

$$\widetilde{\zeta}_2(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n^2)^{s_2}} \tag{6.4}$$

と定義する。

$$\widetilde{\zeta}_2(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{ は平方数}}}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}} \tag{6.5}$$

と見れば，$\zeta_{\mathrm{EZ},2}(s_1, s_2)$ の部分和になっていることがわかる。

結果 6.1. $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ が条件 (6.3) を満たせば，(6.4) の右辺は絶対収束する。

証明.

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{3}{2}, \sigma_2 - \frac{1}{2}\right\} \tag{6.6}$$

を満たす ε を 1 つ取る。次に，

$$\delta = \sigma_2 - \frac{1}{2} - \varepsilon \tag{6.7}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
\delta &= \sigma_2 - \frac{1}{2} - \varepsilon \\
&> \sigma_2 - \frac{1}{2} - \min\left\{\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{3}{2}, \sigma_2 - \frac{1}{2}\right\} \\
&= \max\{1 - \sigma_1, 0\} \geq 0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

が成り立つので，$\delta > 0$ である。更に，

$$\begin{aligned}
\sigma_1 + \delta &= \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} - \varepsilon \\
&> \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} - \min\left\{\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{3}{2}, \sigma_2 - \frac{1}{2}\right\} \\
&= \max\{1, \sigma_1\} \geq 1
\end{aligned} \tag{6.9}$$

であるから，$\sigma_1 + \delta > 1$ である。故に，

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{m^{s_1}\left(m+n^2\right)^{s_2}}\right| &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\sigma_1}\left(m+n^2\right)^{\sigma_2}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-\sigma_1}\left(m+n^2\right)^{-\delta}\left(m+n^2\right)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-\sigma_1} m^{-\delta}\left(n^2\right)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\sigma_1+\delta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2\varepsilon}} \\
&= \zeta\left(\sigma_1+\delta\right)\cdot\zeta\left(1+2\varepsilon\right) < +\infty
\end{aligned} \tag{6.10}$$

という評価が得られて，絶対収束していることがわかる。 □

結果 6.2 (singularity の明示). $\widetilde{\zeta}_2(s_1, s_2)$ は全 $\mathbb{C}^2$-空間へ有理型接続ができて，このとき真の singularity は，

$$s_1 + s_2 = 1, \tag{6.11}$$

$$s_1 + s_2 = \frac{3}{2}, \tag{6.12}$$

$$s_2 = \frac{3}{2} - k \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \tag{6.13}$$

が全てであり，他にはない。

注意 6.1. 上述のような，一般項の分母が有限個の多項式（$m+n$ や $m+2n$ など）の積であれば，Mellin-Barnes の積分公式を用いて，$\mathbb{C}^r$-空間へ有理型関数として解析接続できることが，松本耕二（名大数理）によって示されている [20]。本論文では singularity を明示する。

証明. まず，$\Re(s_2) > \frac{1}{2}$ を満たす $s_2 \in \mathbb{C}$ を任意に選んで固定する。このとき，$-\Re(s_2) < -\frac{1}{2}$ が成り立つことに注意する。次に，$c \in \left(-\Re(s_2), -\frac{1}{2}\right)$ を任意に 1 つ取って固定する。最後に，$\Re(s_1) > 1 - \Re(s_2) - c$ を満たす $s_1 \in \mathbb{C}$ を任意に選び固定する。ここで，$\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\lambda = \lambda(m,n) = \frac{n^2}{m} \tag{6.14}$$

と定める。すると，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ を満たすので，Mellin-Barnes の積分公式により，各 $m, n \in \mathbb{N}$ で，

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{n^2}{m}\right)^{-s_2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_2)}\left(\frac{n^2}{m}\right)^z \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_2)} m^{-z} n^{2z} \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{6.15}$$

が成り立つ。(6.15) の両辺に $m^{-s_1-s_2}$ を掛けて，和 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}$ を取ると，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n^2)^{s_2}} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(c)} \frac{\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_2)} m^{-s_1-s_2-z} n^{2z} \mathrm{d}z \tag{6.16}$$

となる。和と積分の順序交換を行うと，仮定より，$\Re(s_1+s_2+z) > 1$ かつ $\Re(-2z) > 1$ なので，

$$\widetilde{\zeta}_2(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s_2)}\int_{(c)} \Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z)\mathrm{d}z \tag{6.17}$$

となる。ここで，被積分関数（1 変数 z の関数）の $\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z)$ を考える。

$\Gamma(s_2+z)$ の項は，$z = -s_2, -s_2-1, -s_2-2, -s_2-3, \cdots$ がそれぞれ 1 位の極，　(6.18)

$\Gamma(-z)$ の項は，$z = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ がそれぞれ 1 位の極，　(6.19)

$\zeta(s_1+s_2+z)$ の項は，$z = 1 - s_1 - s_2$ が 1 位の極，　(6.20)

$\zeta(-2z)$ の項は，$z = -\dfrac{1}{2}$ が 1 位の極　(6.21)

である。そして，これ以外の特異点は存在しない。ここで，$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\Gamma(-z) = \frac{\Gamma(-z+k+1)}{\prod_{j=0}^{k}(-z+j)} \tag{6.22}$$

が成り立つことに注意する。留数を計算する。$z=0$ での留数は，

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{z=0}\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\ &= \lim_{z\to 0}(z-0)\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\ &= \lim_{z\to 0}(z-0)\Gamma(s_2+z)\frac{\Gamma(-z+0+1)}{-z+0}\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(s_2)\zeta(s_1+s_2)\end{aligned} \tag{6.23}$$

である。$k \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{>0}$ として，$z = k$ での留数は，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=k} \Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\
&= \lim_{z\to k}(z-k)\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\
&= \lim_{z\to k}(z-k)\Gamma(s_2+z)\frac{\Gamma(-z+k+1)}{\prod_{j=0}^{k}(-z+j)}\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\
&= \lim_{z\to k}\Gamma(s_2+z)\frac{\Gamma(-z+k+1)}{-\prod_{j=0}^{k-1}(-z+j)}\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.24}
$$

である。これは，$\Gamma(-z)$ の 1 位の極に対して，$\zeta(-2z)$ の 1 位の零点が打ち消し合っているからである。次に，$z = -\frac{1}{2}$ での留数は，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\
&= \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z) \\
&= \Gamma\left(s_2-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\zeta\left(s_1+s_2-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(s_2-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(s_1+s_2-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6.25}
$$

となる。$\forall R \in (0, +\infty)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i\Gamma(s_2)}\left(\int_{(R)} - \int_{(c)}\right)\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\Gamma(s_2)}\left\{\frac{1}{2}\Gamma(s_2)\zeta(s_1+s_2) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(s_2-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(s_1+s_2-\frac{1}{2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{6.26}
$$

となるので，従って，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\zeta}_2(s_1,s_2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(s_2-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s_2)}\cdot\zeta\left(s_1+s_2-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\zeta(s_1+s_2) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i\Gamma(s_2)}\int_{(R)}\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-2z)\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{6.27}
$$

が成り立つが，R は任意に大きい正の実数を選べるので，(6.27) は，$\widetilde{\zeta}_2(s_1,s_2)$ の $\mathbb{C}^2$ への有理型的延長（有理型接続）を示している。(6.27) より，$\widetilde{\zeta}_2(s_1,s_2)$ の（真の）singularity は，

$$s_1+s_2=1, \tag{6.28}$$

$$s_1+s_2=\frac{3}{2}, \tag{6.29}$$

$$s_2=\frac{3}{2}-k \quad (\forall k\in\mathbb{N}), \tag{6.30}$$

が全てであり，他にはない。（証明終） □

結果 6.3 (零点). (6.27) の表示から,

$$\begin{cases} s_2 = 0, -1, -2, -3, -4, \cdots \\ s_1 + s_2 = -2, -4, -6, -8, -10, \cdots \end{cases} \tag{6.31}$$

を満たす (s_1, s_2) が $\widetilde{\zeta_2}(s_1, s_2)$ の零点になっていることがわかる。(これは自明な零点と呼んでもよいのかもしれない。)

6.3 1変数複素関数としての極，極の位数，留数

$s = s_1 = s_2 \in \mathbb{C}$ とすると,

$$\begin{aligned} \widetilde{\zeta_2}(s,s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \cdot \zeta\left(2s - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\zeta(2s) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{(R)} \Gamma(s+z)\Gamma(-z)\zeta(2s+z)\zeta(-2z)\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{6.32}$$

となる。$\widetilde{\zeta_2}(s,s)$ を 1 変数複素関数として見る。

定義 6.2 (レムニスケート周率 ϖ).

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\mathrm{d}r = 2.62205\cdots \tag{6.33}$$

と定義する。ϖ はレムニスケート $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 - y^2}$ の半周である。

$$\varpi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{6.34}$$

が成り立つことが知られている。これらについては，[13] を参照した。ちなみに円周率 π は，単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の半周であるから,

$$\pi = 2\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \tag{6.35}$$

を満たす。

結果 6.4 ($\widetilde{\zeta_2}(s,s)$ の極，極の位数，留数). 1 変数複素関数 $\widetilde{\zeta_2}(s,s)$ の特異点は全て 1 位の極であり，その全てを明示すると,

$$s = \frac{1}{2}, \tag{6.36}$$

$$s = \frac{3}{4}, \tag{6.37}$$

$$s = \frac{3}{2} - k \ \ (k \in \mathbb{N}), \tag{6.38}$$

で全てである。それぞれの極における留数は，

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}} \widetilde{\zeta}_2(s,s) = \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}, \tag{6.39}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{4}} \widetilde{\zeta}_2(s,s) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\varpi}{2}, \tag{6.40}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}-k} \widetilde{\zeta}_2(s,s) = (-1)^{k-1}\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot(k-1)!}\cdot\frac{\zeta\left(\frac{5}{2}-2k\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \quad (k\in\mathbb{N}), \tag{6.41}$$

である。

証明. $\Gamma(s)$ の特異点は全て 1 位の極で，$s=0,-1,-2,-3,-4,\cdots$ であり，ある整関数 $E(s)$ が存在して，

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + E(s) \quad (\forall s\in\mathbb{C}\setminus\{1\}) \tag{6.42}$$

が成り立つことが知られている。

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=\frac{1}{2}} \widetilde{\zeta}_2(s,s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{s\to\frac{1}{2}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\lim_{s\to\frac{1}{2}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\zeta(2s)\\ &= \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4},\end{aligned} \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{4}} \widetilde{\zeta}_2(s,s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\lim_{s\to\frac{3}{4}}\left(s-\frac{3}{4}\right)\zeta\left(2s-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}-k} \widetilde{\zeta}_2(s,s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}\cdot\zeta\left(3-2k-\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{s\to\frac{3}{2}-k}\left(s-\frac{3}{2}+k\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\\ &= (-1)^{k-1}\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot(k-1)!}\cdot\frac{\zeta\left(\frac{5}{2}-2k\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}\end{aligned} \tag{6.45}$$

により，証明が終わる。 □

謝辞

本論文を執筆するにあたり，また論文製作するに至るまでに，私の指導教官である津村博文先生にはいくつもの助言を頂きました。数学の内容としてはもちろんのこと，TeX，参考文献，文章の書き方，要旨の作成，発表用のスライド作成などについても親身にご指導頂きました。先生のご指導無くして本論文を完成させることはできなかったであろうことは，疑う余地がありません。改めて感謝申し上げます。同研究室の宮崎隆史先輩をはじめ，ゼミメンバーにもセミナーの中で意見を頂くことができました。TeX に関しても，ゼミ内で解決できたことが少なくありません。本当に助かりました。本論文の第 6 節の内容は，平成 23 年 11 月 29 日～12 月 2 日に首都大で行われた，松本耕二先生（名大数理）による集中講義の中で（講義内容から刺激を受け）私自身が考えたものです。松本先生にも感謝申し上げます。最後に，徳永浩雄先生と服部久美子先生には，お忙しい中，本論文の副査読をして頂いたきました。両氏にも感謝申し上げます。

参考文献

[1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. (Springer, 1998).

[2] T. M. Apostol and T. H. Vu. *Dirichlet series related to the Riemann zeta function.* J. Number Theory, Vol. 19 (1984).

[3] 新井仁之『ルベーグ積分講義　ルベーグ積分と面積 0 の不思議な図形たち』(日本評論社, 2003)

[4] 荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信『ベルヌーイ数とゼータ関数』牧野書店（星雲社，2001）

[5] 荒川恒男，金子昌信『多重ゼータ値入門』Math-for-industry Education & Research Hub 九州大学グローバル COE プログラム（COE Lecture Note Vol.23: Kyushu University, 2010）

[6] J. G. Huard, K. S. Williams and Z. Y. Zhang. *On Tornheim's double series.* Acta Arithmetica, Vol. 75 (1996).

[7] S. Kanemitsu, Y. Tanigawa and M. Yoshimoto. *Convolution of Riemann zeta-values.* J. Math. Soc. Japan, Vol. 57, No. 4 (2005).

[8] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura. *Functional relations for zeta-functions of root system.* in Number Theory; Dreaming in Dreams - Proceedings of the 5th China-Japan Seminar, T. Aoki, S. Kanemitsu and J. -Y. Liu (eds.), World Scientific Publ (2010).

[9] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura. *An introduction to the theory of zeta-functions of root systems.* in Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions, G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura (eds.), MSJ Memoirs, Vol. 21, Mathematical Society of Japan (2010).

[10] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura. *On Witten multiple zeta-functions associated with semi-simple Lie algebras IV.* Glasgow Math. J. , Vol. 53 (2011).

[11] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura. *Multiple zeta values and zeta-functions of root systems.* Proc. Japan Acad. , Vol. 87, Ser. A (2011).

[12] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura. *Zeta-functions of weight lattices of compact connected semisimple Lie groups.* arXiv: 1011. 0323.

[13] 黒川信重，栗原将人，斎藤毅『数論 II 岩澤理論と保型形式』(岩波書店，2005)

[14] A. Laurincikas and R. Garunkstis. *The Lerch Zeta-function.* (Kluwer Academic Publishers, 2003).

[15] 松本耕二『多重ゼータ関数の解析接続と漸近展開（解析的整数論とその周辺)』数理解析研究所講究録（2000-06)，1160: 259-270

[16] K. Matsumoto. *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions.* Number Theory for the Millennium II, Proc. of the Millennial Conference on Number Theory. M. A. Bennett et al. (eds.), A K Peters, (2002).

[17] K. Matsumoto. *The analytic continuation and the asymptotic behavior of certain multiple zeta-functions.* Journal of Number Theory, Vol. 101 (2003).

[18] 松本耕二『Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数について（ディオファントス問題と解析的整数論）』数理解析研究所講究録（2003-05），1319: 198-201

[19] 松本耕二『リーマンのゼータ関数』1 開かれた数学（朝倉書店，2005）

[20] K. Matsumoto. *Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables.* in "Number Theory: Tradition and Modrnization", Proc. 3rd China-Japan Seminar, W. Zhang and Y. Tanigawa (eds.), Springer (2006).

[21] 松坂和夫『集合・位相入門』（岩波書店，1968）

[22] L. J. Mordell. *On the evaluation of some multiple series.* J. London Math. Soc. , Vol. 33 (1958).

[23] 森真『ルベーグ積分超入門　-関数解析や数理ファイナンス理解のために-』共立出版（共立出版株式会社，2004）

[24] T. Nakamura. *A functional relation for the Tornheim double zeta function.* Acta Arithmetica, Vol. 125.3 (2006).

[25] T. Nakamura. *Double Lerch Value Relations and Functional Relations for Witten Zeta Functions.* Tokyo J. Math. , Vol. 31, No. 2 (2008).

[26] T. Okamoto. *Generalizations of Apostol-Vu and Mordel-Tornheim multiple zeta functions.* Acta Arithmetica, Vol. 140.2 (2009).

[27] エアリス・M・スタイン，ラミ・シャカルチ［著］新井仁之，杉本充，髙木啓行，千原浩之［訳］『複素解析』プリンストン解析学講義 II（日本評論社，2009）

[28] 杉浦光夫『解析入門 I』基礎数学 2（東京大学出版会，1980）

[29] 杉浦光夫『解析入門 II』基礎数学 3（東京大学出版会，1985）

[30] 高木貞治『定本　解析概論』（岩波書店，2010）

[31] L. Tornheim. *Harmonic Double Series.* American Journal of Mathematics, Vol. 72, No. 2 (1950).

[32] J. Zhao. *Alternating Euler sums and special values of the Witten multiple zeta function attached to so(5).* J. Aust. Math. Soc. , Vol. 89 (2010).