修 士 学 位 論 文

題　名

完全二分AND-OR木に対する
最適乱択アルゴリズムの特徴づけと
木転置グラフの構造について

指導教授　　鈴木　登志雄　准教授

平成　２５年　１月　９日　提出

首都大学東京大学院

理工学研究科　数理情報科学専攻

学修番号　11878305

氏　名　小川　孝典

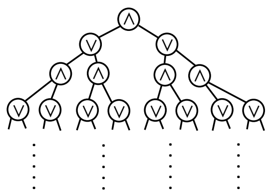
学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名　小川　孝典

論文題名：完全二分 AND-OR 木に対する最適乱択アルゴリズムの特徴づけと
木転置グラフの構造について

計算複雑さの理論の一分野として, AND-OR 木の研究がある.

AND-OR 木とは, 各節が AND($\wedge$) と OR($\vee$) によってラベル付けされた高さ有限の木構造のことである. 本稿では, 完全二分木の形であり, 各節は $\wedge$ と $\vee$ が上から順に交互にラベル付けされている木のみを扱う.



AND-OR 木は関数であり, アルゴリズム A と真理値割り当て (入力のビット列) ω に関して, 計算のコスト $C(A, \omega)$ が定義される. このコスト関数を用いて, AND-OR 木の計算複雑さの重要な指標である randomized complexity が次のように定義される:

Ω を真理値割り当てからなる集合, $\mathcal{A}$ をアルゴリズムからなる集合とするとき,

$$\min_{A_R:\mathcal{A}\ \text{上の確率分布}} \max_{\omega\in\Omega} \sum_{A\in\mathcal{A}} A_R(A)C(A,\omega)$$

を randomized complexity とよぶ. また, アルゴリズムからなる集合上の確率分布 A_R を乱択アルゴリズムとよぶ.

我々は, randomized complexity を達成する乱択アルゴリズムを最適乱択アルゴリズムとよび, i-セット ($i \in \{0, 1\}$) に対してコスト期待値が一定の乱択アルゴリズムを E^i-乱択アルゴリズムと定義する. 但し, i-セットとはコスト期待値が大きくならざるを得ないように定義された真理値割り当ての集合のことである [1]. 本論文では, 連結閉集合上の乱択アルゴリズムについて, i-セットに対して最適であることと E^i であることが同値であることを証明する. これは, 鈴木-中村の結果 [2] の双対的な結果とみなすことができる.

また, 真理値割り当てからなる集合にグラフの構造を入れ、木の高さに関する構造定理を示す.

付録として, 無限組み合わせ論における diamond principle に関連した hitting principle についての考察を加える.

無限組み合わせ論は公理的集合論における重要な分野であり, 無限集合に関する数多くの話題や手法を提供している. その中で, 活発な研究が行われているものの一つとして, diamond principle がある.

Diamond principle $\diamondsuit$ は Gödel の構成可能集合のクラス L において成り立ち, 連続体濃度 $|\mathbb{R}|$ に関する情報を多く含む. 一般に, 無限基数 κ^+ 上の diamond principle $\diamondsuit_{\kappa^+}$ は, κ に関する連続体仮説 $2^\kappa = \kappa^+$ を導く.

この diamond principle に関連した特異基数に関する無限組み合わせ論において重要な役割を果たすものが hitting principle $\clubsuit^-_S, \clubsuit^*_S$ である [4].

例えば, 次のような基本的性質がある:

- $S \subset \kappa^+$ を定常集合とするとき, $\diamondsuit_S$ から $\clubsuit^-_S$ が導かれる.
- $\clubsuit^*_{S^{\kappa^+}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}}$ が成り立つ.

一方, 1970 年代に Jech は diamond principle を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ へ拡張した [3]. $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は巨大基数の理論に関連して, 集合論において重要な構造である.

そこで, 我々は hitting principle を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ において定義し, 上記の基本的性質と類似した性質が成り立つことを証明する.

参考文献

[1] C.Liu, K.Tanaka, Eigen-Distribution on Random Assignments for Game Trees, Information Processing Letters, vol.104(2), pp.73-77, 2007.

[2] T.Suzuki, R.Nakamura, The eigen distribution of an AND-OR tree under directional algorithms, IAENG International Journal of Applied Mathematics, vol.42(2), pp.122-128, 2012.

[3] T.Jech, Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals, Annals of mathematical logic, vol.5, pp.165-198, 1973.

[4] A.Rinot, A relative of the approachability ideal, diamond and non-saturation, Journal of Symbolic Logic, vol.75(3), 2010.

完全二分 AND-OR 木に対する最適乱択アルゴリズムの特徴づけと木転置グラフの構造について

小川孝典
首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻

2013 年 1 月

概要

計算複雑さの理論の一分野として, AND-OR 木の研究がある.

我々は, randomized complexity を達成する乱択アルゴリズムを最適乱択アルゴリズムとよび, i-セット ($i \in \{0,1\}$) に対してコスト期待値が一定の乱択アルゴリズムを E^i-乱択アルゴリズムと定義する. 本論文では, 連結閉集合上の乱択アルゴリズムについて, i-セットに対して最適であることと E^i であることが同値であることを証明する. これは, 鈴木-中村 [SuNa] の結果の双対的な結果とみなすことができる.

また, 真理値割り当てからなる集合にグラフの構造を入れ、木の高さに関する構造定理を示す.

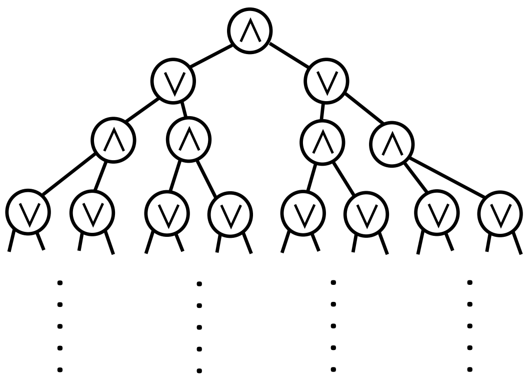
付録として, 無限組み合わせ論における diamond principle に関連した hitting principle についての考察を加える. hitting principle を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ へ持ち上げ, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ における diamond principle との関連づけを与える.

目次

1 序論

1.1 背景

AND-OR 木とは, 各節が AND($\wedge$) と OR($\vee$) によってラベル付けされた高さ有限の木構造のことである. 本稿では, 完全二分木の形であり, 各節は $\wedge$ と $\vee$ が上から順に交互にラベル付けされている木のみを扱う.



AND-OR 木は Boole 関数であり, コスト関数を考えることにより, ゲーム理論と関係が深いものでもある.

AND-OR 木による計算は次のように定義される. 入力は各葉へ割り当てる 0 と 1 の有限列であり, $\wedge$ と $\vee$ による論理演算により最終的に根に現れる 1 または 0 が出力である.

そこで, AND-OR 木の計算複雑さの分析が興味の対象となってくる.

まず, 最も基本となる計算複雑さの概念としてコスト関数というものを考える. これは, 木に対する真理値割り当て ω (Boole 関数とみたときの入力のこと) と, 木を探索する決定性アルゴリズム A が与えられたとき, 根の値がわかるまでの葉のチェック回数として定義される. 但し, アルゴリズムによる葉への問い合わせにより, 葉に割り当てられた値が判明するものとする. コスト関数を $C(A,\omega)$ とかく.

コスト関数を用いて, AND-OR 木の計算の複雑さの重要な指標である distributional complexity と randomized complexity が定義される.

Ω を真理値割り当てからなる集合, $\mathcal{A}$ をアルゴリズムからなる集合とするとき, distributional complexity とは,

$$\max_{d:\Omega\text{上の確率分布}} \min_{A\in\mathcal{A}} \sum_{\omega\in\Omega} d(\omega)C(A,\omega)$$

のことであり, randomized complexity とは,

$$\min_{A_R:\mathcal{A}\text{ 上の確率分布}} \max_{\omega\in\Omega} \sum_{A\in\mathcal{A}} A_R(A)C(A,\omega)$$

のことである.

1977 年, Andrew Chi-Chih Yao は [Ya] において, この二つの値が等しいことを証明した. これは, ゲーム理論において有名な Von Neumann の min-max 定理のバリエーションとみなすことができる. Von Neumann の min-max 定理では, すべての変数がランダム化 (確率分布) されているが, Yao の定理ではそうではないことに注意されたい.

この指標の具体的な値についてはすでにわかっている. 1986 年, Michael Saks と Avi Wigderson は [SaWi] において, 一般の高さ h の AND-OR 木の randomized complexity が $\Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right)^h\right)$ であることを証明した.

一方, distributional complexity や randomized complexity を達成する確率分布の性質や個数に関する研究も行われている.

この問題に関しては, 近年, いくつかの注目すべき発見がなされている.

まず, 挙げるべき論文は, 2007 年に発表された ChenGuang Liu と田中一之による, [LiTa] であろう. [LiTa] では, distributional complexity を達成する確率分布を固有分布とよび, より分析がしやすい条件による特徴づけを与えることに成功した.

まず, 彼らは i-セット ($i \in \{0,1\}$) という, コストが大きくならざるを得ないような真理値割り当ての集合を定義し, i-セット上の分布であり, コストの期待値が任意の決定性アルゴリズムに関して不変であるような分布を E^i-分布とよぶことにした.

Liu-田中の定理 . 根は $\wedge$ であるとする. このとき, 固有分布であることと, E^1-分布であることは同値である.

この定理においては, 真理値割り当てや決定性アルゴリズムは, その全体である $\mathcal{W}$ や $\mathcal{A}_D$ 内を動くとして議論を進めている.

2012 年に発表された鈴木登志雄と中村亮太による [SuNa] においては, 真理値割り当てや決定性アルゴリズムの動く範囲を限定しても, 同様の定理が成り立つことを証明している.

その限定の方法は, 真理値割り当てや決定性アルゴリズムに関して転置という変換を定義し, それについて閉じている集合や連結である集合を考えるというものである.

鈴木-中村の定理 . $\mathcal{A}$ をアルゴリズムからなる, 転置に関して閉じた集合とする

(a) 根は $\wedge, \vee$ どちらでもよいとする. このとき, i-セット上の $\mathcal{A}$ に対する固有分布とであることと, $\mathcal{A}$ に対する E^i-分布であることは同値である.

(b) 根は $\wedge$ であるとする. このとき, $\mathcal{W}$ 上の $\mathcal{A}$ に対する固有分布であることと, $\mathcal{A}$ に対する E^1-分布であることは同値である.

アルゴリズム全体 $\mathcal{A}_D$ は転置に関して閉じているので, (b) は Liu-田中の定理の拡張に他ならない.

そこで仁井田哲尚と私は, 鈴木-中村の定理の双対とみなせる定理群が, randomized complexity に関しても発見できるのではないか, と考えた. すなわち, randomized complexity を達成するような乱択アルゴリズムを最適な乱択アルゴリズムであると定義し, 固有分布に対して成り立つ性質は, 最適乱択アルゴリズムでも成り立つのではないかと予想したのである. 結果として, (a) の双対版を証明することができた. ただ, 完全な双対ではなく, 連結性を仮定している. これが, 本稿の主結果である.

主結果. 根は $\wedge, \vee$ どちらでもよいとする. $\mathcal{A}$ をアルゴリズムからなる, 転置に関する連結閉集合とする. このとき, $\mathcal{A}$ 上の i-セットに対する最適乱択アルゴリズムであることと, $\mathcal{A}$ 上の E^i-乱択アルゴリズムであることは同値である.

但し, $\mathcal{A}$ 上の E^i-乱択アルゴリズムとは, コストの期待値が i-セットの任意の元に対して不変であるような $\mathcal{A}$ 上の確率分布のことである.

一方, (b) の双対に関しては成り立たないことも証明されている. この事実に関しては, 仁井田哲尚による [Ni] を参照されたい.

ここまではコスト関数に関する分析であったが, 我々は転置によって引き起こされる真理値割り当ての集合に関する構造についても興味を持った.

その結果, 連結閉集合は真理値割り当ての転置によりグラフの構造を持ちうることに気づき, その分析を行った.

付録では, 無限組み合わせ論において重要な研究対象である diamond principle に関連した話題を述べる.

具体的な概説は付録の序論を参照して頂くことにし, ここでは, 無限組み合わせ論の大まかな解説を与えるにとどめる.

無限組み合わせ論は公理的集合論の重要な分野である. 現在, 公理的集合論は AND-OR 木の計算複雑さと同じく数理論理学の一分野である. 数理論理学では, 数学的対象として「数学」そのものを分析する. 例えば, 計算とは何か, という問いから, 計算複雑さの理論へと至り, 一方では, 無限とは何か, という問いから, 数学を公理化するという方向に

向かい, 公理的集合論へと至った.

初期の無限組み合わせ論は, 論理学的色彩は少なく, ポーランド学派等によって盛んに研究された.

その後, Gödel による内部モデル理論や Cohen による強制法の開発等により, 無限組み合わせ論により提供される様々な話題が無矛盾性という極めて数理論理学的な概念と深く関係していることがわかってきた.

現在, 集合論では, 内部モデル理論, 巨大基数公理の理論, 実数の集合論ほか様々な研究分野が開拓されているが, 無限組み合わせ論はそれらの分野に数多くの話題や手法を提供し続けている.

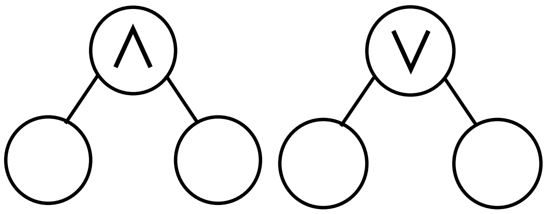
1.2 本稿の構成

第 2 節では, AND-OR 木に関する基本的な概念の定義や解説を述べる. 第 3 節では, 先行研究の概説を行う. ここで, 固有分布や E^1-分布について解説される. 第 4 節において, 仁井田との共同研究による結果を述べる. 第 5 節では, 今後の課題や問題を述べる. 最後に, 付録において, 無限組み合わせ論の概説と, diamond principle に関連した結果を述べる.

2 定義

2.1 AND-OR 木とその計算について

高さ 1 の**完全二分 AND-OR 木 (perfect binary AND-OR tree)** とは, 「かつ」を表す論理記号 $\land$ の下から, 二本の枝が伸びている木構造のことである. 同様に, 高さ 1 の**完全二分 OR-AND 木 (perfect binary OR-AND tree)** とは, 「または」を表す論理記号 $\lor$ の下から, 二本の枝が伸びている木構造のことである. 木構造の頂点を**根 (root)**, 根から伸びた二本の枝の先を**葉 (leaf)** とよぶ.



高さ1のAND-OR木　高さ1のOR-AND木

高さ 1 の完全二分 AND-OR 木と完全二分 OR-AND 木を, それぞれ $T_2^{1,\wedge}, T_2^{1,\vee}$ とかく.

$h \geq 2$ に対して, $T_2^{h-1,\wedge}$ が定義されたとき, 次のようにして完全二分木 $T_2^{h,\wedge}$ をつくる:

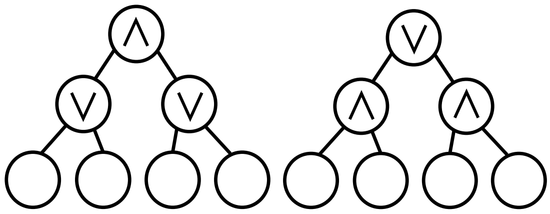
- 葉につながっている論理記号が $\wedge$ のとき, $T_2^{h-1,\wedge}$ のすべての葉に, $T_2^{1,\vee}$ の根を貼り合わせる.
- 葉につながっている論理記号が $\vee$ のとき, $T_2^{h-1,\wedge}$ のすべての葉に, $T_2^{1,\wedge}$ の根を貼り合わせる.

このようにして, 再帰的に一般の高さ h の完全二分 AND-OR 木 $T_2^{h,\wedge}$ が定義される.

同様に, $h \geq 2$ に対して, $T_2^{h-1,\vee}$ が定義されたとき, 次のようにして完全二分木 $T_2^{h,\vee}$ をつくる:

- 葉につながっている論理記号が $\wedge$ のとき, $T_2^{h-1,\vee}$ のすべての葉に, $T_2^{1,\vee}$ の根を貼り合わせる.
- 葉につながっている論理記号が $\vee$ のとき, $T_2^{h-1,\vee}$ のすべての葉に, $T_2^{1,\wedge}$ の根を貼り合わせる.

このようにして, 再帰的に一般の高さ h の完全二分 OR-AND 木 $T_2^{h,\vee}$ が定義される.



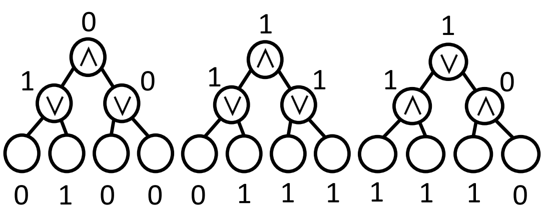
高さ2のAND-OR木　　高さ2のOR-AND木

以下, 単に「木」という場合は, 完全二分 AND-OR 木と完全二分 OR-AND 木のいずれかをさすものとする. また, 以下では, 「完全二分」は省略する.

木構造の各点を**節 (node)** といい, 最上部の節を**根 (root)**, 最下部の各節を**葉 (leaf)** とよぶ. 根でも葉でもない節を**内部節 (internal node)** とよぶ.

さて, 各葉に 0(偽) または 1(真) を割り当てる. このとき, $\wedge$-節と $\vee$-節による論理計算により, 根には 0 または 1 が割り当てられることになる.

このルールによって, 木による計算が定義できる. 入力は葉への真理値割り当て, 出力は根に現れる真理値である.



記号 . 高さ h の木の真理値割り当て全体を $\mathcal{W}^h$ で表すことにする. すなわち, $\mathcal{W}^h$ とは, 長さ 2^h のビット列の全体である. 木の高さを特に明示する必要のないときは, 単に $\mathcal{W}$ とかく.

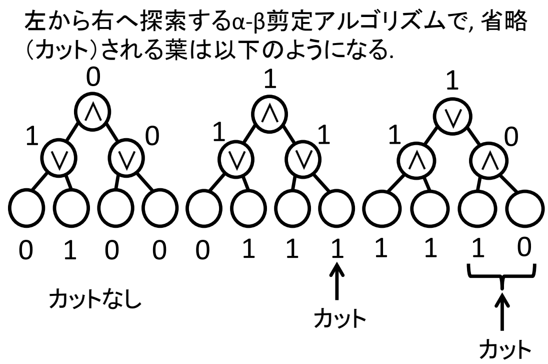
2.2 決定性アルゴリズムによる木の探索とコストの定義

木による計算が定義できたので, その複雑さを調べたい. そこで, 木による計算のコストを定義する.

真理値を木の葉に割り当て, その値を隠す. 次に, 決定性アルゴリズムに木の葉を探索させ, 隠された真理値をめくる.

ここで, 木に対する**決定性アルゴリズム (deterministic algorithm)** とは, 「隠れている番号を知るために, どの葉を, どの順番でチェックするかの手順」のことである. 形式的には, 決定性アルゴリズムとは, **決定木 (decision tree)** のことである. 詳しくは, [ArBa] を参照. また, 本稿で扱う決定性アルゴリズムはすべて **α-β 剪定アルゴリズム (α-β pruning algorithm)** かつ**深さ優先アルゴリズム (depth first algorithm)** であるとする.

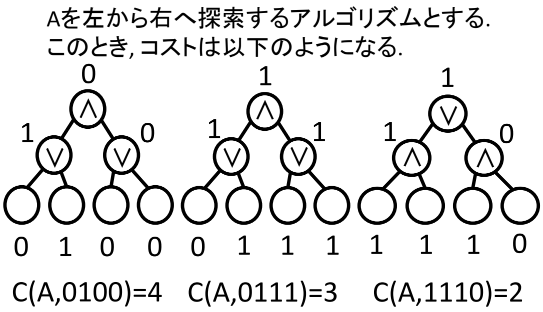
- α-β 剪定アルゴリズムとは, 以下のような制限を課したアルゴリズムである:
  $\wedge$-節の子節の片方が 0 であることがわかったとき, もう片方の節については調べない. 同様に, $\vee$-節の子節の片方が 1 であることがわかったとき, もう片方の節については調べない.
  これは, 必要以上に葉をチェックすることを防ぐ方法である.



- 深さ優先アルゴリズムとは, 以下のような制限を課したアルゴリズムである:
  節 u の値がわかったとき, u の親節 v の値がわかるまで v の子孫である葉以外は調べてはいけない.

このとき, 根の値がわかるまでにチェックする葉の枚数は, 真理値割り当てや決定性アルゴリズムによって変わる. そこで, 真理値割り当て ω に対して, 決定性アルゴリズム A

によって探索するときの**コスト**$C(A,\omega)$ を「根の値がわかるまでチェックした葉の枚数」のこととする.



記号 . 高さ h の木を探索する決定性アルゴリズムの全体を $\mathcal{A}_D^h$ で表すことにする. 木の高さを特に明示する必要のないときは, 単に $\mathcal{A}_D$ とかく.

次に, コストの期待値を定義する.

記号 . 有限集合 X に対して, X 上の確率分布全体を $\mathcal{D}(X)$ と表すことにする. すなわち,

$$\mathcal{D}(X) := \left\{ d : X \to [0,1] : \sum_{x \in X} d(x) = 1 \right\}$$

である.

$\Omega \subset \mathcal{W}, \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_D$ とする.
このとき, $A \in \mathcal{A}, d \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対する**コスト期待値**を,

$$C(A,d) := \sum_{\omega \in \Omega} d(\omega) C(A,\omega)$$

とおく.
また, $\omega \in \Omega, A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対する**コスト期待値**を,

$$C(A_R,\omega) := \sum_{A \in \mathcal{A}} A_R(A) C(A,\omega)$$

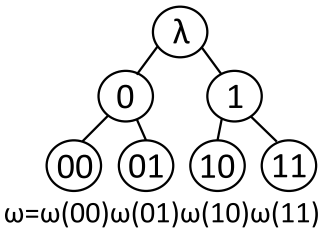
とおく. アルゴリズムからなる集合上の確率分布 A_R を**乱択アルゴリズム (randomized algorithm)** とよぶ.

2.3 転置, 閉集合, 連結集合

コストの期待値を分析する際に, 真理値割り当ての全体や決定性アルゴリズム全体の集合を考えるよりも, その部分集合を考えた方がより精密な議論が展開できる可能性がある. そこで, 部分集合の性質を記述するために, 真理値割り当てやアルゴリズムの**転置 (transposition)** という概念を定義する.

各節は, ビット列によって辞書式に名前を付けておく. 内部節のコードを**内部節コード (internal node-code)**, 葉のコードを**葉コード (leaf-code)** という. 但し, 根のコードは空列を表す λ とする.

真理値割り当て ω は, 葉コードの集合から $\{0,1\}$ への関数とも思えるので, 葉コード l に対して, $\omega(l)$ で, ω の場所 l における値を表すことにする.



定義 2.1. [SuNa]

- l は葉コードとし, u は内部節コードとする. このとき,

$$\mathrm{tp}_u(l) := \begin{cases} u(1-i)w & l = uiw\ (i \in \{0,1\},\ w \text{ はビット列}) \text{ となるとき} \\ l & \text{その他} \end{cases}$$

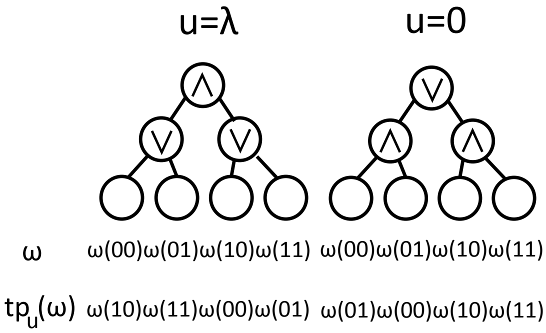
  とおく. この $\mathrm{tp}_u(l)$ を, l の **u-転置 (u-transposition)** という.

- ω を真理値割り当て, u を内部節コードとする. また, 葉コードを左から並べた列を $\langle l_1, \cdots, l_n \rangle$ とする. このとき,

$$\mathrm{tp}_u(\omega) := \omega(\mathrm{tp}_u(l_1)) \cdots \omega(\mathrm{tp}_u(l_n))$$

  とおく. これを, ω の **u-転置 (u-transposition)** という.

注意 2.2. $\mathrm{tp}_u(\omega)$ は, ω において, u の子孫となる葉の 2 つのグループを入れ替えたものである:



定義 2.3. [SuNa]

- $A \in \mathcal{A}_D, \omega \in \mathcal{W}$ とする.
  割り当て ω のときに, A によってチェックされた葉コードをその順番に左から並べた列を, $\langle A, \omega\rangle$ の**質問履歴 (query history)** とよび, $\mathrm{qh}(A,\omega)$ とかく.
  質問履歴を $\mathrm{qh}(A,\omega) = \langle l_1, \cdots, l_k\rangle$ とするとき, $\mathrm{ah}(A,\omega) := \langle \omega(l_1), \cdots, \omega(l_k)\rangle$ を**回答履歴 (answer history)** という.
- u を内部節コードとし, $A \in \mathcal{A}_D$ とする. $B \in \mathcal{A}_D$ が A の u-**転置 (u-transposition)** であるとは, 以下を満たすときをいう:
  任意の $\omega \in \mathcal{W}$ に対して, $\mathrm{qh}(A, \mathrm{tp}_u(\omega)) = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ とするとき,

$$\mathrm{qh}(B,\omega) = \langle \mathrm{tp}_u(v_1), \ldots, \mathrm{tp}_u(v_k)\rangle$$

  となる.
  このとき, B を $\mathrm{tp}_u(A)$ とかく.

注意 2.4. 任意の $\omega \in \mathcal{W}, A \in \mathcal{A}_D$ と内部節コード u に対して, 以下が成り立つ:

- $\mathrm{ah}(\mathrm{tp}_u(A),\omega) = \mathrm{ah}(A, \mathrm{tp}_u(\omega))$.
- $C(\mathrm{tp}_u(A),\omega) = C(A, \mathrm{tp}_u(\omega))$.

定義 2.5. [SuNa] $\Omega \subset \mathcal{W}, \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_D$ とする.

- Ω が**転置に関して閉**であるとは, 任意の $\omega \in \Omega$ と内部節コード u に対して, $\mathrm{tp}_u(\omega) \in \Omega$ となるときをいう.
- Ω が**転置に関して連結**であるとは, 任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して, ある $\omega_1, \ldots, \omega_n \in$

Ω と, 内部節コード $u_1, \ldots, u_n$ が存在して,

$$\omega = \omega_1, \quad \mathrm{tp}_{u_j}(\omega_j) = \omega_{j+1}, \quad \omega_n = \omega'$$

が成り立つときをいう.

- $\mathcal{A}$ が**転置に関して閉**である, **転置に関して連結**である, も同様に定義する.

以下では,「転置に関して」を省略して, 単に「閉」,「連結」ということにする.

2.4 i-セットと向き付きアルゴリズム

コストの値が大きくならざるを得ないような真理値割り当ての集合を考える. これは, アルゴリズム側から見たときに「やっかい」な割り当てを集めたものである.

定義 2.6. [LiTa] $i \in \{0, 1\}, \Omega \subset \mathcal{W}$ とする.

Ω が ***i*-セット (*i*-set)** であるとは, Ω に属する任意の割り当てによる木の根の値は i であり, かつ, 以下を満たすような集合のうち最大のもののことである:

任意の Ω の元を木に割り当てたとき, $\wedge$-節の子節は, 0 と 1, 1 と 0, 1 と 1 のいずれか, $\vee$-節の子節は, 0 と 1, 1 と 0, 0 と 0 のいずれかとなる.

i-セットを表す集合を i-set とかく.

注意 2.7. i-セットをつくる方法として, **逆割り当て法 (reverse assigning technique : RAT)** がある [LiTa]:

(1) 根に i を割り当てる.

(2)
   - 値が 1 の $\wedge$-節の子節には, 1 と 1 を割り当てる.
   - 値が 0 の $\vee$-節の子節には, 0 と 0 を割り当てる.
   - 値が 0 の $\wedge$-節の子節には, 一方に 0 を割り当て, もう一方に 1 を割り当てる.
   - 値が 1 の $\vee$-節の子節には, 一方に 1 を割り当て, もう一方に 0 を割り当てる.

(3) i-セットとは, (1) と (2) によってつくられる真理値割り当てすべてからなる集合である.

注意 2.8.
- i-セットは連結な閉集合である.
- $\omega \in \mathcal{W}$ に対して,

$$\langle \omega \rangle := \left\{ \mathrm{tp}_{u_k} \circ \cdots \circ \mathrm{tp}_{u_1}(\omega) : \text{各 } u_j \text{ は内部節コード}, k \text{ は自然数} \right\}$$

は連結な閉集合となる. これを ω によって**生成される**集合とよぶことにする. アル

ゴリズム A についても同様に $\langle A\rangle$ を定義すれば, A によって生成される $\langle A\rangle$ も連結な閉集合である.

- ある $\omega_1,\ldots,\omega_n \in \mathcal{W}$ が存在して,

$$\mathcal{W}=\langle\omega_1\rangle\cup\cdots\cup\langle\omega_n\rangle,\ \langle\omega_i\rangle\cap\langle\omega_j\rangle=\varnothing\ (i\neq j)$$

とかける.

定義 2.9. 決定性アルゴリズムが**向き付き (directional)** であるとは, 葉を見る順番が, 真理値割り当てによらずに, あらかじめ決まっているときをいう. すなわち, $A\in\mathcal{A}_D$ が向き付きであるとは, 葉コードの順列 σ が存在して, 任意の $\omega\in\mathcal{W}$ に対して射影 p_ω が存在して,

$$\mathrm{qh}(A,\omega)=(p_\omega\circ\sigma)(l_1,\ldots,l_n)$$

が成り立つときをいう. 但し, $\langle l_1,\ldots,l_n\rangle$ は葉コードを左から並べた列とする.

高さ h の木に対する向き付きアルゴリズムの全体を $\mathcal{A}^h_{\mathrm{dir}}$ とかく. 木の高さを特に明示する必要のないときは, 単に $\mathcal{A}_{\mathrm{dir}}$ とかく.

注意 2.10. $\mathcal{A}_{\mathrm{dir}}$ は連結な閉集合である.

以下, 本稿の全てで, Ω は $\mathcal{W}$ の部分集合, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_D$ の部分集合を表すものとする. さらに, T で, AND-OR 木または OR-AND 木を表すとする.

3 先行研究の紹介

定義 3.1.

- $$P(T,\Omega,\mathcal{A}):=\max_{d\in\mathcal{D}(\Omega)}\min_{A\in\mathcal{A}}C(A,d)$$

  を, $\Omega,\mathcal{A}$ に対する T の **distributional complexity** とよぶ.

- $$R(T,\Omega,\mathcal{A}):=\min_{A_R\in\mathcal{D}(\mathcal{A})}\max_{\omega\in\Omega}C(A_R,\omega)$$

  を, $\Omega,\mathcal{A}$ に対する T の **randomized complexity** とよぶ.

実は, distributional complexity と randomized complexity は等しい:

定理 3.2 (Yao 1977, [Ya])**.**

$$P(T,\Omega,\mathcal{A})=R(T,\Omega,\mathcal{A}).$$

では, $P(T,\Omega,\mathcal{A})$ や $R(T,\Omega,\mathcal{A})$ を達成するような $d \in \mathcal{D}(\Omega)$ や $A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ はどのような性質を持つのであろうか？ distributional complexity に関してはこの問題について, [LiTa] や [SuNa] において考察されている.

定義 3.3. [LiTa] d_e が $\mathcal{A}$ に対する Ω 上の**固有分布 (eigen distribution)** であるとは,

$$P(T,\Omega,\mathcal{A}) = \min_{A\in\mathcal{A}} C(A,d_e),$$

すなわち,

$$\max_{d\in\mathcal{D}(\Omega)} \min_{A\in\mathcal{A}} C(A,d) = \min_{A\in\mathcal{A}} C(A,d_e)$$

となるときをいう.

定義 3.4. [LiTa] $i \in \{0,1\}$ とする.
d が $\mathcal{A}$ に対する **E^i-分布 (E^i-distribution)** であるとは,

- d は i-set 上の分布であり,
- ある定数 c が存在して, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, $C(A,d) = c$ となる

ときをいう.

このとき, 固有分布という具体的には捉えどころのないものが, E^i-分布というわかりやすい分布によって完全に特徴付けることができる.

定理 3.5 (Liu-田中 2007, [LiTa, Theorem 9])**.** T が AND-OR 木のとき, 以下は同値である:

(1) d は $\mathcal{A}_D$ に対する $\mathcal{W}$ 上の 固有分布である.
(2) d は $\mathcal{A}_D$ に対する E^1-分布である.

[SuNa] では, 定理 3.5 をさらに精密にした定理が証明されている:

定理 3.6 (鈴木-中村 2012, [SuNa, Theorem 4])**.** T は AND-OR 木とし, $\mathcal{A}$ は閉とする. このとき, 以下は同値である:

(1) d は $\mathcal{A}$ に対する $\mathcal{W}$ 上の固有分布である.
(2) d は $\mathcal{A}$ に対する E^1-分布である.

以下, 定理 3.6 を証明するために必要な補題, 定理を述べておく.

T についての制約がない場合は, T は AND-OR 木, OR-AND 木どちらでもよいとする.

補題 3.7 (鈴木-中村 2012, [SuNa, Lemma 1])**.** Ω は連結, $\mathcal{A}$ は閉とする. このとき, ある定数 c が存在して, 任意の $d \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} C(A, d) = c$$

が成り立つ.

定理 3.8 (鈴木-中村 2012, [SuNa, Lemma 2])**.** (1) $\Omega, \mathcal{A}$ は両方とも閉とする. また, d_u を Ω 上の一様分布とする. このとき, ある定数 c が存在して, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, $C(A, d_u) = c$ が成り立つ.

(2) Ω は閉かつ連結, $\mathcal{A}$ は閉とする. d_u を Ω 上の一様分布とする.
このとき, 任意の $d \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して, 以下は同値である:

(a) d は Ω 上の $\mathcal{A}$ に対する固有分布である.

(b) ある定数 c が存在して, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, $C(A, d) = c$ が成り立つ.

(c) ある $B \in \mathcal{A}$ が存在して, $\min_{A \in \mathcal{A}} C(A, d) = C(B, d_u)$ が成り立つ.

(d) $\min_{A \in \mathcal{A}} C(A, d) = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{A \in \mathcal{A}} C(A, d)$.

i-set は閉かつ連結であることに注意すると, 定理 3.8 から以下がわかる.

系 3.9. $i \in \{0, 1\}$ とする.

(1) 任意の閉集合 $\mathcal{A}$ に対して, i-set 上の一様分布は $\mathcal{A}$ に対する E^i-分布である.

(2) 任意の閉集合 $\mathcal{A}$ に対して, 以下は同値である:

(a) d は i-set 上の $\mathcal{A}$ に対する固有分布である.

(b) d は $\mathcal{A}$ に対する E^i-分布である.

補題 3.10 (鈴木-中村 2012, [SuNa, Lemma 3])**.** T は AND-OR 木とし, $\mathcal{A}$ は閉とする. このとき, 以下は同値である:

(1) d は $\mathcal{W}$ 上の $\mathcal{A}$ に対する固有分布である.

(2) d は 1-set 上の $\mathcal{A}$ に対する固有分布である.

よって,

$$\max_{d \in \mathcal{D}(\mathcal{W})} \min_{A \in \mathcal{A}} C(A, d) = \max_{d \in \mathcal{D}(1\text{-set})} \min_{A \in \mathcal{A}} C(A, d)$$

が成り立つ.

定理 3.6 の証明.

$$
\begin{aligned}
& d \text{ は } \mathcal{W} \text{ 上の } \mathcal{A} \text{ に対する固有分布である.} \\
\overset{\text{補題 } 3.10}{\Leftrightarrow} & d \text{ は 1-set 上の } \mathcal{A} \text{ に対する固有分布である.} \\
\overset{\text{系 } 3.9(2)}{\Leftrightarrow} & d \text{ は } \mathcal{A} \text{ に対する } E^1\text{-分布である.}
\end{aligned}
$$

□

4 結果

4.1 は仁井田との共同研究である. [LiTa] や [SuNa] において扱われていない randomized complexity に関連する結果を述べる. 具体的には, randomized complexity を達成する最適乱択アルゴリズムの性質を調べた. 結果として, 連結閉集合上の最適乱択アルゴリズムは i-セットに対してコスト期待値が一定の乱択アルゴリズムと同値であることがわかった.

4.2 では, 木転置グラフとよばれる真理値割り当ての集合を定義する. それは, 一回の転置によって移り合うとき, その 2 つの真理値割り当てを辺でつなぐことにより構成される. 具体的には, 第 2 節で定義した連結閉集合 $\langle\omega\rangle$ が木転置グラフに他ならない.

我々はある高さの木転置グラフの同型による分類がわかっていれば, 一つ上の高さの木転置グラフの構造がある程度決定されることを示した. また, 木転置グラフ上の固有分布についても調べた.

4.1 最適な乱択アルゴリズムの E^1-乱択アルゴリズムによる特徴づけについて

第 3 節で紹介した先行研究の結果は, すべて distributional complexity に関するものであった. そこで, 我々は randomized complexity に関して, 同様の結果が得られるのではないかと考えた. すなわち, 固有分布の代わりに, randomized complexity を達成するような乱択アルゴリズムの性質を調べようと試みたのである.

具体的には, アルゴリズムをランダム化し, 真理値割り当てはランダム化しないということである.

	アルゴリズム	真理値割り当て
Liu-田中, 鈴木-中村	非ランダム	ランダム
我々の結果	ランダム	非ランダム

定義 4.1. $A_R^o \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ が Ω に対する $\mathcal{A}$ 上の**最適乱択アルゴリズム (optimal randomized algorithm)** であるとは,

$$R(T,\Omega,\mathcal{A}) = \max_{\omega\in\Omega} C(A_R^o,\omega),$$

すなわち,

$$\min_{A_R\in\mathcal{D}(\mathcal{A})} \max_{\omega\in\Omega)} C(A_R,\omega) = \max_{\omega\in\Omega} C(A_R^o,\omega)$$

となるときをいう.

定義 4.2. $i \in \{0,1\}$ とする.

A_R が $\mathcal{A}$ 上の E^i**-乱択アルゴリズム (**E^i**-randomized algorithm)** であるとは,

- A_R は $\mathcal{A}$ 上の分布であり,
- ある定数 c が存在して, 任意の $\omega \in i$-set に対して, $C(A_R,\omega) = c$ となる

ときをいう.

E^i-乱択アルゴリズムは E^i-分布の完全な双対にはなっていないことに注意する. つまり, E^i-分布はすべての決定性アルゴリズムに対してコスト一定であるのに対し, E^i-乱択アルゴリズムはすべての真理値割り当てに対してコストが一定であることは要求していないのである.

さて, 最適性と E^i との間には以下のような関係があることがわかった:

定理 4.3. T は AND-OR 木, OR-AND 木どちらでもよいとする. $i \in \{0,1\}$ とする.

(1) 任意の閉集合 $\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ 上の一様分布は E^i-乱択アルゴリズムである.

(2) 任意の連結閉集合 $\mathcal{A}$ に対して, 以下は同値である:

  (a) A_R は $\mathcal{A}$ 上の i-set に対する最適な乱択アルゴリズムである.

  (b) A_R は $\mathcal{A}$ 上の E^i-乱択アルゴリズムである.

以下, この定理の証明を最終目標として述べていく. 証明の方法は [SuNa] の方法の双対をとることである. よって, 補題 3.7 や定理 3.8 の双対版も証明することができた.

T についての制約がない場合は, T は AND-OR 木, OR-AND 木どちらでもよいとする.

補題 4.4. $\mathcal{A}$ は連結, Ω は閉であるとする. このとき, ある定数 c が存在して, 任意の $A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対して,

$$\sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) = c$$

が成り立つ.

証明. 任意の $A \in \mathcal{A}_D, \omega \in \Omega$ と内部節コード u について, 転置の定義より,

$$C(\mathrm{tp}_u(A), \omega) = C(A, \mathrm{tp}_u(\omega))$$

が成り立つ, よって,

$$\sum_{\omega \in \Omega} C(\mathrm{tp}_u(A), \omega) = \sum_{\omega \in \Omega} C(A, \mathrm{tp}_u(\omega))$$

が成り立つ. 一方, Ω は閉なので,

$$\sum_{\omega \in \Omega} C(A, \mathrm{tp}_u(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} C(A, \omega)$$

であるから,

$$\sum_{\omega \in \Omega} C(\mathrm{tp}_u(A), \omega) = \sum_{\omega \in \Omega} C(A, \omega)$$

が成り立つ. 上式と $\mathcal{A}$ は連結であることから, 任意の $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ に対して, $\sum_{\omega \in \Omega} C(A_1, \omega) = \sum_{\omega \in \Omega} C(A_2, \omega)$ が成り立つ. すなわち, ある定数 c が存在して, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して,

$$\sum_{\omega \in \Omega} C(A, \omega) = c$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{A \in \mathcal{A}} A_R(A) C(A, \omega) \right) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{A}} A_R(A) \left(\sum_{\omega \in \Omega} C(A, \omega) \right) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{A}} A_R(A) c \\
&= c
\end{aligned}$$

となる. □

次に, 定理 3.8 の乱択アルゴリズム版を考えたい. ただ, 完全な類似は成り立たないことが以下の例からわかる.

例 4.5. 高さ 1 の AND-OR 木を考える. この木を探索する決定性アルゴリズムは, 左の葉から探索するか, 右の葉から探索するかの 2 通りしかない. そこで, それらのアルゴリズムをそれぞれ $\rightarrow, \leftarrow$ によって表すとする. また, $\mathcal{A}_D = \{\rightarrow, \leftarrow\}$ 上の一様分布を A_R^u とする. このとき,

$$C(A_R^u, 00) = A_R^u(\rightarrow)C(\rightarrow, 00) + A_R^u(\leftarrow)C(\leftarrow, 00) = \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$
$$C(A_R^u, 01) = A_R^u(\rightarrow)C(\rightarrow, 01) + A_R^u(\leftarrow)C(\leftarrow, 01) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$$

より, $C(A_R^u, 00) \neq C(A_R^u, 01)$ である.

そこで, 真理値割り当ての集合に連結性を仮定することにより, 以下の定理を得た.

定理 4.6. (1) $\mathcal{A}$ は閉, Ω は連結として, A_R^u を $\mathcal{A}$ 上の一様分布とする. このとき, ある定数 c が存在して, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, $C(A_R^u, \omega) = c$ が成り立つ.

(2) $\mathcal{A}, \Omega$ は閉かつ連結とする. このとき, 任意の $A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対して, 以下は同値である:

(a) A_R は Ω に対する $\mathcal{A}$ 上の最適乱択アルゴリズムである.

(b) ある定数 c が存在して, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, $C(A_R, \omega) = c$ が成り立つ.

(c) ある $\alpha \in \Omega$ が存在して, $\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) = C(A_R^u, \alpha)$ が成り立つ.

(d) $\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega)$.

証明. (1) 任意の $\omega \in \Omega$ と内部節コード u に対して,

$$\begin{aligned}
C(A_R^u, \omega) &= \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{A \in \mathcal{A}} C(A, \omega) \\
&= \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{A \in \mathcal{A}} C(\mathrm{tp}_u(A), \omega) \quad (\mathcal{A} \text{ は閉より}) \\
&= \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{A \in \mathcal{A}} C(A, \mathrm{tp}_u(\omega)) \\
&= C(A_R^u, \mathrm{tp}_u(\omega))
\end{aligned}$$

となる. 上式と Ω の連結性から, 任意の $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ に対して, $C(A_R^u, \omega_1) = C(A_R^u, \omega_2)$

が成り立つ．すなわち, ある定数 c が存在して, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して,

$$C(A_R^u, \omega) = c$$

が成り立つ．

(2) $(b) \Rightarrow (d)$: 直ちにわかる．

$(d) \Rightarrow (b)$: (d) を仮定すると, 任意の $\omega_0 \in \Omega$ に対して,

$$C(A_R, \omega_0) \leq \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega)$$

となる．右辺はコストの平均値なので,

$$C(A_R, \omega_0) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega)$$

となる．よって, (b) を得る．

$(c) \Rightarrow (d)$: (c) の主張を満たす α が存在すると,

$$\begin{aligned}
\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) &= C(A_R^u, \alpha) \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R^u, \omega) \quad \text{((1) より, } C(A_R^u, \omega) \text{ の値は } \omega \in \Omega \text{ によらない)} \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) \quad \text{(補題 4.4 より)}
\end{aligned}$$

となるので, (d) が成り立つ．

$(d) \Rightarrow (c)$: (d) を仮定すると, 適当な $\alpha \in \Omega$ について,

$$\begin{aligned}
\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) &= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R^u, \omega) \quad \text{(補題 4.4 より)} \\
&= C(A_R^u, \alpha) \quad \text{((1) より, } C(A_R^u, \omega) \text{ の値は } \omega \in \Omega \text{ によらない)}
\end{aligned}$$

となるので, (c) が成り立つ．

$(d) \Rightarrow (a)$: (d) を仮定すると, 任意の $A'_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対して,

$$\begin{aligned}
\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) &= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A'_R, \omega) \quad \text{(補題 4.4 より)} \\
&\leq \max_{\omega \in \Omega} C(A'_R, \omega)
\end{aligned}$$

となる. よって, (a) が成り立つ.
$(a) \Rightarrow (d)$: (a) を仮定すると,

$$\begin{aligned}\max_{\omega\in\Omega} C(A_R,\omega) &= \min_{A'_R\in\mathcal{W}(\mathcal{A})}\max_{\omega\in\Omega} C(A'_R,\omega)\\ &\le \max_{\omega\in\Omega} C(A^u_R,\omega)\\ &= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega} C(A^u_R,\omega) \quad ((1)\text{ より})\\ &= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega} C(A_R,\omega) \quad (\text{補題 4.4 より})\end{aligned}$$

となるので, (d) が成り立つ. □

定理 4.3 の証明. 定理 4.6 で $\Omega = i$-set とすると, (1) より, $\mathcal{A}$ 上の一様分布 A^u_R は E^i-乱択アルゴリズムである. また, (2) の $(a) \Leftrightarrow (b)$ より, $\mathcal{A}$ 上の乱択アルゴリズムに関して, i-set に対して最適であることと, E^i であることは同値である. □

一方, 定理 3.6 の双対は完全には成り立たないことがわかっている. この事実に関しては, 仁井田 [Ni] を参照してほしい.

4.2 真理値割り当てからなる連結閉集合のなすグラフの構造について

4.2.1 木転置グラフの間の同型について

第 2 節において, $\omega \in \mathcal{W}$ に対して, 連結閉集合 $\langle\omega\rangle$ を定義した. このとき, $\langle\omega\rangle$ はグラフの構造を持つ. すなわち, 頂点は $\langle\omega\rangle$ の元とし, 頂点と頂点は 1 回の転置で移りあうときにつながっていると定義するのである: $x, y \in \mathcal{W}$ について,

$$x \text{ と } y \text{ は辺でつながっている} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists u\Big[y = \mathrm{tp}_u(x)\Big].$$

このような, 真理値割り当てから生成される無向グラフを**木転置グラフ (tree transposition graph)** とよぶことにする.

x と y が辺でつながっていれば, $\langle x\rangle = \langle y\rangle$ であることに注意する.

例 4.7. $\mathcal{W}^1$ における木転置グラフの分類:

$$\langle 00\rangle = \{00\},\ \langle 11\rangle = \{11\},\ \langle 01\rangle = \{01, 10\}.$$

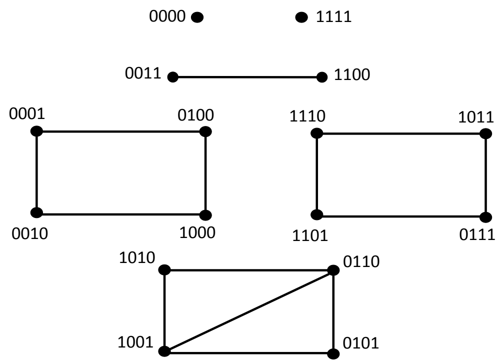
$\mathcal{W}^2$ における木転置グラフの分類:

$$\begin{aligned}
&\langle 0000\rangle = \{0000\}\,,\ \ \langle 1111\rangle = \{1111\}\,,\\
&\langle 0011\rangle = \{0011, 1100\}\,,\\
&\langle 0001\rangle = \{0001, 0010, 1000, 0100\}\,,\ \ \langle 1110\rangle = \{1110, 1101, 0111, 1011\}\,,\\
&\langle 0101\rangle = \{0101, 0110, 1010, 1001\}\,.
\end{aligned}$$

このとき, グラフの同型を $\simeq$ で表すとすると,

$$\langle 0000\rangle \simeq \langle 1111\rangle,\ \ \langle 0001\rangle \simeq \langle 1110\rangle$$

である.



高さ 3 以上の木に対する木転置グラフを分類することは, 真理値割り当てをすべて書き下すだけでは, 難しい.

以下の定理は, 高さ h の木に関する木転置グラフの構造がわかっていれば, 高さ $h+1$ の木に関する木転置グラフの構造がある程度わかることを主張している.

定理 4.8. $x, y, x_j, y_j \in \mathcal{W}$ $(j \in \{1, 2\})$ とする.

(1) $\langle x\rangle \simeq \langle y\rangle$ ならば, $\langle xx\rangle \simeq \langle yy\rangle$ である.

(2) $\langle x_1\rangle \neq \langle x_2\rangle$, $\langle y_1\rangle \neq \langle y_2\rangle$ とする. このとき, $\langle x_j\rangle \simeq \langle y_j\rangle$ ($j \in \{1, 2\}$) ならば, $\langle x_1 x_2\rangle \simeq \langle y_1 y_2\rangle$ である.

証明. (1) 同型写像を $\varphi : \langle x\rangle \to \langle y\rangle$ とする. このとき, $\psi : \langle xx\rangle \to \langle yy\rangle$ を, 各 $w, z \in \langle x\rangle$ に対して,

$$\psi(wz) := \varphi(w)\varphi(z)$$

と定義する. これが, $\langle xx\rangle$ から $\langle yy\rangle$ への同型写像になっていることを示す.

まず, 全単射であることは, φ が全単射であることから直ちに従う. また, 任意の頂点 $v_1, v_2 \in \langle xx \rangle$ に対して, ある $w_j, z_j \in \langle x \rangle$ が存在して, $v_j = w_j z_j$ $(j \in \{1,2\})$ とかける. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\exists u\Big[v_2 = \mathrm{tp}_u(v_1)\Big]\\
\Longleftrightarrow &\exists u\Big[w_2 z_2 = \mathrm{tp}_u(w_1 z_1)\Big]\\
\Longleftrightarrow &\exists u\Big[w_2 = \mathrm{tp}_u(w_1),\ z_2 = z_1\Big]\\
&\text{または}\ \ \exists u\Big[w_2 = w_1,\ z_2 = \mathrm{tp}_u(z_1)\Big]\\
&\text{または}\ \ w_2 = z_1,\ z_2 = w_1\\
\Longleftrightarrow &\exists u\Big[\varphi(w_2) = \mathrm{tp}_u(\varphi(w_1)),\ \varphi(z_2) = \varphi(z_1)\Big]\\
&\text{または}\ \ \exists u\Big[\varphi(w_2) = \varphi(w_1),\ \varphi(z_2) = \mathrm{tp}_u(\varphi(z_1))\Big]\\
&\text{または}\ \ \varphi(w_2) = \varphi(z_1),\ \varphi(z_2) = \varphi(w_1)\\
\Longleftrightarrow &\exists u\Big[\varphi(w_2)\varphi(z_2) = \mathrm{tp}_u(\varphi(w_1)\varphi(z_1))\Big]\\
\Longleftrightarrow &\exists u\Big[\psi(w_2 z_2) = \mathrm{tp}_u(\psi(w_1 z_1))\Big]\\
\Longleftrightarrow &\exists u\Big[\psi(v_2) = \mathrm{tp}_u(\psi(v_1))\Big]
\end{aligned}
$$

となるので, ψ は同型写像である.

(2) 各 $j \in \{1,2\}$ に対して, 同型写像を $\varphi_j : \langle x_j \rangle \to \langle y_j \rangle$ とする. このとき, $\psi : \langle x_1 x_2 \rangle \to \langle y_1 y_2 \rangle$ を, 各 $w \in \langle x_1 \rangle, z \in \langle x_2 \rangle$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\psi(wz) &:= \varphi_1(w)\varphi_2(z),\\
\psi(zw) &:= \varphi_2(z)\varphi_1(w)
\end{aligned}
$$

と定義する. $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2 \rangle = \varnothing$ なので, これは well-defined である. ψ が $\langle x_1 x_2 \rangle$ から $\langle y_1 y_2 \rangle$ への同型写像になっていることを示す.

まず, 全単射であることは, 各 φ_i が全単射であることから直ちに従う. よって, ψ が辺のつながりを保つことをいえばよい.

任意の頂点 $v_1, v_2 \in \langle x_1 x_2 \rangle$ に対して, ある $w_j^1 \in \langle x_1 \rangle, w_j^2 \in \langle x_2 \rangle$ が存在して, $v_j = w_j^1 w_j^2$ または $v_j = w_j^2 w_j^1$ $(j \in \{1,2\})$ とかける. このとき, $w_j^1 \neq w_k^2$ かつ $\varphi_1(w_j^1) \neq \varphi_2(w_k^2)$ であることに注意する $(j, k \in \{1,2\})$.

(a) $v_1 = w_1^1 w_1^2$ かつ $v_2 = w_2^1 w_2^2$ のとき:

$$
\begin{aligned}
&\exists u\Big[v_2 = \mathrm{tp}_u(v_1)\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[w_2^1 w_2^2 = \mathrm{tp}_u(w_1^1 w_1^2)\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[w_2^1 = \mathrm{tp}_u(w_1^1),\ w_2^2 = w_1^2\Big] \\
&\text{または}\ \ \exists u\Big[w_2^1 = w_1^1,\ w_2^2 = \mathrm{tp}_u(w_1^2)\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[\varphi_1(w_2^1) = \mathrm{tp}_u(\varphi_1(w_1^1)),\ \varphi_2(w_2^2) = \varphi_2(w_1^2)\Big] \\
&\text{または}\ \ \exists u\Big[\varphi_1(w_2^1) = \varphi_1(w_1^1),\ \varphi_2(w_2^2) = \mathrm{tp}_u(\varphi_2(w_1^2))\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[\varphi_1(w_2^1)\varphi_2(w_2^2) = \mathrm{tp}_u(\varphi_1(w_1^1)\varphi_2(w_1^2))\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[\psi(w_2^1 w_2^2) = \mathrm{tp}_u(\psi(w_1^1 w_1^2))\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[\psi(v_2) = \mathrm{tp}_u(\psi(v_1))\Big]
\end{aligned}
$$

となる.

(b) $v_1 = w_1^2 w_1^1$ かつ $v_2 = w_2^2 w_2^1$ のとき: (a) と同様の計算である.

(c) $v_1 = w_1^1 w_1^2$ かつ $v_2 = w_2^2 w_2^1$ のとき:

$$
\begin{aligned}
&\exists u\Big[v_2 = \mathrm{tp}_u(v_1)\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[w_2^1 w_2^2 = \mathrm{tp}_u(w_1^2 w_1^1)\Big] \\
\Longleftrightarrow& w_2^1 = w_1^1,\ w_2^2 = w_1^2 \\
\Longleftrightarrow& \varphi_1(w_2^1) = \varphi_1(w_1^1),\ \varphi_2(w_2^2) = \varphi_2(w_1^2) \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[\varphi_1(w_2^1)\varphi_2(w_2^2) = \mathrm{tp}_u(\varphi_2(w_1^2)\varphi_1(w_1^1))\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[\psi(w_2^1 w_2^2) = \mathrm{tp}_u(\psi(w_1^2 w_1^1))\Big] \\
\Longleftrightarrow&\exists u\Big[\psi(v_2) = \mathrm{tp}_u(\psi(v_1))\Big]
\end{aligned}
$$

となる.

(d) $v_1 = w_1^2 w_1^1$ かつ $v_2 = w_2^1 w_2^2$ のとき: (c) と同様の計算である.

以上により,

$$\exists u\Big[v_2 = \mathrm{tp}_u(v_1)\Big] \Longleftrightarrow \exists u\Big[\psi(v_2) = \mathrm{tp}_u(\psi(v_1))\Big]$$

を得たので, ψ は同型写像であることがわかった. □

例 4.9. $\mathcal{W}^3$ における木転置グラフの分類: まず, 0 を 00, 1 を 11 に置き換えることにより, $\mathcal{W}^2$ の木転置グラフは $\mathcal{W}^3$ の木転置グラフと同型になる. よって, まず,

$$\begin{aligned}
&\langle 00000000\rangle \simeq \langle 11111111\rangle,\\
&\langle 00001111\rangle,\\
&\langle 00000011\rangle \simeq \langle 11111100\rangle,\\
&\langle 00110011\rangle
\end{aligned}$$

と分類できる. $\simeq$ で関係付けられていないところは, $\not\simeq$ が成り立っている. 残りは, 定理 4.8 を用いて,

$$\begin{aligned}
&\langle 00000001\rangle \simeq \langle 00001110\rangle \simeq \langle 11111110\rangle \simeq \langle 11110001\rangle,\\
&\langle 00000101\rangle \simeq \langle 11110101\rangle\\
&\langle 00110001\rangle \simeq \langle 00111110\rangle,\\
&\langle 00110101\rangle,\\
&\langle 00010001\rangle \simeq \langle 11101110\rangle,\\
&\langle 00011110\rangle,\\
&\langle 00010101\rangle \simeq \langle 11100101\rangle,\\
&\langle 01010101\rangle.
\end{aligned}$$

となる. 但し, 定理 4.8 だけからは, $\simeq$ で関係付けられていないところは, 同型かどうかわからない.

4.2.2 木転置グラフ上の固有分布

部分木上の固有分布を用いて, 木全体の固有分布を作る方法を述べる.

命題 4.10. $h \geq 2$ とする. 高さ h の AND-OR 木を考える. $x \in \mathcal{W}^{h-1}$ とし, d_0 を $\langle x\rangle$ 上の $\mathcal{A}^{h-1}_{\mathrm{dir}}$ に対する固有分布とする. このとき, 以下のように定義した d は $\langle xx\rangle$ 上の $\mathcal{A}^{h}_{\mathrm{dir}}$ に対する固有分布である:

各 $\omega \in \langle xx\rangle$ について, $\omega = \omega_1\omega_2$ $(\omega_1, \omega_2 \in \langle x\rangle)$ とするとき,

$$d(\omega) := \frac{d_0(\omega_1) + d_0(\omega_2)}{2|\langle x\rangle|}$$

と定義する.

証明. $\sum_{\omega\in\langle xx\rangle} d(\omega) = 1$ となるので, d は $\langle xx\rangle$ 上の確率分布であることに注意する.

まず, 定理 3.8(2) より, ある定数 c が存在して, 任意の $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{dir}}^{h-1}$ に対して,

$$C(A, d_0) = c$$

が成り立つ. さらに, 補題 4.4 より, ある定数 c' が存在して, 任意の $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{dir}}^{h-1}$ に対して,

$$\sum_{\omega \in \langle x \rangle} C(A, \omega) = c'$$

が成り立つ. 定理 3.8(1) より, $\langle x \rangle$ 上の一様分布は $\mathcal{A}_{\mathrm{dir}}^{h-1}$ に対する固有分布であり, そのコスト期待値は定理 3.8(2) より, c に等しい. よって, 任意の $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{dir}}^{h-1}$ に対して,

$$c = \frac{1}{|\langle x \rangle|} \sum_{\omega \in \langle x \rangle} C(A, \omega) = \frac{c'}{|\langle x \rangle|} \tag{$*$}$$

となる.

さて, 高さ h の木に関して, 根の値が $i \in \{0, 1\}$ になる割り当ての全体を $\mathcal{W}_i^h$ とかくことにすると, これは閉集合なので,

$$(a)\ \langle x \rangle \subset \mathcal{W}_1^{h-1}, \quad (b)\ \langle x \rangle \subset \mathcal{W}_0^{h-1}$$

のいずれかが成り立つ. いま考えている木は AND-OR 木であることに注意して, 以下のように計算をしていく.

(a) のとき: 左部分木から先に探索する任意の $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{dir}}^{h}$ を考える. このとき, A は, 左部分木は A^L で, 右部分木は A^R によって探索するものとする. すると,

$$\begin{aligned}
C(A, d) &= \sum_{\omega \in \langle xx \rangle} d(\omega) C(A, \omega) \\
&= \sum_{\omega_1, \omega_2 \in \langle x \rangle} d(\omega_1 \omega_2) C(A, \omega_1 \omega_2) \\
&= \sum_{\omega_1, \omega_2 \in \langle x \rangle} \frac{d_0(\omega_1) + d_0(\omega_2)}{2|\langle x \rangle|} \left(C(A^L, \omega_1) + C(A^R, \omega_2) \right) \\
&= \frac{1}{2|\langle x \rangle|} \Bigg(\sum_{\omega_1, \omega_2 \in \langle x \rangle} d_0(\omega_1) C(A^L, \omega_1) + \sum_{\omega_1, \omega_2 \in \langle x \rangle} d_0(\omega_1) C(A^R, \omega_2) \\
&\quad + \sum_{\omega_1, \omega_2 \in \langle x \rangle} d_0(\omega_2) C(A^L, \omega_1) + \sum_{\omega_1, \omega_2 \in \langle x \rangle} d_0(\omega_2) C(A^R, \omega_2) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2|\langle x \rangle|} \Bigg(|\langle x \rangle| C(A^L, d_0) + \sum_{\omega_1 \in \langle x \rangle} d_0(\omega_1) \sum_{\omega_2 \in \langle x \rangle} C(A^R, \omega_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\omega_2\in\langle x\rangle} d_0(\omega_2)\sum_{\omega_1\in\langle x\rangle} C(A^L,\omega_1)+|\langle x\rangle|C(A^R,d_0)\Bigg) \\
&=\frac{|\langle x\rangle|c+c'+c'+|\langle x\rangle|c}{2|\langle x\rangle|} \\
&=2c \quad ((*)\text{ より})
\end{aligned}
$$

となる. すなわち, A によらない定数となる. 右部分木から探索するアルゴリズムに関しても, $2c$ となることがわかるので, 定理 3.8(2) より, d は固有分布である.
(b) のとき: 左部分木から先に探索する任意の $A\in\mathcal{A}^h_{\mathrm{dir}}$ に対して, $C(A,d)$ は, (a) の計算式で A^R の項がない式と等しくなり, $C(A,d)=c$ となる. 右部分木から探索するアルゴリズムに関しても, c となることがわかるので. 定理 3.8(2) より, d は固有分布である. □

5 今後の課題について

今後の課題として次のようなものが挙げられる:

(a) [SuNa] では, 固有分布の個数も分析されている. そこで, 最適な乱択アルゴリズムの個数に関する結果を得られるであろうか?
(b) 定理 4.8 において, (1), (2) それぞれの逆は成り立つのであろうか?
(c) 木転置グラフの複雑さはコスト関数に関する計算複雑さとどのような関係があるのか?
(d) 本稿の全ての事柄に関して, 木の形が今回取り扱った完全二分木のような形のものだけではなく, 一般の木の場合でも同様のことがいえるのか?

(a) に関する予想として, 以下が挙げられる:

予想. $\mathcal{A}$ を連結閉集合とするとき, $\mathcal{A}$ 上の i-set に対する最適な乱択アルゴリズムは無限個存在する.

(b) が肯定的に成り立つとすると, $\mathcal{W}^{h-1}$ のグラフが同型によって分類できれば, $\mathcal{W}^h$ のグラフが同型によって完全に分類できることがわかる.
(c) については, 次のような定義が参考になるかもしれない:

$$
\langle x\rangle<\langle y\rangle \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} |\langle x\rangle|<|\langle y\rangle| \text{ または} \\ |\langle x\rangle|=|\langle y\rangle|,\ (\langle x\rangle\text{ の辺の個数})<(\langle y\rangle\text{ の辺の個数}) \end{cases}.
$$

この木転置グラフの間の順序 $<$ と, randomized complexity や distributional complexity の大きさの関係は興味ある問題であると思われる.

(d) に関しては, 不完全な木, または二分でない木に関して転置という概念をうまく定義することが不可欠であると思われる.

6　付録　無限組み合わせ論における hitting principle の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ への拡張について

6.1　序論

6.1.1　概要

無限組み合わせ論における重要な概念として diamond principle がある．Diamond principle は Gödel の構成可能集合のクラス L において成り立ち, 基数のべき乗に関する情報を多く含む．例えば, 無限基数 κ^+ 上の diamond principle $\diamondsuit_{\kappa^+}$ は, κ に関する連続体仮説 $2^\kappa = \kappa^+$ を導く．この主張の逆は $\kappa = \omega$ のときは成り立たないことがわかっている．一方, $\kappa > \omega$ のときは成り立つことが, 近年, Shelah[She] によって証明された．この定理から派生する特異基数に関する無限組み合わせ論において, 重要な役割を果たすものが hitting principle である．例えば, Rinot[Ri2] は hitting principle を用いることにより, 任意の特異基数 κ と定常集合 $S \subset \kappa^+$ について, approachability ideal $I[S;\kappa]$ が定常集合を含めば, $2^\kappa = \kappa^+$ から $\diamondsuit_S$ が導かれることを示した．

一方, 1970 年代に Jech[Jec2] は diamond pinciple を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ へ拡張した．$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は巨大基数の理論に関連して, 集合論において重要な構造である．

そこで, 我々は, hitting principle を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 構造へ拡張する．本付録では, $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ における hitting principle と diamond principle の基本的な関係を証明する．

6.1.2　背景

連続体濃度 ($= |\mathbb{R}|$) の研究は, 集合論の黎明期から現在に至るまで集合論において根本的なテーマである．

最も基本的な連続体濃度に関する問題提起は, 19 世紀における, Georg Cantor による連続体仮説である．これは, 可算濃度より真に大きく, 連続体濃度より真に小さい濃度をもつ集合は存在しない, という主張である．

Cantor の問題提起以降の連続体仮説の歴史に関して, 四つの大きな進展を中心に概観してみる．但し, 最初の二つは集合論という分野を飛躍的に発展させた無矛盾性証明の方法論的な発見についてであり, 残りの二つは純粋な無限組み合わせ論の話題である．

一つは 1930 年代, Kurt Gödel による内部モデル理論が連続体仮説の ZFC 集合論との整合性を保障したことである．具体的には, 連続体仮説が成り立つモデルを実際につくり上げることに成功したのであった．そのモデルは構成可能集合のクラスであり, L とよば

れるものである.

二つ目は 1960 年代における Paul Cohen による強制法の開発である. 強制法とは, 半順序集合の組み合わせ論的性質を駆使することにより, 望みどおりのモデルをつくる方法である. Cohen は強制法により, 連続体仮説の否定が成り立つモデルを構成することに成功したのであった.

モデルを作り上げることができれば, そこで成り立つ命題は ZFC 公理系と無矛盾である. 言い換えると, そのモデルで成り立つ命題の否定は, ZFC 集合論を仮定する限り, 証明不可能であることがわかる.

したがって, 上の 2 つの結果から, 連続体仮説は ZFC 集合論を仮定する限り, 証明も反証もできないことがわかったことになる.

一方, 構成されたモデルそれ自体の研究が重要になることは自然である.

第三の進展として, 1970 年代, Ronald B.Jensen が Gödel の L を緻密に調べ上げ, 微細構造論 (fine structure theory) とよばれる分野を開拓した. その際, 彼は diamond principle $\diamondsuit$ という重要な原理を発見した [Jen]. Jensen は実数集合の性質と深く関係する Suslin 仮説を証明するために $\diamondsuit$ を用いたのであった.

その後, 無限組み合わせ論の様々な場所で $\diamondsuit$ は現れる. その大きな理由として, 自然数全体の集合の部分集合, すなわち実数の振る舞いをある程度制御することができることが挙げられる. 実際, $\diamondsuit$ から連続体仮説が容易に導かれる.

また, 一般の非可算基数 κ について連続体仮説は一般化され, CH_κ とかかれる. また, κ における定常集合 S について $\diamondsuit$ は一般化され, $\diamondsuit_S$ と表される. このとき, $\diamondsuit_{\kappa^+}$ から CH_κ がすぐに導かれる.

そこで, CH_κ から $\diamondsuit_{\kappa^+}$ が導かれるかどうかが問題となる. 但し, κ が可算のときは不可能であることが, 70 年代にわかっている [DeJo].

第四の進展はこの問題に関してである.

21 世紀になり, Saharon Shelah は非可算基数に対しては, 上記の二つの概念が同値であることを証明した [She]. この事実は次の定理の系として直ちに得られる:

Shelah の定理． κ を非可算基数とし, $S^{\kappa^+}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)} = \{\alpha < \kappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) \neq \mathrm{cf}(\kappa)\}$ とおく. $S \subset S^{\kappa^+}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}$ を定常集合とする. このとき, CH_κ から $\diamondsuit_S$ が導かれる.

次に, 上記の定理において, 仮定の“$S \subset S^{\kappa^+}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}$”を“$S \subset S^{\kappa^+}_{\mathrm{cf}(\kappa)}$”へ変えたものが成り立つかどうかが問題となる. 但し, $S^{\kappa^+}_{\mathrm{cf}(\kappa)} = \{\alpha < \kappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\kappa)\}$ である.

この問題に関して, κ が正則基数のときは不可能であることがわかっている [DeJo, StKi]. よって, κ が特異基数のときに成り立つのかどうかが焦点となる.

この問題は我々の知る限り解かれてはいない. 但し, 部分的な結果が Assaf Rinot[Ri2] によって得られている. Rinot は Shelah が導入した approachable ideal $I[\kappa^+;\kappa]$ の概念を元に, 定常集合 $S \subset \kappa^+$ について, 新しい ideal $I[S;\kappa]$ を定義し, 次の定理を得た:

Rinot の定理 . κ を特異基数とし, $S \subset \kappa^+$ を定常集合とする. このとき, $I[S;\kappa]$ が定常集合を要素として含めば, CH_κ から $\Diamond_S$ が導かれる.

この定理を証明する過程で, 重要な役割を果たす概念が hitting principle $\clubsuit^-_S$ である. 具体的には, 次のようなステップで上の定理は証明される:

- $\clubsuit^-_S + \mathrm{CH}_\kappa \Leftrightarrow \Diamond_S$.
- $I[S;\kappa]$ が定常集合を要素として含めば, $\mathrm{CH}_\kappa \Rightarrow \clubsuit^-_S$.
- したがって, $I[S;\kappa]$ が定常集合を要素として含めば, $\mathrm{CH}_\kappa \Rightarrow \Diamond_S$.

一方, [Ri2] の冒頭では, hitting principle の複数のバージョン $\clubsuit^*_S, \clubsuit^-_S \restriction T$ などが定義され, それらの間の関係が証明されている. 例えば, 次のような性質がある:

Hitting principle の性質 .
(a) S を κ^+ における定常集合とするとき, $\Diamond_S$ から $\clubsuit^-_S$ が導かれる.
(b) $\clubsuit^*_{S^{\kappa^+}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}}$ が成り立つ.

さて, 無限組み合わせ論と共に, 集合論において重要な分野として巨大基数公理の理論がある.

巨大基数は ZFC 集合論の枠組みでは存在を証明することが不可能なほど巨大な集合である. 現在まで様々な種類の巨大基数が発見されている. それらの巨大基数は, ZFC 集合論では決定できないような命題の無矛盾性の強さを測る指標のような役割を果たし, 現代集合論において非常に重要な概念となっている.

巨大基数は初等的埋め込みと呼ばれる写像の存在によって定義されるものが多い. しかし, 初等的埋め込みは ZFC 集合論の枠組みでは表現できない対象である. 一方で, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 構造というものを用いるといくつかの巨大基数は ZFC 集合論の枠組みにおいて特徴付けることができる.

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ とは, 集合 $\{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$ のことであり, $\langle \kappa, < \rangle$ を拡張した構造が $\langle \mathcal{P}_\kappa\lambda, \subset \rangle$ である.

また, 巨大基数と関連して, ideal の飽和性 (saturation) という概念がある. これは

ideal の極大性を測る指標のようなものであり, 巨大基数公理と非常に関係が深いものである.

基数 κ 上の ideal として基本的かつ重要な例は非定常 ideal NS_κ であり, NS_κ の飽和性は活発に研究され続けている.

Thomas Jech[Jec1] は, NS_κ の概念を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ へ置き換え, その飽和性を調べた. そのとき, 重要な役割を果たしたものが, $\diamondsuit_\kappa$ を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 構造へ拡張した $\diamondsuit_{\kappa,\lambda}$ であった ([Jec1] では $\spadesuit$ と表記されている).

そこで, 我々は Jech の $\diamondsuit_{\kappa,\lambda}$ の定義を参考にして, $\clubsuit_S^-$ と $\clubsuit_S^*$ の $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ への拡張として, $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ と $\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S)$ を定義する. そして, これらが hitting principle と同様の基本的性質を持つことを証明する.

主結果. *S を $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ における定常集合とする.*

(a) *$\diamondsuit_{\kappa^+,\lambda}(S)$ から $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ が導かれる.*
(b) *$\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S)$ が成り立つ.*

6.1.3 付録の構成

6.2 節では, 公理的集合論, 無限組み合わせ論における基本概念を解説する. 6.3 節では, 6.2 節において述べた基数 κ 上の hitting principle を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 構造へ拡張し, 基本的性質を解説する. 最後に 6.4 節で今後の研究課題について述べる.

6.1.4 記号の約束について

集合 A から集合 B への関数 $f : A \to B$ が与えられたとする. 定義域の部分集合 $X \subset A$ について, f による X の像を $f[X]$ とかく. 集合論では集合の元も集合なので, 混乱を招かないようにこのようにかくことにする. 例えば, $\alpha \in \beta \subset A$ のとき, $f(\alpha) \in f[\beta]$ である. また, 値域の部分集合 $Y \subset B$ について, f による Y の逆像を $f^{-1}[Y]$ とかく. さらに, f の値域を $\mathrm{ran} f$ とかく.

6.2 定義と先行研究の紹介

無限組み合わせ論を論じるにあたって必要な基本的概念を解説する. 但し, 本稿で用いるものについてだけの解説にとどめるので, より詳しい内容については, [Ku], [Jec2], [TaSu] などを参照してほしい.

付録全体を通して, ZFC 集合論 (通常の数学が展開できる公理系) において議論する. 特に, 選択公理を仮定することに注意する.

6.2.1 順序数, 基数, 共終数

無限組み合わせ論を記述する上で欠かせないのが順序数である. これは, 自然数の概念の自然な拡張と捉えることができる.

集合 x が**順序数 (ordinal)** であるとは,

- 任意の $y \in x$ に対して, $y \subset x$ となる,
- $\langle x, \in \rangle$ は整列集合である

をみたすものをいう. 通常, 順序数はギリシャ文字の最初の文字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ などで表す.

順序数同士の大小関係 $<$ は, 所属関係 $\in$ であると定義する: $\alpha < \beta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha \in \beta$.

このとき, $<$ は全順序となる.

$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ とおくと, これも順序数で, $\alpha < \alpha + 1$ である. この形の順序数を**後続順序数 (successor ordinal)** とよぶ. 後続順序数でない順序数のことを**極限順序数 (limit ordinal)** とよぶ. 極限順序数は $\forall \beta < \alpha \exists \gamma \, (\beta < \gamma < \alpha)$ が成り立つ順序数のことでもある.

順序数の性質を列挙しておく:

- 順序数の元も順序数である.
- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$.
- X を順序数からなる空でない集合とすると,
  - X は最小元をもつ.
  - $\sup X$ が存在して, $\sup X = \bigcup X$ となる. さらに, $\sup X$ も順序数である.

上では形式的に順序数の定義をしたが, 順序数の最も基本的な性質は整列集合の順序集合としての「型」を表すものであることである.

命題 6.1. $\langle W, R \rangle$ を整列集合とする. このとき, ただ一つの順序数 α が存在して, $\langle W, R \rangle$ と $\langle \alpha, \in \rangle$ は順序同型となる. この α を $\mathrm{type}(W, R)$ とかく.

特別な順序数として基数がある. これは, 集合の「大きさ」を計るモノサシの目盛りのような働きをする.

集合 x の**濃度 (cardinality)** を,

$$|x| := \min\{\beta : \beta \text{ は順序数}, \exists f : \beta \to x \ (f \text{ は全単射})\}$$

と定義する. 選択公理を仮定すれば, 任意の集合を整列順序付けできるので, 命題 6.1 により上式の右辺の集合は空でない. よって, 選択公理の下では, 全ての集合に対して, 濃度を定義できることに注意する.

このとき, $|\alpha| = \alpha$ となる順序数を**基数 (cardinal)** とよぶ.

順序数は整列集合なので, 基数の定義には選択公理は不要である. 基数は, 通常, κ, λ, μ などで表す. 無限基数は極限順序数であることに注意する.

Cantor の定理より, 任意の基数に対して, それよりも真に大きな基数が存在する. そこで, 基数 κ の**後続基数 (successor cardinal)** κ^+ を, κ より大きな基数のうち, 最小のもののこととする. 後続基数でない基数のことを**極限基数 (limit cardinal)** とよぶ.

基数の定義を少し弱くすると, 共終数が定義できる.

順序数から順序数への関数で, 値域が非有界となるものを**共終写像 (cofinal map)** とよぶ. このとき, 順序数 α の**共終数 (cofinality)** を,

$$\mathrm{cf}(\alpha) := \min\{\beta : \beta \text{ は順序数}, \exists f : \beta \to \alpha \ (f \text{ は共終写像})\}$$

と定義する.

$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ となる順序数 α は**正則 (regular)** であるという.

共終数の性質として, 以下がある:

- $\mathrm{cf}(\alpha)$ は正則な基数である. よって, 正則な順序数は基数である. 正則でない基数を**特異基数 (singular cardinal)** とよぶ.
- 後続無限基数は正則である.
- 任意の順序数 α に対して, 狭義増加な共終写像 $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ が存在する.
- $$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{|X| : X \subset \alpha,\ X \text{ は } \alpha \text{ で非有界}\}$$

  とかける.

また, 次が成り立つ.

命題 6.2. α, β を極限順序数とし, $f : \alpha \to \beta$ を狭義増加な共終写像とする. このとき, $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$ となる.

例 6.3. • 自然数は有限順序数として定義することができる:

$$0 = \varnothing,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0,1\},\ 3 = \{0,1,2\},\ \dots,\ n+1 = \{0,1,2,\dots,n\},\ \dots$$

順序数が自然数の拡張である, ということの意味は, 次のような系列ができるからである:

$$\begin{aligned}
&\omega = \{0,1,2,\dots\}(= \mathbb{N}),\\
&\omega + 1 = \{0,1,2,\dots,\omega\} = \omega \cup \{\omega\},\\
&\omega + 2 = (\omega+1) \cup \{\omega+1\},\\
\dots,&\\
&\omega + \omega = \omega \cup \{\omega + n : n < \omega\} =: \omega \cdot 2\\
\dots,&\\
&\omega \cdot \omega = \{\omega \cdot n : n < \omega\},\\
&\dots
\end{aligned}$$

これらは全て可算集合である. よって, ω^+ は ω からみて遥かに大きな順序数である.

- 自然数は全て基数である. また, ω も基数である. 一方, $\omega+1$ は基数でない.
- ω は正則である. しかし, $\omega+1$ は正則でない.

6.2.2 club 集合と定常集合

以下, κ を正則非可算基数とする.

定義 6.4. $C \subset \kappa$ とする.

C が κ において**閉 (closed)** であるとは,

$$\forall \beta < \kappa : \text{極限順序数}\Big[\sup(\beta \cap C) = \beta \Rightarrow \beta \in C\Big]$$

となるときをいう. これは,

$$\forall \beta < \kappa : \text{極限順序数}\ \forall \{\alpha_\gamma\}_{\gamma<\beta} \subset C : <\text{-増加列}\Big[\sup \alpha_\gamma \in C\Big]$$

としても同じである.

C が κ において閉かつ非有界のとき, C を κ における **club 集合 (closed unbounded set, club set)** という.

例 6.5.
- 任意の $\beta < \kappa$ について, $(\beta, \kappa) = \{\gamma < \kappa : \beta < \gamma\}$ は, κ において club である.
- $\{\alpha < \kappa : \alpha$ は極限順序数である $\}$ は κ において club である.

命題 6.6. κ における κ 個未満の club 集合の共通部分も, club 集合である.

この命題から, club 集合はとても「大きな」集合であるといえる.

命題 6.7. 写像 $f : \kappa \to \kappa$ に対して,

$$\{\alpha < \kappa : \forall \beta < \alpha \, (f(\beta) < \alpha)\}$$

は, κ において club である.

定義 6.8. $S \subset \kappa$ とする.
S が κ において**定常 (stationary)** であるとは, S が κ における任意の club 集合と空でない共通部分をもつときをいう.

定常集合は「無視できない大きさ」の集合であるといえる.

注意 6.9. 命題 6.6 より, club 集合は定常集合である. また, club 集合 C と定常集合 S に対して, $C \cap S$ も定常集合である.

記号 . 基数 $\mu < \kappa$ について,

$$\begin{aligned} S^\kappa_\mu &:= \{\gamma < \kappa : \mathrm{cf}(\gamma) = \mu\}, \\ S^\kappa_{<\mu} &:= \{\gamma < \kappa : \mathrm{cf}(\gamma) < \mu\}, \\ S^\kappa_{\neq\mu} &:= \{\gamma < \kappa : \mathrm{cf}(\gamma) \neq \mu\} \end{aligned}$$

とおく.

命題 6.10. 正則基数 μ について, S^κ_μ は κ における定常集合である. よって, 任意の非可算基数 ν について, $S^\kappa_{<\nu}$ や $S^\kappa_{\neq\nu}$ も κ における定常集合である.

6.2.3 diamond principle と hitting principle

この節のより詳しい背景, 定義やその性質は [Ri2, Ri3] を参照してほしい.

定義 6.11. κ は正則非可算基数とする.
定常集合 $S \subset \kappa$ に対して, 以下を満たす $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ を $\Diamond_S$-列という:

- 各 $\alpha \in S$ に対して, $A_\alpha \subset \alpha$,
- 任意の $Z \subset \kappa$ に対して, $\{\alpha \in S : Z \cap \alpha = A_\alpha\}$ は κ における定常集合である.

“$\diamondsuit_S$-列が存在する” という主張を $\diamondsuit_S$ とかく.

$S = \kappa$ のときは, 単に $\diamondsuit_\kappa$ とかく.

一般に, 基数 λ のべき集合の濃度を 2^λ とかく. この記号を用いると, 序論で述べた**連続体仮説 (continuum hypothesis, CH)** は, $2^\omega = \omega^+$ とかける. これを拡張して, 一般の無限基数 κ について, $2^\kappa = \kappa^+$ という主張を CH_κ とかく.

まず, $\diamondsuit_{\kappa^+}$ から CH_κ が導かれることが容易にわかる. 近年, Saharon Shelah は, 非可算基数に関してはこの 2 つが同値であることを示した.

定理 6.12 (Shelah 2010, [She]). κ を非可算基数とする. このとき, CH_κ と $\diamondsuit_{\kappa^+}$ は同値である.

序論で述べたように, diamond principle に関連して, 特異基数の組み合わせ論において **hitting principle** が重要な役割を果たす. 序論よりも詳しい内容については, [Ri2, Ri3] を参照してほしい.

集合 x に対して, $\mathcal{P}_\kappa x := \{y \subset x : |y| < \kappa\}$ とおく. また, 例 6.5 と注意 6.9 より, $X := (\kappa, \kappa^+) \cap \{\alpha < \kappa^+ : \alpha$ は極限順序数である $\}$ は κ^+ における club 集合であり, 任意の定常集合 $S \subset \kappa^+$ について, $S \cap X$ も定常集合である. そこで, κ^+ における club 集合や定常集合は X の部分集合であると仮定する.

また, 以下では, κ は非可算基数とする.

定義 6.13. 定常集合 $S \subset S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ に対して, 以下を満たす $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha \in S\rangle$ を $\clubsuit^-_S$-列という:

- 各 $\alpha \in S$ に対して, $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{P}_\kappa \alpha$, $|\mathcal{A}_\alpha| \leq \kappa$,
- 任意の非有界集合 $Z \subset \kappa^+$ に対して, $\{\alpha \in S : \exists A \in \mathcal{A}_\alpha\, (\sup(Z \cap A) = \alpha)\}$ は κ^+ における定常集合である.

“$\clubsuit^-_S$-列が存在する” という主張を $\clubsuit^-_S$ とかく.

定義 6.14. 定常集合 $S \subset S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ に対して, 以下を満たす $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha \in S\rangle$ を $\clubsuit^*_S$-列という:

- 各 $\alpha \in S$ に対して, $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{P}_\kappa \alpha$, $|\mathcal{A}_\alpha| \leq \kappa$,
- 任意の非有界集合 $Z \subset \kappa^+$ に対して, $\{\alpha \in S : \forall A \in \mathcal{A}_\alpha\, (\sup(Z \cap A) < \alpha)\}$ は κ^+ における非定常集合である.

“$\clubsuit^*_S$-列が存在する” という主張を $\clubsuit^*_S$ とかく.

注意 6.15. (a) 定常集合 $S, T \subset S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ が $T \subset S$ の関係にあるとき, $\clubsuit^-_T \Rightarrow \clubsuit^-_S$ が成り立つ.

(b) 定常集合 $S \subset \kappa^+ \setminus S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ に対して, $\clubsuit^-_S$ と $\clubsuit^*_S$ は成り立たない.
なぜなら, $\clubsuit^-_S$ の二つ目の条件が, 非有界集合 $Z \subset \kappa^+$ に対して,

$$\{\alpha \in S : \exists A \in \mathcal{A}_\alpha\,(\sup(Z \cap A) = \alpha)\} = \varnothing$$

となるからである.
また, $\clubsuit^*_S$ の二つ目の条件は,

$$\{\alpha \in S : \forall A \in \mathcal{A}_\alpha\,(\sup(Z \cap A) < \alpha)\} = S$$

となるからである.

本稿で取り上げるのは, [Ri2] の冒頭で解説されている, hitting prrinciple の基本的な性質に関してである. 具体的には以下の事実である:

命題 6.16. (1) 定常集合 $S \subset S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ に対して,

$$\clubsuit^*_S \Rightarrow \clubsuit^-_S, \quad \Diamond_S \Rightarrow \clubsuit^-_S.$$

(2) $\clubsuit^*_{S^{\kappa^+}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}}$ が成り立つ.

この性質を一般化しようと試みた. その結果は 6.3 節で紹介する.

6.2.4 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ における diamond principle

κ, λ を $\kappa \leq \lambda$ をみたす正則非可算基数とする. このとき, $\mathcal{P}_\kappa\lambda = \{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$ とおく. $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は**巨大基数公理 (large cardinal axioms)** と関係が深い構造である. 巨大基数公理の詳細は [Jec2] や [Ka] を参照してほしい.

さて, 基数上の組み合わせ論的概念は, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上に以下のように自然に拡張される.

定義 6.17. $C \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする.
C が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ において**閉 (closed)** であるとは,

$$\forall \beta < \kappa\ \forall \{x_\gamma\}_{\gamma<\beta} \subset C : \subset\text{-増加列}\left[\ \bigcup_{\gamma<\beta} x_\gamma \in C\ \right]$$

となるときをいう.

C が κ において閉かつ $\subset$ に関して非有界のとき, C を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ における **club 集合 (closed unbounded set, club set)** という.

例 6.18.
- 任意の $y \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ について, $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : y \subset x\}$ は, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ において club である.
- $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \subset \sup x\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ において club である.

命題 6.19. $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ における κ 個未満の club 集合の共通部分も, club 集合である.

この命題から, club 集合はとても「大きな」集合であるといえる.

命題 6.20. 写像 $f : \lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して,

$$C(f) := \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : \forall\beta \in x\,(f(\beta) \subset x)\}$$

は, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ において club である.

club 集合に関する議論を行う場合, ある集合が club 集合を部分集合として含むことを示せば十分であることが多い. その場合, 命題 6.20 は非常に有用である.

例 6.21. 例 6.18 に関して, 次が成り立つ.

- 各 $y \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ について, $f : \lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ を $f(\alpha) = y$ $(\alpha < \lambda)$ によって定義すると, $C(f) = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : y \subset x\}$ である.
- $g : \lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ を $g(\alpha) = \{\alpha + 1\}$ $(\alpha < \lambda)$ によって定義すると, $C(g) \subset \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \subset \sup x\}$ である.

定義 6.22. $S \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする.

S が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ において**定常 (stationary)** であるとは, S が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ における任意の club 集合と空でない共通部分をもつときをいう.

定常集合は「無視できない大きさ」の集合であるといえる.

注意 6.23. 命題 6.19 より, club 集合は定常集合である. また, club 集合 C と定常集合 S に対して, $C \cap S$ も定常集合である.

記号 . 基数 $\mu < \kappa$ について,

$$S_{\mu}^{\kappa,\lambda} := \{x \in \mathcal{P}_{\kappa}\lambda : \mathrm{cf}(\sup x) = \mu\},$$
$$S_{<\mu}^{\kappa,\lambda} := \{x \in \mathcal{P}_{\kappa}\lambda : \mathrm{cf}(\sup x) < \mu\},$$
$$S_{\neq\mu}^{\kappa,\lambda} := \{x \in \mathcal{P}_{\kappa}\lambda : \mathrm{cf}(\sup x) \neq \mu\}$$

とおく.

命題 6.24. 正則基数 μ について, $S_{\mu}^{\kappa,\lambda}$ は $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ における定常集合である. よって, 任意の非可算基数 ν について, $S_{<\nu}^{\kappa,\lambda}$ や $S_{\neq\nu}^{\kappa,\lambda}$ も $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ における定常集合である.

証明. 任意の club 集合 $C \subset \mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ に対して,

$$\overline{C} := \{\sup x : x \in C\}$$

とおく. 各 $x \in C$ は $|x| < \kappa \leq \lambda$ なので, $\overline{C} \subset \lambda$ である. いま, C は $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ において club なので, 任意の $\alpha < \lambda$ に対して, $\{\alpha\} \subset x$ となる $x \in C$ が存在する. よって,

$$\alpha = \sup\{\alpha\} \leq \sup x \in \overline{C}$$

となるので, $\overline{C}$ は λ で非有界である. よって, $|\overline{C}| = \lambda$ である.

さて, $\xi := \mathrm{type}(\overline{C}, <)$ とおき, $\pi : \xi \to \overline{C}$ を同型写像とする. このとき,

$$\mu < \lambda = |\overline{C}| = |\xi|$$

なので, $\mu < \xi$ である. よって, 写像

$$p := \pi \upharpoonright \mu : \mu \to \pi(\mu)$$

が定義できる. π は同型写像なので, p は狭義増加な共終写像である. よって, 命題 6.2 より,

$$\mu = \mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\pi(\mu))$$

となる. いま, ある $x \in C$ について, $\pi(\mu) = \sup x$ なので, $\mathrm{cf}(\sup x) = \mu$ となる. したがって, $x \in S_{\mu}^{\kappa,\lambda} \cap C$ となる. すなわち, $S_{\mu}^{\kappa,\lambda} \cap C \neq \varnothing$ であるから, $S_{\mu}^{\kappa,\lambda}$ は定常集合である. □

さて, diamond principle は $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ へ次のように拡張される.

定義 6.25. [Jec1] 定常集合 $S \subset \mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ に対して, 以下を満たす $\langle A_x : x \in S\rangle$ を $\Diamond_{\kappa,\lambda}(S)$-列という:

- 各 $x \in S$ に対して, $A_x \subset x$,
- 任意の $Z \subset \lambda$ に対して, $\{x \in S : Z \cap x = A_x\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ における定常集合である.

"$\Diamond_{\kappa,\lambda}(S)$-列が存在する" という主張を $\Diamond_{\kappa,\lambda}(S)$ とかく.

6.3 結果

κ を非可算基数とし, λ を $\kappa^+ \le \lambda$ をみたす正則非可算基数とする.

例 6.18 と注意 6.23 より, $C_1 = \{x \in \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda : \kappa \subset x\}$ と $C_2 = \{x \in \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda : x \subset \sup x\}$ は club であり, 任意の定常集合 S について, $S \cap C_1 \cap C_2$ も定常集合である. 以下, 定常集合や club 集合は, $C_1 \cap C_2$ の部分集合であるとする.

定義 6.26. 定常集合 $S \subset S^{\kappa^+,\lambda}_{<\kappa}$ に対して, 以下を満たす $\langle \mathcal{A}_x : x \in S\rangle$ を $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$-列という:

- 各 $x \in S$ に対して, $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{P}_\kappa x,\ |\mathcal{A}_x| \le \kappa$,
- 任意の非有界集合 $Z \subset \lambda$ に対して, $\{x \in S : \exists A \in \mathcal{A}_x\,(\sup(Z \cap A) = \sup x)\}$ は $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ における定常集合である.

"$\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$-列が存在する" という主張を $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ とかく.

定義 6.27. 定常集合 $S \subset S^{\kappa^+,\lambda}_{<\kappa}$ に対して, 以下を満たす $\langle \mathcal{A}_x : x \in S\rangle$ を $\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S)$-列という:

- 各 $x \in S$ に対して, $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{P}_\kappa x,\ |\mathcal{A}_x| \le \kappa$,
- 任意の非有界集合 $Z \subset \lambda$ に対して, $\{x \in S : \forall A \in \mathcal{A}_x\,(\sup(Z \cap A) < \sup x)\}$ は $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ における非定常集合である.

"$\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S)$-列が存在する" という主張を $\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S)$ とかく.

注意 6.28. 注意 6.15 と同じ理由により, 次がいえる:

(a) 定常集合 $S, T \subset S^{\kappa^+,\lambda}_{<\kappa}$ が $T \subset S$ の関係にあるとき, $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(T) \Rightarrow \clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ が成り立つ.

(b) 定常集合 $S \subset \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda \setminus S^{\kappa^+,\lambda}_{<\kappa}$ に対して, $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ と $\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S)$ は成り立たない.

定理 6.29. 定常集合 $S \subset S_{<\kappa}^{\kappa^+,\lambda}$ に対して,

$$\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S) \Rightarrow \clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S), \quad \Diamond_{\kappa^+,\lambda}(S) \Rightarrow \clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S).$$

証明. $\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S) \Rightarrow \clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ は定義より直ちにわかる. そこで, $\Diamond_{\kappa^+,\lambda}(S) \Rightarrow \clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ を示す.

$\langle A_x : x \in S \rangle$ を $\Diamond_{\kappa^+,\lambda}(S)$-列とする.

$\{x \in S : x = A_x\}$ は定常なので、$T := \{x \in S : A_x$ は x で非有界である $\}$ も定常である.

さて, 各 $x \in T$ について $f_x : \mathrm{cf}(\sup x) \to \sup x$ を狭義増加な共終写像とする. いま, $x \subset \sup x$ であることに注意すると, 次のように $g_x : \mathrm{cf}(\sup x) \to A_x$ を定義することができる:

- $g_x(0) = \min A_x$,
- 各 $\alpha < \mathrm{cf}(\sup x)$ について,
  $g_x(\alpha) = \min\left\{\beta \in A_x : \beta > \max\left\{\sup_{\gamma<\alpha} f_x(\gamma), \sup_{\gamma<\alpha} g_x(\gamma)\right\}\right\}$.

各 $x \in T$ に対して, $B_x = \mathrm{ran} g_x$ とおき, $\mathcal{A}_x := \{B_x\}$ とする. このとき, $\langle \mathcal{A}_x : x \in T \rangle$ が $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(T)$-列であることを示す. これがいえれば, $T \subset S$ なので, $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S)$ が成り立つことになる.

各 $x \in T$ について, B_x のつくり方より, $B_x \subset A_x \subset x$ かつ $\sup B_x = \sup x$ である. また, $x \in S_{<\kappa}^{\kappa^+,\lambda}$ なので, $|B_x| \le \mathrm{cf}(\sup x) < \kappa$ である.

任意に非有界集合 $Z \subset \lambda$ をとる. このとき,

$$C_Z := \{x \in \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda : \sup(Z \cap x) = \sup x\}$$

とおくと, 次がいえる:

主張 . C_Z は $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ における club 集合を含む.

証明. $f : \lambda \to \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ を, 各 $\alpha \in \lambda$ に対して,

$$f(\alpha) = \{\min\{\beta \in Z : \beta > \alpha\}\}$$

とおく. このとき, $C(f) = \{x \in \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda : \forall\alpha \in x\,(f(\alpha) \subset x)\} \subset C_Z$ となることを証明すればよい.

任意の $x \in C(f)$ に対して, $\sup(Z \cap x) \le \sup x$ なので, $\sup x \le \sup(Z \cap x)$ を示せば良い.

さて, 任意の $\alpha \in \sup x$ に対して, $\xi > \alpha$ なる $\xi \in x$ がとれる. このとき, $f(\xi) \subset x$ なので, $\gamma = \min\{\beta \in Z : \beta > \xi\}$ とおくと, $\gamma > \xi, \gamma \in x \cap Z$ となるので, $\xi < \sup(Z \cap x)$ である. いま, $\alpha < \xi$ なので, $\alpha \in \sup(Z \cap x)$ となる. ゆえに, $\sup x \leq \sup(Z \cap x)$ が成り立つ. したがって, $x \in C_Z$ である. $\square_{主張}$

よって, 任意の club 集合 $C \subset \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ に対して, $C \cap C_Z$ も $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ における club 集合を含む. $\langle A_x : x \in S\rangle$ は $\diamondsuit_{\kappa^+,\lambda}(S)$-列なので, ある $x \in C \cap C_Z \cap S$ が存在して, $Z \cap x = A_x$ となる. いま, $Z \cap x$ は x で非有界なので, A_x もそうである. よって, $x \in T$ である. このとき, $B_x \subset A_x = Z \cap x \subset Z$ なので,

$$\sup(Z \cap B_x) = \sup B_x = \sup x$$

となる. ゆえに,

$$C \cap C_Z \cap \{x \in T : \sup(Z \cap B_x) = \sup x\} \neq \varnothing$$

が示された.

以上により, $\langle \mathcal{A}_x : x \in T\rangle$ が $\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(T)$-列であることがわかった. $\square$

定理 6.30. $\clubsuit^*_{\kappa^+,\lambda}(S^{\kappa^+,\lambda}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)})$ が成り立つ.

証明には [Ri2] で示されている以下の事実を用いる.

補題 6.31. [Ri2, Fact1.3] α, β を極限順序数とする. $A \subset \alpha$ を α で非有界な集合とし, 関数 $g : A \to \beta$ を考える. このとき, $\mathrm{cf}(\alpha) \neq \mathrm{cf}(\beta)$ ならば, ある $\beta' < \beta$ が存在して, $\sup g^{-1}[\beta'] = \alpha$ が成り立つ.

但し, $g^{-1}[\beta'] = \{\gamma \in A : g(\gamma) < \beta'\}$ である.

定理 6.30 の証明. 各 $x \in S^{\kappa^+,\lambda}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}$ について,

$$x = \bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} A^x_\alpha, \quad |A^x_\alpha| < \kappa,$$

なる, $\subset$-増加列 $\langle A^x_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ がとれる.

つくり方: まず, 狭義増加な共終写像 $i : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ をとる. いま, $\kappa \leq |x| < \kappa^+$ なので, $|x| = \kappa$ である. よって, 全単射 $b : \kappa \to x$ が存在する. そこで, 各 $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ に対して, $A^x_\alpha := b[i(\alpha)]$ と定義すればよい.

各 $x \in S^{\kappa^+,\lambda}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}$ について, $\mathcal{A}_x := \{A^x_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ とおく. 以下, $\left\langle \mathcal{A}_x : x \in S^{\kappa^+,\lambda}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)} \right\rangle$ が求めるものであることを示す.

任意の非有界集合 $Z \subset \lambda$ に対して,

$$C_Z := \{x \in \mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda : \sup(Z \cap x) = \sup x\}$$

とおくと. 命題 6.29 の証明内の主張により, C_Z は $\mathcal{P}_{\kappa^+}\lambda$ における club 集合を含む.

そこで,

$$C_Z \cap \left\{x \in S^{\kappa^+,\lambda}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)} : \forall\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\,(\sup(Z \cap A^x_\alpha) < \sup x)\right\} = \varnothing \qquad (*)$$

を示せばよい.

任意の $x \in C_Z \cap S^{\kappa^+,\lambda}_{\neq \mathrm{cf}(\kappa)}$ について, $x = \bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} A^x_\alpha$ なので,

$$\forall\beta \in Z \cap x \left(\beta \in A^x_{g(\beta)}\right)$$

なる $g : Z \cap x \to \mathrm{cf}(\kappa)$ がとれる. このとき, 補題 6.31 より, ある $\delta < \mathrm{cf}(\kappa)$ が存在して,

$$\sup g^{-1}[\delta] = \sup x$$

となる. よって, 任意の $\beta \in \sup x$ に対して, $\gamma > \beta$ かつ $g(\gamma) < \delta$ となる $\gamma \in Z \cap x$ がある. このとき, $\langle A^x_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ は $\subset$-増加列であることに注意すると,

$$\gamma \in A^x_{g(\gamma)} \subset A^x_\delta$$

なので, $\gamma \in Z \cap A^x_\delta$ である. よって, $\beta \in \sup(Z \cap A^x_\delta)$ となるので, $\sup x \leq \sup(Z \cap A^x_\delta)$ が成り立つ. 一方, $\sup(Z \cap A^x_\delta) \leq \sup(Z \cap x) = \sup x$ なので, $\sup(Z \cap A^x_\delta) = \sup x$ である. したがって, $(*)$ が成り立つ. □

6.4 今後の課題について

[Ri2] において, κ を非可算基数, $S \subset S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ を定常集合とするとき,

$$\clubsuit^-_S + \mathrm{CH}_\kappa \Leftrightarrow \Diamond_S$$

が証明されている. そこで, 問題として, 基数に関する何らかの主張 φ を見つけ出して,

$$\clubsuit^-_{\kappa^+,\lambda}(S) + \varphi \Leftrightarrow \Diamond_{\kappa^+,\lambda}(S)$$

を証明することが挙げられる. 但し, $\lambda \geq \kappa^+$ は正則基数とし, $S \subset S^{\kappa^+,\lambda}_{<\kappa}$ は定常集合とする.

謝辞

まず, 学部生のときから指導していただいた鈴木登志雄准教授にこの場を借りて深くお礼を申し上げます. 手厚い指導をして頂いただけでなく, 学生ながら研究集会へ参加する機会も与えて下さったことに感謝します.

そして, 共同研究者である仁井田哲尚氏に深く感謝の意を表したいと思います. 議論をする度に理解が深まり, 論文を書き上げることができました.

参考文献

AND-OR 木関連

[ArBa] S.Arora, B.Barak, Computational Complexity : A Modern Approach, Cambridge university press, New York, 2009.

[Bo] B.Bollobás, GRAPH THEORY, An Introductory Course, Springer-Verlag, New York, 1979, 邦訳: 『グラフ理論入門』, 斎藤伸自・西関隆夫 共訳, 培風館, 1983.

[LiTa] C.Liu, K.Tanaka, Eigen-Distribution on Random Assignments for Game Trees, Information Processing Letters, vol.104(2), pp.73-77, 2007.

[Ni] 仁井田哲尚, 『完全二分 AND-OR 木上の最適な乱択アルゴリズムについて』, 首都大学東京修士学位論文, 2013.

[SaWi] M.Saks, A.Wigderson, Probabilistic Boolean decision trees and the complexity of evaluating game trees, in: Proc. 27th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp.29-38, 1986.

[SuNa] T.Suzuki, R.Nakamura, The eigen distribution of an AND-OR tree under directional algorithms, IAENG International Journal of Applied Mathematics, vol.42(2), pp.122-128, 2012.

[Ya] A.C.-C.Yao, Probabilistic computations: towards a unified measure of complexity, in: Proc. 18th annual IEEE symposium on foundations of computer science (FOCS), pp.222-227, 1977.

無限組み合わせ論関連

[DeJo] K.J.Devlin, H.Johnsbråten, The souslin problem, Lecture Notes in Mathematics, vol.405, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[Jec1] T.Jech, Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals, Annals of mathematical logic, vol.5, pp.165-198, 1973.

[Jec2] T.Jech, Set Theory, Springer Monographs in Mathematics, The third millennium edition, revised and expanded, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Jen] R.B.Jensen, The fine structure of the constructible hierarchy, Annals of mathematical logic, vol.4, pp.229-308, 1972.

[Ka] A.Kanamori, The Higher Infinite : Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Ko] P.Komjáth, Shelah's proof of diamond, Annales Universitatis Scientarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica, vol.51, pp. 147-150, 2008.

[Ku] K.Kunen, Set Theory, An introduction to independence proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol.102, North-Holland, Amsterdam, 1980, 邦訳: 『集合論–独立性証明への案内』, 藤田博司 訳, 日本評論社, 2008.

[Ri1] A.Rinot, Diamond on successor cardinals, Young Researchers in Set Theory workshop Jan 25 2008.

[Ri2] A.Rinot, A relative of the approachability ideal, diamond and non-saturation, Journal of Symbolic Logic, vol.75(3), 2010.

[Ri3] A.Rinot, Jensen's diamond principle and its relatives, Set Theory and Its Applications, Contemporary Mathematics, 533: 125-156, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[She] S.Shelah, Diamonds, Proceedings of the American Mathematical Society, vol.138(6), pp. 2151-2161, 2010.

[Shi] M.Shioya, SPLITTING $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ INTO MAXIMALLY MANY STATIONARY SETS, Israel Journal of Mathematics, vol.114, pp. 347–357, 1999.

[StKi] C.I.Steinhorn, J.H.King, The uniformization property for $\aleph_2$, Israel Journal of Mathematics, vol.36(3-4), pp. 248–256, 1980.

[TaSu] 田中一之・鈴木登志雄, 『数学のロジックと集合論』, 培風館, 2003.