

$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ と 2 次体の合成体における楕円曲線の
everywhere good reduction について

東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
22843426 吉村隼人

2024 年 1 月 10 日

目次

第 1 章	はじめに	2
第 2 章	楕円曲線	3
2.1	楕円曲線の定義	3
2.2	Minimal model	4
2.3	Reduction	5
2.4	Conductor	5
第 3 章	計算方法	7
3.1	Magma	7
3.2	EllipticCurveSearch	7
第 4 章	計算結果	10
4.1	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{n})$ のとき	10
4.2	$\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ のとき	14
4.3	$\mathbb{Q}(\sqrt{-65}, \sqrt{n})$ のとき	16
4.4	$\mathbb{Q}(\sqrt{-65}, \sqrt{-n})$ のとき	16
謝辞		18
付録-A	Magma での探索に用いたコード	19
付録-B1	2 次体の everywhere good reduction	20
付録-B2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-n})$ の everywhere good reduction	37
参考文献		41

第 1 章

はじめに

K を代数体とする. 楕円曲線 E/K の π における還元 (reduction) とは, E の minimal model の各係数を $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ の元と見なす操作のことである. reduction を行ったものが再度楕円曲線となると, E は π で **good reduction** を持つといい, さらに E が \mathcal{O}_K の任意の素イデアルで good reduction を持つとき, E は K 上 **everywhere good reduction** を持つという. 代数体上の楕円曲線の everywhere good reduction についての研究は以前から行われており, 次の結果が知られている:

- \mathbb{Q} 上 everywhere good reduction を持つ楕円曲線は存在しない (J. Tate による: 諸説あり).
- 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 上 admissible な楕円曲線が存在することと, $n = 65n_1$ ($n_1 \in \mathbb{Z} : n_1$ が mod 5, 13 で平方数かつ 65 が mod n_1 で平方数) の形で表されることは同値である ([19]).
- 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ において, 類数が 6 と互いに素ならば everywhere good reduction を持つ楕円曲線は存在しない ([18], [19], [22]).
- 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ ($2 \leq n \leq 100, n$: square-free) において,
 - $n = 2, 3, 5, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 30, 31, 34, 35, 39, 42, 43, 46, 47, 53, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 74, 78, 82, 83, 85, 89, 93, 94, 95, 97$ のとき, everywhere good reduction を持つ楕円曲線は存在しない. ([3], [8], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [24], [26], [27] など)
 - $n = 6, 7, 14, 22, 26, 29, 33, 37, 38, 41, 65, 77, 79, 86$ のとき, everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在する ([3], [11], [13], [14], [15], [16], [24] など).
- 3 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{n})$ ($2 \leq n \leq 100, n$: cube-free) において,
 - $n = 2, 3, 5, 6, 10, 12, 17, 18, 29$ のとき, everywhere good reduction を持つ楕円曲線は存在しない ([1], [23], [26] など).
 - $n = 23, 44, 45, 46, 75, 87$ のとき, everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在する ([23], [26] など).

次に本研究の背景について述べる. 先述の結果により, 実 2 次体では everywhere good reduction を持つような体が不規則に現れる一方, 虚 2 次体では規則的に現れることが見受けられる. そこで本論文では, 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ と 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm n})$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n$: square-free) の合成体である $\mathbb{Q}(\sqrt{-1} + \sqrt{\pm n}) (= \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{\pm n}))$ 上で everywhere good reduction を持つような楕円曲線を探索することで, どのような挙動をするのかを考察した. 本論文では第 2 章で楕円曲線に関する基本事項や, everywhere good reduction を定義する際に必要となる minimal model, reduction や conductor を定義する. 第 3 章では本研究で用いた数式処理システム Magma と, 使用した関数 EllipticCurveSearch を紹介する. 第 4 章では第 3 章で紹介した Magma を用いて計算した結果を記し, そこから考えられる予想を述べる. 本論文の最後にいくつかの付録を記載した. 付録-A では Magma で探索を行った際に用いたコードを記載した. 付録-B1 では $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 上 everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在するかの表を作成し, L 関数やモジュラー形式などのデータベースである LMFDB [17] に記載がないかについても記した. 付録-B2 では命題 3.2 から得られる結果として計算の必要がなくなった, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-n})$ 上の everywhere good reduction を持つ楕円曲線をまとめた.

第 2 章

楕円曲線

この章では、楕円曲線の導入とそれに関する幾つかの性質を紹介する．以降、 K を代数体、 \overline{K} をその代数閉包とする．

2.1 楕円曲線の定義

定義 2.1. 3 次曲線

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (a_i \in K) \quad (2.1)$$

を E の **Weierstrass 方程式** と呼ぶ．

以降、 E が K 係数であることを E/K と表記する．また E の係数を用いて、各定数を次で定義する：

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2, \\ b_4 &= 2a_4 + a_1a_3, \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6, \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = \frac{b_2b_6 - b_4^2}{4}, \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4, \\ c_6 &= b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6, \\ \Delta(E) &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 = \frac{c_4^3 - c_6^2}{1728}, \\ j(E) &= \frac{c_4^3}{\Delta(E)} = \frac{1728c_4^3}{c_4^3 - c_6^2}. \end{aligned}$$

$\Delta(E)$ を E の判別式、 $j(E)$ を E の j -不変量 (j -invariant) と呼ぶ．

定義 2.2. Weierstrass 方程式 E について、

- (1) E : **非特異** (nonsingular) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \Delta(E) \neq 0$.
- (2) E : **node** を持つ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \Delta(E) = 0$ かつ $c_4 \neq 0$.
- (3) E : **cusp** を持つ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \Delta(E) = c_4 = 0$.

E が (1) の条件を満たすとき、 E を **楕円曲線** (elliptic curve) と呼ぶ．

定義 2.3. $E_1/K, E_2/K$ を楕円曲線とする．写像 $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ が有理関数かつ加法準同型であるとき、 φ を E_1 から E_2 への**同種写像** (isogeny) と呼ぶ．さらに同種写像 φ が全単射であるとき、 φ を**同型写像** (isomorphism) と呼ぶ．また、 E_1 から E_2 への同種写像 φ が存在するとき E_1 と E_2 は**同種** (isogeneous) であるという．さらに φ が同型写像ならば E_1 と E_2 は**同型** (isomorphic) であるといい、 $E_1 \simeq E_2$ と表す．

楕円曲線 E は一般の体 F において定義することができる. F の代数閉包を \overline{F} として, $\text{ch}(\overline{F}) \neq 2$ のとき変数変換

$$y \mapsto \frac{1}{2}(y' - a_1x' - a_3)$$

によって

$$y'^2 = 4x'^3 + b_2x'^2 + 2b_4x' + b_6 \quad (2.2)$$

とできる. さらに $\text{ch}(\overline{F}) \neq 2, 3$ のとき変数変換

$$(x', y') \mapsto \left(\frac{X - 3b_2}{36}, \frac{Y}{108} \right)$$

によって

$$Y^2 = X^3 - 27c_4X - 54c_6 \quad (2.3)$$

とできる. 上記 2 つの変数変換は全単射であるため, これらの楕円曲線は同型である. また, j -不変量について次が成り立つ:

命題 2.4. $E_1/\overline{K}, E_2/\overline{K}$ を楕円曲線とする. このとき $E_1 \simeq E_2$ であることと, $j(E_1) = j(E_2)$ が成り立つことは同値である.

2.2 Minimal model

以降, K 上同値でない絶対値全体の集合を M_K , 非アルキメデス絶対値全体の集合を M_K^0 , $v \in M_K$, K_v を v に関する完備な局所体, $v(x) = -\log|x|_v$ とし, K_v の整数環を $\mathcal{O}_{K_v} = \{x \in K_v \mid v(x) \geq 0\}$, $\mathfrak{p}_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$, K の整数環を $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid \text{任意の } v \in M_K^0 \text{ に対し, } v(x) \geq 0\}$ とする. また簡単のため, $|\cdot|_v$ を \bullet_v と表す.

定義 2.5. E/K を判別式が Δ である楕円曲線とし, $v \in M_K^0$ とする. E の Weierstrass 方程式 (2.1) において, $a_i \in \mathcal{O}_{K_v}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 6$) かつ $v(\Delta)$ が最小である楕円曲線を v における E の **minimal model** と呼び, $v(\Delta)$ を v における E の **minimal 判別式の付値** と呼ぶ.

また, (2.1) を楕円曲線 E/K の Weierstrass 方程式とする. このとき, 各 $v \in M_K^0$ に対し v における E の minimal model へと移す変数変換

$$x = u_v^2x_v + r_v, \quad y = u_v^3y_v + s_vu_v^2x_v + t_v \quad (u_v \in \mathcal{O}_{K_v}^\times, r_v, s_v, t_v \in \mathcal{O}_{K_v})$$

が存在する. 変換後の判別式を Δ_v とすると,

$$\Delta = u_v^{12}\Delta_v \quad (2.4)$$

が成り立つ. 次に, 任意の $v \in M_K^0$ に対して minimal model となるような楕円曲線の存在性について考える. そのために次の minimal 判別式を定義する:

定義 2.6. E/K を楕円曲線とする. K の整イデアル $\mathcal{D}_{E/K}$ を

$$\mathcal{D}_{E/K} = \prod_{v \in M_K^0} \mathfrak{p}_v^{\text{ord}_v(\Delta_v)}$$

で定め, これを E/K の **minimal 判別式** と呼ぶ. ただし ord_v は $v \in M_K^0$ に対応する正規付値である.

また, イデアル \mathfrak{a}_Δ を

$$\mathfrak{a}_\Delta = \prod_{v \in M_K^0} \mathfrak{p}_v^{-\text{ord}_v(u_v)}$$

と定義すると (2.4) より,

$$\mathcal{D}_{E/K} = (\Delta)\mathfrak{a}_\Delta^{12}$$

が成り立つ.

定義 2.7. (2.1) を判別式 Δ を持つ楕円曲線 E/K の Weierstrass 方程式とする. $a_i \in \mathcal{O}_K$ ($i = 1, 2, 3, 4, 6$) かつ $\mathcal{D}_{E/K} = (\Delta)$ という条件を満たすとき, E を **global minimal model** と呼ぶ.

2.3 Reduction

以降, π_v を \mathcal{O}_{K_v} の一意化元 (すなわち $\mathfrak{p}_v = \pi_v \mathcal{O}_{K_v}$) とし, k_v を \mathcal{O}_{K_v} の剰余体 $\mathcal{O}_{K_v}/\mathfrak{p}_v$ とする.

定義 2.8. E/K を楕円曲線とする. E の minimal model に対し, 写像 $\varphi: \mathcal{O}_{K_v} \rightarrow k_v, t \mapsto \tilde{t}$ により得られる k_v 上の曲線

$$\tilde{E}: y^2 + \tilde{a}_1 xy + \tilde{a}_3 y = x^3 + \tilde{a}_2 x^2 + \tilde{a}_4 x + \tilde{a}_6 \quad (a_i \in k_v) \quad (2.5)$$

を E の \mathfrak{p}_v による**還元** (reduction) と呼ぶ.

E の reduction は係数が剰余体の元であるため, 楕円曲線とならない場合がある. reduction によって得られる曲線を次のように分類する:

定義 2.9. E/K を楕円曲線, \tilde{E} を E の minimal model を \mathfrak{p}_v で reduction した曲線とする.

- (1) \tilde{E} が非特異のとき, E は **good reduction** を持つという.
- (2) \tilde{E} が node を持つとき, E は **multiplicative reduction** を持つという.
- (3) \tilde{E} が cusp を持つとき, E は **additive reduction** を持つという.

また, (2), (3) を合わせて E は **bad reduction** を持つという. さらに E が任意の \mathcal{O}_K の素イデアルにおいて good reduction を持つとき, E は K 上 **everywhere good reduction** を持つという.

定義 2.2 と定義 2.9 により, E が \mathfrak{p}_v で good reduction を持つことと $\Delta(\tilde{E}) \notin \mathfrak{p}_v$ が同値であることがわかる. 同様に考えて, E が \mathfrak{p}_v で bad reduction を持つことと $\Delta(\tilde{E}) \in \mathfrak{p}_v$ が同値であることがわかる.

例 2.10. $K = \mathbb{Q}$ とすると $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ である. このとき,

$$E: y^2 = x^3 + x + 1$$

とすると,

$$\Delta(E) = -128 = -2^7$$

より E は $p = 2$ で bad reduction を持ち, それ以外の全ての素数において good reduction を持つ.

2.4 Conductor

楕円曲線の bad reduction の定義 2.9 は, 判別式 $\Delta(\tilde{E})$ が \mathfrak{p}_v に属することと言い換えられるのであった. そこで, bad reduction を持つような \mathcal{O}_K の素イデアル \mathfrak{p}_v を集めた指標を考える.

定義 2.11. E/K を楕円曲線とする. このとき,

$$N_{E/K} = \prod_{v \in M_K^0} \mathfrak{p}_v^{f_v}$$

を E の導手 (conductor) と呼ぶ (これは E の不変量である). ただし,

$$f_v = \begin{cases} 0 & (E : v \text{ で good reduction を持つ}), \\ 1 & (E : v \text{ で multiplicative reduction を持つ}), \\ 2 + \delta_v & (E : v \text{ で additive reduction を持つ}) \end{cases}$$

である. δ_v は “depth of wild ramification” と呼ばれる量で, 一般に $\delta_v \in \mathbb{Z}$ である. さらに, $\text{ch}(k_v) \neq 2, 3$ のときは $\delta_v = 0$ となる.

また, 任意の $v \in M_K^0$ において $f_v = 0$ を満たすとき, すなわち

$$N_{E/K} = (1) = \mathcal{O}_K$$

となるとき, E は自明な導手を持つという.

定義 2.11 により, 次の命題は明らかである:

命題 2.12. E/K を楕円曲線, $N_{E/K}$ をその導手とする. このとき, 次は同値である:

- (1) E が K 上 everywhere good reduction を持つ.
- (2) E が自明な導手を持つ.

第 3 章

計算方法

本研究は数式処理システム Magma を用いて各種計算を行った．本章では Magma についての説明と，everywhere good reduction である楕円曲線を見つけることができる関数 `EllipticCurveSearch` について紹介する．

3.1 Magma

Magma [2] はシドニー大学を中心に開発・運営されている，代数学，数論，代数幾何学や代数的組合せ論の計算を行うためのシステムである．代数学と圏論をベースに作成されており，有限群や楕円曲線に関するデータベースを有している．

3.2 EllipticCurveSearch

次に，本節のタイトルになっている関数 `EllipticCurveSearch` について説明する．最初に，この関数を使用するにあたって用いた関数を紹介する．

3.2.1 CompositeFields

関数 `CompositeFields(K1, K2)` は体 K_1, K_2 の合成体を出力する．本研究は 2 次体の合成体であるため， $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m}), K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ とすると合成体 M は $M = \mathbb{Q}(\sqrt{m} + \sqrt{n})$ となる．さて，ここで 2 次体の合成体について簡単な命題を 1 つ紹介する．

命題 3.1. 体 K_1, K_2 を $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m}), K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ とする．その合成体 $M = \mathbb{Q}(\sqrt{m} + \sqrt{n})$ について，

$$M = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n}) (= \{a + b\sqrt{m} + c\sqrt{n} + d\sqrt{mn} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\})$$

が成り立つ．

証明. それぞれの体を \mathbb{Q} 上のベクトル空間として見た際に，基底が互いの元となることを示せば良い． M の基底である $1, (\sqrt{m} + \sqrt{n})^i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) が， $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ の元であることは明らかである．また $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^{-1} \in M$ であるから， $\sqrt{m} - \sqrt{n} = (m - n)/(\sqrt{m} + \sqrt{n}) \in M$ となる．従って，

$$\sqrt{m} = \frac{1}{2} ((\sqrt{m} + \sqrt{n}) + (\sqrt{m} - \sqrt{n})) \in M,$$

$$\sqrt{n} = \frac{1}{2} ((\sqrt{m} + \sqrt{n}) - (\sqrt{m} - \sqrt{n})) \in M$$

を得る．これより $\sqrt{mn} \in M$ であるから， $M = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ となる． □

特に $m = -1$ のとき，命題 3.1 より次の命題は明らかである：

命題 3.2. $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{n}), K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{-n}), K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ とする. K_1 と K_3 の合成体 $M_1(= \mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{-1}))$ と K_2 と K_3 の合成体 $M_2(= \mathbb{Q}(\sqrt{-n}, \sqrt{-1}))$ について, $M_1 = M_2$ が成り立つ.

従って, 2 次体の 1 つが $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ であるときは $M = \mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{-1})$ を探索するだけで十分である.

3.2.2 EllipticCurveSearch

関数 `EllipticCurveSearch(I, n)` は J. Cremona と T. Thongjunthug による j -不変量を用いた楕円曲線の数え上げ関数である. 楕円曲線を探索する理論の詳細については, [7], [24] を参照されたい. ここでは内部でどのような計算をしているのかを簡単に述べる. まず, 説明に必要なものを定義する.

定義 3.3. 有限集合 S を

$$S \subset \{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \mid \mathfrak{p} : \text{素イデアル}\}$$

と定義する. また, S の元でない \mathcal{O}_K の任意の素イデアル \mathfrak{q} に対し, $\text{ord}_{\mathfrak{q}}(x) \geq 0$ を満たす $x \in K$ を S -整数点 (S -integer) と呼ぶ. 次に $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 集合 $K(S, m)$ を

$$K(S, m) = \{x \in K^\times / K^{\times m} \mid S \text{ の元でない任意の素イデアル } \mathfrak{q} \text{ に対し, } \text{ord}_{\mathfrak{q}} \equiv 0 \pmod{m}\}$$

と定義し, $x \in K(S, m)$ ($x \in K^\times$) を $xK^{\times m} \in K(S, m)$ と解釈する.

S -整数点全体の集合を $\mathcal{O}_{K,S}$ と表すと, $\text{ord}_{\mathfrak{q}}(x)$ の定義より $\mathcal{O}_{K,S}$ は環をなす. また $K(S, m)$ について, 次が成り立つ:

命題 3.4. $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \gcd(m, n) = 1$ とする. このとき

$$K(S, mn) \simeq K(S, m) \times K(S, n)$$

が成り立つ.

ここで, 自然な写像

$$K(S, 12) \mapsto K(S, 6)$$

の像を $K(S, 6)_{12}$ と表す. 次の命題は everywhere good reduction を持つ楕円曲線の探索において重要である:

命題 3.5. E/K を S の外で (S の元でない任意の \mathcal{O}_K の素イデアル上で) everywhere good reduction を持ち, $j(E) \neq 0, 1728$ を満たす楕円曲線とする. $w = j(E)^2(j(E) - 1728)^3$ とすると,

$$\Delta(E) \in K(S, 12), \quad j(E) \in \mathcal{O}_{K,S}, \quad w \in K(S, 6)_{12}$$

が成り立つ. また, $j \in \mathcal{O}_{K,S}$ に対し $w = j^2(j - 1728)^3$, $u \in K^\times$ を $(3u)^6 w \in K(S, 12)$ を満たす元とすると, 楕円曲線

$$E' : y^2 = x^3 - 3u^2 j(j - 1728)x - 2u^3 j(j - 1728)^2$$

は $j(E') = j$ を満たし,

$$S' = S \cup \{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K : \text{素イデアル} \mid \text{ord}_{\mathfrak{p}}(6) > 0\}$$

の外で everywhere good reduction を持つ.

命題 3.5 の後半部の主張により, S の外で everywhere good reduction を持つ楕円曲線を探すには $\mathfrak{p} \mid 6$ を満たす \mathcal{O}_K の素イデアル \mathfrak{p} での reduction と E の 2 次 twist $E^{(u)}$ ($u \in K(S, 2)$) を調べれば良い. 命題の紹介にあたり, 楕円曲線における S -整数点を定義する.

定義 3.6. E/K を楕円曲線とし, $P = (x, y)$ を E 上の点とする. $x, y \in \mathcal{O}_{K,S}$ であるとき, P を S -整数点と呼ぶ. また, $S = \emptyset$ であるときは P を単に整数点と呼ぶ.

次の命題によって, everywhere good reduction を持つ楕円曲線の探索は命題 3.5 の j の候補を決定する問題に帰着される:

命題 3.7. $w \in K(S, 6)$ とする. $j^2(j - 1728)^3 \equiv w \pmod{K^\times 6}$ を満たす $j \in \mathcal{O}_{K,S} \setminus \{0, 1728\}$ は

$$j = \frac{x^3}{w} = 1728 + \frac{y^2}{w}$$

で与えられる. ただし, $P = (x, y)$ ($xy \neq 0$) は楕円曲線

$$E_w : y^2 = x^3 - 1728w$$

の S -整数点である.

従って, everywhere good reduction を持つ楕円曲線を探索するには $S = \emptyset$ としてやれば良い. これを元に計算の手順を述べる.

(1) $K(S, 2), K(S, 3)$ を用いて $K(S, 6)$ を計算する.

(2) $w \in K(\emptyset, 6)_{12}$ から与えられる代表系 W を決定する.

(3) 各 $w \in W$ に対し, E_w の整数点であり

$$j = \frac{x^3}{w} \in \mathcal{O}_K$$

を満たすものをすべて決定する.

(4) もし j が

$$j^2(j - 1728)^3 \in K(\emptyset, 6)_{12}$$

を満たすならば,

$$(3u_0)^6 j^2(j - 1728)^3 \in K(\emptyset, 12)$$

を満たすような $u_0 \in K^\times$ を決定する.

(5) 楕円曲線

$$E' : y^2 = x^3 - 2u_0 j(j - 1728)x - 2u_0^3 j(j - 1728)^2$$

が $\mathfrak{p} \mid 6$ を満たすような $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$: 素イデアル上で good reduction かを調べ, すべての \mathfrak{p} 上で good reduction を持つならば E' を候補として残す.

(6) 2 次 twist $E^{(v)}$ ($v \in K(\emptyset, 2)$) でも (3), (4) を行う.

命題 3.7 より $j(E) \neq 0, 1728$ を満たすものにしか上記手順は適用することができない. しかし, $j(E) = 0$ である everywhere good reduction を持つ楕円曲線は存在せず, $j(E) = 1728$ の場合は考慮しなくても良いことが分かっている. 詳細は [6] を参照されたい.

次に関数の各変数の説明を行う. I には楕円曲線の導手を入力する. 今回探索したい楕円曲線は everywhere good reduction を持つ楕円曲線なので, 命題 2.12 より $I = (1)$ とすれば良い. そのため,

$$I := \text{ideal} \langle \text{MaximalOrder}(K) \mid 1 \rangle$$

と入力することで, I を \mathcal{O}_K のイデアル (1) として定めることができる. また, n は探索範囲を指定するオプション `Effort` である. 本研究では基本的に $n=10$ で固定して探索を行った. 10 以外の `Effort` で探索を行った場合は都度記載する.

第 4 章

計算結果

本章では Magma を用いて探索した, everywhere good reduction を持つ楕円曲線を合成体ごとにまとめた. 各節において $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: square-free とする.

4.1 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{n})$ のとき

本節では 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ ($n \leq 100$) の合成体上での everywhere good reduction を持つ楕円曲線の存在性についてまとめた. 次は奇数行を n , 偶数行を everywhere good reduction を持つ曲線を発見したかどうかをまとめた表である:

表 1

n	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19	21	22	23	26	29	30	31	33
Found	×	×	×	○	○	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	○	○	×	×	○
n	34	35	37	38	39	41	42	43	46	47	51	53	55	57	58	59	61	62	65	66
Found	×	×	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×
n	67	69	70	71	73	74	77	78	79	82	83	85	86	87	89	91	93	94	95	97
Found	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

楕円曲線の係数や各種不変量は定義 2.2 の記号を, $n = k$ のときの i 個目の楕円曲線を $E_{k,i}$ と表記し, 楕円曲線を具体的に表示する. 以下, $\sqrt{-1} + \sqrt{n}$ を φ_n と表記する.

○ $n = 6$

$E_{6,1}$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{7}(-42660\varphi_6^3 + 725220\varphi_6 + 1470420).$
- $a_6 = 3729456\varphi_6^3 + 10655064\varphi_6^2 - 11188368\varphi_6 - 53275320.$
- $\Delta(E_{6,1}) = \frac{1}{7}(\varphi_6^3 - 17\varphi_6 - 35).$
- $j(E_{6,1}) = -5506592000\varphi_6^3 + 93612064000\varphi_6 + 188837384000.$

$E_{6,2}$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{7}(-42660\varphi_6^3 + 725220\varphi_6 + 1470420).$
- $a_6 = -1522152\varphi_6^3 + 25876584\varphi_6 - 52212384.$
- $\Delta(E_{6,2}) = -\frac{1}{7}(\varphi_6^3 - 17\varphi_6 - 35).$
- $j(E_{6,2}) = -5506592000\varphi_6^3 + 93612064000\varphi_6 + 188837384000.$

◦ $n = 7$

E_71

- $a_1 = \frac{1}{16}(-9\varphi_7^3 + 532\varphi_7 - 384).$
- $a_2 = \frac{1}{16}(313\varphi_7^3 - 1356\varphi_7^2 + 916\varphi_7 + 2400).$
- $a_3 = \frac{1}{16}(-149\varphi_7^3 + 660\varphi_7^2 - 516\varphi_7 - 1024).$
- $a_4 = \frac{1}{4}(-1151\varphi_7^3 + 7046\varphi_7^2 - 14264\varphi_7 + 7644).$
- $a_6 = \frac{1}{16}(760291\varphi_7^3 - 2290932\varphi_7^2 - 3083348\varphi_7 + 13857200).$
- $\Delta(E_71) = 3171486820590\varphi_7^3 - 63429736411800\varphi_7 + 134255446617601.$
- $j(E_71) = -3375.$

E_72

- $a_1 = \frac{1}{16}(3\varphi_7^3 - 44\varphi_7^2 + 172\varphi_7 - 224).$
- $a_2 = \frac{1}{16}(-99\varphi_7^3 - 24\varphi_7^2 + 2100\varphi_7 + 4368).$
- $a_3 = \frac{1}{16}(-135\varphi_7^3 + 532\varphi_7^2 - 116\varphi_7 - 1456).$
- $a_4 = \frac{1}{16}(-3453\varphi_7^3 + 12600\varphi_7^2 + 2388\varphi_7 + 45376).$
- $a_6 = \frac{1}{16}(14933\varphi_7^3 - 47176\varphi_7^2 - 49028\varphi_7 + 254736).$
- $\Delta(E_72) = 193545\varphi_7^3 - 3870900\varphi_7 + 8193151.$
- $j(E_72) = 16581375.$

◦ $n = 14$ (**Effort** = 10000)

$E_{14}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -918\varphi_{14}^3 + 37638\varphi_{14} - 103275.$
- $a_6 = \frac{1}{5}(-803358\varphi_{14}^3 + 32937678\varphi_{14} - 90170010).$
- $\Delta(E_{14}1) = \frac{1}{15}(1798\varphi_{14}^3 - 73718\varphi_{14} + 201825).$
- $j(E_{14}1) = 16581375.$

◦ $n = 26$ (**Effort** = 1000)

$E_{26}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 14380\varphi_{26}^3 - 1107260\varphi_{26} - 3960252.$
- $a_6 = -15577720\varphi_{26}^3 + 1199484440\varphi_{26} + 4289287392.$
- $\Delta(E_{26}1) = \frac{1}{27}(52015\varphi_{26}^3 - 4005155\varphi_{26} - 14322177).$
- $j(E_{26}1) = -23788477376.$

$E_{26}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -(14380\varphi_{26}^3 - 1107260\varphi_{26} - 3960252).$
- $a_6 = -79431248\varphi_{26}^3 - 420598440\varphi_{26}^2 + 1826918704\varphi_{26} + 10514961000.$
- $\Delta(E_{26}2) = -\frac{1}{27}(52015\varphi_{26}^3 - 4005155\varphi_{26} - 14322177).$
- $j(E_{26}2) = -23788477376.$

◦ $n = 29$

$E_{29}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{8}(27\varphi_{29}^3 - 2322\varphi_{29} - 8532).$
- $a_6 = -63\varphi_{29}^3 - 5418\varphi_{29} + 19926.$
- $\Delta(E_{29}1) = \frac{1}{24}(\varphi_{29}^3 - 86\varphi_{29} - 324).$
- $j(E_{29}1) = \frac{1}{24}(703\varphi_{29}^3 - 60458\varphi_{29} - 226692).$

$E_{29}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{8}(-2187\varphi_{29}^3 + 188082\varphi_{29} - 708372).$
- $a_6 = 44289\varphi_{29}^3 - 3808854\varphi_{29} + 14321934.$
- $\Delta(E_{29}2) = \frac{1}{24}(\varphi_{29}^3 - 86\varphi_{29} - 324).$
- $j(E_{29}2) = \frac{1}{24}(-281525752169\varphi_{29}^3 - 24211214686534\varphi_{29} - 90963754373412).$

◦ $n = 33$

$E_{33}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{17}(-70524\varphi_{33}^3 + 6911352\varphi_{33} - 27547344).$
- $a_6 = \frac{1}{17}(-48866328\varphi_{33}^3 + 4788900144\varphi_{33} - 19088664336).$
- $\Delta(E_{33}1) = \frac{1}{17}(-\varphi_{33}^3 + 98\varphi_{33} - 391).$
- $j(E_{33}1) = \frac{1}{17}(-818514464768\varphi_{33}^3 + 80214417547264\varphi_{33} - 319736518131712).$

$E_{33}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{17}(-70524\varphi_{33}^3 + 6911352\varphi_{33} - 27547344).$
- $a_6 = \frac{1}{17}(-48866328\varphi_{33}^3 + 4788900144\varphi_{33} - 19088664336).$
- $\Delta(E_{33}2) = \frac{1}{24}(\varphi_{33}^3 - 86\varphi_{33} - 324).$
- $j(E_{33}2) = \frac{1}{24}(-818514464768\varphi_{33}^3 + 80214417547264\varphi_{33} - 319736518131712).$

◦ $n = 37$

$E_{37}1$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = \frac{1}{76}(-33\varphi_{37}^3 + 171\varphi_{37}^2 + 1008\varphi_{37} - 5434).$
- $a_3 = \frac{1}{19}(15\varphi_{37}^3 - 95\varphi_{37}^2 - 586\varphi_{37} + 3895).$
- $a_4 = \frac{1}{76}(-483\varphi_{37}^3 + 2394\varphi_{37}^2 + 23870\varphi_{37} - 132772).$
- $a_6 = \frac{1}{152}(3689\varphi_{37}^3 - 28082\varphi_{37}^2 - 61890\varphi_{37} + 625024).$
- $\Delta(E_{37}1) = \frac{1}{19}(63945\varphi_{37}^3 - 7033950\varphi_{37} + 29561131).$
- $j(E_{37}1) = 4096.$

◦ $n = 41$

$E_{41}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{7}(11800080\varphi_{41}^3 - 1439609760\varphi_{41} - 6346819773).$
- $a_6 = \frac{1}{7}(-193409196480\varphi_{41}^3 + 23595921970560\varphi_{41} + 104027541552774).$
- $\Delta(E_{41}1) = \frac{1}{84}(-344016936965\varphi_{41}^3 + 41970066309730\varphi_{41} + 185033787722112).$
- $j(E_{41}1) = \frac{1}{84}(-5369692165\varphi_{41}^3 + 655102444130\varphi_{41} + 2888155853184).$

$E_{41}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{7}(2880\varphi_{41}^3 - 351360\varphi_{41} - 1548477).$
- $a_6 = \frac{1}{2}(-210645\varphi_{41}^3 + 25698690\varphi_{41} + 113298048).$
- $\Delta(E_{41}2) = \frac{1}{84}(63945\varphi_{41}^3 - 7033950\varphi_{41} + 29561131).$
- $j(E_{41}2) = \frac{1}{84}(-5369692165\varphi_{41}^3 + 655102444130\varphi_{41} + 2888155853184).$

$E_{41}3$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -459.$
- $a_6 = \frac{1}{7}(-144\varphi_{41}^3 + 17568\varphi_{41} + 51030).$
- $\Delta(E_{41}3) = \frac{1}{84}(5\varphi_{41}^3 - 610\varphi_{41} - 2688).$
- $j(E_{41}3) = \frac{1}{84}(24565\varphi_{41}^3 - 2996930\varphi_{41} + 13206144).$

$E_{41}4$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{17}(12240\varphi_{41}^3 - 1493280\varphi_{41} - 6583437).$
- $a_6 = \frac{1}{2}(8952237\varphi_{41}^3 - 1092172914\varphi_{41} - 4815072000).$
- $\Delta(E_{41}4) = \frac{1}{84}(344016936965\varphi_{41}^3 - 41970066309730\varphi_{41} - 185033787722112).$
- $j(E_{41}4) = \frac{1}{84}(24565\varphi_{41}^3 - 2996930\varphi_{41} + 13206144).$

◦ $n = 65$

$E_{65}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{11}(-4590\varphi_{65}^3 + 890460\varphi_{65} + 4884759).$
- $a_6 = \frac{1}{22}(-5217471\varphi_{65}^3 + 1012189374\varphi_{65} + 5552526672).$
- $\Delta(E_{65}1) = \frac{1}{132}(4413393409\varphi_{65}^3 - 856198321346\varphi_{65} - 4696812807456).$
- $j(E_{65}1) = \frac{1}{132}(833\varphi_{65}^3 - 161602\varphi_{65} + 952512).$

$E_{65}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- $a_4 = \frac{1}{11}(-18\varphi_{65}^3 + 3492\varphi_{65} + 18711)$.
- $a_6 = \frac{1}{22}(630\varphi_{65}^3 - 122220\varphi_{65} - 669438)$.
- $\Delta(E_{65}2) = \frac{1}{132}(257\varphi_{65}^3 - 49858\varphi_{65} - 273504)$.
- $j(E_{65}2) = \frac{1}{132}(833\varphi_{65}^3 - 161602\varphi_{65} + 952512)$.

◦ $n = 77$ (Effort=1000)

$E_{77}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- $a_4 = \frac{1}{104}(-2295\varphi_{77}^3 + 527850\varphi_{77} - 3222180)$.
- $a_6 = \frac{1}{13}(-27702\varphi_{77}^3 + 6371460\varphi_{77} - 37813230)$.
- $\Delta(E_{77}1) = \frac{1}{39}(10\varphi_{77}^3 - 2300\varphi_{77} + 13689)$.
- $j(E_{77}1) = 16581375$.

注意 4.1. 表 1 で示した合成体上 everywhere good reduction を持つ n は全て、先行研究によって $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 上 everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在することが分かっている。

注意 4.1 より 2 次体と $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ との合成体と、その 2 次体自身との間には everywhere good reduction の観点で何か関係があるように見受けられる。そこで 2 次体の 1 つに everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在するという条件を課し、その合成体上で探索を行った。

4.2 $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ のとき

本節では $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ ($2 \leq m, n \leq 100 : \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ 上 everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在) 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線の存在性について考察を行った。○, × はその合成体上で発見したかを表し, − は合成体が実質 2 次体である場合を表す。また空白になっている箇所はエラーのため計算ができなかった体であり, ? は計算が本論文の提出までに終了しなかった体である。本節では計算量が多いため、楕円曲線の具体的な表示は行わない。

表 2

$m \setminus n$	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19	21	22	23	26	29	30	31	33
6	○	○	○	—	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	—	×	○	○	○	×	○	○	○	×	○	×	○	×	○	○
14	○	×	○	○	○	×	×	○	—	×	○	○	○	○	×	×	○	×	×	○
22	○	×	○	○	×	×	○	○	○	×	○	×	×	—	×	×	○	×	×	○
26	○	○	×	○	×	○	×	○	×	×	×	×	×	×	×	—	○	○	×	○
29	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	—	○	○	○
33	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	×	—
37	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
38	○	×	○	○	○	○	×	○	○	×	×	○	×	○	×	×	○	×	×	○
41	×	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
65	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
77	○	×	○	○	○	×	○	○	○	×	○	×	○	○	×	○	○	×	×	○
79	×	×	×	○	×	×	×	○		×	×	×	×		×	○	○	×		○
86	○	×	○	○	○	×	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×	○

$m \setminus n$	34	35	37	38	39	41	42	43	46	47	51	53	55	57	58	59	61	62	65	66
6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
7	×	○	○	○	×	○	○	○	×	○	×	○	×	×	×	○	×	○	○	○
14	×	×	×	○	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	×	×	○	○	○	×
22	×	×	○	○	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	×	×	×	○	○	×
26	×	×	○	×	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	○	×	○	×	○	×
29	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
33	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
37	○	○	—	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
38	×	×	○	—	×	○	×	×	○	×	×	○	×	○	×	×	○	○	○	×
41	○	○	○	○	○	—	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
65	○	○	○	○	○	○	?	○	○	○	×	×	×	×	×	○	○		—	○
77	×	×	×	○	×	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	×
79	×	×	○		○	○	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×			○	×
86	×	×	○	×	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○		○	○		○

$m \setminus n$	67	69	70	71	73	74	77	78	79	82	83	85	86	87	89	91	93	94	95	97
6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
7	○	×	○	○	○	○	○	○	×	○	○	×	○	×	○	○	×	○	○	○
14	○	×	○	×	○	×	×	○	×	×	×	×	○	×	○	×	○	○	×	○
22		×	×	×	○	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	○	×	×
26	×	×	×	×	×	×	○	○	○	×	×	×	×	×		×	×	×	×	○
29	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
33	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
37	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○
38	×	×	×	×	○	×	×	×		×		×	×	×	○	×	×	○	○	○
41	○	○	○		○	○	○	○	○	×	○	○	○	○		○	○		○	○
65	○	○	○		○	○	×	×	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
77	○	×	○	×	○	×	–	○		○	×	○	○	×	○	×	×	×	×	○
79	×	×	×		×		×	×	–	×	○			×	×				×	×
86	○	○	○		○	○	○	○	○	○		○	–	○		○	○	○	○	○

本節の結果では，合成体の 1 つに everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在する場合，その合成体上でも概ね everywhere good reduction を持つ楕円曲線が発見されている。
次節以降では，everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在する虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-65})$ と 2 次体の合成体上で探索した結果を記す。

4.3 $\mathbb{Q}(\sqrt{-65}, \sqrt{n})$ のとき

本節では $\mathbb{Q}(\sqrt{-65}, \sqrt{n})$ 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線の探索を行った結果を記す。

表 3

n	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19	21	22	23	26	29	30	31	33
Found	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	○	×	×	○
n	34	35	37	38	39	41	42	43	46	47	51	53	55	57	58	59	61	62	65	66
Found	×	×	○	×	×	○	×	×	×	×	×		×	×			×	×	○	×
n	67	69	70	71	73	74	77	78	79	82	83	85	86	87	89	91	93	94	95	97
Found	×	×	×		×	×	×	×		×	×	×	×	?	×	×	×		×	×

4.4 $\mathbb{Q}(\sqrt{-65}, \sqrt{-n})$ のとき

本節では $\mathbb{Q}(\sqrt{-65}, \sqrt{-n})$ 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線の探索を行った結果を記す。

表 4

n	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19	21	22	23	26	29	30	31	33
Found	×	○	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	34	35	37	38	39	41	42	43	46	47	51	53	55	57	58	59	61	62	65	66
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	67	69	70	71	73	74	77	78	79	82	83	85	86	87	89	91	93	94	95	97
Found	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×

注意 4.2. 4.4 節の表において，4.2 節で結果が得られている $n = 1$ を省略している。

4.3 節, 4.4 節の結果では, 4.2 節とは異なり everywhere good reduction を持つ楕円曲線をほとんど発見することができなかった.

注意 4.3. 先行研究にて $\mathbb{Q}(\sqrt{-65})$ 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在することが示されているが, 筆者が行った計算では発見することができなかった.

先行研究とこれまでの結果から, 次の予想を立てることができる:

予想 4.4. $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m}), K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ とする. このとき $(1) \implies (2)$ が成り立つ.

- (1) K_1, K_2 のうち少なくともどちらかに everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在する.
- (2) K_1 と K_2 の合成体 M 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在する.

特に, M 上 everywhere good reduction を持つ楕円曲線 E に対し $j(E) \in \mathbb{Z}$ であるとき, K_i ($i = 1, 2$) 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線 E' が存在し, $j(E') = j(E)$ を満たす.

注意 4.5. 予想 4.4 の逆は成立しない. その具体例として, LMFDB に記載されている $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 上における everywhere good reduction を持つ楕円曲線を 1 つ挙げる. $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とする.

- $a_1 = a^3 - 3a$.
- $a_2 = -a^3 + 5a$.
- $a_3 = a^2 - 2$.
- $a_4 = a^3 - 5a$.
- $a_6 = -1$.
- $\Delta(E) = 1$.
- $j(E) = 8000$.

謝辞

本論文は筆者が東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻博士前期課程に在学中の研究結果をまとめている。教育学部という異分野から進学してきた筆者に対し、学問としての数学の学び方や本研究の指導をしていただいただけでなく、私的な場面でも支えていただきました指導教員の横山俊一准教授へ厚く御礼申し上げます。またご自身の研究や学生の指導などでご多忙にも関わらず、本論文の副査を快諾していただきました内山成憲教授と内田幸寛准教授に深く感謝いたします。そして、筆者の数学をさらに学びたいという思いを受け止め大学院への進学を応援してくださった、学士課程の指導教員である愛知教育大学の岸康弘教授に心より感謝申し上げます。さらに、本研究を始めるにあたりアドバイスをいただいた立命館大学の加川貴章教授と、ご自身の修士論文を送っていただいた島崎有さんにも心から感謝いたします。最後になりますが、修士課程まで支えてくれた家族、分野が異なりながらも互いに切磋琢磨し合った横山研究室の同期や、数学や私的な話で夜が明けるまで語り合った友人をはじめとする皆様に対し感謝申し上げ、これを謝辞といたします。

付録-A Magma での探索に用いたコード

ここではどのように合成体上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線を探索したのかを、実際に用いたコードを記載することで紹介する.

```
P<x>:=PolynomialRing(Rationals()); // 計算する代数構造を有理数体の1変数多項式環と定義
K1:=NumberField(x^2+1); //  $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  と定義
K2:=NumberField(x^2-n); //  $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$  と定義
M:=CompositeFields(K1,K2); //  $M$  を  $K_1, K_2$  の合成体と定義
I:=ideal<MaximalOrder(M[1])|1>; //  $I$  をイデアル  $(1) \subset \mathcal{O}_M$  と定義
SetVerbose("ECSearch",2); // EllipticCurveSearch の出力の冗長度を2で設定
time ECS:=EllipticCurveSearch(I,10);
// 導手が(1)である楕円曲線を Effort=10 で時間を計測しながら探索し, 結果を ECS とおく
ECS; // 計算結果を出力
```

付録-B1 2 次体の everywhere good reduction

ここでは 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ ($n \leq 1000$) 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線を発見したかを 4.1 節の表と同じように記す. なお, 表中の \odot は LMFDB に記載がない場合, \triangle は LMFDB に記載があるが発見できなかった場合である. また太字になっている n は先行研究にて, $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線が存在しないことが分かっている.

n	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19	21	22	23	26
Found	×	×	×	○	○	×	×	×	○	×	×	×	×	○	×	○
n	29	30	31	33	34	35	37	38	39	41	42	43	46	47	51	53
Found	○	×	×	○	×	×	○	○	×	○	×	×	×	×	×	×
n	55	57	58	59	61	62	65	66	67	69	70	71	73	74	77	78
Found	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	○	×
n	79	82	83	85	86	87	89	91	93	94	95	97	101	102	103	105
Found	\triangle	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×
n	106	107	109	110	111	113	114	115	118	119	122	123	127	129	130	131
Found	\triangle	×	○	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×
n	133	134	137	138	139	141	142	143	145	146	149	151	154	155	157	158
Found	○	\odot	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	\odot	×	○	\odot
n	159	161	163	165	166	167	170	173	174	177	178	179	181	182	183	185
Found	×	○	×	\triangle	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	186	187	190	191	193	194	195	197	199	201	202	203	205	206	209	210
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×
n	211	213	214	215	217	218	219	221	222	223	226	227	229	230	231	233
Found	×	×	\odot	×	×	×	×	×	×	×	×	\triangle	\triangle	×	×	×
n	235	237	238	239	241	246	247	249	251	253	254	255	257	258	259	262
Found	×	×	×	×	×	\odot	×	×	×	\odot	×	×	×	×	×	\odot
n	263	265	266	267	269	271	273	274	277	278	281	282	283	285	286	287
Found	×	×	×	×	×	\odot	×	×	×	\odot	×	×	×	×	×	×
n	290	291	293	295	298	299	301	302	303	305	307	309	310	311	313	314
Found	×	×	×	×	\odot	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	317	318	319	321	322	323	326	327	329	330	331	334	335	337	339	341
Found	×	×	×	×	×	×	\odot	×	×	×	×	×	×	\triangle	×	○
n	345	346	347	349	353	354	355	357	358	359	362	365	366	367	370	371
Found	×	×	\triangle	×	×	×	×	×	\odot	×	×	×	×	×	\odot	\odot
n	373	374	377	379	381	382	383	385	386	389	390	391	393	394	395	397
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○

n	398	399	401	402	403	406	407	409	410	410	413	415	417	418	419	421
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	422	426	427	429	430	431	433	434	435	437	438	439	442	443	445	446
Found	⊙	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×
n	447	449	451	453	454	455	457	458	461	462	463	465	466	467	469	470
Found	×	×	×	×	⊙	×	×	×	○	×	×	×	×	×	○	×
n	471	473	474	478	479	481	482	483	485	487	489	491	493	494	497	498
Found	×	△	×	×	×	×	×	×	△	×	×	×	×	×	○	×
n	499	501	502	503	505	506	509	510	511	514	515	517	518	519	521	523
Found	×	×	⊙	⊙	×	×	⊙	×	×	×	×	⊙	⊙	⊙	×	×
n	526	527	530	533	534	535	537	538	541	542	543	545	546	547	551	553
Found	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙
n	554	555	557	559	561	562	563	565	566	569	570	571	573	574	577	579
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×	×
n	581	582	583	586	587	589	590	591	593	595	597	598	599	601	602	606
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×
n	607	609	610	611	613	614	615	617	618	619	622	623	626	627	629	631
Found	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	633	634	635	638	641	642	643	645	646	647	649	651	653	654	655	658
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×
n	659	661	662	663	665	667	669	670	671	673	674	677	678	679	681	682
Found	×	×	⊙	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×
n	683	685	687	689	690	691	694	695	697	698	699	701	703	705	706	707
Found	×	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	709	710	713	714	715	717	718	719	721	723	727	730	731	733	734	737
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×	⊙
n	739	741	742	743	745	746	749	751	753	754	755	757	758	759	761	762
Found	×	×	⊙	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×
n	763	766	767	769	770	771	773	777	778	779	781	782	785	786	787	789
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×
n	790	791	793	794	795	797	798	799	802	803	805	806	807	809	811	813
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	814	815	817	818	821	822	823	826	827	829	830	831	834	835	838	839
Found	×	×	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×
n	842	843	849	851	853	854	857	858	859	861	862	863	865	866	869	870
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×
n	871	874	877	878	879	881	883	885	886	887	889	890	893	894	895	897
Found	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×	×	⊙	×	⊙	×	×	×
n	898	899	901	902	903	905	906	907	910	912	913	914	915	917	919	921
Found	×	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		×

n	922	923	926	929	930	933	934	935	937	938	939	941	942	943	946	947
Found	×	×	×	×	×	×	⊙	×	×	⊙	×	×	×	×	×	×
n	949	951	953	955	957	958	959	962	965	966	967	969	970	971	973	974
Found	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
n	977	978	979	982	983	985	986	987	989	991	993	994	995	997	998	
Found	×	×	×	⊙	×	×	×	×	⊙		×	⊙	×	⊙	⊙	

新しく発見した楕円曲線を 4.1 節の表記に合わせて挙げる.

○ $n = 134$

$E_{134}1$

- $a_1 = \sqrt{134}$.
- $a_2 = -1$.
- $a_3 = \sqrt{134} + 1$.
- $a_4 = -5253\sqrt{134} - 60517$.
- $a_6 = 567330\sqrt{134} + 6568563$.
- $\Delta(E_{134}1) = 1073733982022394\sqrt{134} + 12429369452874725$.
- $j(E_{134}1) = 8000$.

○ $n = 154$

$E_{154}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- $a_4 = -11814660\sqrt{154} - 146616075$.
- $a_6 = -77866831548\sqrt{154} - 966301967358$.
- $\Delta(E_{154}1) = 3112666297884\sqrt{154} + 12429369452874725$.
- $j(E_{154}1) = 16581375$.

○ $n = 158$

$E_{158}1$

- $a_1 = 1$.
- $a_2 = -1$.
- $a_3 = \sqrt{158}$.
- $a_4 = -501\sqrt{158} - 6291$.
- $a_6 = 21417\sqrt{158} + 269168$.
- $\Delta(E_{158}1) = 147726776120\sqrt{158} + 1856896782399$.
- $j(E_{158}1) = 59319$.

◦ $n = 214$

$E_{214}1$

- $a_1 = \sqrt{214}$.
- $a_2 = 0$.
- $a_3 = 1$.
- $a_4 = -19805739853\sqrt{214} - 289732994848$.
- $a_6 = -5138555412043368\sqrt{214} - 75170585129052624$.
- $\Delta(E_{214}1) = 91934961968773056337179452774259354\sqrt{214} + 1344892548752779031467460169245742725$.
- $j(E_{214}1) = 8000$.

◦ $n = 246$

$E_{246}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- $a_4 = -3057480\sqrt{246} - 47954700$.
- $a_6 = -10204702704\sqrt{246} - 160054507872$.
- $\Delta(E_{246}1) = 178609557104538\sqrt{246} + 2801381440774085$.
- $j(E_{246}1) = 16581375$.

◦ $n = 253$

$E_{253}1$

- $a_1 = 0$.
- $a_2 = -1$.
- $a_3 = 1$.
- $a_4 = 39\sqrt{253} - 620$.
- $a_6 = \frac{1}{2}(1059\sqrt{253} - 16845)$.
- $\Delta(E_{253}1) = 202604220\sqrt{253} - 3222617399$.
- $j(E_{253}1) = -32768$.

◦ $n = 262$

$E_{262}1$

- $a_1 = \sqrt{262}$.
- $a_2 = 0$.
- $a_3 = 1$.
- $a_4 = 39\sqrt{262} - 620$.
- $a_6 = \frac{1}{2}(1059\sqrt{262}) - 16845$.
- $\Delta(E_{262}1) = 202604220\sqrt{262} - 3222617399$.
- $j(E_{262}1) = -32768$.

◦ $n = 271$

$E_{271}1$

- $a_1 = \sqrt{271}$.
- $a_2 = -\sqrt{271} + 1$.
- $a_3 = \sqrt{271} + 1$.
- $a_4 = -37\sqrt{271} + 1684$.
- $a_6 = -1074\sqrt{271} + 5176$.
- $\Delta(E_{271}1) = -7044978537\sqrt{271} - 115974983600$.
- $j(E_{271}1) = 8825\sqrt{271} - 145264$.

$E_{271}2$

- $a_1 = 1$.
- $a_2 = \sqrt{271}$.
- $a_3 = \sqrt{271}$.
- $a_4 = 9\sqrt{271} + 244$.
- $a_6 = 763\sqrt{271} + 12335$.
- $\Delta(E_{271}2) = -7044978537\sqrt{271} - 115974983600$.
- $j(E_{271}2) = 8825\sqrt{271} - 145264$.

◦ $n = 278$

$E_{278}1$

- $a_1 = \sqrt{278}$.
- $a_2 = -1$.
- $a_3 = \sqrt{278} + 1$.
- $a_4 = -63\sqrt{278} + 383$.
- $a_6 = -2400\sqrt{278} - 28173$.
- $\Delta(E_{278}1) = 3753000450\sqrt{278} + 62575022501$.
- $j(E_{278}1) = 8000$.

◦ $n = 298$

$E_{298}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- $a_4 = 81000\sqrt{298} + 1398276$.
- $a_6 = -10862640\sqrt{298} - 187518240$.
- $\Delta(E_{298}1) = -19433479650\sqrt{298} - 335473872499$.
- $j(E_{298}1) = 499200\sqrt{298} - 8615872$.

◦ $n = 326$

$E_{326}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 9720\sqrt{326} - 175500.$
- $a_6 = 1962576\sqrt{326} - 35435232.$
- $\Delta(E_{326}1) = -7604982\sqrt{326} + 137311525.$
- $j(E_{326}1) = 8000.$

◦ $n = 358$

$E_{358}1$

- $a_1 = \sqrt{358}.$
- $a_2 = 0.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 3888555302\sqrt{358} - 73574916412.$
- $a_6 = -508247442332388\sqrt{358} + 9616492896306060.$
- $\Delta(E_{358}1) = -1163969451988104480125803578546210\sqrt{358} + 22023335553176607703947819636568901.$
- $j(E_{358}1) = 8000.$

◦ $n = 370$

$E_{370}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -8405208\sqrt{370} - 161677404.$
- $a_6 = -60421296816\sqrt{370} - 1162226849760.$
- $\Delta(E_{370}1) = -2033956799880714\sqrt{370} - 39123940210553539.$
- $j(E_{370}1) = -21952.$

◦ $n = 371$

$E_{371}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -605880\sqrt{371} - 11670075.$
- $a_6 = -1126584936\sqrt{371} - 21699558342.$
- $\Delta(E_{371}1) = 1011304712\sqrt{371} + 19479104415.$
- $j(E_{371}1) = 16581375.$

$E_{371}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -605880\sqrt{371} - 11670075.$
- $a_6 = -1126584936\sqrt{371} - 21699558342.$
- $\Delta(E_{371}2) = -1011304712\sqrt{371} - 19479104415.$
- $j(E_{371}2) = 16581375.$

◦ $n = 422$

$E_{422}1$

- $a_1 = \sqrt{422}$.
- $a_2 = 0$.
- $a_3 = 1$.
- $a_4 = 142437\sqrt{422} - 2922332$.
- $a_6 = 122440866\sqrt{422} - 2515214968$.
- $\Delta(E_{422}1) = -67434042451384025550\sqrt{422} + 1385273162348638202501$.
- $j(E_{422}1) = 8000$.

◦ $n = 437$

$E_{437}1$

- $a_1 = a_2 = 0$.
- $a_3 = 1$.
- $a_4 = \sqrt{437} - 21$.
- $a_6 = \frac{1}{2}(5\sqrt{437} - 105)$.
- $\Delta(E_{437}1) = 220\sqrt{437} - 4599$.
- $j(E_{437}1) = -884736$.

◦ $n = 454$

$E_{454}1$

- $a_1 = \sqrt{454}$.
- $a_2 = 1$.
- $a_3 = \sqrt{454} + 1$.
- $a_4 = -330795457706153\sqrt{454} - 7048350035069059$.
- $a_6 = 13385173424785879078249\sqrt{454} + 285201581159122852548861$.
- $\Delta(E_{454}1) = 90871601418314110348624615909626102185644181063\sqrt{454}$
 $+ 19362262695060569682461000711717309831082705649445$.
- $j(E_{454}1) = 8000$.

◦ $n = 502$

$E_{502}1$

- $a_1 = \sqrt{502}$.
- $a_2 = 1$.
- $a_3 = \sqrt{502} + 1$.
- $a_4 = 71269282\sqrt{502} - 1596808599$.
- $a_6 = 1375626229018\sqrt{502} - 30821396000375$.
- $\Delta(E_{502}1) = -10048577661472582214848458450\sqrt{502} + 225141964847427291270723902501$.
- $j(E_{502}1) = 8000$.

◦ $n = 503$

$E_{503}1$

- $a_1 = 1.$
- $a_2 = -\sqrt{503} + 1.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 465238\sqrt{503} - 10434014.$
- $a_6 = 814745213\sqrt{503} - 18272829348.$
- $\Delta(E_{503}1) = 131653598733130656\sqrt{503} - 2952682346591018497.$
- $j(E_{503}1) = 3794248\sqrt{503} - 85097073.$

$E_{503}2$

- $a_1 = \sqrt{503}.$
- $a_2 = -\sqrt{503} - 1.$
- $a_3 = \sqrt{503}.$
- $a_4 = 465154\sqrt{503} - 10429078.$
- $a_6 = -795206981\sqrt{503} + 17834672538.$
- $\Delta(E_{503}2) = 131653598733130656\sqrt{503} - 2952682346591018497.$
- $j(E_{503}2) = 3794248\sqrt{503} - 85097073.$

◦ $n = 509$

$E_{509}1$

- $a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{509} + 3).$
- $a_2 = 0.$
- $a_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{509} + 3).$
- $a_4 = \frac{1}{2}(343985\sqrt{509} - 7759707).$
- $a_6 = 183036650\sqrt{509} + 4129497530.$
- $\Delta(E_{509}1) = \frac{1}{2}(37925\sqrt{509} - 855627).$
- $j(E_{509}1) = \frac{1}{2}(-183036650\sqrt{509} + 4129497530).$

◦ $n = 517$

$E_{517}1$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = 1.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 155\sqrt{517} - 3524.$
- $a_6 = \frac{1}{2}(-10175\sqrt{517} + 231355).$
- $\Delta(E_{517}1) = 25990786260\sqrt{517} - 590968985399.$
- $j(E_{517}1) = -32768.$

◦ $n = 518$

$E_{518}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -716040\sqrt{518} - 16296795.$
- $a_6 = -1573362792\sqrt{518} - 35809128810.$
- $\Delta(E_{518}1) = 2330718520\sqrt{518} + 53046252351.$
- $j(E_{518}1) = 16581375.$

◦ $n = 519$

$E_{519}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -5832\sqrt{519} - 132867.$
- $a_6 = 1125576\sqrt{519} + 25642386.$
- $\Delta(E_{519}1) = 651925\sqrt{519} + 14851876.$
- $j(E_{519}1) = -3133\sqrt{519} + 103468.$

$E_{519}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -5832\sqrt{519} - 132867.$
- $a_6 = -1125576\sqrt{519} - 25642386.$
- $\Delta(E_{519}2) = 651925\sqrt{519} + 14851876.$
- $j(E_{519}2) = -3133\sqrt{519} + 103468.$

◦ $n = 534$

$E_{534}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 85964760\sqrt{534} - 1986511500.$
- $a_6 = -1846660839408\sqrt{534} + 42673451238432.$
- $\Delta(E_{534}1) = -8617500831574825806\sqrt{534} + 199137001059298276325.$
- $j(E_{534}1) = 8000.$

◦ $n = 553$

$E_{553}1$

- $a_1 = 1.$
- $a_2 = -1.$
- $a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{2}(-16601386065\sqrt{553} - 390397398379).$
- $a_6 = \frac{1}{2}(4909329514442903\sqrt{553} + 115447557373914347).$
- $\Delta(E_{553}1) = -41455114422255035641994551799069880\sqrt{553} - 974856482260095747070075498516720351.$
- $j(E_{553}1) = -3375.$

$E_{553}2$

- $a_1 = 1.$
- $a_2 = -1.$
- $a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{2}(-282223563105\sqrt{553} - 6636755772449).$
- $a_6 = \frac{1}{2}(279831616309384821\sqrt{553} + 6580506866339133987).$
- $\Delta(E_{553}2) = 41455114422255035641994551799069880\sqrt{553} + 974856482260095747070075498516720351.$
- $j(E_{553}2) = 16581375.$

◦ $n = 566$

$E_{566}1$

- $a_1 = \sqrt{566}.$
- $a_2 = 0.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 1674482\sqrt{566} - 39830528.$
- $a_6 = 5172829971\sqrt{566} - 123065423014.$
- $\Delta(E_{566}1) = -146944043721077540615442\sqrt{566} + 3495909670395918918068645.$
- $j(E_{566}1) = 8000.$

◦ $n = 602$

$E_{602}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -192780\sqrt{602} - 4729995.$
- $a_6 = -228209076\sqrt{602} - 5599266750.$
- $\Delta(E_{602}1) = 52860500\sqrt{602} + 1296968751.$
- $j(E_{602}1) = 8000.$

◦ $n = 614$

$E_{614}1$

- $a_1 = \sqrt{614}.$
- $a_2 = -1.$
- $a_3 = \sqrt{614} + 1.$
- $a_4 = -5856620148\sqrt{614} - 145121320157.$
- $a_6 = -1075608050033365\sqrt{614} - 26652517026598153.$
- $\Delta(E_{614}1) = 6820296561732504405002182448147046\sqrt{614} + 169000288007588483694987112701065765.$
- $j(E_{614}1) = 8000.$

◦ $n = 649$

$E_{649}1$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = -1.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 29403261396920\sqrt{649} - 749062150774799.$
- $a_6 = \frac{1}{2}(898890791007517989365\sqrt{649} - 22899672935407194983159).$
- $\Delta(E_{649}1) = 222722954894546033037472047834545521307998140\sqrt{649}$
 $- 5673973827872819276476332070679973105921379799.$
- $j(E_{649}1) = -32768.$

◦ $n = 662$

$E_{662}1$

- $a_1 = \sqrt{662}.$
- $a_2 = -1.$
- $a_3 = \sqrt{662} + 1.$
- $a_4 = -27823313\sqrt{662} - 715867353.$
- $a_6 = -360322717157\sqrt{662} - 9270872979203.$
- $\Delta(E_{662}1) = 788457351202604712029327850\sqrt{662} + 20286503554543671984037922501.$
- $j(E_{662}1) = 8000.$

◦ $n = 669$

$E_{669}1$

- $a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{669} + 3).$
- $a_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{669} - 1).$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = -177421442\sqrt{669} - 4589011556.$
- $a_6 = 6538286094988\sqrt{669} + 169112994193738.$
- $\Delta(E_{669}1) = \frac{1}{2}(102521339340535269891642653\sqrt{669} + 2651717959832556671397208925).$
- $j(E_{669}1) = \frac{1}{2}(1246531\sqrt{669} + 32245709).$

$E_{669}2$

- $a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{669} + 1).$
- $a_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{669} - 1).$
- $a_3 = 0.$
- $a_4 = -10\sqrt{669} + 593.$
- $a_6 = -67\sqrt{669} - 2909.$
- $\Delta(E_{669}2) = \frac{1}{2}(-11803\sqrt{669} + 305285).$
- $j(E_{669}2) = \frac{1}{2}(1246531\sqrt{669} + 32245709).$

◦ $n = 678$

$E_{678}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -14040\sqrt{678} - 365580.$
- $a_6 = -4091472\sqrt{678} - 106535520.$
- $\Delta(E_{678}1) = 47666190\sqrt{678} + 1241152901.$
- $j(E_{678}1) = 8000.$

◦ $n = 694$

$E_{694}1$

- $a_1 = \sqrt{694}.$
- $a_2 = 1.$
- $a_3 = \sqrt{694} + 1.$
- $a_4 = -613395246209999030048\sqrt{694} - 16159210602089434316399.$
- $a_6 = 37581284406898815569705874621685\sqrt{694} + 990036837064418500317413633056311.$
- $\Delta(E_{694}1) = 8856750379390286380305339485716376573524529135450762536047992118486\sqrt{694}$
 $+ 233321166922943378553015574459537719691398352661903875984459428867845.$
- $j(E_{694}1) = 8000.$

◦ $n = 733$

$E_{733}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{2}(459\sqrt{733} - 12501).$
- $a_6 = -9828\sqrt{733} + 266058.$
- $\Delta(E_{733}1) = \frac{1}{2}(-27\sqrt{733} + 731).$
- $j(E_{733}1) = \frac{1}{2}(-4901\sqrt{733} + 136459).$

◦ $n = 737$

$E_{737}1$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = -1.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 6212312\sqrt{737} - 168650255.$
- $a_6 = \frac{1}{2}(-90119594463\sqrt{737} + 2446543672745).$
- $\Delta(E_{737}1) = 2385399004556888864891340\sqrt{737} - 64758201325110275763101399.$
- $j(E_{737}1) = -32768.$

◦ $n = 742$

$E_{742}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 66497946300\sqrt{742} - 1811382574635.$
- $a_6 = 48714001625893284\sqrt{742} - 1326953666926765710.$
- $\Delta(E_{742}1) = -2674094566441065909871140\sqrt{742} + 72841472106898465251190351.$
- $j(E_{742}1) = 16581375.$

◦ $n = 749$

$E_{749}1$

- $a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{749} + 1).$
- $a_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{749} - 3).$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = -1268\sqrt{749} - 33664.$
- $a_6 = -141603\sqrt{749} - 3868993.$
- $\Delta(E_{749}1) = 39631020176\sqrt{749} + 1084616384895).$
- $j(E_{749}1) = 16581375.$

◦ $n = 758$

$E_{758}1$

- $a_1 = \sqrt{758}.$
- $a_2 = \sqrt{758} + 1.$
- $a_3 = \sqrt{758} + 1.$
- $a_4 = 6264999\sqrt{758} - 172471245.$
- $a_6 = 39996136715\sqrt{758} - 1101165244969.$
- $\Delta(E_{758}1) = -10306225311253927384391370\sqrt{758} + 283748931920595928776740101.$
- $j(E_{758}1) = 8000.$

◦ $n = 781$

$E_{781}1$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = 1.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = -1612760\sqrt{781} - 45070799.$
- $a_6 = \frac{1}{2}(-12095072905\sqrt{781} - 338013469967).$
- $\Delta(E_{781}1) = -44227667168830472313420\sqrt{781} - 1236003070480302579175799.$
- $j(E_{781}1) = -32768.$

◦ $n = 822$

$E_{822}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 139320\sqrt{822} - 3994380.$
- $a_6 = -134202096\sqrt{822} + 3847646880.$
- $\Delta(E_{822}1) = -56466508230\sqrt{822} + 1618925416901.$
- $j(E_{822}1) = 8000.$

◦ $n = 838$

$E_{838}1$

- $a_1 = \sqrt{838}.$
- $a_2 = 1.$
- $a_3 = \sqrt{838} + 1.$
- $a_4 = -606150853\sqrt{838} - 17546979731.$
- $a_6 = 38656778962955\sqrt{838} + 1119045315381545.$
- $\Delta(E_{838}1) = 10320004721495806567483032508410\sqrt{838} + 298745866690270762954752151468901.$
- $j(E_{838}1) = 8000.$

◦ $n = 869$

$E_{869}1$

- $a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{869} + 3).$
- $a_2 = 1.$
- $a_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{869} + 1).$
- $a_4 = -667\sqrt{869} - 19087.$
- $a_6 = 36641\sqrt{869} + 1083417.$
- $\Delta(E_{869}1) = 2041898807200\sqrt{869} + 60192738698751.$
- $j(E_{869}1) = 59319.$

◦ $n = 877$

$E_{877}1$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = 1.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 9177306012\sqrt{877} - 271778445290.$
- $a_6 = \frac{1}{2}(-5205327618971907\sqrt{877} + 154151539205644775).$
- $\Delta(E_{877}1) = -213439536211843785456889229775780\sqrt{877} + 6320838080292261110655241372027849.$
- $j(E_{877}1) = 1404928.$

◦ $n = 886$

$E_{886}1$

- $a_1 = \sqrt{886}$.
- $a_2 = 1$.
- $a_3 = \sqrt{886} + 1$.
- $a_4 = -108395331860010081187658\sqrt{886} - 3226468580440689938166343$.
- $a_6 = 93841608275187390915255559462552468\sqrt{886} + 2793266051613221229273843300783280989$.
- $\Delta(E_{886}1) = 62396348685564091947846744390464415379365402971535137061753262888753329822\sqrt{886}$
 $+ 1857274248933468432122685914481695586989633727315793209901347726016815775205$.
- $j(E_{886}1) = 8000$.

◦ $n = 889$

$E_{889}1$

- $a_1 = 1$.
- $a_2 = -1$.
- $a_3 = 1$.
- $a_4 = -2357614125946471740\sqrt{889} - 70294865688331928955$.
- $a_6 = 10759076818661333837514910068\sqrt{889} + 320793742951731692359207746764$.
- $\Delta(E_{889}1) = 310801494221261520069356145384547325891163813465823596096\sqrt{889}$
 $+ 9266889374123342517714281222878798073076422819121586681855$.
- $j(E_{889}1) = 16581375$.

◦ $n = 893$

$E_{893}1$

- $a_1 = 0$.
- $a_2 = 0$.
- $a_3 = 1$.
- $a_4 = -77\sqrt{893} - 2301$.
- $a_6 = \frac{1}{2}(4025\sqrt{893} + 120279)$.
- $\Delta(E_{893}1) = -203842100\sqrt{893} - 6091434999$.
- $j(E_{893}1) = -884736$.

◦ $n = 902$

$E_{902}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- $a_4 = -16200\sqrt{902} - 486540$.
- $a_6 = 5446224\sqrt{902} + 163568160$.
- $\Delta(E_{902}1) = 97416090\sqrt{902} + 2925728101$.
- $j(E_{902}1) = 8000$.

◦ $n = 934$

$E_{934}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -53618760\sqrt{934} - 1638665100.$
- $a_6 = 1046123627472\sqrt{934} + 31971016834848.$
- $\Delta(E_{934}1) = 3657428852386329306\sqrt{934} + 111776195796736144805.$
- $j(E_{934}1) = 8000.$

◦ $n = 938$

$E_{938}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -4536603843886800\sqrt{938} - 138941593561156635.$
- $a_6 = -920423026138425348328848\sqrt{938} - 28189598740120012804478730.$
- $\Delta(E_{938}1) = 1073355448585788083855178475400437765040\sqrt{938}$
 $+ 32873427263220561073255792965181404689151.$
- $j(E_{938}1) = 16581375.$

◦ $n = 982$

$E_{982}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 152280\sqrt{982} - 4771980.$
- $a_6 = -160329456\sqrt{982} + 5024224800.$
- $\Delta(E_{982}1) = -88088417550\sqrt{982} + 2760416102501.$
- $j(E_{982}1) = 8000.$

◦ $n = 989$

$E_{989}1$

- $a_1 = a_2 = 0.$
- $a_3 = 1$
- $a_4 = 32830\sqrt{989} - 1032450.$
- $a_6 = \frac{1}{2}(36316077\sqrt{989} - 1142081441).$
- $\Delta(E_{989}1) = 17497618534396\sqrt{989} - 550271588560695.$
- $j(E_{989}1) = -884736000.$

◦ $n = 994$

$E_{994}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 247860\sqrt{994} - 7814475.$
- $a_6 = -377135028\sqrt{994} + 11890224738.$
- $\Delta(E_{994}1) = -185504364\sqrt{994} + 5848538095.$
- $j(E_{994}1) = 16581375.$

◦ $n = 997$

$E_{997}1$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{997} + 1).$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 12\sqrt{997} - 301.$
- $a_6 = 72\sqrt{997} - 2406.$
- $\Delta(E_{997}1) = -456624468\sqrt{997} + 14418057673.$
- $j(E_{997}1) = 4096\sqrt{997} + 131072.$

$E_{997}2$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = 1.$
- $a_3 = 1.$
- $a_4 = 4101\sqrt{997} - 129490.$
- $a_6 = \frac{1}{2}(1609311\sqrt{997} - 50814489).$
- $\Delta(E_{997}2) = -456624468\sqrt{997} + 14418057673.$
- $j(E_{997}2) = -1054900224\sqrt{997} + 33308803072.$

◦ $n = 998$

$E_{998}1$

- $a_1 = \sqrt{998}.$
- $a_2 = -1.$
- $a_3 = \sqrt{998} + 1.$
- $a_4 = -12979338\sqrt{998} - 410011957.$
- $a_6 = -127747687260\sqrt{998} - 4035694249023.$
- $\Delta(E_{998}1) = 120665143634436983666083230\sqrt{998} + 3811949204087414056656012101.$
- $j(E_{998}1) = 8000.$

付録-B2 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-n})$ の everywhere good reduction

ここでは命題 3.2 によって計算の必要がなくなった, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-n})$ 上で everywhere good reduction を持つ楕円曲線を 4.1 節の表記に合わせて挙げる.

○ $n = -6$

$E_{-6}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 42660\varphi_{-6}^2 + 88560.$
- $a_6 = -10655064\varphi_{-6}^2 - 22373064.$
- $\Delta(E_{-6}1) = -\varphi_{-6}^2 - 2.$
- $j(E_{-6}1) = -38546144000\varphi_{-6}^2 - 80985624000.$

$E_{-6}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -42660\varphi_{-6}^2 - 88560.$
- $a_6 = \frac{1}{5}(15451128\varphi_{-6}^3 + 32509512\varphi_{-6}).$
- $\Delta(E_{-6}2) = \varphi_{-6}^2 + 2.$
- $j(E_{-6}2) = -38546144000\varphi_{-6}^2 - 80985624000.$

○ $n = -7$

$E_{-7}1$

- $a_1 = \frac{1}{4}(3\varphi_{-7}^3 - 11\varphi_{-7}^2 + 8\varphi_{-7} - 30).$
- $a_2 = \frac{1}{8}(-57\varphi_{-7}^3 - 18\varphi_{-7}^2 - 154\varphi_{-7} - 48).$
- $a_3 = \frac{1}{8}(191\varphi_{-7}^3 - 1014\varphi_{-7}^2 + 518\varphi_{-7} - 2744).$
- $a_4 = \frac{1}{8}(-6329\varphi_{-7}^3 - 5324\varphi_{-7}^2 - 17142\varphi_{-7} - 14420).$
- $a_6 = \frac{1}{8}(-226705\varphi_{-7}^3 + 101460\varphi_{-7}^2 - 614030\varphi_{-7} + 274804).$
- $\Delta(E_{-7}1) = -25371894564720\varphi_{-7}^2 - 68719709900159.$
- $j(E_{-7}1) = -3375.$

$E_{-7}2$

- $a_1 = \frac{1}{4}(3\varphi_{-7}^3 - 11\varphi_{-7}^2 + 8\varphi_{-7} - 30).$
- $a_2 = \frac{1}{8}(-57\varphi_{-7}^3 - 18\varphi_{-7}^2 - 154\varphi_{-7} - 48).$
- $a_3 = \frac{1}{8}(191\varphi_{-7}^3 - 1014\varphi_{-7}^2 + 518\varphi_{-7} - 2744).$
- $a_4 = \frac{1}{8}(-6329\varphi_{-7}^3 - 5324\varphi_{-7}^2 - 17142\varphi_{-7} - 14420).$
- $a_6 = \frac{1}{8}(-226705\varphi_{-7}^3 + 101460\varphi_{-7}^2 - 614030\varphi_{-7} + 274804).$
- $\Delta(E_{-7}1) = -25371894564720\varphi_{-7}^2 - 68719709900159.$
- $j(E_{-7}1) = -3375.$

◦ $n = -29$

$E_{-29}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{4}(-405\varphi_{-29}^2 - 16416).$
- $a_6 = 1890\varphi_{-29}^2 + 76626.$
- $\Delta(E_{-29}1) = \frac{1}{4}(-5\varphi_{-29}^2 - 204).$
- $j(E_{-29}1) = \frac{1}{4}(-3515\varphi_{-29}^2 - 143232).$

$E_{-29}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{8}(32805\varphi_{-29}^2 + 629964).$
- $a_6 = -1328670\varphi_{-29}^2 - 25538166.$
- $\Delta(E_{-29}2) = \frac{1}{4}(-5\varphi_{-29}^2 - 204).$
- $j(E_{-29}2) = \frac{1}{4}(1407628760845\varphi_{-29}^2 + 27068237096448).$

◦ $n = -33$

$E_{-33}1$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -298167480\varphi_{-33}^2 - 13563377856.$
- $a_6 = 9499418180784\varphi_{-33}^2 + 432120223837008.$
- $\Delta(E_{-33}1) = -18903844622\varphi_{-33}^2 - 859919356531).$
- $j(E_{-33}1) = -1637028929536\varphi_{-33}^2 - 74467014082560.$

$E_{-33}2$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -141048\varphi_{-33}^2 - 6416064.$
- $a_6 = -97732656\varphi_{-33}^2 - 444577291.$
- $\Delta(E_{-33}2) = -2\varphi_{-33}^2 - 91.$
- $j(E_{-33}2) = -1637028929536\varphi_{-33}^2 - 74467014082560.$

$$\circ n = -37$$

$$E_{-37}1$$

- $a_1 = 0.$
- $a_2 = -\frac{1}{24}(-7\varphi_{-37}^3 - 18\varphi_{-37}^2 - 352\varphi_{-37} - 960).$
- $a_3 = 8\varphi_{-37}^2 + 399.$
- $a_4 = \frac{1}{36}(145\varphi_{-37}^3 - 513\varphi_{-37}^2 + 7276\varphi_{-37} - 25668).$
- $a_6 = \frac{1}{12}(62\varphi_{-37}^3 - 3021\varphi_{-37}^2 + 3110\varphi_{-37} - 151572).$
- $\Delta(E_{-37}1) = 127890\varphi_{-37}^2 + 6415669.$
- $j(E_{-37}1) = 4096.$

$$\circ n = -41$$

$$E_{-41}1$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -459.$
- $a_6 = 864\varphi_{-41}^2 + 43578.$
- $\Delta(E_{-41}1) = -\frac{1}{2}(5\varphi_{-41}^2 + 274).$
- $j(E_{-41}1) = \frac{1}{2}(24565\varphi_{-41}^2 + 717298).$

$$E_{-41}2$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 73440\varphi_{-41}^2 + 4024971.$
- $a_6 = 187996977\varphi_{-41}^2 + 10303409034.$
- $\Delta(E_{-41}2) = -\frac{1}{2}(344016936965\varphi_{-41}^2 + 18854277726866).$
- $j(E_{-41}2) = \frac{1}{2}(24565\varphi_{-41}^2 + 717298).$

$$E_{-41}3$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 70800480\varphi_{-41}^2 + 3880308699.$
- $a_6 = 1160455178880\varphi_{-41}^2 + 63600194877642.$
- $\Delta(E_{-41}3) = \frac{1}{2}(344016936965\varphi_{-41}^2 + 18854277726866).$
- $j(E_{-41}3) = \frac{1}{2}(5369692165\varphi_{-41}^2 + 294292686482).$

$$E_{-41}4$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = 17280\varphi_{-41}^2 + 946971.$
- $a_6 = 4423545\varphi_{-41}^2 + 242437914.$
- $\Delta(E_{-41}4) = \frac{1}{2}(5\varphi_{-41}^2 + 274).$
- $j(E_{-41}4) = \frac{1}{2}(5369692165\varphi_{-41}^2 + 294292686482).$

$$\circ n = -65$$

$$E_{-65}1$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = -108\varphi_{-65}^2 - 5427.$
- $a_6 = -3780\varphi_{-65}^2 - 188622.$
- $\Delta(E_{-65}1) = \frac{1}{2}(257\varphi_{-65}^2 + 12818).$
- $j(E_{-65}1) = \frac{1}{2}(833\varphi_{-65}^2 + 69410).$

$$E_{-65}2$$

- $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$
- $a_4 = \frac{1}{4}(-405\varphi_{-65}^2 - 29376).$
- $a_6 = \frac{1}{2}(-1323\varphi_{-65}^2 - 145152).$
- $\Delta(E_{-65}2) = \frac{1}{2}(4413393409\varphi_{-65}^2 + 220120134578).$
- $j(E_{-65}2) = \frac{1}{2}(833\varphi_{-65}^2 + 69410).$

参考文献

- [1] M. Bertolini and G. Canuto: *Good reduction of elliptic curves defined over $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$* : Arch. Math., **50** (1988), 42-50.
- [2] W. Bosna, J. Cannon and C. Playoust: *The Magma algebra system. I. The user language*: J symbolic Comput. **24** (1997), 235-265.
- [3] S. Comalada: *Elliptic curves with trivial conductor over quadratic fields*: Pacific J. Math **144** (1990), 233-258.
- [4] S. Comalada and E. Nart: *Courbes elliptiques avec bonne réduction partout*: C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **144**(2) (1990), 237-258.
- [5] S. Comalada and E. Nart: *Modular invariant and good reduction of elliptic curves*: Math. Ann., **293**(2) (1992), 331-342.
- [6] J. E. Cremona and M. Lingham: *Finding all elliptic curves with good reduction outside a given set of primes*: Experimental Math., **16**(3) (2007), 303-312.
- [7] J. E. Cremona and T. Thongjunthug: *The Complex AGM, periods of elliptic curves over \mathbb{C} and complex elliptic logarithms*: J. Number Theory **133** Issue 8 (2013), 2813-2841.
- [8] H. Ishii: *The nonexistence of elliptic curves with everywhere good reduction over certain quadratic fields*: Japan. J. Math., (N. S.)**12**(1) (1986), 45-52.
- [9] T. Kagawa: *Determination of elliptic curves with everywhere good reduction over real quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{3p})$* : Acta. Arith., **96**(3) (2001), 231-245.
- [10] T. Kagawa: *Determination of elliptic curves with everywhere good reduction over real quadratic fields II*: International Journal of Algebra **16** (2022), 219-240.
- [11] M. Kida: *On a characterization of Shimura's elliptic curves over $\mathbb{Q}(\sqrt{37})$* : Acta. Arith., **77**(2) (1996), 157-171.
- [12] M. Kida: *Reduction of elliptic Curves over certain real quadratic number fields*: Math Comp., **68**(228) (1999), 1679-1685.
- [13] M. Kida: *Computing elliptic curves having good reduction everywhere over quadratic fields*: Tokyo J. Math., **24**(2) (2001), 545-558.
- [14] M. Kida: *Good reduction of elliptic curves over imaginary quadratic fields*: J. Théor. Nombres Bordeaux, **13**(1) (2001), 201-209.
- [15] M. Kida: *Nonexistence of elliptic curves having good reduction everywhere over certain quadratic fields*: Arch. Math. (Basel) **76**(6) (2001), 436-440.
- [16] M. Kida and T. Kagawa: *Nonexistence of elliptic curves with good reduction everywhere over real quadratic fields*: J. Number Theory, **66** (1997), 201-210.
- [17] LMFDB, *The L-functions and modular forms database*,
<https://www.lmfdb.org/>.
- [18] B. Setzer: *Elliptic curves over complex quadratic fields*: Pacific J. Math. **74** no 1 (1978), 235-250.
- [19] B. Setzer: *Elliptic curves with good reduction everywhere over quadratic fields and having rational*

- j*-invariant: Illinois J. Math. **25** (1981), 233-245.
- [20] J. H. Silverman: *The Arithmetic of Elliptic Curves 2nd Edition*: Graduate Texts in Mathematics **106**, Springer-Verlag (2009).
 - [21] 島崎有: 実二次体上 good reduction を持つ楕円曲線について: 九州大学大学院数理学府修士論文 (2011).
 - [22] R. J. Strocker: *Reduction of elliptic curves over number fields*: Pacific J. Math. **108** (1983), 451-463.
 - [23] N. Takeshi: *On elliptic curves having everywhere good reduction over cubic fields*: Master's thesis, Tsuda College, (2012).
 - [24] T. Thongjunthug: *Heights on elliptic curves over number fields, period lattices, and complex elliptic logarithms*: Ph. D. Thesis, The University of Warwick (2011).
 - [25] A. Umegaki: *A Construction of Everywhere Good \mathbb{Q} -Curves with p -Isogeny*: Tokyo J. of Math., **21**(1) (1998), 183-200.
 - [26] S. Yokoyama: *On elliptic curves with everywhere good reduction over certain number fields*: Preprint (2011).
 - [27] S. Yokoyama and Y. Shimasaki: *Non-existence of elliptic curves with everywhere good reduction over some real quadratic fields*: J. Math-for-Industry, vol.**3** (2011B-4), 113-117.