せっけん膜の幾何学と数学教育

Geometry of soap films and mathematics education

理学部数理科学科
酒井　高司

1　はじめに

数学はそれ自身が純粋な学問の一分野を成しているが，さらに数学は自然科学を記述する言葉であると言われるように，自然科学や工学など様々な分野と互いに影響を与え合いながら発展してきた．近年では人工知能やデータサイエンスなどの新しい技術分野に数学の理論が応用されており，高度な数学的能力を備えた人材への期待は益々高まっている．高校数学の教科書でも，自然界に現れる数学や応用などについて紹介されており，学生に数学の有用性を理解してもらい，数学への興味を誘うように教えられている．ところが多くの高校生にとって数学を学ぶ目的は教科書の内容を勉強し，計算を行い，問題を解くことだと捉える傾向があるように見受けられる．筆者自身も高校までは数学に対してそのような認識を持っていた．大学に進学すると，多くの学生はそれぞれ専門の目的のために数学を勉強することになる．数学を専攻する学生だけでなく，特に理工系分野の学生は微分方程式，離散数学，確率統計など専門に応じてより実践的な数学を学修する．高校生に対しても，教程の枠にとらわれず，その先に豊かな数学の理論があることを紹介することは，学生の知的好奇心を高め，数学を学習する動機付けを促進するために有効であると筆者は考える．

筆者はこれまでに各種企画において高校生向けに，大学で学ぶ数学を紹介する講義・講座を行った経験がある．一つのテーマとして，せっけん膜が作る形の幾何学理論を紹介する講座を行った．本稿では，高校数学の知識を前提とした次の講座の実践例について紹介する．

- 2021 年度 東京都立大学 理数研究ラボ「せっけん膜の数理—最適な形を探求しよう—」

本稿で扱う内容の多くは [1] および [2] を参考にしている．より詳しい解説についてはこれらの文献を参考にしていただきたい．

2　最適化問題

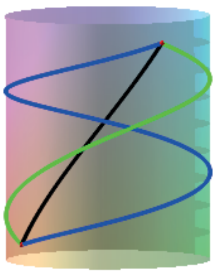
自然界に起こる現象は可能な限り効率的にふるまうというのが 18 世紀のフランスの科学者モーペルテュイが提唱した考え方であり，実際に多くの現象は変分原理によって説明される．たとえば，シャボン玉が丸いのは，球形がせっけん膜の表面張力によるエネルギーを最小化する形であるからとして説明される．与えられた条件下での最適な状態を求める類の問題は，条件を数値化し大小関係を比較することにより，最適化問題として数学的に定式化される．すなわち，ある集合上で定義された（実数値・整数値）関数について，その最小値（または最大値）を与える元を求める問題となる．最適化問題は，最も効率的な解を求める問題であるから，自然科学のみならず，工学や経済学，社会学など多様な分野への応用においても重要である．

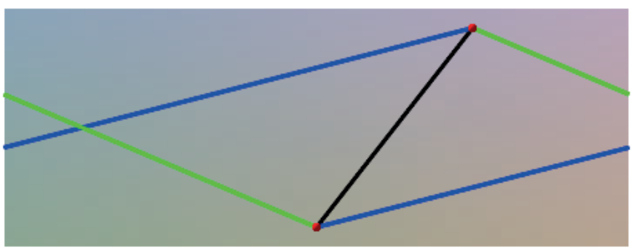
最適化問題は，問題の数学的特性により次のように大きく分けることができるだろう．まずは，巡回セールスマン問題，ナップサック問題などに代表される組み合わせ最適化問題がある．これら

は有限の最適化問題であるが，組み合わせ数が膨大となるため困難な問題であると認知されている．次に，有限の自由度（変数）を持つ最適化問題は，（1 変数・多変数）関数の極値問題となり，高校でも学ぶように極値を調べるために微分法を用いることができる．さらに，無限の自由度をもつ最適化問題が考えられる．たとえば，本稿ではせっけん膜の幾何学を題材としてとり上げるが，与えられたワイヤーフレームに張るせっけん膜の形を求める問題は，与えられたフレームを境界とする曲面の中で面積が極小となるものを求めよという問題になる．ワイヤーフレームに対して，それを境界にもつ曲面はぐにゃぐにゃと変形させることができるため，この問題は無限の自由度を持つ汎関数の最適化問題となり，このような問題は一般に変分問題と呼ばれる．この類の最適化問題に対しては，微分法のアイデアを汎関数に対して適用できるように拡張された変分法を用いることができる．

3　最短測地線

曲面上の 2 点の間の最短線を求める問題は典型的な幾何学的変分問題である．平面上であれば，異なる 2 点 A, B が与えられたとき，A と B を結ぶ線分が 2 点間の最短線である．これは一見明らかなようではあるが，厳密には証明が必要な事実である．次に円柱面上の 2 点間の最短線について考える．円柱面は切り込みを入れて平らに広げることができる．この広げる操作は曲面上の距離を変えない（等長的である）ので，最短線を展開図上で考えることができる．ただし，展開図の切り込みを入れて分けた 2 本の直線上の点は円柱面上では同じ点となることに注意する．すると，一般に A と B を結ぶ線分が無数にあることがわかる．特別な場合として，A と B が円柱面上の “同じ高さ” の点であるときは，A と B を結ぶ線分は A, B を通る 2 つの円弧のみとなる．これらの線分の中で最短となるものが，A と B の間の最短線となる．A と B が互いに対蹠的な直線上にある場合は，最短線が 2 本になる．





球面上ではどうであろうか．円柱面とは異なり，球面は距離を変えずに平らに広げることはできない．球面上の 2 点 A, B に対して，A と B を通る大円が描け，大円の円弧によって 2 点間の最短線を与えることができる．これは地球儀にゴム紐をあてがって 2 点間を結んだときの円弧として見ることができる．2 点が球面上において互いに対蹠点の関係にあるときは，2 点を通る半円弧がすべて最短線となり，2 点間を結ぶ最短線は無数に存在する．円柱面や球面の例のように，曲面上において 2 点間の最短線は一意的とは限らないので注意が必要である．一般に，曲面に接する方向に加速度が加わらず，曲面上を “まっすぐ進む” 曲線を**測地線**と呼ぶ．球面の測地線は大円を描く．一般に，2 点間の最短線は測地線であるが，逆に測地線が最短線になるとは限らない．実際，円柱面の例では A と B を結ぶ線分はいずれも測地線であるが，最短線ではないものもある．測地線は局所的には最短線を与える，すなわち，測地線上の 2 点が測地線に沿って十分に近い位置にある場合には，それが最短線になる．

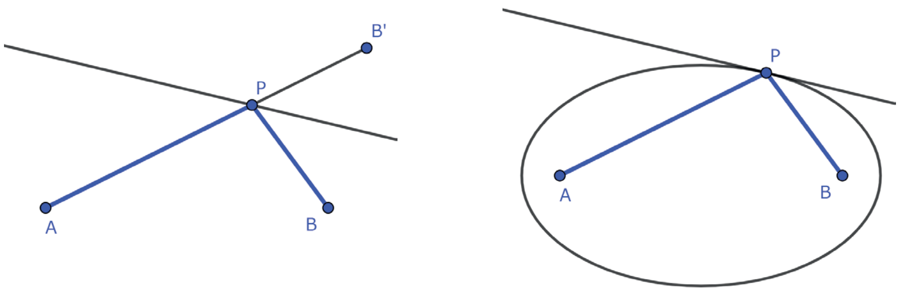
これまでの例では曲面上の 2 点を結ぶ最短線が少なくとも 1 本は存在し，場合によっては複数本の最短線が存在した．一般に曲面上の 2 点 A, B に対して，A と B を結ぶ最短線が必ず存在するであろうか？たとえば，平面 $\mathbb{R}^2$ から原点 O を除いた穴あき平面 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathrm{O}\}$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(1,0)$ と $\mathrm{B}(-1,0)$ をとる．平面であれば A と B を結ぶ線分が最短線であるが，今は原点 O が除かれて平面に穴が空いているので，A と B を結ぶには原点 O を避けて迂回しなければならない．その曲線の長さは 2 より大きくなる．この曲線は線分 AB にいくらでも近くにとることができるため，曲線の長さは 2 にいくらでも近づけることができるが，2 になることはない．したがって，この場合 A と B を結ぶ最短線は存在しない．これは測地線が穴に到達したときにそれ以上延ばすことができないことが原因である．一般に測地線をどこまでも延ばすことができる曲面（リーマン多様体）を測地的完備と呼ぶ．測地的完備な曲面（リーマン多様体）上では任意の 2 点を結ぶ最短線が存在することが知られている．

平面上で直線 ℓ と ℓ に対して同じ側にある 2 点 A, B が与えられたとき，A を出発して ℓ 上の点を経由してから B に到達する最短路を求める問題を考える．この問題に対しては，光の反射の原理により次のように答えることができる．

ヘロンの原理

平面上の 2 点 A, B から直線 ℓ への距離の和が最短となる点 P は，線分 AP と ℓ のなす角と線分 BP と ℓ のなす角が等しくなる点である．

証明　B に対して，直線 ℓ に関して線対称となる点を B' とおく．このとき, $\mathrm{PB} = \mathrm{PB}'$ であるから，$\mathrm{AP} + \mathrm{PB}$ が最短となる点 P を求めるためには，$\mathrm{AP} + \mathrm{PB}'$ が最短となる P を求めればよい．明らかに，A, P, B' が一直線上にあるときが最短となる．したがって，AP と ℓ のなす角と PB' と ℓ のなす角が等しくなり，さらに線対称の性質から PB と ℓ のなす角も等しくなる．□



ヘロンの原理から，楕円の接線に関する次の性質が示される．

楕円の反射角

平面上の 2 点 A, B を焦点とする楕円上の点 P における接線を ℓ とすると，線分 AP と ℓ のなす角と線分 PB と ℓ のなす角は等しい．

証明　楕円は 2 つの焦点 A, B からの距離の和が一定値 d である点の軌跡として与えられる．点 Q は楕円の接線 ℓ 上にあり P と異なる点であるとすると，Q は楕円の外部にあるので，

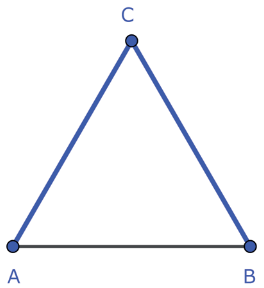
$$\mathrm{AQ} + \mathrm{QB} > d = \mathrm{AP} + \mathrm{PB}$$

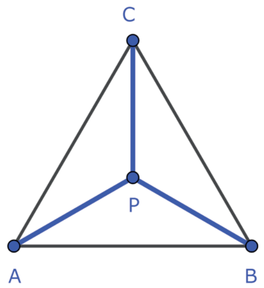
が成り立つ．すなわち，点 P は 2 点 A, B から直線 ℓ への距離の和が最短となる点であるから，ヘロンの原理により，線分 AP と ℓ のなす角と線分 PB と ℓ のなす角は等しくなる．□

4　最短シュタイナー木問題

地上にある 3 つの都市をネットワークでつなぐことを考える．ただし，ネットワークには分岐点を設けることができるとする．このとき，総延長ができるだけ短くなるようにネットワークを設計したい．この問題は**最短シュタイナー木問題**と呼ばれ，都市の設計などにも応用される重要な最適化問題である．地球は平坦ではないが，簡単のため平面上で問題を考える．

平面上に 3 点 A, B, C が与えられたとき，単純なネットワークとして，3 つの線分 AB, BC, CA のうち最も長い線分を除いた 2 つの線分で作られるネットワークが考えられる．ではこのネットワークは最短であるだろうか？後で説明するように，場合によっては最短になるが，一般にはこれが最短ネットワークになるとは限らない．たとえば，各都市の間の距離がいずれも 1 であり，3 つの都市が正三角形の頂点の位置にある場合を考える．正三角形の 2 辺でネットワークを作ると総延長は 2 であるのに対して，正三角形の重心に分岐点 P を設けて，3 つの線分 AP, BP, CP をつなげてネットワークを作ると，総延長は $\sqrt{3} = 1.7320\ldots$ となる．





この例のように，2 辺でネットワークを作るより，分岐点 P を設置したほうが総延長が短くなる場合がある．今，与えられている点は 3 点であり，分岐点 P を 1 つ設けることで，3 つの都市を線分のネットワークでつなぐことができる．したがって，3 点の最短シュタイナー木問題を次のように与える．

問題

平面上に 3 点 A, B, C が与えられたとき，平面上の点 P で A, B, C からの距離の和が最短となるものを求めよ．

3 点が同一直線上にある場合の最短ネットワークは自明であるから，以降では 3 点は同一直線上にはなく，A, B, C が三角形を成している場合を考える．このとき，上の問題に対して次が成り立つ．

定理

(1) $\triangle$ABC の 3 つの内角がいずれも $120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$ より小さい場合，点 P は $\triangle$ABC の内部に存在し，$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = \angle\mathrm{CPA} = 120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$ となる唯一の点である．

(2) $\triangle$ABC の内角のうちいずれかが $120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$ 以上である場合，点 P は内角が $120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$ 以上になる頂点である．

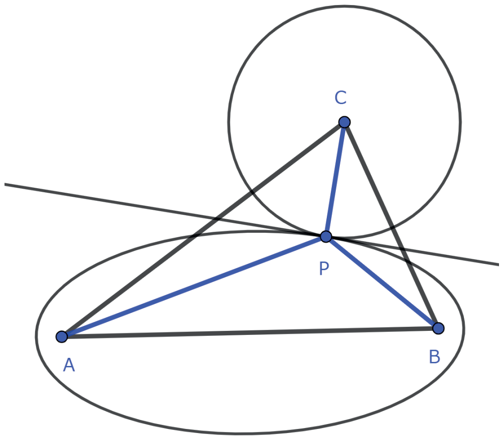
定理の (1) にある $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = \angle\mathrm{CPA} = 120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$ を満たす点 P を $\triangle$ABC の**フェルマー点**または**トリチェリ点**と呼ぶ．

定理の証明　この問題を考える上で，まず疑問となるのは問題の解が存在するかどうかである．前節で考えた最短測地線の問題では，最適解が存在しないことが起こり得た．

P が $\triangle$ABC の外部の点であるとすると，P は直線 AB, BC, CA のいずれかに対して，$\triangle$ABC と反対側にある．たとえば，P が直線 AB に対して $\triangle$ABC と反対側にある場合，P を直線 AB に直交射影した点を P' とおくと，点 P' を分岐点としたネットワークのほうが短くなる．したがって，問題の解となる点 P の候補は，$\triangle$ABC およびその内部の点に絞られる．そこで，問題は $\triangle$ABC およびその内部で関数 $f(\mathrm{P}) = \mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP}$ の最小値を与える点 P を求める問題になる．有界閉集合上で定義された連続関数はその上で最大値と最小値をとることから解の存在がわかる．解の存在が分かり，最適解となる点 P の存在範囲を絞り込むことができたので，実際に解を探そう．

主張 1. 最適解となる点 P が $\triangle$ABC の内部にあるとすると，P はフェルマー点である．

主張 1 の証明　点 C を中心とし，P を通る円を描く．このとき，A と B はともに円の外部にある．なぜなら，もし A が円周またはその内部にあったと仮定すると，$\mathrm{CP} \geqq \mathrm{AC}$ となる．また，P は辺 AB 上にはないので，三角不等式 $\mathrm{AP} + \mathrm{BP} > \mathrm{AB}$ が成り立つ．ゆえに，$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP} > \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$ となるが，これは点 P が問題の最適解であることに矛盾する．次に，A, B を 2 つの焦点とし，P を通る楕円を描く．



このとき，円と楕円は点 P において接する．なぜなら，もし接していないと仮定すると，円と楕円は P において横断的に交わるので，楕円上の点で円の内部に含まれる点 P' が存在する．このとき，$\mathrm{CP} > \mathrm{CP}'$ であり，楕円の性質より $\mathrm{AP} + \mathrm{BP} = \mathrm{AP}' + \mathrm{BP}'$ であるから，$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP} > \mathrm{AP}' + \mathrm{BP}' + \mathrm{CP}'$ となるが，これは P が問題の最適解であることに矛盾する．円と楕円は点 P において接線を共有することがわかったので，その接線を ℓ と表す．線分 CP は ℓ に垂直であり，また前節で示した楕円の反射角の性質から線分 AP と ℓ のなす角と線分 PB と ℓ のなす角は等しいことから，$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{BPC}$ を得る．同じ議論を A を中心とする円と B, C を 2 つの焦点とする楕円に適用すると $\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{APB}$ を得る．よって

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{BPC} = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$

となり，P はフェルマー点である．フェルマー点の一意性はフェルマー点の作図からわかる．　$\square$

主張 2. 点 P が $\triangle$ABC の周上にあるとすると，P は $\triangle$ABC の頂点のいずれかと一致する．

主張 2 の証明　点 P が $\triangle$ABC の頂点ではない辺上の点であると仮定して，矛盾を導くことで主張 2 を示す．点 P が辺 BC 上にあり，$\mathrm{P} \neq \mathrm{B}, \mathrm{P} \neq \mathrm{C}$ と仮定する．ここで，C を中心とした円と 2 点 A, B を焦点とする楕円を考えると，先と同様の議論により，これらは点 P で接する．P は辺 BC 上のどこにあっても $\mathrm{BP} + \mathrm{CP}$ は一定であるので，P が問題の最適解であることから，直線 AP は点 P において辺 BC に垂直に交わる．したがって，直線 AP は円の点 P における接線と一致し，すなわち楕円の点 P における接線とも一致する．ところが，楕円の接線が焦点 A を通ることは楕円の接線

の性質に矛盾する．よって，背理法により，点 P が辺 BC 上にあるとすると，頂点 B,C のいずれかと一致しなければならないことが示され，主張 2 が示された． □

定理 (2) の証明　$\angle \mathrm{ACB}$ が $120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$ 以上である場合を考える．このとき，$\angle \mathrm{ACB}$ のフェルマー点は存在しないので，主張 1 より，点 P が $\angle \mathrm{ACB}$ の内部に存在することはない．したがって，点 P は $\angle \mathrm{ACB}$ の周上にあるので，主張 2 により，P は $\triangle \mathrm{ABC}$ の頂点のいずれかと一致する．$\angle \mathrm{ACB} > 120^\circ$ の仮定より，$\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ かつ $\mathrm{AB} > \mathrm{BC}$ であるから，$\mathrm{P} = \mathrm{C}$ である． □

定理 (1) の証明　$\triangle \mathrm{ABC}$ の内角がいずれも 120° 未満であるとする．このとき，主張 1, 2 より，

(i) 点 P は $\triangle \mathrm{ABC}$ のフェルマー点になる．
(ii) 点 P は $\triangle \mathrm{ABC}$ の頂点のいずれかと一致する．

のいずれかである．そこで $\triangle \mathrm{ABC}$ のフェルマー点を F として，F を分岐点としたネットワークの長さと C を分岐点としたネットワークの長さを比較する．点 C から直線 AF に下した垂線の足を D とすると，$\angle \mathrm{ADC} = 90^\circ$, $\angle \mathrm{CFD} = 60^\circ$ であるから，

$$\mathrm{AC} > \mathrm{AD} = \mathrm{AF} + \mathrm{FD} = \mathrm{AF} + \frac{1}{2}\mathrm{CF}$$

が成り立つ．また，点 C から直線 BF に下した垂線の足を E とすると，

$$\mathrm{BC} > \mathrm{BF} + \frac{1}{2}\mathrm{CF}$$

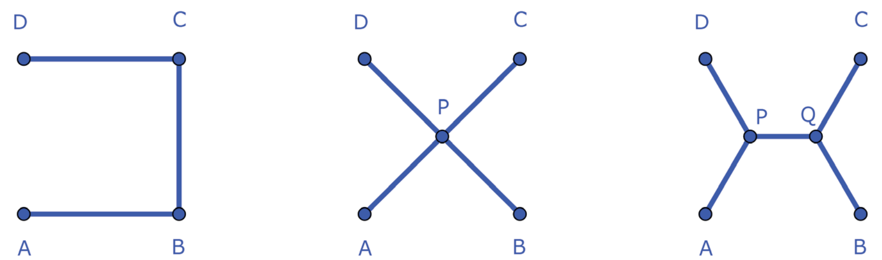
が成り立つ．ゆえに

$$\mathrm{AC} + \mathrm{BC} > \mathrm{AF} + \mathrm{BF} + \mathrm{CF}$$

となる．したがって，点 C は問題の最適解 P になり得ない．同様にして P は $\triangle \mathrm{ABC}$ のいずれの頂点とも一致しないことが示され，(ii) の可能性が排除される．よって，この場合の最適解を与える点 P は (i) のフェルマー点 F である． □

以上で，3 点の最短シュタイナー木問題についての最適解がわかった．さらに，4 つの都市を結ぶ最短ネットワークを考えてみよう．ここでは簡単な場合として，4 点 A, B, C, D が 1 辺の長さが 1 の正方形の頂点になっている場合を考える．このとき，最短ネットワークの候補として次のような設計が考えられるだろう．

(a) 3 つの辺 AB, BC, CD で作るネットワーク，
(b) 正方形の内部に分岐点 P を設け，4 点と P を結ぶ線分で作るネットワーク，
(c) 正方形の内部に P, Q と 2 つの分岐点を設け，4 点を図のようにつなぐネットワーク．



ネットワークの総延長はそれぞれ

$$\text{(a)}\quad 3 \qquad\qquad \text{(b)}\quad 2\sqrt{2} = 2.8284\ldots \qquad\qquad \text{(c)}\quad 1 + \sqrt{3} = 2.7320\ldots$$

であり，これらの中で (c) が最短である．実際に，(c) がこの場合の最適解であることが示される．3 点の場合に帰着させることにより，一般の最短シュタイナー木問題の最適解では分岐点に 3 つの線分が同じ角度 120° で交わることが示される．この性質は次節のせっけん膜の実験でも観察することができる．

ここでは簡単な例として，4 点が正方形の頂点の位置にある場合を考えたが，一般には 3 点のシュタイナー木問題のように，点の位置により場合分けが必要となり，どの 3 点に対してフェルマー点を考えるかによっても場合分けが必要になる．したがって，一般に n 点の最短シュタイナー木問題は組み合わせ最適化問題の要素が加わり，点の数が増えると最適解を求めることが困難な問題となる．

5　せっけん膜の幾何学

針金で作った円形のワイヤーフレームにせっけん膜を張らせ，息を吹きかけるとシャボン玉ができる．大きなシャボン玉をつくると最初はゆがんだ形をしているが次第に変形し，やがて球形に落ち着く．せっけん膜は表面張力により，分子同士に互いに引き合う力が働く．この表面張力により，シャボン玉は内部に囲まれた空気の容積を変えないで，表面積を小さくするように変形し，面積が最小となる状態として球面になる．すなわち，シャボン玉が丸い理由は，与えられた体積を囲む曲面の中で面積が最小であるという球面の持つ幾何学特性として数学的に説明される．一方で，円形のワイヤーフレームに張らせたせっけん膜のほうを見ると，平らな円板状の膜が張っていることが観察できる．ワイヤーフレームをゆらゆら揺らすと，せっけん膜が変形するが，揺らすのを止めてしばらくすると，再び平らな円板状の膜に落ち着く．もちろん，これは円形のワイヤーフレームを境界とする曲面の中で，平らな円板が面積最小であるからである．では，単純な円形とは限らない，ゆがんだワイヤーフレームにせっけん膜を張らせたらどうなるであろうか？この問題は数学的には次のように述べられる．空間内に与えられた閉曲線に対し，それを境界とする曲面で面積が極小となるものを求めよ．この問題に対しては，曲面の曲がり方を測る曲率の概念を使って条件を述べることができる．そのために曲面の曲率について説明する．

曲面上の点 P において単位法ベクトル ν をとる．P において，単位接ベクトル w と ν で張られる平面を Π_w とする．このとき，曲面と Π_w の共通部分となる断面に現れる曲線は Π_w 内の平面曲線であるから，P において 2 次接触する接触円の半径の逆数として曲率が定まる．ただし，接触円が曲面に対して ν と同じ側にあるときは曲率の符号は正であるとし，ν と反対側にあるときは曲率の符号は負であるとする．ここで定められた曲率を，曲面上の点 P における w 方向の**法曲率**と呼ぶ．w を P の単位接ベクトルすべてを動かしたときの法曲率の最大値と最小値を κ_1, κ_2 と表し，曲面の点 P における**主曲率**と呼ぶ．さらに，

$$K = \kappa_1\kappa_2, \qquad\qquad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

によって，曲面の点 P における**ガウス曲率** K と**平均曲率** H を定める．ガウス曲率が正である点では 2 つの主曲率が同じ符号を持つことになり，この点において曲面が凸状に曲がっていることを意味している（図 1）．また，ガウス曲率が負である点では 2 つの主曲率が異符号を持ち，この点にお

いて曲面は鞍状に曲がっている（図 2）．ガウス曲率は曲面上の距離の関係から定まる内在的な曲率である．すなわち，2 つの曲面が互いに等長的であるならば，それらのガウス曲率は等しい（ガウスの驚異の定理）．一方で，平均曲率 H は外側の空間に対する曲面の外在的な曲がりを表す曲率である．この平均曲率 H がせっけん膜の面積最小化問題と関係していることが変分法を用いることで次のようにわかる．

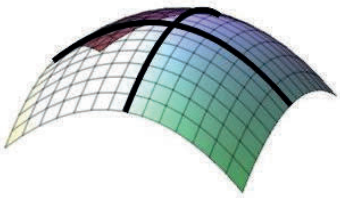


図 1　$K > 0$

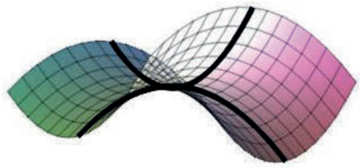
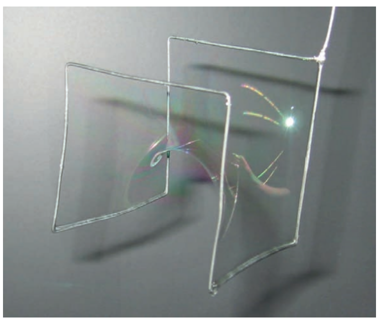


図 2　$K < 0$

せっけん膜を張らせるワイヤーフレームのモデルとして，空間内において閉曲線 Γ を考える．曲面は 2 次元的な広がりを持つ幾何学的対象であるから，2 変数関数を用いて表すことができる．D を平面 $\mathbb{R}^2$ の閉領域として，D から空間 $\mathbb{R}^3$ へのなめらかな写像 $\boldsymbol{p} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の像として（局所的に）曲面を表す．このとき，D の境界 ∂D の $\boldsymbol{p}$ による像が Γ になっているとすると，曲面 $\boldsymbol{p}$ は Γ を境界とする曲面となる．せっけん膜は変形に関して面積を極小にする曲面であるから，曲面 $\boldsymbol{p}$ を変形したときの面積の変化を見る．曲面 $\boldsymbol{p}$ 上の単位法ベクトル場を ν とし，f を D 上の関数で D の境界において 0 であるとする．$\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p} + tf\nu$ と与えると，曲面 $\boldsymbol{p}_t$ は境界を固定したままパラメータ t によって変形する曲面族を表す．このとき曲面 $\boldsymbol{p}_t$ の面積を $A(t)$ と表すと，$A(t)$ の変化率について

$$A'(0) = -2\int_D \langle V, H\nu \rangle dA \qquad \text{（第 1 変分公式）}$$

が成り立つ．ここで，$V := \left.\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right|_{t=0} = f\nu$ は変分ベクトル場と呼ばれる曲面の変形を与える法ベクトル場であり，dA は曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積要素である．したがって，曲面 $\boldsymbol{p}$ があらゆる変形について面積が極小になるための必要条件として，$H = 0$ が得られる．平均曲率が恒等的に $H = 0$ となる曲面を**極小曲面**と呼ぶ．極小曲面の $H = 0$ の条件は，変形について面積汎関数の臨界点になっているという条件（微分が消えているという条件）であるから，極小曲面が面積汎関数を極小にしているとは限らない．しかし，歴史的な経緯もあり $H = 0$ となる曲面は極小曲面と呼ばれる．



極小曲面の条件 $H = 0$ は，すなわち 2 つの主曲率が $\kappa_2 = -\kappa_1$ という関係になるということである．したがって，平坦でない極小曲面はガウス曲率 K が負となり，鞍状に曲がっている．せっけん

膜で説明すると，この条件は各点において，せっけん膜の表面張力により単位法ベクトル ν の正の向きに働く力と，逆に負の向きに働く力がつり合っている状態であると述べられる．$H=0$ は面積汎関数に関する変分問題のオイラー・ラグランジュ方程式であり，これを解けば極小曲面が得られるわけだが，2 階の偏微分方程式であり直接的に解を得ることは容易ではない．極小曲面の例として次のような曲面がある．

懸垂面（カテノイド）

円形のワイヤーフレームを 2 つ平行に向かい合わせ，その間にせっけん膜を張らせると，どのような形になるか考えてみよう．面積が最小になるように張るには，2 つの円周を最短線である線分で結んで，円柱面になるように思うかもしれないが，実際には図 3 の写真のようにくびれた円筒形のせっけん膜が張る．これはくびれることで円筒の周の長さが短くなり，結果としてこの曲面が面積最小となるためである．2 つの円形のワイヤーフレームの間隔を広げると，せっけん膜のくびれが大きくなり，あるところで 2 つに分かれる．

この極小曲面はネックレスを垂れ下げたときの曲線である懸垂線（カテナリー）を縦軸の周りに回転させてできる回転面であり，**懸垂面（カテノイド）**と呼ばれる．逆に，回転面である極小曲面は懸垂面に限る．

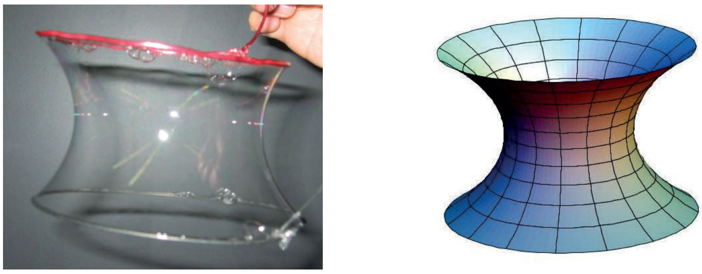


図 3　懸垂面（カテノイド）

常螺旋面（ヘリコイド）

螺旋状のワイヤーフレームにせっけん膜を張らせると，図 4 の写真のような**常螺旋面（ヘリコイド）**が得られる．これは水平方向の平面による断面が常に直線となっている極小曲面として特徴付けられる．すなわち，この極小曲面は水平な直線を回転させながら垂直方向に動かしたとき，直線が動いた軌跡として与えられる線織面である．

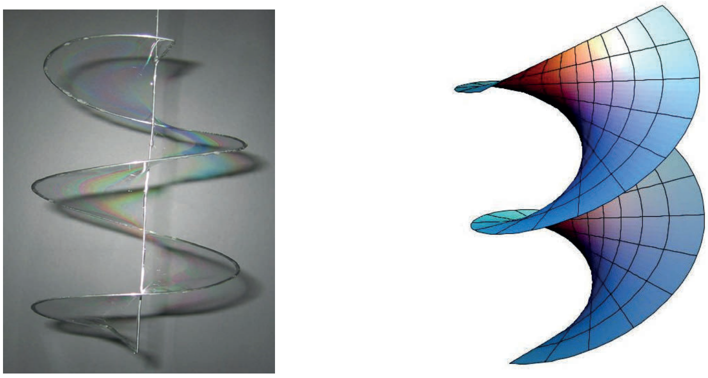


図 4　常螺旋面（ヘリコイド）

エネパーの極小曲面

図 5 の野球のボールの縫い目のような形をした曲線を境界とする極小曲面は**エネパーの極小曲面**と呼ばれる．この曲面は $H = 0$ を満たし面積汎関数の臨界点となるが，不安定なつり合いになっており，極小点ではない．したがって，面積を減らす方向に変形することができるため，せっけん膜として実現することはできない．このワイヤーフレームにせっけん膜を張らせると，写真のように 2 種類の張り方がある．この境界に対しては面積汎関数の極小点が 2 つある．

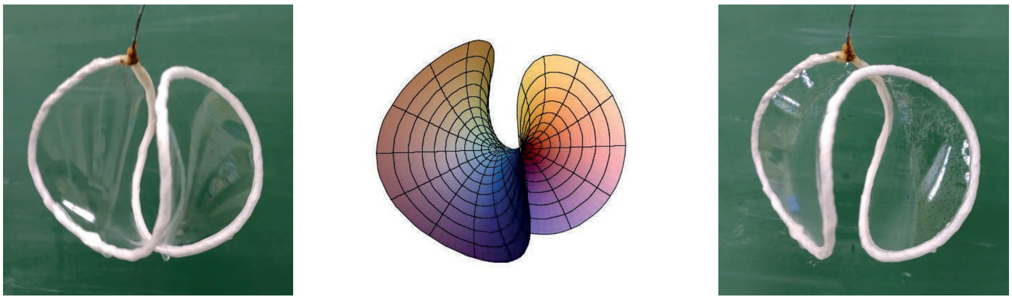


図 5　エネパーの極小曲面

極小曲面はせっけん膜の数学モデルであることを説明した．これに対して，物理学者の J.A.P. プラトーはせっけん膜について様々な実験を行い，1873 年にせっけん膜の形状の観察と理論的な考察に関する論文を発表した．膨大な実験の結果として，プラトーは 1 つの針金で作ったワイヤーフレームには少なくとも 1 つのせっけん膜が張ることを見出した．しかし，多くの実験の結果の観測であっても，どんなワイヤーフレームに対してもせっけん膜が張ることを理論的に証明したことにはならない．この問題は数学的に次のように述べられる．

プラトー問題

空間内に与えられた任意の閉曲線に対し，それを境界とする極小曲面が存在するか？

このプラトー問題は数学の研究を大いに触発し，最終的に 1930 年前後に J. ダグラスと T. ラドーによりそれぞれ独立に証明された．この業績によりダグラスは 1936 年に第 1 回のフィールズ賞を受賞している．

さらに，プラトーはせっけん膜について，ワイヤーフレームに境界を持つ膜だけでなく，与えられた曲面（支持曲面）上に境界を持ち，支持曲面上を境界が自由に動くことができるせっけん膜の観察も行った．また，複数のせっけん膜が交わったときの交叉の様子を観察した．それらの結果，せっけん膜の形状について次のような法則を見出した．

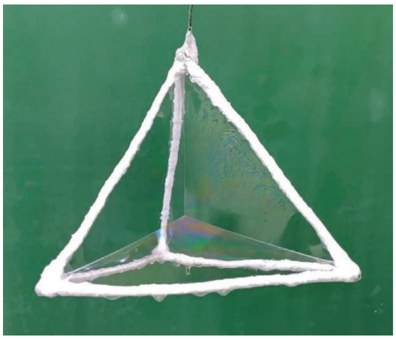
プラトーの法則

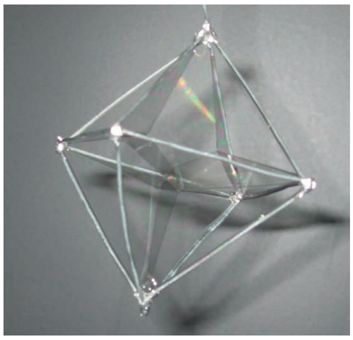
(1) 支持曲面上に自由に動く境界を持つ極小曲面は，支持曲面に対して 90° の角をなす．

(2) 極小曲面同士が交わるとき，3 つの極小曲面が滑らかな曲線において交わる．このとき，3 つの曲面が互いになす角は 120° である．

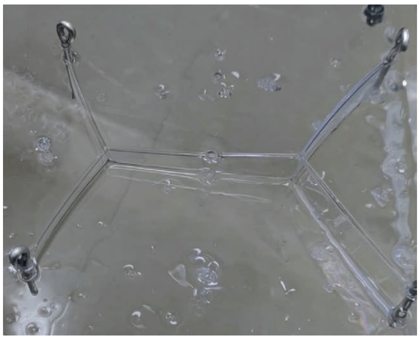
(3) 極小曲面の交わりとなる滑らかな曲線同士が交わるとき，6 つの極小曲面と 4 本の曲線が 1 点で交わる．このとき，4 本の曲線が互いになす角は $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 109.28\ldots$ 度である．

これらの法則については，後に数学的な証明が与えられ，さらにせっけん膜の交わりに現れる特異点の分類が与えられた．





せっけん膜の持つプラトーの法則の (1) と (2) から，前節にて考察した最短シュタイナー木問題をせっけん膜を使って実験することができる．2 枚のプラスチック板を平行に固定し，プラスチック板上でネットワークを作りたい点の位置に針金のピンを刺し境界を作る．このプラスチック板をせっけん液に浸し，せっけん膜を張らせると，ピンは固定された境界になり，プラスチック板上は自由に動ける境界になる．せっけん膜は境界条件を満たして，できるだけ面積が小さくなるように流れて，膜の面積が極小となる状態に落ち着く，すなわちプラスチック板上の境界の長さが極小になる．次の写真のように，この実験で 3 つのせっけん膜が 120° で交わる様子を観察することができる．



6　まとめ

理数研究ラボの講座では，極小曲面を題材として幾何学的変分問題について，高校数学までの知識を前提として解説を行った．数学的な理論とコンピュータ・グラフィックスによる可視化，さらにせっけん膜による現実世界への実現を組み合わせて説明を行うことで，学生に実在感を持って数学を理解してもらうことを目指して講座を設計した．曲面を数学的に扱うためには，2 変数関数の微分積分の知識が必要となり高校数学の範囲を超えるため，すべてを正確に解説することはできないが，微分法の極値問題への応用を拡張することにより，変分法のアイデアを説明した．3 節で扱った最短シュタイナー木問題は直観的に納得できるものであるが，本稿では，ほぼ高校までの知識でできる証明をなるべく詳しく解説した．厳密な議論には困難が伴うこと．解の存在や一意性など数学特有の考え方を学んでもらうことを狙った．

高大接続のためには，学生には高校数学の枠にとらわれず，幅広い興味と関心を持ってもらうことが大事であると筆者は考えている．本稿の講座の企画が試みとして有意義なものであることを願う．

本稿の図は数学的可視化ソフトウェア 3D-XplorMath（`https://3d-xplormath.org/`），動的数学ソフトウェア GeoGebra（`https://www.geogebra.org/`），数式処理システム Maple を使用して作成している．

参考文献

[1] Stefan Hildebrandt and Anthony Tromba（著）, 小川泰・神志那良雄・平田隆幸（翻訳）『形の法則―自然界の形とパターン』東京化学同人, 1994.

[2] John Oprea, The mathematics of soap films: explorations with Maple, Student Mathematical Library 10, American Mathematical Society, 2000.