『経済経営研究』第 6 号
2024年 3月　41－50頁

【論文】

# 競争環境と費用の部分的可逆性下での投資戦略

芝田　隆志 *1

Abstract

This study shows that the firm's invetment strategy depends on market competitiveness when the investment cost is not fully irreversible. The more intense the market competitiveness, the earlier the investment is exercised.

## 1　はじめに

Arrow（1968）によれば、企業が事業を開始する際、事業に必要となる設備（建物、工場、機械など）を設置するための投資費用は、少なくとも部分的に不可逆（irreversible）となると考えられている。たとえば、企業は、設備を設置して事業を開始した後、需要の減少や業績の悪化などの理由より、もし事業を停止するならば、不必要となる設備を第三者に売却することを考えるだろう。経済学においては、事後（事業の停止時刻）にて不必要となる設備の売却額が、事前（事業の開始時刻）に支払った設備の購入額よりも低くなるとき、投資費用は不可逆となると定義する。現実の問題を鑑みると、設備は使用頻度とともに劣化し、かつ時間とともに陳腐化するため、事後の売却額は、事前の購入額よりも低く、投資費用は不可逆となる。もし売却額が（購入額よりも低くても）正の金額として評価されるならば、投資費用は部分的に不可逆（あるいは部分的に可逆）となり、もし売却額がゼロと評価されるならば、投資費用は完全に不可逆となると定義される。

リアルオプション分析とは、数理ファイナンスにおけるオプション価格式を適用して、企業の実物資産（事業価値）を評価し、その事業の最適な開始（投資）や停止（撤退）などのタイミングを勘案する数理モデル分析である。リアルオプション分析においては、モデルを簡素化するため、投資費用の完全不可逆性を仮定することが多く、不可逆性という条件は重要なキーワードの一つとなっている。その詳細については、Dixit and Pindyck（1994）を参照されたい。それに対して実務では、投資費用は少なくとも部分的に不可逆となり、完全に不可逆とはならないと考えられている。

Shibata and Wong（2019）は、理論と実務におけるギャップを埋めるため、投資費用

*　本研究は JSPS 科研費 JP 21H00730 および公益財団法人全国銀行学術研究振興財団の助成を受けたものです。
*1　東京都立大学大学院経営学研究科教授

が完全に不可逆となる条件を緩和し、投資費用が部分的に不可逆となる条件を仮定した上で、数理モデルを構築し、企業の最適な投資タイミングについて考察した。特に、完全不可逆性下に比べて、部分的不可逆性下では、企業は投資タイミングを早めることを明らかにした。ただし、Shibata and Wong（2019）では独占市場が仮定されている。そこで、本論文では、競争市場かつ投資費用の部分的不可逆性を仮定した上で、数理モデルを構築し、企業の最適な投資タイミングについて明らかにする。

## 2　モデル

本モデル分析では、企業における投資の意思決定問題について考察する。

### 2.1　モデル設定

リスクに対して中立的な企業が、ある財・サービスを供給する事業オプションを保有すると仮定しよう。いま、もし企業はその事業を開始するならば、開始時刻に設備を設置するための投資費用（額）$I > 0$ を必要とし、その後の時刻 $t$ においてキャッシュフロー $X(t)$ を獲得する。数学的には、キャッシュフロー $X(t)$ は、幾何ブラウン運動

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{X(t)} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z(t) \tag{1}$$

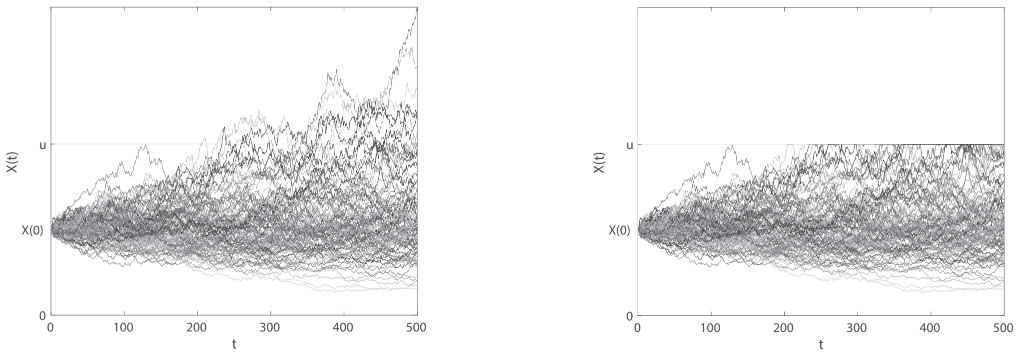
に従うと仮定する。ただし、初期値は $X(0) = x > 0$、期待収益率は $\mu > 0$、ボラティリティは $\sigma > 0$、$z(t)$ は標準ブラウン運動とする。ここで、キャッシュフロー $X(t)$ は、標準ブラウン運動（不確実性を表す項）を含むため、時刻 $t$ とともに不確実に変動することになる。

本モデル分析においては、キャッシュフロー $X(t)$ に上限反射壁（upper reflecting barrier）$u \in (0, +\infty)$ が存在すると仮定する。具体的には、キャッシュフロー $X(t)$ が、低い水準から上限反射壁 $u$ に到達するならば、次の瞬間的な時刻 $t$ において、$X(t)$ は $u$ よりも大きい水準に変動することはできず、$X(t)$ は $u$ よりも小さい水準にランダムに変動する。このような上限反射壁 $u$ を組み入れたモデル研究には、Dixit and Pindyck（1994）の 8 章 2 節のモデルを挙げられる。上限反射壁 $u$ の存在は、市場環境を競争市場と表現することになる。なぜならば、もし上限反射壁 $u$ が存在しなければ、企業は多額のキャッシュフローを獲得できるのに対して、もし上限反射壁 $u$ が存在するならば、企業は多額のキャッシュフローを獲得できないからである。すなわち、上限反射壁 $u$ の存在は、市場環境を競争市場と表現し、上限反射壁 $u$ の水準（大小関係）が、市場における競争強度を表すこととなる。たとえば、もし $u$ の水準が大きいならば、企業は多額のキャッシュフローを獲得できるため、その市場環境は競争強度が弱く、もし $u$ の水準が小さいならば、企業は少額のキャッ

シュフローしか獲得できないため、その市場環境は競争強度が強いと定義可能となる。したがって、上限反射壁 $u$ の水準は、市場における競争強度パラメータとなる。

| $r$ | $\mu$ | $\sigma$ | $X(0)$ | $u$ | $I$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 0.01 | 0.2 | 0.5 | 1 | 10 |

**表１　基本パラメータ**




(a) 独占（$u \uparrow +\infty$）市場　　(b) 競争（$u < +\infty$）市場

**図１　キャッシュフローのサンプルパス**

図 1(a) と (b) は、キャッシュフロー $X(t)$ のサンプルパス（sample path）を描写している。サンプルパスの導出の際に用いたパラメータは、表 1 の通りである。図 1(a) は独占（$u \uparrow +\infty$）市場を描写しており、$X(t)$ は上限なくランダムに変動することができる。それに対して、図 1(b) は競争（$u < +\infty$）市場を描写しており、$X(t)$ が下から $u$ に到達すると、$u$ よりも小さい水準に跳ね返されてしまい、$X(t)$ は $u$ よりも小さい水準の範囲においてランダムに変動することになる。

本モデル分析においては、競争市場を仮定するのに加えて、投資費用 $I$ に対する部分的不可逆性を仮定する。Dixit and Pindyck（1994）の８章２節のモデルでは、競争市場において、投資費用 $I$ の完全不可逆性が仮定されている。完全不可逆性の条件下では、事前（開始時）に投下した設備購入額 $I$（投資費用）は、事後（停止時）にはゼロとなり、企業は投資費用 $I$ を事後的には１円たりとも回収できないことになる。それに対して、部分的不可逆性の条件下では、企業は投資費用 $I$ のうちの一部の金額を事後的に回収できることになる。本モデル分析では、事業の停止時刻において、投資費用 $I$ のうちの一部の金額 $kI$ を $(0 < k \leq 1)$、企業は獲得できると仮定する。

事業の開始（投資）時刻と停止（撤退）時刻は

$$T_{\mathrm{I}} := \inf\{t \geq 0, X(t) \geq x_{\mathrm{I}}\}$$
$$T_{\mathrm{A}} := \inf\{t \geq T_{\mathrm{I}}, X(t) \leq x_{\mathrm{A}}\}$$

と定義される。ただし、$x_{\mathrm{I}}$ を投資の臨界値、$x_{\mathrm{A}}$ を撤退の臨界値を表す。下添え字 “I” と “A” は、投資（investment）と撤退（abandonment）のそれぞれの頭文字を表す。

## 2.2　投資後における事業価値

事業を開始（投資）した後の任意の時刻において、企業のキャッシュフローの割引現在価値 $v(x)$ は、

$$v(x) = \frac{1}{r-\mu}x + H_\beta G_\beta x^\beta + H_\gamma G_\gamma x^\gamma \tag{2}$$

となる。ただし、$\beta, \gamma, H_j, G_j$ は

$$\begin{aligned}
\beta &:= \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \left(\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}\right)^{1/2} > 1 \\
\gamma &:= \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \left(\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}\right)^{1/2} < 0 \\
H_j &:= x_{\mathrm{A}}^{-s}\left(kI - \frac{1}{r-\mu}x_{\mathrm{A}}\right) + \frac{1}{s}\frac{1}{r-\mu}u^{1-s}, \quad j, s \in \{\beta, \gamma\},\ j \neq s \\
G_j &:= \left(x_{\mathrm{A}}^{j-s} - \frac{j}{s}u^{j-s}\right)^{-1}, \quad j, s \in \{\beta, \gamma\},\ j \neq s
\end{aligned}$$

と定義される。(2) 式の導出については付録を参照されたい。(2) 式の右辺第 1 項は、キャッシュフローの本源的価値を表し、右辺第 2 項と第 3 項は、$X(t)$ が上限反射壁 $u$ と停止臨界値 $x_{\mathrm{A}}$ にそれぞれ到達する事象に対するオプション価値を表す。

事業を開始（投資）した後の時刻において、企業が事業を最適に停止させる臨界値 $x_{\mathrm{A}}^*$は、

$$\frac{1}{r-\mu} + H_\beta G_\beta \beta x_{\mathrm{A}}^{\beta-1} + H_\gamma G_\gamma \gamma x_{\mathrm{A}}^{\gamma-1} = 0 \tag{3}$$

を満たすように決定される。ここで、“$*$” は最適解を表す。(3) 式の導出については付録を参照されたい。すなわち、企業が事業を開始した後の任意の時刻 $t$ において、もしキャッシュフロー $X(t)$ が、上から臨界値 $x_{\mathrm{A}}^*$ に到達するならば、企業は事業を停止することが最適となる。

キャッシュフローの割引現在価値（2）式と事業停止の臨界値（3）式は、競争市場かつ投資費用の部分的不可逆性 $(0 < k \leq 1)$ 下で導出されたことに注意されたい。それらの特徴

を明らかにするために、競争市場かつ投資費用が完全に不可逆 ($k = 0$) となるベンチマーク・ケースを考えよう。(2) 式と (3) 式に $k \downarrow 0$ を代入すると、

$$\lim_{k \downarrow 0} v(x) = v_0(x) = \frac{1}{r-\mu}\left(x - \frac{1}{\beta}u^{1-\beta}x^{\beta}\right) \tag{4}$$

$$\lim_{k \downarrow 0} x_{\mathrm{A}} = 0 \tag{5}$$

が得られる。価値 (2) 式には、事業停止に対するオプション価値（第 3 項）が存在するが、価値 (4) 式には、そのオプション価値が存在しない点に注意されたい。換言すれば、部分的不可逆性下では、(3) 式により停止臨界値が存在するのに対して、完全不可逆性下では、(5) 式により停止臨界値が存在しないことを意味している。

### 2.3　完全不可逆性下の投資戦略

本節では、ベンチマーク・ケースとして、競争市場 ($u < +\infty$) かつ投資費用の完全不可逆性 ($k = 0$) の下、企業の最適な投資戦略について考える。

最適化問題は、

$$f_0(x) := \max_{x_{\mathrm{I0}}} \left(\frac{x}{x_{\mathrm{I0}}}\right)^{\beta} \left\{ v_0(x_{\mathrm{I0}}) - I \right\} \tag{6}$$

と定義される。ここで、下添え字 “0” は、投資費用の完全不可逆性 ($k = 0$) を表す。最大化問題 (6) 式を $x_{\mathrm{I0}}$ で微分することにより、最適な投資臨界値 $x^*_{\mathrm{I0}}$ は、

$$x^*_{\mathrm{I0}} = \frac{\beta}{\beta - 1}(r - \mu)I \tag{7}$$

となる。(7) 式の投資臨界値 $x^*_{\mathrm{I0}}$ は、$u$（競争強度パラメータ）を含まず、独占市場 ($u \uparrow +\infty$) における臨界値と同一となる。その理由は、(4) 式に $u \uparrow +\infty$ を代入すると $v(x) = x/(r-\mu)$ となり、最大化問題 $\max_{x_{\mathrm{I0}}}(x/x_{\mathrm{I0}})^{\beta}\{x_{\mathrm{I0}}/(r-\mu) - I\}$ に対する最適な臨界値は (7) 式と同一となるからである。この結果は、Dixit and Pindyck (1994) の 8 章 2 節にて証明されたもので、次の補題として纏めることができる。

**補題 1（Dixit and Pindyck, 1994）** 投資費用の完全不可逆性下では、企業の最適な投資タイミングは、独占市場と競争市場において同一となり、市場における競争強度には依存しない。

補題 1 は、投資費用の完全不可逆性下で成立する。このとき、投資費用の部分的不可逆

性下でも、同一の結果が得られるかの否かについては、非常に興味深い点であり、本論文における研究テーマとなっている。この点については次節にて考察することにしよう。

### 2.4　部分的不可逆性下の投資戦略

本節では、競争市場 ($u < +\infty$) かつ投資費用の部分的不可逆性 ($0 < k \leq 1$) の下、企業の最適な投資戦略を導出し、その特徴について考察する。

最適化問題は、

$$f(x) := \max_{x_{\mathrm{I}}} \ \Big(\frac{x}{x_{\mathrm{I}}}\Big)^{\beta}\big\{v(x_{\mathrm{I}}) - I\big\} \tag{8}$$

と定義される。最適な投資臨界値 $x_{\mathrm{I}}^*$ は、

$$(\beta - 1)\frac{1}{r-\mu}x_{\mathrm{I}} + (\beta - \gamma)H_{\gamma}G_{\gamma}x_{\mathrm{I}}^{\gamma} - \beta I = 0 \tag{9}$$

を満たすように決定される。(9) 式の導出については付録を参照されたい。(9) 式には、$H_\gamma$ と $G_\gamma$ に $u$（競争強度パラメータ）が含まれているため[1]、次の命題が得られる。

**命題 1**　投資費用の部分的不可逆性の下では、企業の最適な投資タイミングは、独占市場と競争市場とでは異なり、市場における競争強度に依存する。

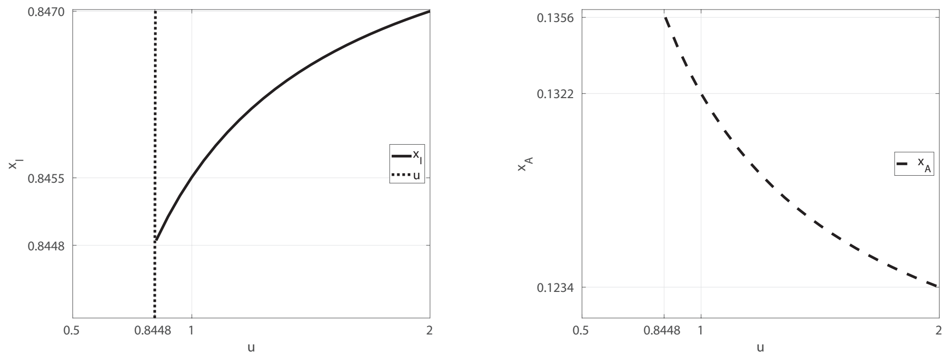
投資の臨界値 $x_{\mathrm{I}}^*$ の特徴を考察するため、表 1 の基本パラメータと $k = 0.5$ を仮定して、数値計算を実行する。図 2(a) は、横軸 $u$（競争強度パラメータ）に対して、縦軸の実線 $x_{\mathrm{I}}^*$ は、部分的不可逆性の下での投資の臨界値であり、縦軸の点線 $u$ は、競争強度を表す 45 度線である。なお、完全不可逆性下における投資の臨界値は、$x_{\mathrm{I0}}^* = 0.8702$ の水準にて水平となり、$u$ には依存しない（図への描写は省略）。もし $u$ が 0.8448 未満の範囲となるならば、企業は投資を実行しないが、もし $u$ が 0.8848 以上の範囲となるならば、$u$ の水準に応じて、企業は投資を実行することになる。たとえば、$u$ =1 と仮定しよう。このとき、投資費用の部分的不可逆性の下での臨界値は、$x_{\mathrm{I}}^* = 0.8455$ となり、投資費用の完全不可逆性の下での臨界値 $x_{\mathrm{I0}}^* = 0.8702$ よりも小さくなる。すなわち、投資費用の部分的不可逆性の下では、企業は投資を早めることとなる。また、臨界値 $x_{\mathrm{I}}^*$ は $u$ に対して単調に増加するため、競争強度が弱まれば弱まるほど（$u$ が大きいければ大きいほど）、企業は投資タイミングを遅延させることを意味する。

図 2(b) は、$u$（競争強度パラメータ）に対する $x_{\mathrm{A}}^*$（停止臨界値）を描写する。破線は停止臨界値 $x_{\mathrm{A}}^*$ を表し、$u \geq 0.8848$ の範囲において、企業は投資を実行（事業を開始）する

ため、その同じ範囲に対して、事業停止の臨界値が存在することに注意されたい。たとえば、$u = 1$ と仮定しよう。このとき、$X(t)$ が $x^*_{\mathrm{I}} = 0.8455$ に下から到達するとき、企業は事業を開始し、その後、もし $X(t)$ が下落して $x^*_{\mathrm{A}} = 0.1322$ に上から到達するならば、企業は事業を停止することになる。臨界値 $x^*_{\mathrm{A}}$ は $u$ に対して単調に減少するため、競争強度が弱まれば弱まるほど（$u$ が大きいければ大きいほど）、企業は事業を停止するタイミングを遅延させることになる。

図 2(a) と 2(b) で得られた結果は、次のように纏めることができる。

**系 1**　市場における競争強度が弱まれば弱まるほど、企業は事業の開始 ( 投資 ) を遅延させ、かつ開始した後における事業の停止をも遅延させる。




(a) 投資臨界値　　(b) 停止臨界値

**図 2　競争強度の効果**

## 3　おわりに

リアルオプション分析では、独占市場かつ投資費用の完全不可逆性が仮定されることが多い。それに対して、本論文では、競争市場かつ投資費用の部分的不可逆を仮定した上で、最適な投資のタイミングについて考察した。特に、本研究では、投資費用の部分的不可逆性下では、最適な投資タイミングが、独占市場と競争市場において異なり、競争強度に依存することを明らかにした。この理由とは、次の 2 つの理由から得られる。第 1 に、完全不可逆性の下では、企業は事業を停止した場合の残余価値がゼロとなるため、企業は事業の停止を考慮に入れないのに対して、部分的不可逆性の下では、企業は事業を停止した場合の残余価値がプラスとなるため、企業は事業の停止を考慮に入れることになる。第 2 に、部分的不可逆性の下では、企業は事業の停止を競争強度に依存して決定する。これらの 2 つの理由のため、投資費用が部分的に不可逆となる場合には、企業は競争強度に依存して

投資タイミングを決定することとなる。

　リアルオプション数理モデルでは、モデルを簡素するために、実務に合致しない条件が仮定される場合がある。もしリアルオプション数理モデルを実務で使用しようとするならば、実務に合致しない条件は、実務に合致する条件に変更する必要がある。今後の研究では、リアルオプション数理モデルにおいて、実務に合致しない条件を、実務に合致する条件に変更した上で、実務で使用可能となるリアルオプション数理モデルを構築していきたいと考えている。

## 付録

関数 $v(x)$ の導出

　事業を開始した後において、企業のキャッシュフローの割引現在価値 $v(x)$ は、

$$v(x) = \frac{1}{r-\mu}x + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \tag{A.1}$$

となる一般解をもち、2 つのバリュー・マッチング（value matching）条件

$$v'(u) = 0, \quad v(x_{\mathrm{A}}) = kI \tag{A.2}$$

を満たす必要がある。バリューマッチング条件の詳細についてはDixit and Pindyck(1994)を参照されたい。(A.1) 式を用いて、(A.2) 式を書き直すと、

$$\frac{1}{r-\mu} + \beta B u^{\beta-1} + \gamma C u^{\gamma-1} = 0 \tag{A.3}$$

$$\frac{1}{r-\mu}x_{\mathrm{A}} + Bx_{\mathrm{A}}^{\beta} + Cx_{\mathrm{A}}^{\gamma} = kI \tag{A.4}$$

となる。(A.3) 式と (A.4) 式を $B$ と $C$ について解くことにより、$v(x)$ は

$$\begin{aligned} v(x) = {} & \frac{1}{r-\mu}x + \underbrace{\left\{x_{\mathrm{A}}^{-\gamma}\left(kI - \frac{1}{r-\mu}x_{\mathrm{A}}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{1}{r-\mu}u^{1-\gamma}\right\}\left(x_{\mathrm{A}}^{\beta-\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}u^{\beta-\gamma}\right)^{-1}}_{=B} x^{\beta} \\ & + \underbrace{\left\{x_{\mathrm{A}}^{-\beta}\left(kI - \frac{1}{r-\mu}x_{\mathrm{A}}\right) + \frac{1}{\beta}\frac{1}{r-\mu}u^{1-\beta}\right\}\left(x_{\mathrm{A}}^{\gamma-\beta} - \frac{\gamma}{\beta}u^{\gamma-\beta}\right)^{-1}}_{=C} x^{\gamma} \end{aligned} \tag{A.5}$$

となり、$H_j$ と$G_j$ を用いて書き直すと、(A.5) 式は (2) 式となる。

事業停止の臨界値 $x_{\mathrm{A}}$ の導出

スムース・ペイスティング (smooth pasting) 条件 $v'(x_{\mathrm{A}}) = 0$ を整理することにより、(3) 式が導出される。

投資（事業開始）の臨界値 $x_{\mathrm{I}}$ の導出

(8) 式を $x_{\mathrm{I}}$ について微分してゼロとすると、

$$\left(\frac{x}{x_{\mathrm{I}}}\right)^{\beta}\left\{(-\beta)x_{\mathrm{I}}^{-1}\{v(x_{\mathrm{I}}) - I\} + v'(x_{\mathrm{I}})\right\} = 0 \tag{A.6}$$

が得られる。(A.6) 式に $x_{\mathrm{I}}^{\beta+1}x^{-\beta}$ を掛けることにより、

$$(1-\beta)\frac{1}{r-\mu}x_{\mathrm{I}} + \underbrace{(\beta-\beta)}_{=0}H_{\beta}G_{\beta}x_{\mathrm{I}}^{\beta} + (\gamma-\beta)H_{\gamma}G_{\gamma}x_{\mathrm{I}}^{\gamma} + \beta I = 0$$

となり、整理することにより (9) 式が導出される。

注

1 (9) 式の左辺第 2 項において、

$$\lim_{k\downarrow 0} H_{\gamma} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{r-\mu}u^{1-\beta}, \quad \lim_{k\downarrow 0} G_{\gamma} = 0$$

が成立する。すなわち、$k = 0$ のとき、$x_{\mathrm{I}}^{*} = x_{\mathrm{I0}}^{*}$ となることを確認されたい。

参考文献

[1] Arrow, K. J. 1968. Optimal capital policy with irreversible investment. In Wolfe, J. N. ed. Value, capital, and growth: Papers in Honour of Sir John Hicks. Edinburgh University Press.

[2] Dixit, A. K. and Pindyck, R. S. 1994. Investment under uncertainty. Princeton University Press, NJ.

[3] Shibata, T. and Wong, K. P. 2019. Investment under uncertainty with variable costly reversibility. International Review of Economics and Finance 59, 14–28.