2022 年度 学位論文（修士）

“STL データで表現される複雑形状（翼果）の直接離散化法を用いた数値解析”

2023 年 1 月 27 日

東京都立大学大学院
システムデザイン研究科　システムデザイン専攻
航空宇宙システム工学域　博士前期課程

21863622　柴田龍一

指導教員　田川俊夫

目次

記号表

(Cx, Cy, Cz)	[m]	解析領域
D	[N]	抗力
$\vec{e}_i$	[−]	デカルト座標系の基本ベクトル
$\vec{f}$	$[\mathrm{N/m^3}]$	流体力
$\vec{F}$	[−]	無次元流体力
$\vec{g}$	[m]	重力加速度
$\boldsymbol{I}$	$[\mathrm{kg \cdot m^2}]$	慣性モーメントテンソル
k	[−]	加速係数
L	[m]	代表長さ
$\vec{L}$	$[\mathrm{kg \cdot m^2/s}]$	角運動量
p	[Pa]	圧力
P	[−]	無次元圧力
$\vec{R}_c$	[−]	回転軸からの距離（無次元）
Re	[−]	レイノルズ数
t	[s]	時間
τ_0	[−]	無次元最大時間
τ	[−]	無次元時刻
$\vec{T}$	$[\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}]$	トルク
$\vec{T}'$	[−]	無次元トルク
$\vec{u}$	[m/s]	速度
u_{in}	[m/s]	流入速度の大きさ
$\vec{U}$	[−]	無次元速度
$\vec{u}_0$	[m/s]	重心の速度，代表速度
v	$[\mathrm{m^3}]$	物体の体積
V	[−]	無次元体積
$\vec{x}_0$	[m]	重心の位置

Greek letters		
ρ'	[−]	密度比
ρ_l	[kg/m^3]	流体の密度
ρ_s	[kg/m^3]	物体の密度
$\vec{\theta}$	[rad]	慣性座標から見た物体の角
$\vec{\omega}$	[rad/s]	慣性座標から見た物体の角速度
$\vec{\Omega}$	[−]	無次元角速度
$\phi(\vec{X})$	[−]	符号付き距離関数
$\boldsymbol{\sigma}$	[Pa]	応力テンソル
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$	[1/s]	ひずみ速度テンソル
μ	[Pa・s]	粘性係数
ν	[m^2/s]	動粘性係数

第1章　緒言

1.1　研究背景

1.1.1 翼果について

多くの植物は種の保存のために有翼の種子を風に乗せて拡散し，このような種子を翼果という．翼果はできるだけ下降速度が小さく，できるだけ長く空中を飛べるように設計されている．翼果の飛行は図のように直滑降，直線的な滑空，螺旋を描く滑空，揺動，垂直な軸周りに回転，二軸の回転があり，大きくまとめると揺動飛行，回転・自転飛行などの 3 つに分類される[1]．飛行形態は種子の質量中心と空力中心の位置関係や形状によって決定される．翼果の飛行システムは，動物の飛行のように駆動のための神経筋制御を行わない単純な構成であり，翼が損傷しても飛行を維持できる．この点において翼果は機械的に堅牢な設計となっており，大気研究や災害対策，その他商用の分野における MAV（Micro Air Vehicle）やドローンの開発で多くの研究者を魅了している[2]．よって本研究で翼果を含む，複雑形状周りの流れと物体の運動に関する数値解析手法を開発することで，MAV 等小型航空機の設計に役立てられることが期待できる．

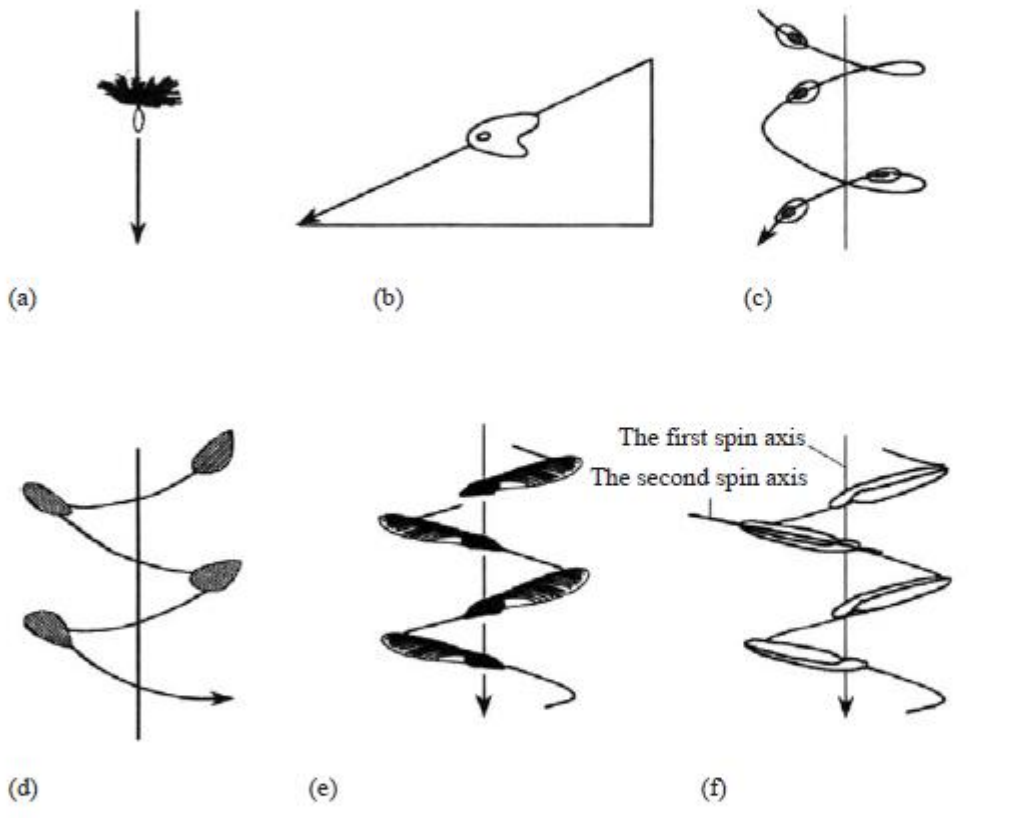


図1 翼果の飛行形態[1]

1.1.2 CFD（Computational Fluid Dynamics）とは

CFD による流体の数値解析は任意の時空間における物理量（速度場，圧力場など）を算出，可視化でき，計測機器の影響を受けないという大きな工学的利点がある．格子分割について，現代では境界付近の計算精度が高い境界適合型の構造格子や非構造格子，カットセル法を適用した直交格子などを計算格子として解析が行われ，設計開発の短期間化，低コスト化に多大な貢献をしている．具体的には航空機や船舶，自動車などの機械設計，建築工学における高層ビルの風圧や市街地の風環境の予測，医学における血流の解析，自転車や水泳，スキージャンプなどのスポーツの分野で CFD が用いられている[3].

1.1.3 非慣性座標系の導入

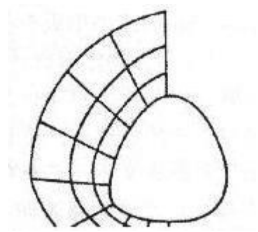
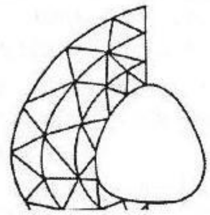
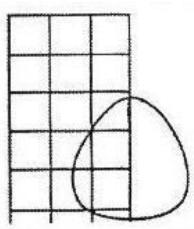
本研究では物体と流体がともに運動する，移動物体周りの流れの計算を行っている．流体中に存在する移動物体の数値的な取り扱いに関しては，慣性座標系からみて物体境界が移動する系を取り扱う手法がある．この手法では移動する固体境界面の取り扱いに注意を払う必要があり，境界が移動するたびに格子を再生成する方法やセル内で固体形状を表現する手法がある[4]．これらの手法では物体の形状や格子を物体が移動するたびに計算する必要があり計算コストが高くなる．一方，移動する物体から見た系（非慣性座標系）を考えれば物体境界は固定され周囲の流体場が移動するので，物体境界は一度算出するだけでよく計算コストを削減できる．よって本研究では物体から見た非慣性座標系を扱い，非慣性座標系における基礎方程式を解いた．

1.1.4 直交格子

直交座標格子は格子点当たりの計算時間及びメモリが最小，格子生成が容易，空間微分の離散化について高次精度化が容易といった利点を持つ．しかし，物体境界が格子に沿っていない場合，物体境界の近傍場を正確に解くことが難しいといった欠点も知られている[5]．ここで流体計算に用いられる格子は大きく分けて境界適合格子，非構造格子，直交座標格子の三種類に分類され，それぞれの特徴を表 1 に示す．非構造格子を使用できる有限要素法は形状適応性に優れている反面，計算時間と記憶容量が多く必要になる[6].

有限体積法も任意の形状に対応できるため複雑形状の解析に多く使用されている一方，二次精度を超えて高次精度化が難しいといった欠点がある [7]．よって本研究では計算効率を高めるため有限差分法と直交格子を用いた．有限差分法や直交格子の欠点である形状適応性に関しては，複雑形状を符号付き距離関数で直交格子に埋め込み，境界付近での精度を直接離散化法で高めることにより補った．

表 1　格子の種類[3]

格子の種類	境界適合格子	非構造格子	デカルト座標格子
			
格子生成	・簡単な形状は容易 ・3 次元複雑形状には単一格子の形成が困難	・任意形状に対して自動形成可 ・解適合格子が容易 ・格子作成の計算量が大きい	・任意形状に対して自動形成可 ・解適合格子が容易
計算精度 及び 計算時間	・高効率，高精度な解法 ・物体表面近くの精度が必要な問題に適している	・計算時間は境界適合格子と遜色ないレベルに達した ・メモリ要求が大きく，空間高次精度化も困難	・格子点当たりの計算時間およびメモリは最小 ・物体境界の精度が特別な扱いなしでは悪い

1.1.5 複雑形状の作成（STL ファイル）

本研究では翼果のような複雑形状周りの流れを解く必要があり，物体モデルを計算領域上で表現しなければならない．複雑形状の表現について，本研究では物体の表面形状が格納された STL データを直交格子内に埋め込むことで符号付き距離関数（Level Set 関数）を作成し，物体の形状表現を行っている．ここで STL（Stereolithography）ファイルとは 3D CAD ソフト用のファイルフォーマットの一つで、ほとんどのソフトにサポートされており汎用性が高く，3 次元の立体形状の表面を小さな三角形（ポリゴン）の集合体で表現している[8].

1.1.6 複雑形状の作成（符号付き距離関数）

直交格子系における任意形状の高精度な表現方法として，界面からの距離や法線が得られる陰関数である符号付き距離関数を用いる[9]．符号付き距離関数は，定義点と物体境界の距離を表す関数であり，符号は物体の内外を表す．本研究では，STL データの情報から各格子点における距離関数を算出し，直交格子内で物体を表現している．

1.1.7 物体境界付近の離散化精度

直交格子法では，格子生成を容易に完全自動化できるが物体が階段状になってしまうため物体形状を正確に再現し，かつ精度よく流れ場を解析するのには膨大な格子点数を要する．計算精度を維持しつつ格子点数を減らす手法としては IB 法（Immersed Boundary Method）や Cut-Cell 法が広く用いられている[10]．IB 法では格子は直交格子のままとし，境界条件によって本来の滑らかな物体形状を模擬する．この手法の長所は格子生成の容易さ・ロバスト性を損なわない点であるが,境界近傍で NS 方程式（Navier Stokes 方程式）を解いていないため質量保存則が満たされないという欠点をもつ. Cut-Cell 法は質量保存則を満たすという優位性があるが，特に三次元においては煩雑な場合分け，例外処理を要し，格子生成のロバスト性が失われる要因となりうる[11]．そこで本研究では直交格子を用いて複雑形状周りの流れを解くための手法として直接離散化法を使用した．直接離散化法は境界に隣接する計算セルに対し，物体境界の位置と境界条件に基づいて NS 方程式を直接的に離散化する手法であり[12]，IB 法などと比べて壁面付近における流体場をより高精度で解くことができる．

1.1.8 並列計算による高速化

本研究では画面描画用の GPU を汎用計算に利用する GPUPU（General Purpose on Graphic Processer Unit）という手法を使用し，並列化計算を行ったことにより単一の CPU 計算に比べ大幅な高速化を実現した．GPU を使用する際には C++AMP（C++ Accelerated Massive Parallelism）という言語を用いており，使用する GPU を選ばないなどのメリットがある[3].

1.2 研究目的

本研究の研究目的は，物体（翼果）の落下や飛行に関する数値解析手法の確立であり，イメージは図に示した．物体の落下現象では物体の運動と流体の運動が相互に作用しており流体場，物体双方の支配方程式を解く必要がある．まずは流体場の解析について妥当性を検証し，次に物体の自由落下現象を解析することにより，本数値解析手法が物体の落下現象に対して妥当であるか検証した．手順は以下のとおりである．

1. 一様流中に置かれた球周りの流れを解析し，流体場の再現ができているか，また算出された流体力が妥当か確認する．
2. 物体の自由落下計算を行い，終端速度を実験値と比較することにより，物体の落下現象の解析精度を定量的に評価する．

なお，本研究では非圧縮 Newton 流体を仮定した．

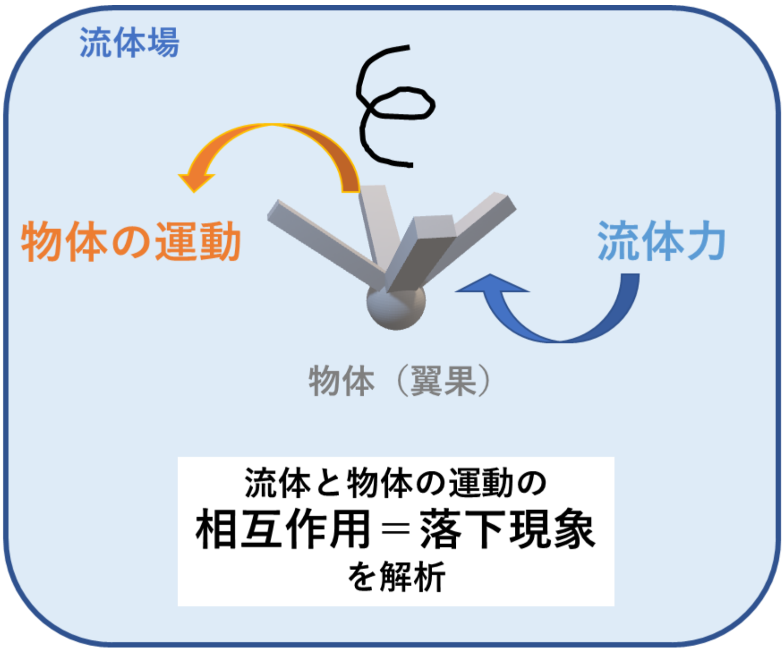


図2 目的のイメージ

第2章　数値解析手法

2.1　概要

本章では，本研究における数値解析手法を示す．本研究では物体が落下するという現象を再現するために流体場の運動方程式と剛体を仮定した物体の運動方程式を解いている．用いる座標系については，検証計算（球周りの流れ）では慣性座標系，本計算（物体の自由落下）では物体から見た非慣性座標系を用いている．物体が流体中を自由落下するとき，物体と流体の運動は相互に作用している．流体から物体への影響は，流体力やトルクにより生じ，物体から流体への影響は，物体の加速度，角加速度による項（慣性力，コリオリ力，遠心力，オイラー力）により生じる．流体の支配方程式は Projection 法を用いて，圧力の反復修正をしながら速度場，圧力場を求める．物体の運動は剛体の運動方程式を解くことにより求めるが，流体力は物体の表面における応力を数値的に面積分して求める．流体場の計算格子は直交格子を用いる．

解析領域内における物体の複雑な形状の表現について，まず物体モデルを CAD ソフトで作成し STL ファイル形式で出力する．これを解析コード上で読み込み，物体の表面形状の情報を直交格子内のレベルセット関数に埋め込んでいる．無次元化に関しては，球周りの流れでは球の直径を代表長さ，流入速度を代表速度としている．物体の自由落下計算では四角錐の一部を代表長さ，実験により得た終端速度を代表速度とした．レイノルズ数(Re)，物体と流体の密度比(ρ')，無次元重力(G)を無次元数とする．流体の物性値は20℃, 1atmおける空気のものを使用する．

2.2　解析モデル

図3，図4に妥当性検証，本計算の解析モデルを示す．妥当性検証では一様流に置かれた球周りの流れを計算する．なお流入速度を代表速度u_{in}，球の直径を代表長さLとし，計算領域を$(Cx, Cy, Cz) = (15L, 8L, 8L)$，球の中心座標を$(x, y, z) = (4L, 4L, 5L)$とする．本計算では物体の自由落下現象を解析する．重力加速度$\vec{g}$はx軸の負の方向に働き，計算領域を$(Cx, Cy, Cz) = (24L, 10L, 10L)$，物体モデルの中心座標を$(x, y, z) = (6L, 5L, 5L)$とする．

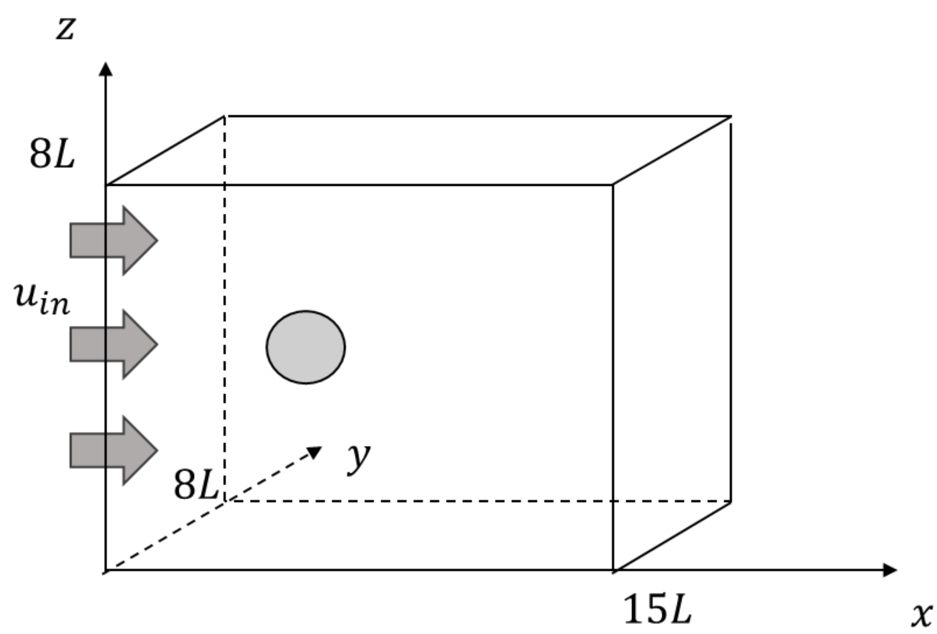


図３　解析モデル（球周りの流れ）

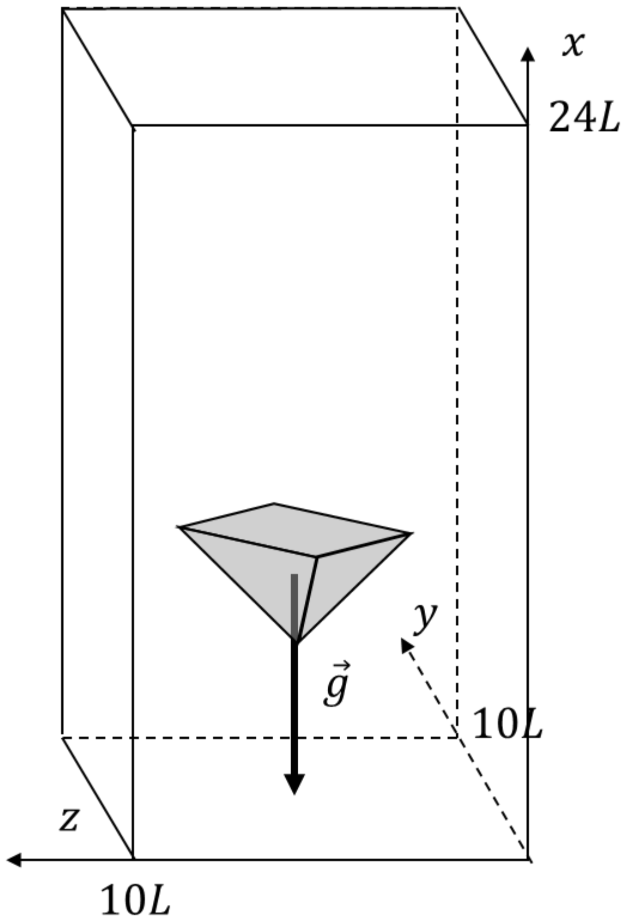


図４　解析モデル（自由落下）

2.3　基礎方程式の導出

2.3.1　流体場の基礎方程式

慣性座標系から見た流体場の基礎方程式は以下のようになる．ここで慣性座標系，非慣性座標系から見たある物理量fをそれぞれ$f^{(s)}, f^{(r)}$とし，ρ_lを流体の密度とする．

【連続の式】

$$\vec{\nabla}^{(s)} \cdot \vec{u}^{(s)} = 0 \tag{1.1}$$

【Navier-Stokes の運動方程式（以下 NS 方程式）】

$$\frac{\partial \vec{u}^{(s)}}{\partial t} + \left(\vec{u}^{(s)} \cdot \vec{\nabla}^{(s)}\right)\vec{u}^{(s)} = -\frac{1}{\rho_l}\vec{\nabla}^{(s)} p + \nu {\nabla^{(s)}}^2 \vec{u}^{(s)} \tag{1.2}$$

物体が並進 1 自由度，回転 1 自由度（x方向成分）の 2 自由度で運動することを仮定し，物体から見た非慣性座標系における流体場の支配方程式を求める．なおpはスカラーなので座標系に依らない．

図 5 に示すように，慣性座標系から見た物体重心の位置ベクトル，速度ベクトル，角，角速度ベクトルをそれぞれ，$\vec{x}_0, \vec{u}_0, \theta, \vec{\omega}$とする．

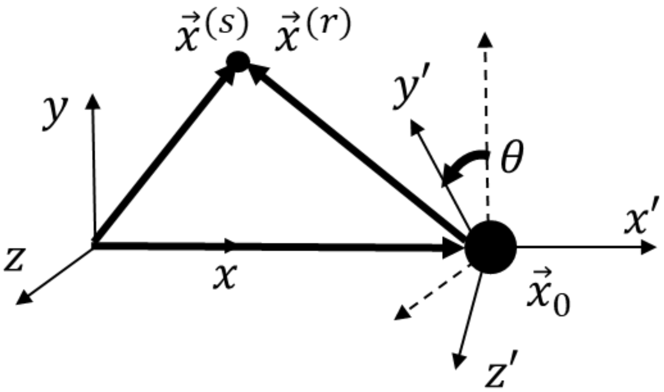


図5　慣性座標，非慣性座標の対応

図 5 より，慣性座標系から見た位置ベクトル$\vec{x}^{(s)}$と非慣性座標系からみた位置ベクトル$\vec{x}^{(r)}$を考えると次の式が成り立つ．

$$\vec{x}^{(s)} = \vec{x}_0 + \vec{x}^{(r)} \tag{1.3}$$

ここで，時間を止めた状態で基本ベクトルの空間微分を考える．直交格子を使用した場合，基本ベクトルは場所に依らないので，以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial \vec{e}_i^{(s)}}{\partial x_j^{(s)}} = \frac{\partial \vec{e}_i^{(r)}}{\partial x_j^{(s)}} = \frac{\partial \vec{e}_i^{(s)}}{\partial x_j^{(r)}} = \frac{\partial \vec{e}_i^{(r)}}{\partial x_j^{(r)}} = 0 \tag{1.4}$$

であり，任意のベクトル$\vec{A}$の各成分について

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)_s = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)_r \tag{1.5}$$

が成り立ち，連続の式は

$$\vec{\nabla}^{(s)} \cdot \vec{u}^{(s)} = \vec{\nabla}^{(r)} \cdot \vec{u}^{(r)} = 0 \tag{1.6}$$

となる．

2.3.2　流体場の基礎方程式（系が並進する場合）

図 6 のようなx軸方向のみ並進する物体の非慣性座標系（並進系）における流体場の支配方程式を導出する．任意の位置ベクトルの座標を慣性座標系から見たとき，

$$\vec{x}^{(s)} = \vec{x}_0 + \vec{x}^{(r)} \tag{1.7}$$

が成り立つ．これを時間微分すると，

$$\frac{\partial \vec{x}^{(s)}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}^{(r)}}{\partial t} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{x}^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{x}_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{x}^{(r)}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \vec{u}^{(s)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{x}_0}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} \tag{1.9}$$

また，速度の実質微分について[13]， $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$が十分小さいときテイラー展開から

$$\Delta \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\Delta z \tag{1.10}$$

となり，流体粒子の運動を考慮すると，系をf（$f = s, r$）としたときの位置の変化は

$$\Delta x = u^{(f)}\Delta t, \Delta y = v^{(f)}\Delta t, \Delta z = w^{(f)}\Delta t \tag{1.11}$$

であり，速度の実質微分は

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_f = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u^{(f)}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v^{(f)}\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w^{(f)}\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \tag{1.12}$$

となり，(1.5)を考慮すると，

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_f = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}^{(f)} \cdot \nabla^{(f)}\right)\vec{u}^{(f)} \tag{1.13}$$

よって並進座標系における速度の実質微分は以下のようになる．

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_r = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}^{(r)} \cdot \nabla^{(r)}\right)\vec{u}^{(r)} = \frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{x}_0}{\partial t^2} + \left(\vec{u}^{(r)} \cdot \nabla^{(r)}\right)\vec{u}^{(r)} \tag{1.14}$$

(1.5)(1.14)を代入すると，並進座標系における NS 方程式は

$$\frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{x}_0}{\partial t^2} + \left(\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{\nabla}^{(r)}\right)\vec{u}^{(r)} = -\frac{1}{\rho_l}\vec{\nabla}^{(r)}p + \nu {\nabla^{(\mathrm{r})}}^2 \vec{u}^{(r)} \tag{1.15}$$

となる．左辺第二項は慣性力項といい，並進座標系においては物体速度の影響は流体場の方程式に出てこず，並進加速度だけが NS 方程式に影響することがわかる．

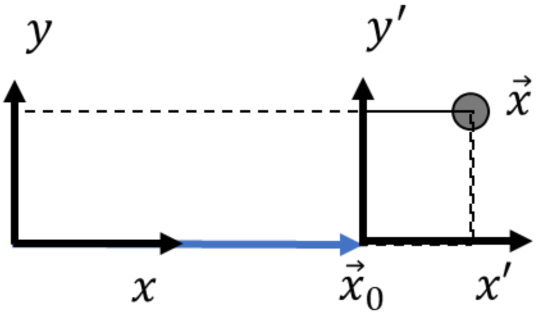


図6　並進座標系

2.3.3　流体場の基礎方程式（系が回転，並進する場合）[14]

次に図 7 のようなx軸方向のみ回転する物体の非慣性座標系について考える．x軸周りの角をθとすると，任意のベクトル$\vec{A}$について，以下のようになる．

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_y^{(r)} \\ A_z^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y^{(s)} \\ A_z^{(s)} \end{pmatrix}$$

空間微分については回転系においても(1.5)が成り立つ．時間微分については

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} e_y^{(r)} \\ e_z^{(r)} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_y^{(s)} \\ e_z^{(s)} \end{pmatrix}\right\} = \omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t & \cos\omega t \\ -\cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_y^{(s)} \\ e_z^{(s)} \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} e_z^{(r)} \\ -e_y^{(r)} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

より，任意のベクトル$\vec{A}$の時間微分を慣性系，回転系両方から見て比較すると，

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_r = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} A_y^{(r)} \\ A_z^{(r)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_y^{(r)} \\ e_z^{(r)} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} A_y^{(r)} \\ A_z^{(r)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_y^{(r)} \\ e_z^{(r)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_y^{(r)} \\ A_z^{(r)} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} e_y^{(r)} \\ e_z^{(r)} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_r + \begin{pmatrix} A_y^{(r)} \\ A_z^{(r)} \end{pmatrix} \cdot \omega\begin{pmatrix} e_z^{(r)} \\ -e_y^{(r)} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{1.17}$$

これを$\vec{x}$に代入すると，

$$\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{x}^{(r)}$$

$$\vec{u}^{(s)} = \vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times \vec{x}^{(r)} \tag{1.18}$$

これを(1.17)に代入し，回転座標系の速度の時間微分は(1.19)になる．

$$\left(\frac{\partial \vec{u}^{(s)}}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times \vec{x}^{(r)}\right)\right)_r + \vec{\omega} \times \left(\vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times \vec{x}^{(r)}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^{(s)}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{x}^{(r)} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{x}^{(r)}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{x}^{(r)}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^{(s)}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{x}^{(r)} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{x}^{(r)}\right) \tag{1.19}$$

(1.13)(1.19)より，回転座標系における速度の実質微分は(1.20)になる．

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_r = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}^{(r)} \cdot \nabla^{(r)}\right)\vec{u}^{(r)}$$

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_r = \frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{x}^{(r)} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{x}^{(r)}\right) + \left(\vec{u}^{(r)} \cdot \nabla^{(r)}\right)\vec{u}^{(r)} \tag{1.20}$$

(1.5)を考慮し(1.20)を NS 方程式に代入すると

$$\frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{x}^{(r)} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \left(\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{\nabla}^{(r)}\right)\vec{u}^{(r)} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}^{(r)} p + \nu {\nabla^{(\mathrm{r})}}^2 \vec{u}^{(r)} \tag{1.21}$$

これが回転系の NS 方程式である．左辺第二項，第三項，第四項はそれぞれオイラー力項，コリオリ力項，遠心力項といい，オイラー力は角加速度，コリオリ力と遠心力は角速度による項である．物体の回転はこれらの項を通じて流体場に影響を与える．

また，$\vec{x}_0, \vec{\theta}$がx成分のみ持つ物体から見た非慣性座標系におけるＮＳ方程式は以下のようになり，これが本研究における非慣性座標系のＮＳ方程式になる．

$$\frac{\partial \vec{u}^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{x}_0}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{x} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}^{(r)} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \left(\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{\nabla}^{(r)}\right)\vec{u}^{(r)} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}^{(r)} p + \nu {\nabla^{(\mathrm{r})}}^2 \vec{u}^{(r)} \tag{1.22}$$

なお(1.22)から重心の加速度や角に関する項を落とせば慣性座標系に戻る．

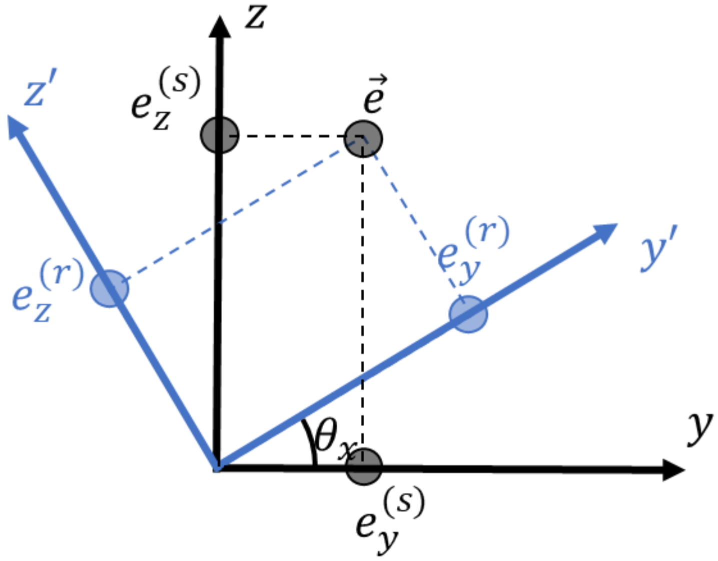


図7　回転座標系

2.3.4　剛体の運動方程式

本研究では物体モデルを剛体と近似し，物体の運動を剛体の運動方程式を解くことにより求める．剛体の運動方程式は重心の運動方程式と回転の運動方程式の二つで成り立ち，速度，変位の算出はオイラー陽解法による一次精度で求める．また，本研究では重心，回転はx成分のみ持ち，物体が受ける力は重力と流体力のみであると仮定する．以下，流体力，重力をそれぞれ$\vec{f}$，$\vec{g}$とする．

【重心の運動方程式】

$$m\frac{d^2\vec{x}_0}{dt^2} = \vec{f} + m\vec{g}$$

物体の密度をρ_s，物体の体積をvとすると

$$\frac{d^2\vec{x}_0}{dt^2} = \frac{1}{\rho_s v}\vec{f} + \vec{g}$$

$\vec{x}_0$，$\vec{g}$のx成分をx_0，$-g$とすると

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{1}{\rho_s v}f_x - g \tag{1.23}$$

となる．これを時間について積分し，

$$u_0 = \frac{dx_0}{dt} = \int_0^t \frac{d^2x_0}{dt^2}dt = \int_0^t \left(\frac{1}{\rho_s v}f_x - g\right)dt$$

$$x_0 = \int_0^t u_0 dt$$

nを時間ステップ，Δtを時間刻みとすると，

$$u_0^{n+1} \cong u_0^n + \Delta t \left(\frac{d^2 x_0}{dt^2}\right)^{n+1} = u_0^n + \Delta t \left(\frac{1}{\rho_s v} f_x - g\right)^{n+1} \tag{1.24}$$

$$x_0^{n+1} \cong x_0^n + \Delta t u_0^{n+1} \tag{1.25}$$

として重心の速度，変位を求める．また，物体の体積vは物体内部のセルの個数にセル一つ分の体積を掛けることで算出する．

【回転の運動方程式】

物体の角運動量，トルク，慣性モーメントテンソルをそれぞれ$\vec{L}$,$\vec{T}$, $\boldsymbol{I}$とすると，

$$\vec{L} = \boldsymbol{I}\vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}$$

となる．$\vec{L}$，$\vec{\omega}$，$\boldsymbol{I}$，$\vec{T}$のx成分をL_x，ω_x，I_x，T_xとすると，非慣性座標系では，$\boldsymbol{I}$は時間によらず，また$\vec{\omega}$，$\vec{T}$がx成分のみ持つことを考慮すると，

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{dI_x \omega_x}{dt} = T_x$$

となり，スカラーの方程式になる．変形して

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{1}{I_x} T_x \tag{1.26}$$

となる．これを時間について積分し，

$$\omega_x = \int_0^t \frac{1}{I_x} T_x dt$$

$$\theta_x = \int_0^t \omega_x dt$$

である．nを時間ステップ，Δtを時間刻みとすると，

$$\omega_x^{n+1} \cong \omega_x^n + \Delta t \left(\frac{1}{I_x} T_x\right)^{n+1} \tag{1.27}$$

$$\theta_x^{n+1} \cong \theta_x^n + \Delta t \omega_x^{n+1} \tag{1.28}$$

として角速度，角を求める．ここで，慣性モーメントはkを物体内のセル番号として

$$I_x = \sum_k m_k \left(r_y^2 + r_z^2\right)_k \tag{1.29}$$

により求める．

2.4　基礎方程式

1.3 節により，非慣性座標系における基礎方程式は以下のようになる．以下，$\vec{u}^{(r)}=\vec{u}$として非慣性座標系から見た速度を扱い，回転軸からの変位ベクトルを$\vec{r_c}$とする．

【連続の式】

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$$

【NS 方程式】

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{\partial^2\vec{x}_0}{\partial t^2}+\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}\times\vec{r_c}+2\vec{\omega}\times\vec{u}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r_c})+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=-\frac{1}{\rho_l}\vec{\nabla}p+\nu\nabla^2\vec{u}$$

【重心の運動方程式】

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}=\frac{1}{\rho_s v}f_x-g$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{d\omega_x}{dt}=\frac{1}{I_x}T_x$$

2.5　無次元化

それぞれ基礎式を無次元化すると以下のようになる．無次元数はレイノルズ数($Re=u_oL/\nu$)，密度比($\rho'=\rho_s/\rho_l$)，ガリレイ数（$Ga=gL^3/\nu^2$）を用いている．導出は付録に記載する．

【連続の式】

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=0 \tag{1.30}$$

【NS 方程式】

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau}+\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\tau}\times\vec{R}_c+2\vec{\Omega}\times\vec{U}+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{R}_c\right)+\frac{\partial^2\vec{X}_0}{\partial\tau^2}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{U}=-\vec{\nabla}P+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{U} \tag{1.31}$$

【重心の運動方程式】

$$\frac{d^2X_0}{d\tau^2}=-\frac{Ga}{Re^2}+\frac{1}{\rho'V}F_x \tag{1.32}$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{d\Omega_x}{d\tau} = \frac{1}{I_X} T'_X \tag{1.33}$$

2.6　計算格子

本研究では図 8 のように流体場の計算に直交格子を用いている．また，図 9 に示すように，圧力の振動解を防ぐためにベクトル成分をセル界面，スカラー量をセル中心で定義するスタッガード格子を用いた．物体境界の情報を直交格子内に埋め込んだ符号付き距離関数についはスカラー場なのでセル中心に定義する．

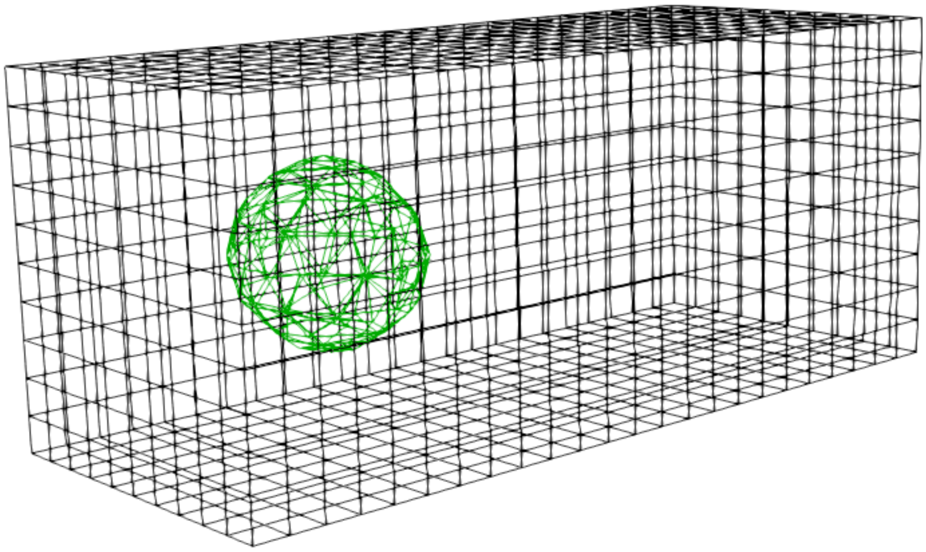


図8　直交格子と物体境界の埋め込み

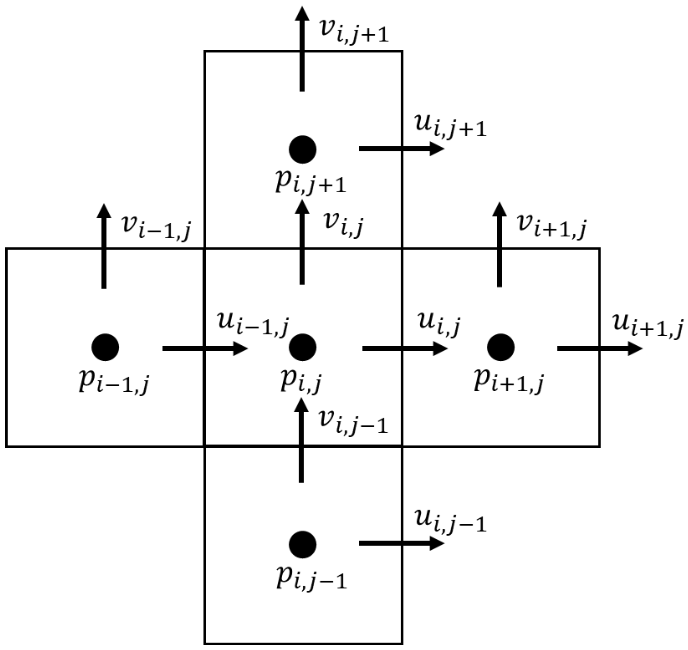


図9　スタッガード格子（二次元）

2.7　圧力解法（Projection 法）

本研究では圧力場を計算するために Projection 法を用いる．本解析手法では物体境界付近での解析精度を高める直接離散化法((2.10.1)参照)を用いており，速度の算出で計算コストが比較的高い．よって HSMAC 法等の速度と圧力の両方を反復修正する必要がある手法を用いると計算コストが大幅に増加すると予想した．一方 Projection 法では圧力のみ反復修正を行うので，Projection 法を用いることが本解析手法に対して適切であると考えた．

2.7.1　Projection 法の導出

以下，Projection 法の導出について述べる．
本研究における流体場の無次元基礎方程式は以下のように書ける．

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=0 \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau}+\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\tau}\times\vec{R}_c+2\vec{\Omega}\times\vec{U}+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{R}_c\right)+\frac{\partial^2\vec{X}_0}{\partial\tau^2}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{U}=-\vec{\nabla}P+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{U} \tag{1.35}$$

非圧縮流れの数値計算では，連続の式，NS 方程式を満たすように圧力を求める．
ここで上付き添え字nは時間ステップを表し，$\vec{f}$を

$$\vec{f}(\vec{U}^n,\vec{\Omega}^n) = -\left(\frac{\partial\vec{\Omega}^n}{\partial\tau}\times\vec{R}_c + 2\vec{\Omega}^n\times\vec{U}^n + \vec{\Omega}^n\times(\vec{\Omega}^n\times\vec{R}_c) + \frac{\partial^2\vec{X}_0}{\partial\tau^2} + (\vec{U}^n\cdot\vec{\nabla})\vec{U}^n\right) + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{U}^n$$

とすると，

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^{n+1} = 0 \tag{1.36}$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n}{\Delta\tau} = -\vec{\nabla}P^{n+1} + \vec{f}(\vec{U}^n,\vec{\Omega}^n) \tag{1.37}$$

と書ける．（1.37）式では，圧力のみ陰的に離散化されている．(1.37)について射影速度$\vec{U}^*$を用いて二段階に分けると，

$$\frac{\vec{U}^*-\vec{U}^n}{\Delta\tau} = \vec{f}(\vec{U}^n,\vec{\Omega}^n) \tag{1.38}$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^*}{\Delta\tau} = -\vec{\nabla}P^{n+1} \tag{1.39}$$

Projection 法のアルゴリズムは以下の三段階の工程で次の時間ステップの速度場，圧力場を求める．

①　(1.38)から$\vec{U}^*$を求める．
②　(1.39)からP^{n+1}を求める．
③　最終的に①②と(1.20)から$\vec{U}^{n+1}$を求める．

①　について，(1.38)により，

$$\vec{U}^* = \vec{U}^n + \Delta\tau\,\vec{f}(\vec{U}^n) \tag{1.40}$$

②　について，(1.39)の両辺に発散を取り，

$$\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^{n+1}-\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^*}{\Delta\tau} = -\nabla^2P^{n+1}$$

(1.36)より，

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^* - \Delta\tau\nabla^2P^{n+1} = 0 \tag{1.41}$$

(1.41)が圧力ポアソン方程式である．これを二次精度の中心差分で離散化し，離散化誤差をErrとすると二次元の場合は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta X}\left(U_{i,j}^{*}-U_{i-1,j}^{*}\right)+\frac{1}{\Delta Y}\left(V_{i,j}^{*}-V_{i,j-1}^{*}\right)\\
&\qquad -\Delta\tau\left\{\frac{1}{(\Delta X)^2}\left(P_{i+1,j}^{n+1}-2P_{i,j}^{n+1}+P_{i-1,j}^{n+1}\right)+\frac{1}{(\Delta Y)^2}\left(P_{i,j+1}^{n+1}-2P_{i,j}^{n+1}+P_{i,j-1}^{n+1}\right)\right\}\\
&\qquad = Err
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

離散化誤差Errを打ち消すための修正量を，mを反復修正回数として

$$ {}^{m+1}P_{i,j}^{n+1} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} + \Delta P_{i,j} $$

と定義すると，(1.42)は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta X}\left(U_{i,j}^{*}-U_{i-1,j}^{*}\right)+\frac{1}{\Delta Y}\left(V_{i,j}^{*}-V_{i,j-1}^{*}\right)\\
&\qquad -\Delta\tau\left\{\frac{1}{(\Delta X)^2}\left({}^{m}P_{i+1,j}^{n+1}-2\left({}^{m}P_{i,j}^{n+1}+\Delta P_{i,j}\right)+{}^{m}P_{i-1,j}^{n+1}\right)\right.\\
&\qquad \left.+\frac{1}{(\Delta Y)^2}\left({}^{m}P_{i,j+1}^{n+1}-2({}^{m}P_{i,j}^{n+1}+\Delta P_{i,j})+{}^{m}P_{i,j-1}^{n+1}\right)\right\}=0
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

と書き換えられる．これを(1.42)と比較して，

$$ \Delta P_{i,j} = \frac{Err}{-2\Delta\tau\left(\frac{1}{(\Delta X)^2}+\frac{1}{(\Delta Y)^2}\right)} \tag{1.44} $$

となり，修正後の圧力は SOR 法により

$$ {}^{m+1}P_{i,j}^{n+1} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} + k\Delta P_{i,j} \tag{1.45} $$

としている．加速係数は$k = 1.7$として計算を行い，mに関する反復修正を
$Err < 1.0 \times 10^{-6}$ になるまで繰り返す．

③ について，(1.39)と，①，②で求めた射影速度と圧力から，

$$ \vec{U}^{n+1} = \vec{U}^{*} - \Delta\tau\vec{\nabla}P^{n+1} \tag{1.46} $$

として$n+1$ステップにおける速度場，圧力場が求まる．三次元でも同様に行う．

2.8　物体境界の作成

本研究では翼果のような物体モデルの複雑な形状を計算領域上に反映させる必要がある．そこで，

① CAD 等で物体モデルを作成（STL ファイルで保存）

② STL データにある物体形状の情報を符号付距離関数に埋め込む

③ 計算する際，必要に応じて符号付距離関数から物体形状の情報を取得

という手順で物体形状の情報を直交格子上に反映する．本節では①のみについて触れ，②は次節，③はそれ以降で説明する．

2.8.1　STL ファイルとは

本研究では翼果等物体の飛行に関する数値解析手法の確立が目的であるので，形状の表現に汎用性を持たせたい．そこで STL というファイル形式に着目した．STL（Stereolithography）ファイルとは 3D CAD ソフト用のファイルフォーマットの一つで、ほとんどのソフトにサポートされており汎用性が高い．本研究で STL ファイルを使用することは，本研究で確立した数値解析手法がより簡単かつ多くの人が使用できるという点で有用性が高いといえる．また，STL データでは 3 次元の立体形状の表面を小さな三角形（ポリゴン）の集合体で表現しており，STL ファイル内部には各三角形の頂点と外向き単位法線ベクトルの情報が格納されている．保存方法はアスキー，バイナリの二形式がある．ここで，本研究では直感的に記述されており可読性の高いアスキー形式を利用した．現在 STL ファイルは３D プリンター業界で多く使用されている．よって，数値解析に用いた形状の物体モデルをすぐに３D プリンターで出力し，実験等に使用できるといった発展性もある．よって本研究では物体モデルの保存に STL ファイルを使用した．

2.8.2　物体モデルの作成.

物体モデルは Design Spark Mechanical5 を使用した．数ある CAD ソフトの中からこのソフトを利用した理由は，DSM5 は無料で使用でき，アスキー，バイナリ両方の出力形式があるからである．作成した STL ファイル（アスキー）は各ポリゴンの外向き単位法線ベクトルと頂点座標が記述されている．球の物体モデルを STL データに出力したものが図 10 で，球の曲面が三角形の平面で分割されていることがわかる．図 11 は自由落下計算で用いる四角錐と，それに突起をつけた物体モデルである．これらの物体モデルには三角形メッシュを細かくするために意図的に凹凸をつけている．

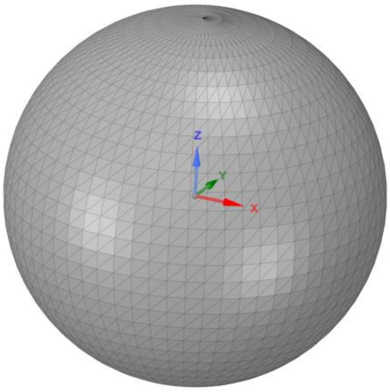


図10　三角形のポリゴン（球の物体モデル）

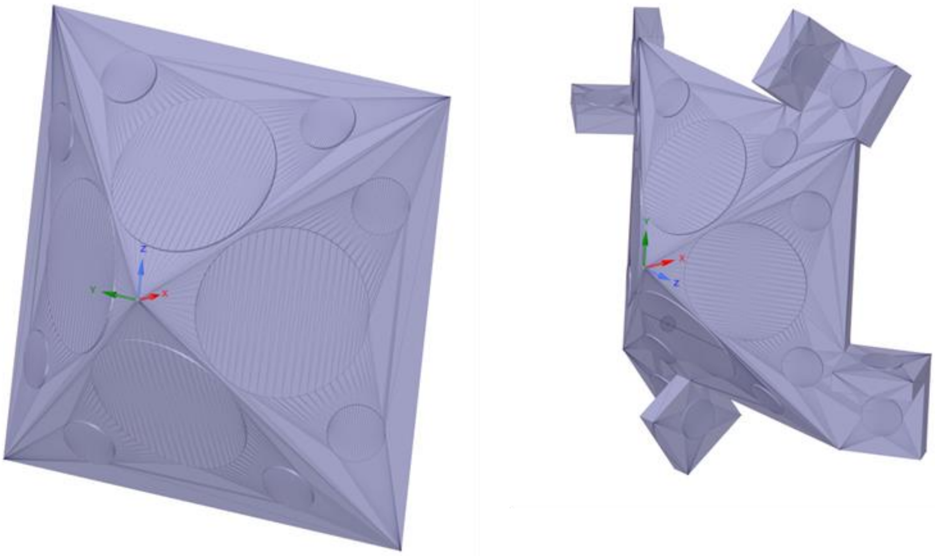


図11　三角形のポリゴン（自由落下する物体モデル）

2.9　符号付き距離関数（レベルセット関数）

1.8 節で述べた通り，STL データに格納した物体モデルの情報は，直交格子上の符号付き距離関数（レベルセット関数）に埋め込まれる．符号付き距離関数$\phi(\vec{X})$は，物体の内外情報（外部で正，内部で負）とその場所と物体境界の距離の積で表され，以下のように定義される．

$$\phi(\vec{X}) = SIGN(\vec{X}) * |\phi(\vec{X})| \tag{1.47}$$

なお，$SIGN(\vec{x})$は，

$$SIGN(\vec{x}) = \begin{cases} 1\left(\text{物体外部}\right) \\ 0\left(\text{物体境界上}\right) \\ -1\left(\text{物体内部}\right) \end{cases} \tag{1.48}$$

と定義する．球の距離関数を作成した結果が図 13 である．STL データから符号付き距離関数を作成する流れは図 12 のようになっており，まずは解析コード上で STL データの読み込みと直交格子の作成を行う．次に各格子点上で物体の内外判定と物体境界との距離の算出を行う．最後に(1.47)(1.48)から符号付き距離関数を算出する．

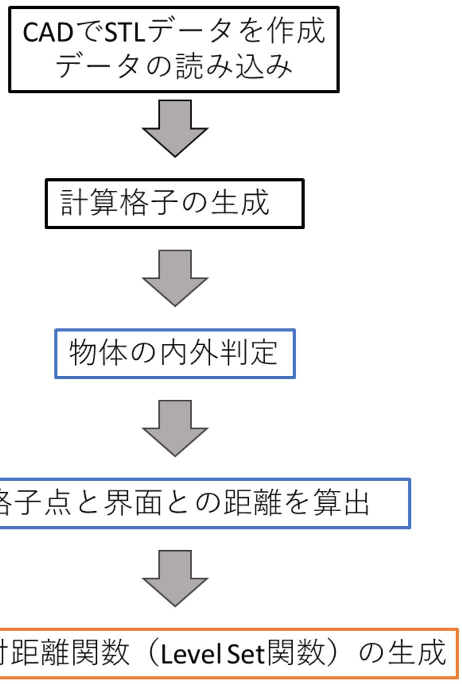


図12　STL データから符号付き距離関数の作成手順

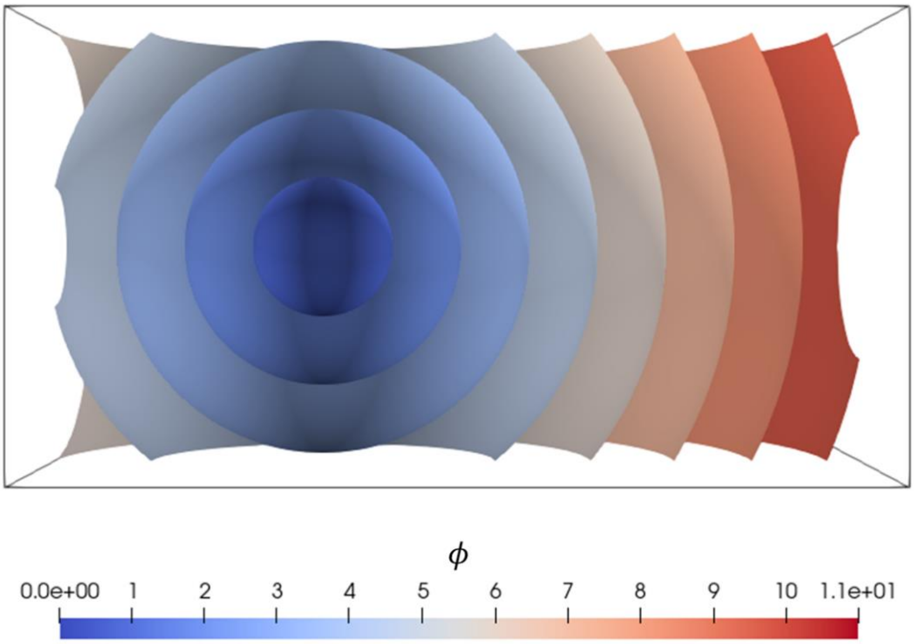


図13　球の符号付き距離関数の可視化

2.9.1　物体の内外判定

この項では各格子点上における物体の内外判定，つまり$SIGN(\vec{X})$の算出を行う．
図 14 は物体境界と赤い点の内外判定を表しており，簡単のため二次元で示されている．
アルゴリズムは以下のようになる．

① n番目の格子点（赤点）から$Y = 0$の面に垂線を降ろし，$CNT = 0$と定義する．
② l番目の境界線（三次元ではポリゴン）と垂線が交差するか判定する．
③ 交差する場合はCNTをインクリメントする．②と③を全ての境界線，ポリゴンと垂線について行う．$(0 \leq n < N, 0 \leq l < L)$
④ 物体境界が閉じている場合，交差回数が偶数の時外部，奇数の時内部なので，

$$SIGN(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & when\ (CNT)\%2 = 0 \\ -1 & when\ (CNT)\%2 = 1 \end{cases}$$

として物体の内外判定ができる．

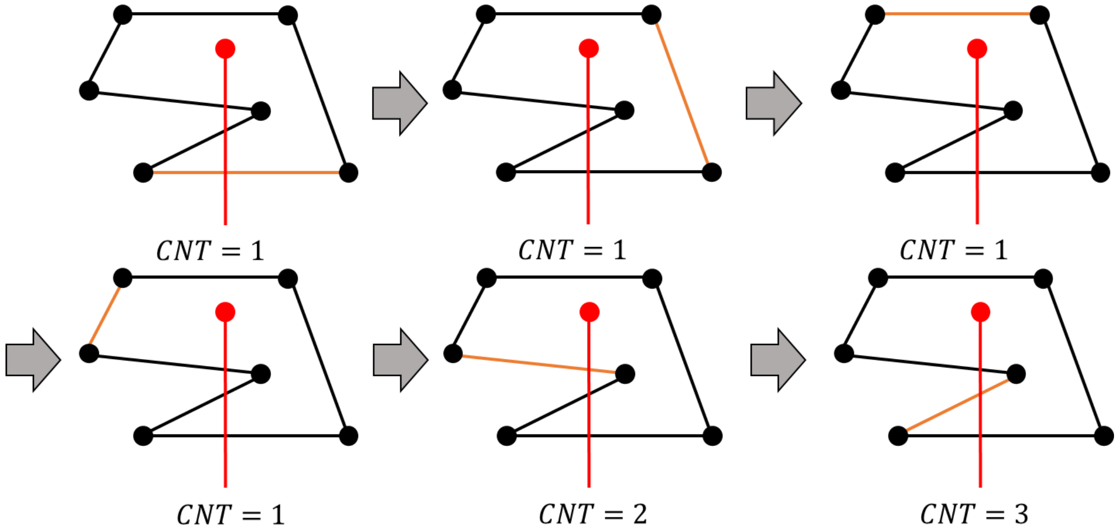


図14　内外判定のイメージ

全ての格子点について，それぞれ全てのポリゴンと交差判定を行うので，格子数，ポリゴン数をそれぞれN, Lとすると計算コストが$N \times L$に比例する．

次に，②におけるポリゴンと垂線の交差判定について説明する．格子番号，ポリゴン番号をそれぞれn, l，$\overrightarrow{X0}n$が$\vec{X}n$を$Y = 0$におろした垂線の足であるとする．図 15 はn番目の格子点とl番目のポリゴンの関係を示す図であり，$\vec{V}$はポリゴンの頂点で添え字は物体外側から見て時計回りになるようにしている．ここでポリゴンを含む面Sと垂線との交点を$\vec{P}$とすると，

$$\vec{P} = \vec{V_l} + a\left(\vec{V}_{l+1} - \vec{V_l}\right) + b\left(\vec{V}_{l+2} - \vec{V_l}\right)$$

$$\vec{P} = \overrightarrow{X0}n + \mathrm{t}\left(\vec{X}n - \overrightarrow{X0}n\right) \tag{1.49}$$

が成り立ち，連立すると，

$$a\left(\vec{V}_{l+1} - \vec{V_l}\right) + b\left(\vec{V}_{l+2} - \vec{V_l}\right) - \mathrm{t}\left(\vec{X}n - \overrightarrow{X0}n\right) = \overrightarrow{X0}n - \vec{V_l} \tag{1.50}$$

これを行列の形に変形する．

$$\left(\left(\vec{V}_{l+1} - \vec{V_l}\right), \left(\vec{V}_{l+2} - \vec{V_l}\right), \left(\vec{X}n - \overrightarrow{X0}n\right)\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ -t \end{pmatrix} = \overrightarrow{X0}n - \vec{V_l} \tag{1.51}$$

$\boldsymbol{A} = \left(\left(\vec{V}_{l+1} - \vec{V_l}\right), \left(\vec{V}_{l+2} - \vec{V_l}\right), \left(\vec{X}n - \overrightarrow{X0}n\right)\right)$,$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -t \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \overrightarrow{X0}n - \vec{V_l}$とおくと，

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{1.52}$$

が成り立ち，これをクラメルの公式により解き，係数a, b, tを求める．

クラメルの公式は以下のようになる．

クラメルの公式

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A_j} = (a_1, \cdots, b_j, \cdots, a_n)$のとき

$$X_j = \frac{\det \boldsymbol{A_j}}{\det \boldsymbol{A}}$$

また，三角形と線分が交点を持つ条件は以下のようになり，これを満たす場合は垂線とポリゴンが交差する．

$$0 \leq a, b \leq 1, a + b \leq 1$$

これによりn番目の格子点から降ろした垂線とl番目のポリゴンとの交差判定ができる．

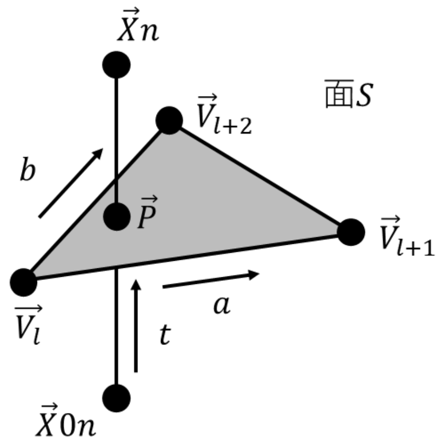


図15　垂線と三角形メッシュの位置関係

2.9.1　境界からの距離

次に符号付き距離関数の絶対値，つまりある格子点と物体境界との距離$|\phi(\vec{X})|$を算出する．ある格子点と物体境界の距離は，格子点とポリゴンの距離の最小値で表され，これを全ての格子点で計算する．よって$|\phi(\vec{X})|$の算出コストもまた$N \times L$に比例する．なお，本項において，$\vec{Q}$をポリゴン上にある格子点からの最近点，$\vec{P}$は面Sと格子点$\vec{X}n$の距離を結ぶ垂線の足とする．図 15 と図 17 で$\vec{P}$の定義が異なることに注意)$|\phi(\vec{X})|$の算出アルゴリズムは以下のようになる．

① n番目の格子点とl番目のポリゴンの距離$|\overrightarrow{X_n Q}|$を算出する．
② $0 \leq l < L$について①を行い，n番目の格子点と物体境界との最小距離$|\phi(\vec{X}n)|$を算出する．
③ $0 \leq n < N$について②を行い，全ての格子点と物体境界との最小距離の分布を表す関数$|\phi(\vec{X})|$を算出する．

①について

n番目の格子点とl番目のポリゴンの距離を算出する手順を述べる．まず図 15 における$\vec{P}$を算出し，$\overrightarrow{PQ}$を場合分けから求める．そして三平方の定理からポリゴンと格子点の距離$|\overrightarrow{X_nQ}|$を求める．詳しい算出方法は以下のようになる．

$\vec{n}_l$を外向き単位法線ベクトルとすると，図 15 より，

$$\vec{P} = \vec{V}_l + c(\vec{V}_{l+1} - \vec{V}_l) + d(\vec{V}_{l+2} - \vec{V}_l)$$

$$\vec{P} = \vec{X}n - h\vec{n}_l \tag{1.53}$$

連立して，

$$\left((\vec{V}_{l+1} - \vec{V}_l), (\vec{V}_{l+2} - \vec{V}_l), \vec{n}_l\right)\begin{pmatrix} c \\ d \\ h \end{pmatrix} = \vec{X}n - \vec{V}_l$$

$\boldsymbol{A} = \left((\vec{V}_{l+1} - \vec{V}_l), (\vec{V}_{l+2} - \vec{V}_l), \vec{n}_l\right), \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ h \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \vec{X}n - \vec{V}_l$とおくと，

$$\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{D}$$

これを前項同様にクラメルの公式により解き，

$$c = \frac{\det\boldsymbol{C_1}}{\det\boldsymbol{C}}, d = \frac{\det\boldsymbol{C_2}}{\det\boldsymbol{C}}, h = \frac{\det\boldsymbol{C_3}}{\det\boldsymbol{C}} \tag{1.54}$$

となり$\vec{P}$が求まる．$|\overrightarrow{X_nQ}|$は$\vec{P}$と三角形との位置関係により場合分けを行う．なお，図 15 は三角形を含む面Sを上からみたものであり，lは各三角形の辺を直線に伸ばしたもの，$\vec{Q}_l$は$\vec{P}$から各lに降ろした垂線の足となる．

$\vec{Q}$，距離の場合分け

面S上の$\vec{P}$と三角形の位置関係から場合分けをして$\vec{Q}$，$|\overrightarrow{X_nQ}|$を求める．

I.　$\vec{P}$が三角形内部に存在するとき．

II.　$\vec{P}$が図 16 上で青い領域に存在するとき．

III.　$\vec{P}$が図 16 上で黄色い領域に存在するとき．

Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ.それぞれについて以下に示す．

Ⅰ．$\vec{P}$が三角形内部の時，つまり$0 \leq c, d \leq 1, c + d \leq 1$の時，$\vec{Q}$は垂線の足となり，格子点とポリゴンの距離は垂線の長さとなるので，

$$\left|\overrightarrow{X_nQ}\right| = |h| \tag{1.55}$$

となる．

II． $\vec{P}$が図 16 上で青い領域に存在する場合，以下の条件を満たす．

$$\left(\vec{P}\text{が三角形外部}\right) \cap \left(\text{辺内部に位置し，垂線が三角形を横切らない}\vec{Q}_l\text{が存在}\right)$$

この時，$\vec{Q} = \vec{Q}_l$が成り立ち，格子点とポリゴンとの距離は

$$\left|\overrightarrow{X_n Q}\right| = \left|\left(\overrightarrow{X_n P}\right)^2 + \left(\overrightarrow{X_n Q}\right)^2\right| = \left|\left(\overrightarrow{X_n P}\right)^2 + \left(\overrightarrow{X_n Q_l}\right)^2\right| \tag{1.56}$$

となる．$\vec{Q}_l$は以下のようになる．

$$\vec{Q}_l = \vec{V}_l + \left(\vec{P} - \vec{V}_l\right) \cdot \frac{\left(\vec{V}_{l+1} - \vec{V}_l\right)}{\left|\vec{V}_{l+1} - \vec{V}_l\right|} \tag{1.57}$$

また，$\left(\text{辺内部に位置し，垂線が三角形を横切らない}\vec{Q}_l\text{が存在}\right)$という条件について，これは図 16 上の緑や紫の点において必要な条件である．$\vec{Q}_l$が辺内部に存在する場合，対応するc, d, eが0 以上 1 未満を満たし，垂線が三角形を横切る場合は

$$\frac{\overrightarrow{Q_l P} \times \left(\vec{V}_{l+1} - \vec{V}_l\right)}{\vec{n}_l} < 0 \tag{1.58}$$

を満たす．

III． 図 16 上の黄色い領域は I， II 以外の領域である．この時，格子点とポリゴンとの距離は格子点と三つの頂点との距離の最小値となるので，

$$\left|\overrightarrow{X_n Q}\right| = \min\left\{\left|\vec{X}_n - \vec{Q}_l\right|\right\} \tag{1.59}$$

として求める．これによりすべての場合において①が完了する．

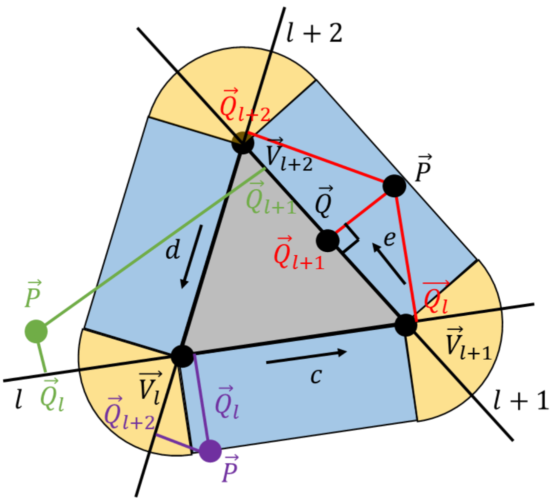


図16　面S上における$\vec{P}$と三角形の位置関係

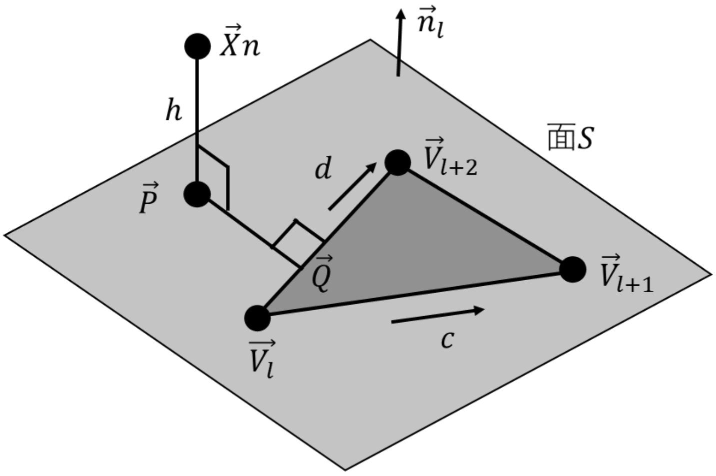


図17　面Sに降ろした垂線と三角形

②について

全てのポリゴン$0 \leq l < L$について①を行い，n番目の格子点と物体境界との最小距離$\left|\phi(\vec{X}n)\right|$を算出する．$\left|\phi(\vec{X}n)\right|$は以下のようになる．

$$\left|\phi(\vec{X}n)\right| = \min\left\{\left|\overrightarrow{X_n Q}\right|_l\right\} \tag{1.60}$$

③について

②で求めた$\left|\phi(\vec{X}n)\right|$を全ての格子$0 \leq n < N$について行い，計算領域全体における格子点と物体境界との最小距離の分布を表す符号なし距離関数$\left|\phi(\vec{X})\right|$を算出する．

以上より，(1.28)から符号付き距離関数$\phi(\vec{X})$が求まる．

2.10　離散化手法

本研究では流体場に関して，時間に関する項はオイラー陽解法，NS 方程式の移流項は基本的に UTOPIA（三次精度風上差分）で壁面や物体境界近傍では一次精度風上差分，その他は二次精度の中心差分で離散化している．ただし，物体境界に隣接する計算セルに対しては物体境界と境界条件に基づいてＮＳ方程式の微分値を直接的に離散化することにより求める（直接離散化法）．具体的な説明は 1.11.1 項に示す．

2.10.1　物体境界近傍での離散化（直接離散化法）

流体場を解く際，ＮＳ方程式から射影速度$\vec{U}^{*}$を算出するが，壁面近傍や壁面内部で$\vec{U}^{*}$は物体の影響を考慮する必要がある．本研究のように非圧縮性流体における物体周りの流れを解く手法としては，物体を直交格子に沿った階段形状として近似し物体内部で$\vec{U}^{*}=0$とするボクセル法や，これに加えて境界に隣接する流速を周囲の流速の補間によって強制する Direct Forcing Immersed Boundary 法がある．しかし，これらの手法では物体形状の表現に誤差が出ることや，物体近傍で NS 方程式を解かないことから，実用問題に適用する際に想定される格子解像度の低い条件では計算精度の大幅な低下が懸念される．そこで本研究では$\vec{U}^{*}$を算出する際に符号付き距離関数を用いて，物体内部では$\vec{U}^{*}=0$，物体近傍（物体境界に隣接する計算セル）では NS 方程式の微分値を直接的に離散化することによって計算領域全体での計算精度の低下を防いだ．この手法を直接離散化法と呼び，概要を以下に示す．

まず，本研究における直接離散化法の場合分けの二次元イメージ図を図 18 に示す．ここで，UTOPIA では隣接二格子，一次精度風上差分や二次精度中心差分では隣接一格子の情報が必要である．図右下にある太線を物体境界，物体境界より右下の領域を物体内部とする．緑色に塗られた領域は仮想格子であり境界条件から値が代入される．流体場はオレンジ，青，赤の領域であり，青で塗られている領域は物体や仮想格子から二格子以上離れており，UTOPIA により移流項を離散化している．オレンジの領域は物体や仮想格子から二格子未満離れており，この領域では UTOPIA を使用できないので一次精度風上差分を用いて移流項を離散化している．赤い領域は隣接するセルとの間に物体境界があり，一次精度風上差分や二次精度中心差分をそのまま使用できないので物体境界と境界条件に基づいてＮＳ方程式を離散化している（直接離散化法）．以上の場合分けを表 2 にまとめ，次に直接離散化法における離散化について説明する．

図 19 は壁面近傍のイメージで，中心のセルのX方向の番号をi，$\epsilon_X \Delta X$ をU_iの定義点と境界のX方向距離，Bを境界上の点とする．U_iのX方向の一階微分，二階微分は以下のようになる．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_i = \frac{1}{\epsilon_X(1+\epsilon_X)\Delta X}\{\epsilon_X^2 U_{i+1} + (1-\epsilon_X^2)U_i - U_B\} \tag{1.61}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)_i = \frac{2}{\epsilon_X(1+\epsilon_X)(\Delta X)^2}\{\epsilon_X U_{i+1} - (1+\epsilon_X)U_i + U_B\} \tag{1.62}$$

同様にして壁面近傍における速度の微分値を離散化する．

また，ϵ_Xの算出は図 20 から

$$(\epsilon_X \Delta X \vec{e}_X)\cdot\vec{n}_i = \phi_i$$

より，

$$\epsilon_X = \frac{\phi_i}{\Delta X(\vec{e}_X\cdot\vec{n}_i)} \tag{1.63}$$

となる．ここで，$\vec{n}_i$はU_iの定義点における単位法線ベクトルであり，以下のように符号付き距離関数から算出できる．

$$\vec{n}_i = \vec{\nabla}\phi_i \tag{1.64}$$

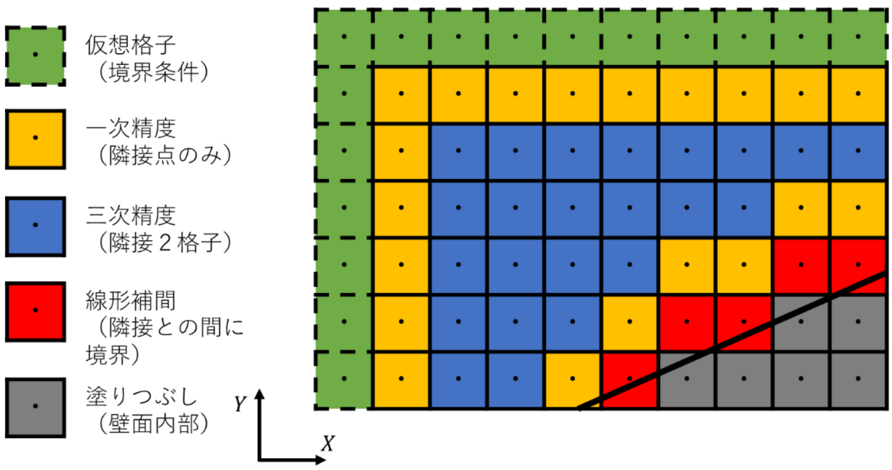


図18　離散化の場合分け

表 2　場合分け

	微分値の離散化	速度$\vec{U}^*$
仮想格子	–	境界条件に合わせた離散化
隣接格子のみ	一次精度風上差分	–
隣接二格子	三次精度風上差分	–
隣接格子との間に境界	直接離散化法	–
物体内部	–	$\vec{U}^* = \vec{U}_0$

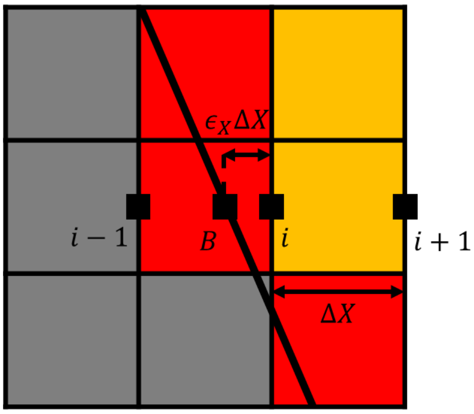


図19　壁面の距離

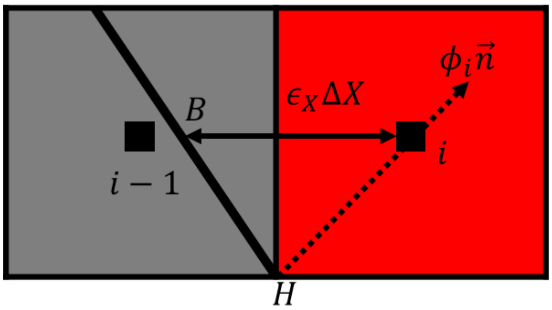


図20　法線ベクトル

2.11　流体力の算出，トルクの算出

剛体の運動方程式を解くために流体力，トルクを算出する．本研究では流体力を，表面にかかる応力を面積分することより算出した．数値計算上，流体力は微小要素の応力テンソルと面積ベクトルの積を足し合わせることにより算出でき，以下の式で表される[15]．

$$\vec{f}_{flu} = \sum_n \boldsymbol{\sigma}_n \Delta\vec{S}_n \quad ,\left(\boldsymbol{\sigma}\Delta\vec{S}\right)_n = \Delta S_n \left(\left(\sigma_{ij} n_j\right) e_i\right)_n \tag{1.65}$$

$\vec{f}_{flu}$を流体力ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}_n$を応力テンソル，$\Delta\vec{S}_n$を面積ベクトルとし，面積ベクトルは微小面積と定義点における単位法線ベクトルの積で表される．本研究では微小要素を三角形ポリゴンとして積分を行っておりnはポリゴン番号である．そして$\vec{n}$や微小面積ΔSを STL データから算出している．ここでニュートン流体を仮定することにより$\boldsymbol{\sigma}_n$は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

と表される．$\dot{\epsilon}_{ij}$はひずみ速度テンソルと言い，以下のようになる．

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(v_x + u_y) & \frac{1}{2}(u_z + w_x) \\ \dot{\epsilon}_{xy} & v_y & \frac{1}{2}(w_y + v_z) \\ \dot{\epsilon}_{ij} & \dot{\epsilon}_{ij} & w_z \end{pmatrix}$$

これを以下のように無次元化する．

$$\vec{F}_{flu} = \frac{1}{\rho u_{in}^2 L^2} \vec{f}_{flu}$$

代入して次式が成り立つ．

$$\vec{F}_{flu} = \sum_n \begin{pmatrix} F_{fluX} \\ F_{fluY} \\ F_{fluZ} \end{pmatrix}_n = \Delta S_n \begin{pmatrix} n_X S_{XX} + n_Y S_{XY} + n_Z S_{XZ} \\ n_X S_{YX} + n_Y S_{YY} + n_Z S_{YZ} \\ n_X S_{ZX} + n_Y S_{ZY} + n_Z S_{ZZ} \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

各成分は以下のようになる．

$$S_{XX} = -P + \frac{2}{Re}\frac{\partial U}{\partial X} \quad S_{XY} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y}\right) \quad S_{XZ} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z}\right)$$

$$S_{YX} = S_{XY} \quad S_{YY} = -P + \frac{2}{Re}\frac{\partial V}{\partial Y} \quad S_{YZ} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Z}\right)$$

$$S_{ZX} = S_{XZ} \quad S_{ZY} = S_{YZ} \quad S_{ZZ} = -P + \frac{2}{Re}\frac{\partial W}{\partial Z}$$

粘性抵抗の速度勾配は定義点の周囲 8 点から補間した．また，物体を$X = 0$面から見た無次元射影面積をS_X，Dを抗力とすると，抗力係数Cdは

$$Cd = \frac{D}{0.5\rho u_{in}^2 A} = \frac{f_{fluX}}{0.5\rho_l u_{in}^2 S_x L^2} = \frac{2}{S_X} F_{fluX} \tag{1.67}$$

となる．

トルク$\vec{T}$についてはT_xのみ考えればよく，

$$T_x = \sum_n \left(r_y f_z - r_z f_y\right)_n$$

$$T'_X = \frac{1}{\rho u_{in}^2 L^3} \sum_n (R_Y F_Z - R_Z F_Y)_n \tag{1.68}$$

である．

2.11　計算フロー

本研究の計算フローを以下に示す．なお本研究では，符号付き距離関数を出力するコードと，出力された符号付き距離関数を読み込んで流体計算を行うコードを分けることで計算コストの無駄を省いている．図 21 左は解析コードの，右が符号付き距離関数の算出コードの計算フローになる．

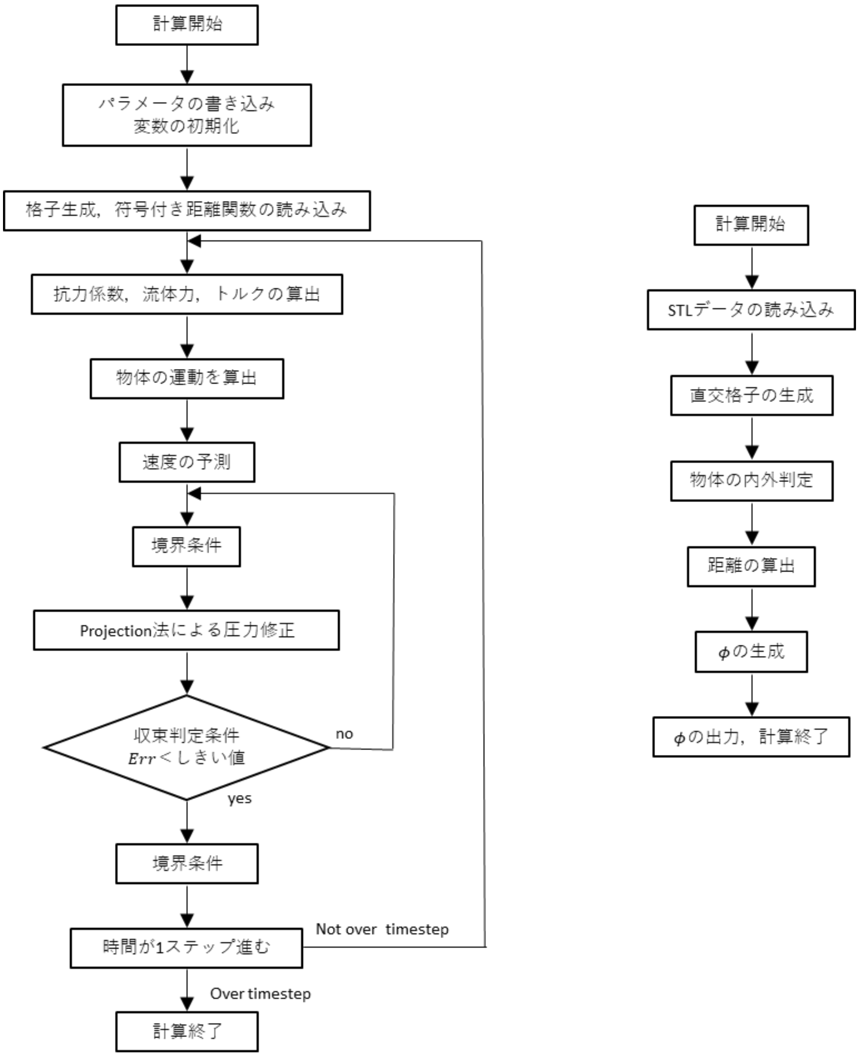


図21　計算フロー

第3章　妥当性検証

3.1　一様流中の球周りの流れ

三次元流体解析の妥当性検証として一様流中に置かれた球周りの流れの解析を行った．定量的な評価は抗力係数Cdを算出し，定性的な評価は速度場，圧力場，Q値の可視化により行った．本章の目的は，流体場の解析と流体力の算出がどの程度正確にできているか確認することである．物体として球を用いた理由は，物体境界が直交格子に沿っていない球の解析を行うことにより，物体境界の解析精度を上げるために採用した直接離散化法が適切であるか判断するためである．また，定量的な評価に抗力係数を用いた理由は，物体と流体の運動が相互に作用する本研究において，流体力の正確な算出が不可欠であるからである．なお，本章において球は一様流中に静止しているので物体の運動を考慮しない慣性座標系の支配方程式を用いる．また，本章では抗力係数Cdが適切に算出できるReの範囲と，格子依存性を確認するために本章では$Re = 100, 250, 500, 750, 1000$の五パターンと球の直径あたりの格子数$nD = 10, 20, 30$と三パターンの計十五パターンで解析を行い，実験値と比較した（参考文献）

3.1.1　解析条件

まず，解析モデルは図 22 のように，境界条件は表 3 のようになる．速度に関しては流入面のみ$\vec{U} = \vec{U}_{in}$，圧力に関しては流出面のみ$P\ = 0$としてその他はノイマン条件である．$P\ = 0$とする理由は，Projection 法で圧力P は微分の形でしか出てこず，圧力の基準値を設けるためである(1-b)．次に境界条件，解析条件を表 4 に示す．

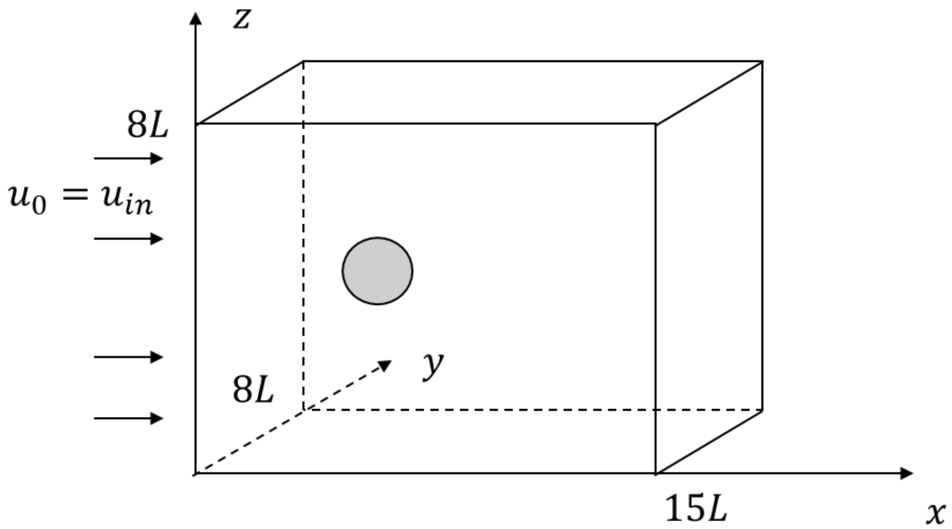


図22　球周りの流れ　計算モデル

表 3　境界条件

	速度	圧力
流入面	$U = U_{in}, V = W = 0$	$\frac{\partial P}{\partial X} = 0$
側壁(Y方向)	$\frac{\partial \vec{U}}{\partial Y} = \vec{0}$	$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0$
側壁(Z方向)	$\frac{\partial \vec{U}}{\partial Z} = \vec{0}$	$\frac{\partial P}{\partial Z} = 0$
流出面	$\frac{\partial \vec{U}}{\partial X} = \vec{0}$	$P = 0$

表 4　計算条件

	記号	数値
レイノルズ数	$Re[-]$	$100, 250, 500, 750, 1000$
直径 あたりの格子数	$nD[-]$	$10, 20, 30$
時間刻み	$\Delta\tau[-]$	1.0×10^{-3}
最大時間	$\tau_{max}[-]$	200

3.1.2　解析結果：定量的評価

まず，図 23 で各格子数，各Re数における抗力係数の時間平均Cd_{ave}と実験値Cd_{exp}の比較を行った．抗力係数は(1.67)により求める．球周りの流れでは$Re > 270$で非定常な渦が発生することが知られており[16]渦の影響によりCdは時間によって変化する．よって本研究では$100 < \tau < 200$のCdを 100 点算出しその時間平均と抗力係数の実験値とを比較した．図 23 を見ると解析，実験共に Reが大きくなるにつれCdが小さくなることわかった．また，$Re < 500$の領域においては概ね実験値と解析結果が一致しているように見える一方，Reが高くなると実験値と解析結果の誤差が大きくなっているように見える．そこで図 24 では実験値と解析結果の誤差割合を百分率で示す．

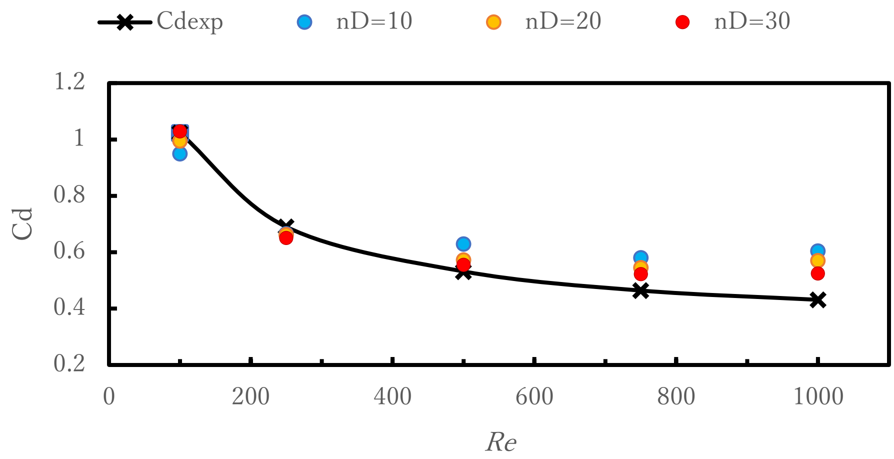


図23　抗力係数　解析と実験値の比較

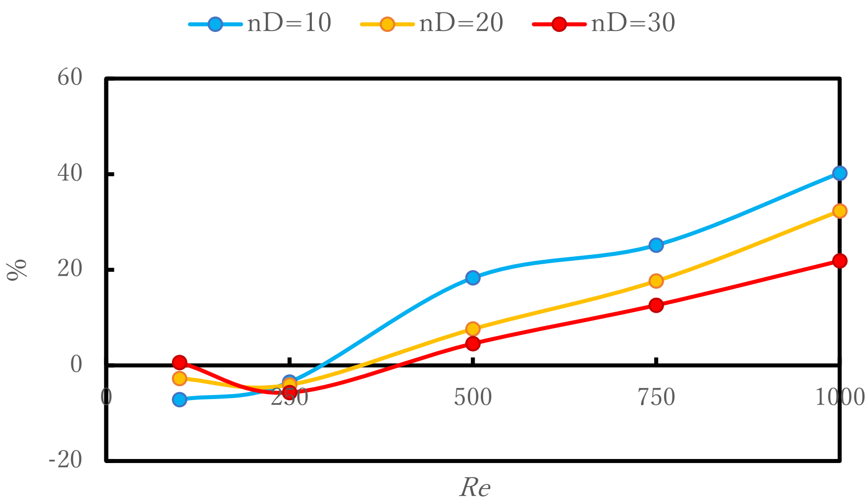


図24　実験値との誤差割合

図 24 を見ると，$Re = 100$では$nD = 10$でも誤差が 10%程度に収まり，$nD = 30$では 0.59%となりほぼ実験値と一致している．よって定常流では正確に流体場，流体力の算出ができているといえる．一方，$Re = 750, 1000$では$nD = 30$でも実験値との誤差が 12.6%, 21.9%と大きくなってしまった．これは$Re = 270$付近から流れが非定常になり，Re数がおよそ 800 を超えると，球表面から筒状にはく離した流れに周期性が生じるとともに球後部から乱流化[16] することから，流れの非定常性と乱流が原因であると考えられる．また，格子幅と誤差の関係を見ると，$Re = 250$以外の領域では格子幅を小さくするにつれ解析結

果が実験値に近づいている．よって乱流領域の解析に対しては格子幅をより小さくすることで高Re数の領域でも正確な解析結果を得られると期待できる．また，$Re = 250$では格子数を増やすと実験値との誤差が大きくなるが，$Re = 270$付近で流れが定常から非定常に移行することが知られており，流れが不安定な状態であることが誤差の原因であると考えられる．本研究では，定常流で実験値と解析結果が比較的一致したこと，$nD = 20$では$Re < 500$で誤差が 8%以内に収まったことやReが高くても格子幅を十分小さくすれば誤差の減少が期待できることから今後の計算は$nD = 20$，$Re = 691$で計算を行う．

本研究では GPU を用いた並列計算を行っており単一の CPU で解析を行うよりも数十倍程度の高速化を行っているが，妥当性検証の計算では最大五日程度計算がかかってしまい（CPU：i7-8700k,GPU:Radeon RX Vega 使用時），GPU メモリの都合によりnDの最大値が決まる．よって今後は計算のさらなる高速化や計算格子の最適化が求められる．また，本解析手法では流体力の数値積分を，STL データ上の三角形メッシュの情報を用いて行っており，STL の三角形メッシュ数が足りていないことも誤差の原因になりうる．本解析では球の表面を約 4000 個の三角形メッシュで分割している．

次に，各Re数における抗力係数の時間推移を示したものが図 25, 26, 27, 28,29 である．図より，定常流になる$Re < 270$の領域ではCdが一定の値に収束するのに対して，$Re > 270$の領域では流れの非定常流によりCdが一定の値に収束しないことがわかる．

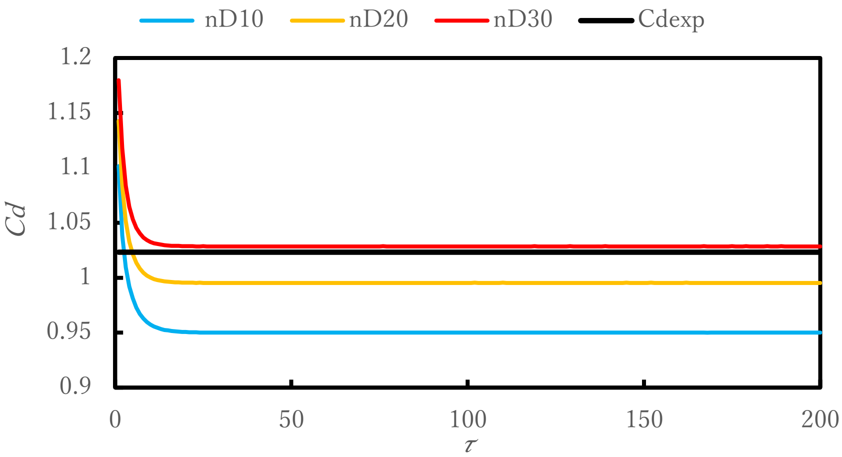


図25　$Re = 100$　格子依存性

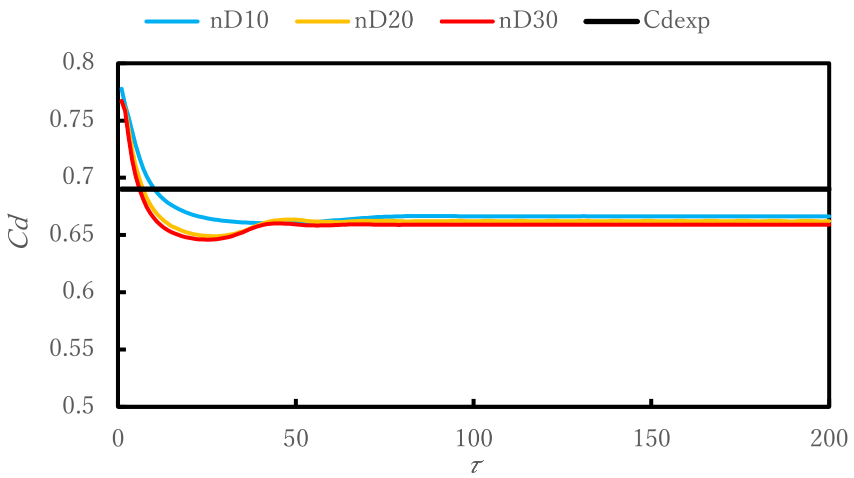


図26　$Re = 250$　格子依存性

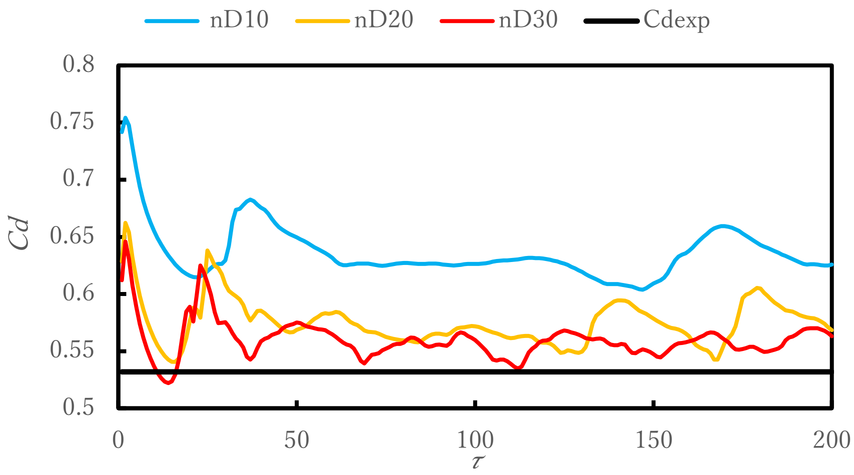


図27　$Re = 500$　格子依存性

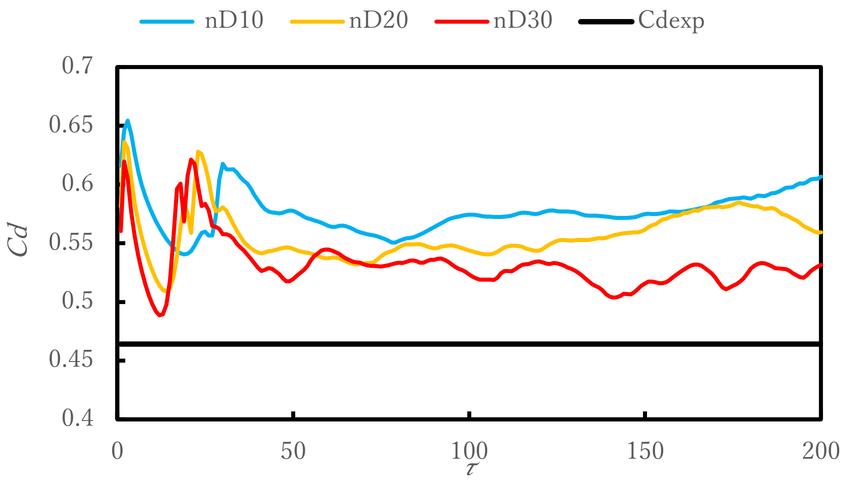


図28　$Re = 750$　格子依存性

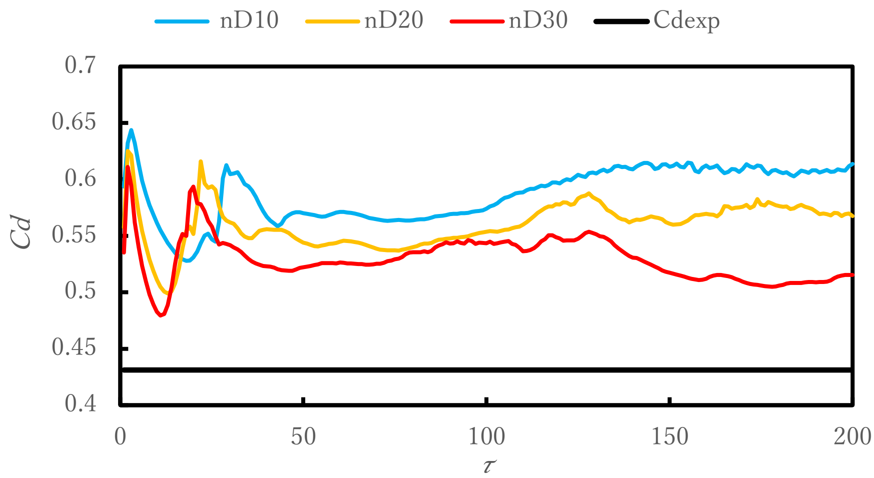


図29　$Re = 1000$　格子依存性

3.1.3　解析結果：可視化結果

球の直径あたりの格子数$nD = 30$での速度場，圧力場，Q値の等値面を可視化した．Q値とは，速度勾配テンソルの第二不変量であり，可視化は Paraview 5.8.1 で行った．一様流中に置かれた球周りの流れは以下のような特徴を持つ[16]．

- Reがおよそ 100 以下では，球背後に小さな渦が形成されるが，その渦は下流に放出されず，後流は定常な状態を保つ．
- Reがおよそ 130 を超えると，後流が揺動し始め，Reがおよそ 300 を超えると，ヘアピン状の渦が周期的に放出されるようになる．
- Reがおよそ 420 を超えると，この渦の放出方向に不規則性が現れ，Reがおよそ 480 を超えると渦は後流中心軸まわりにゆっくりと回転しながら流下する．
- さらにReがおよそ 800 を超えると，球表面から筒状にはく離した流れに周期性が生じるとともに，球後部から乱流化した状態で渦が放出され，これらの流れが複雑に絡み合った状態で流下し，大きく揺動した交流を形成する．

球後流に及ぼすレイノルズ数の影響を図 30 に示す．

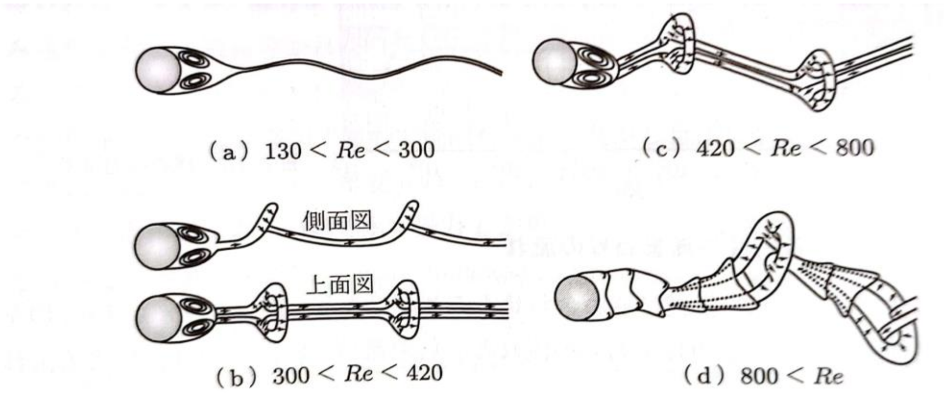


図30　球後流に及ぼすレイノルズ数の影響[16]

まずは$\tau = 100$におけるX方向速度の速度場，圧力場の可視化を図に示し，以下のような結果になった．

- $Re = 100$では速度場，圧力場共に定常かつ軸対称な流れができているように見える．
- $Re = 250$では非軸対称かつ定常な速度場，圧力場が見られる．
- $Re = 500, 750$では非定常な振動流ができていることがわかる．
- $Re = 1000$では非定常な振動流ができていることがわかるが$Re = 500, 750$の時よりも球後方で細かい乱れが発生していることがわかる．

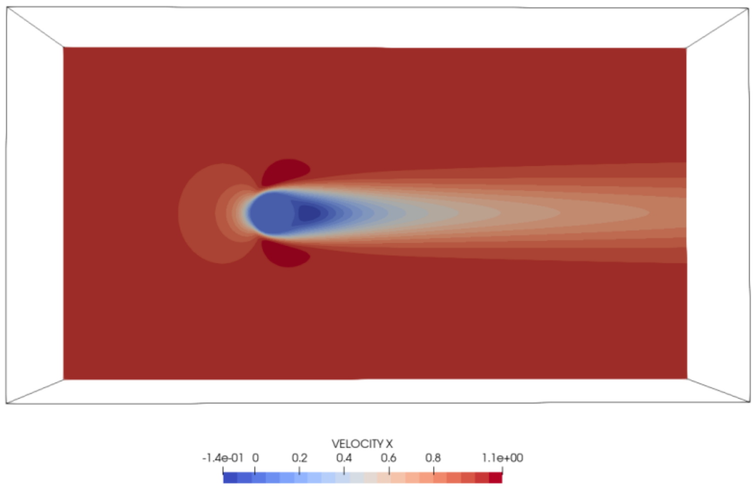


図31　$Re = 100, \tau = 100$の速度場

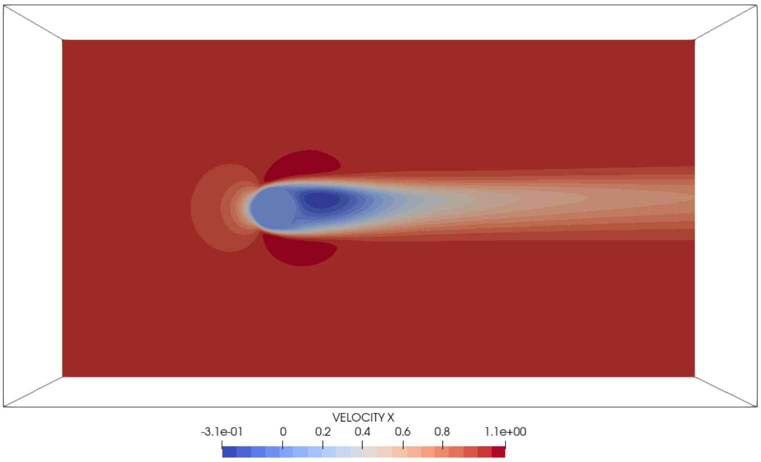


図32　$Re = 250, \tau = 100$の速度場

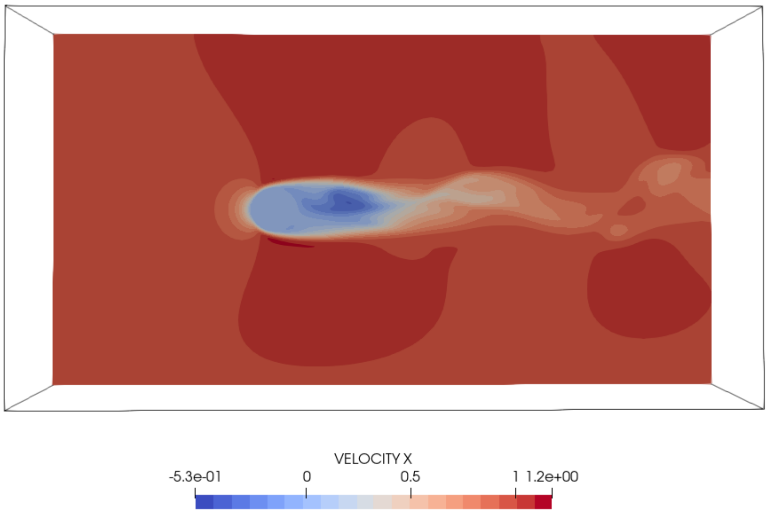


図33　$Re = 500, \tau = 100$の速度場

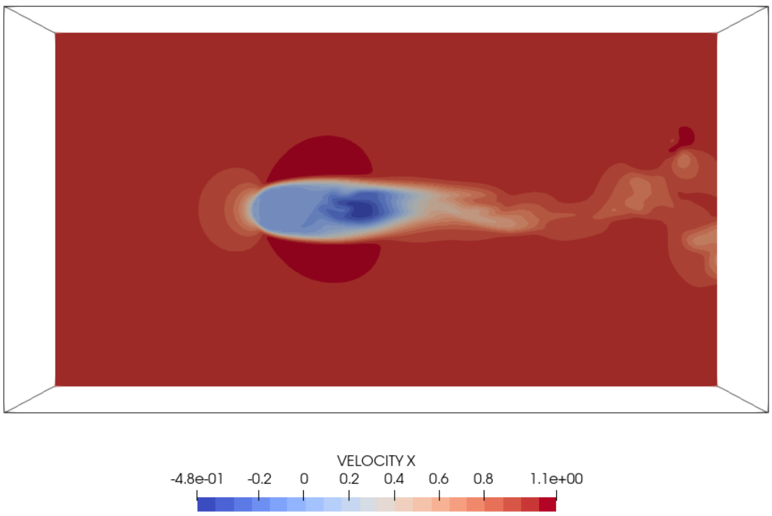


図34　$Re = 750, \tau = 100$の速度場

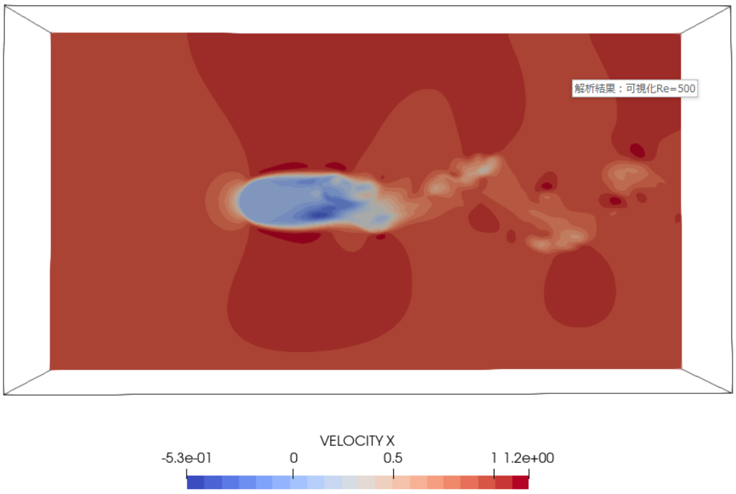


図35　$Re = 1000, \tau = 100$の速度場

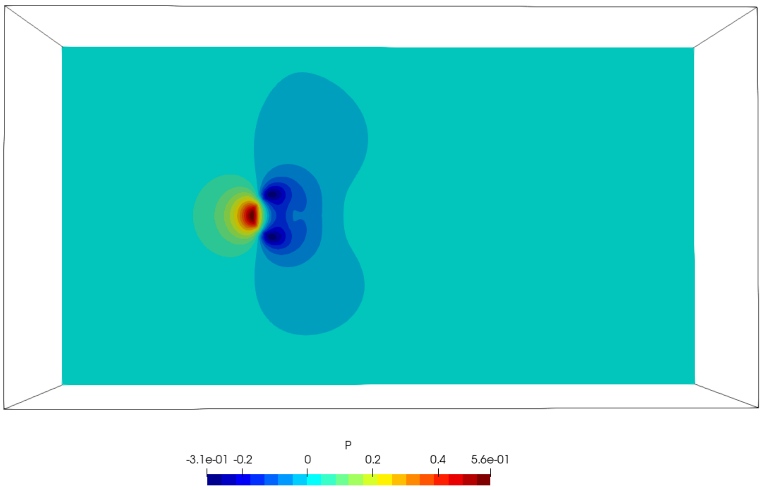


図36　$Re = 100, \tau = 100$の圧力場

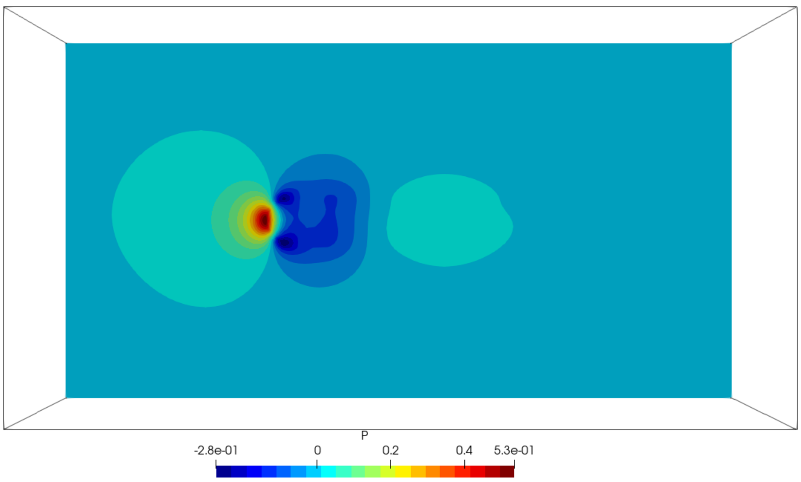


図37　$Re = 250, \tau = 100$の圧力場

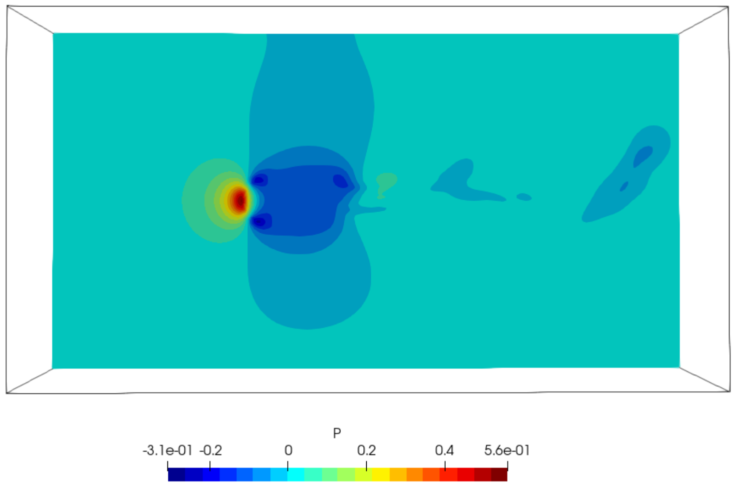


図38　$Re = 500, \tau = 100$の圧力場

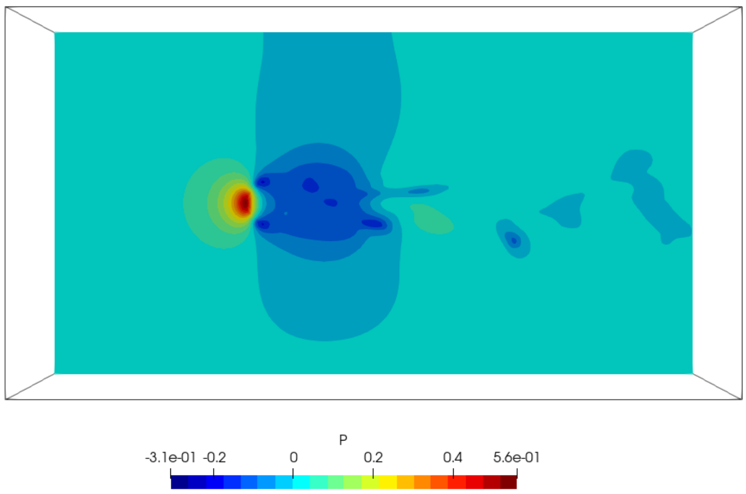


図39　$Re = 750, \tau = 100$の圧力場

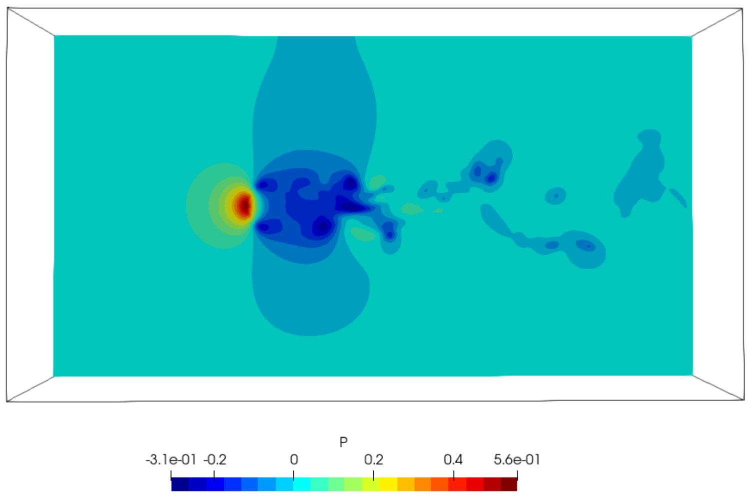


図40　$Re = 1000, \tau = 100$の圧力場

次に流れの渦構造を見るために，$\tau = 50, 100, 150, 200$におけるQ値の等値面を可視化し，図 41, 42, 43, 44 に示した．Q値とは速度勾配テンソルの第二不変量である．まず，無次元速度勾配テンソル$\boldsymbol{D}$は二階のテンソルであり，以下のようになる．

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} & \frac{\partial U}{\partial Z} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} & \frac{\partial V}{\partial Z} \\ \frac{\partial W}{\partial X} & \frac{\partial W}{\partial Y} & \frac{\partial W}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

テンソルの成分は座標系の取り方に応じて変わるが，座標に依らない不変量を取ることができる．二階のテンソルの場合，以下の三つが不変量となる[17][18]．

$$I_1 = D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

$$I_2 = \left\{ \begin{vmatrix} D_{22} & D_{32} \\ D_{23} & D_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} \\ D_{12} & D_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{31} \\ D_{13} & D_{33} \end{vmatrix} \right\}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}$$

そして，Q 値Qは以下のように定義される．

$$Q = \frac{1}{2} I_2$$

なお，本研究における可視化やQの算出は Paraview 5.8.1 で行った結果を以下に示す．

- $Re = 100$では球周りに軸対称で定常な渦ができているように見える．
- $Re = 250$では球周りに軸対称で定常な渦ができているように見えるが，球後流では非定常な渦ができている．
- $Re = 500$では非定常な振動流ができており，ヘアピン状の渦ができている．
- $Re = 750$でも非定常な振動流ができており，ヘアピン状の渦ができているように見えるが，右図がより細かくなっており，ヘアピン形状は崩れつつある．
- $Re = 1000$では非定常な振動流ができており，文献の通り$Re = 500,750$の時よりも球後方で細かい渦が絡み合って流下し，渦が上下に揺動している．

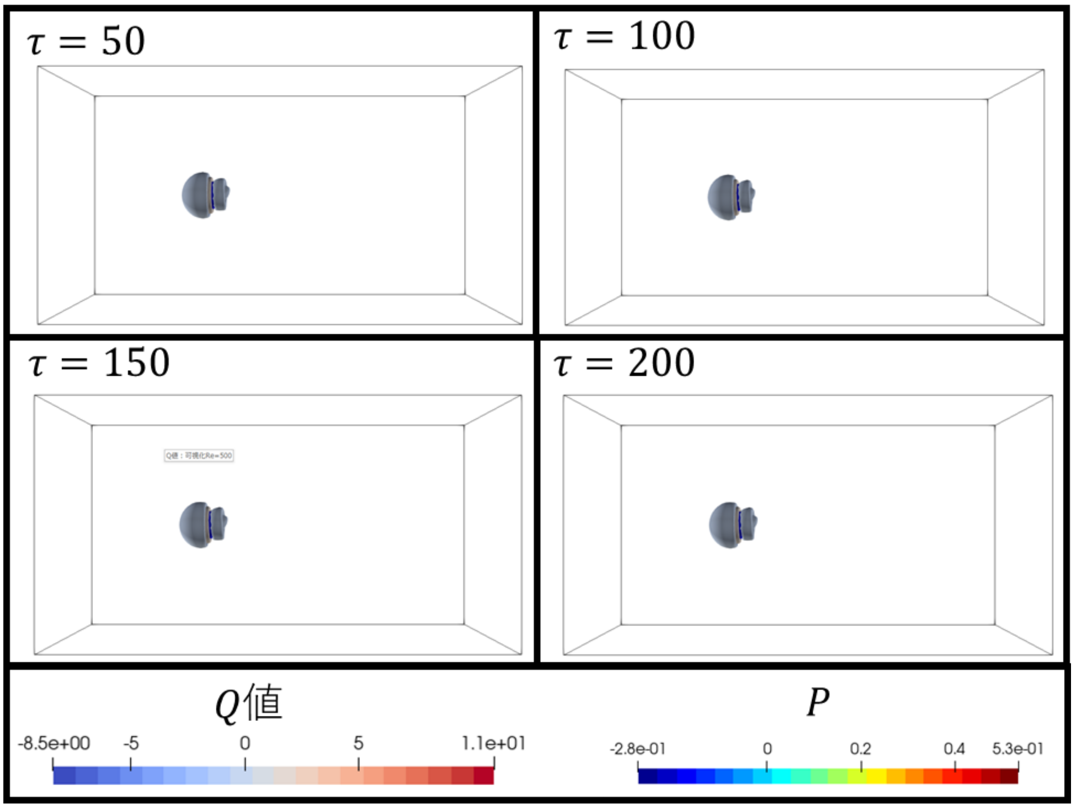


図41　$Re = 250$におけるQ値の時間履歴

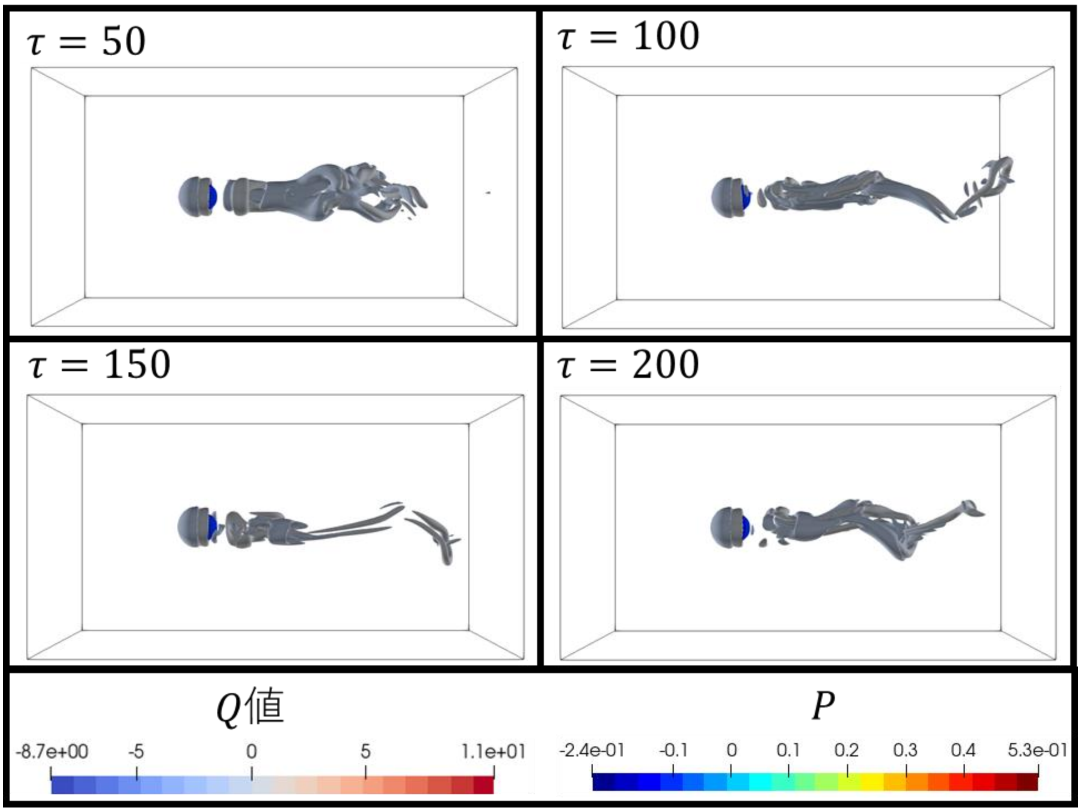


図42　$Re = 500$におけるQ値の時間履歴

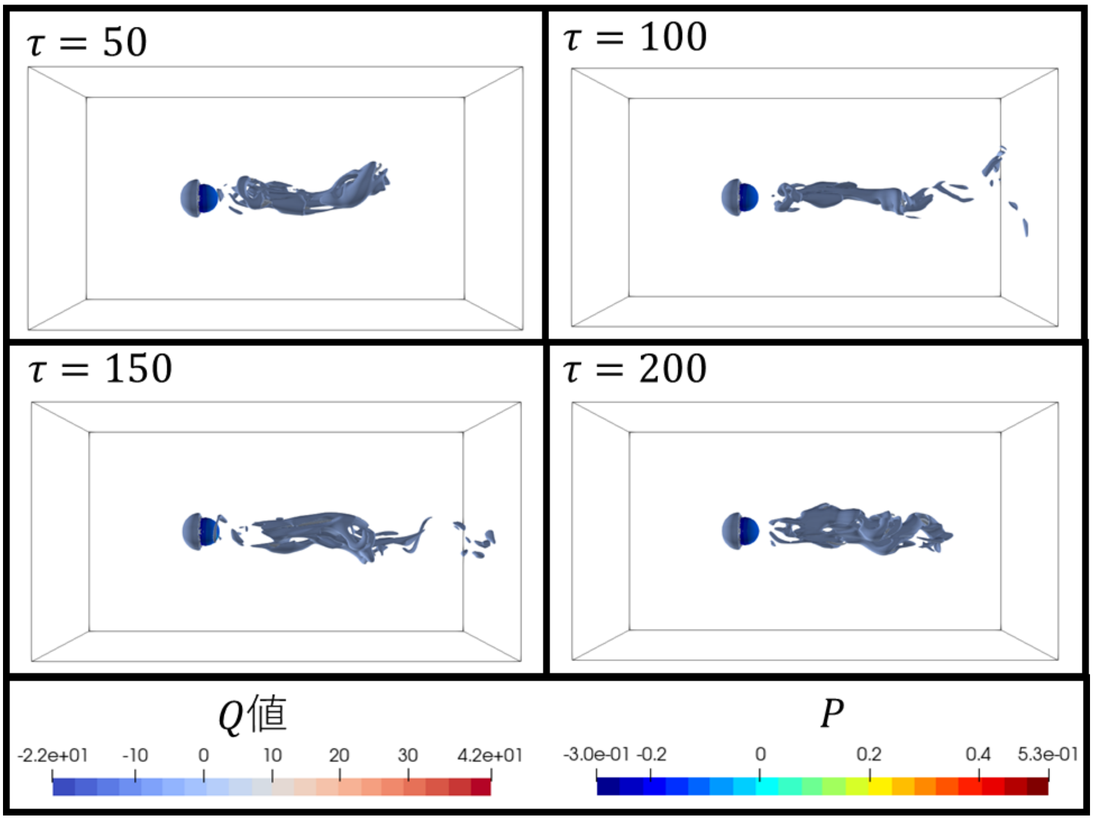


図43　$Re = 750$におけるQ値の時間履歴

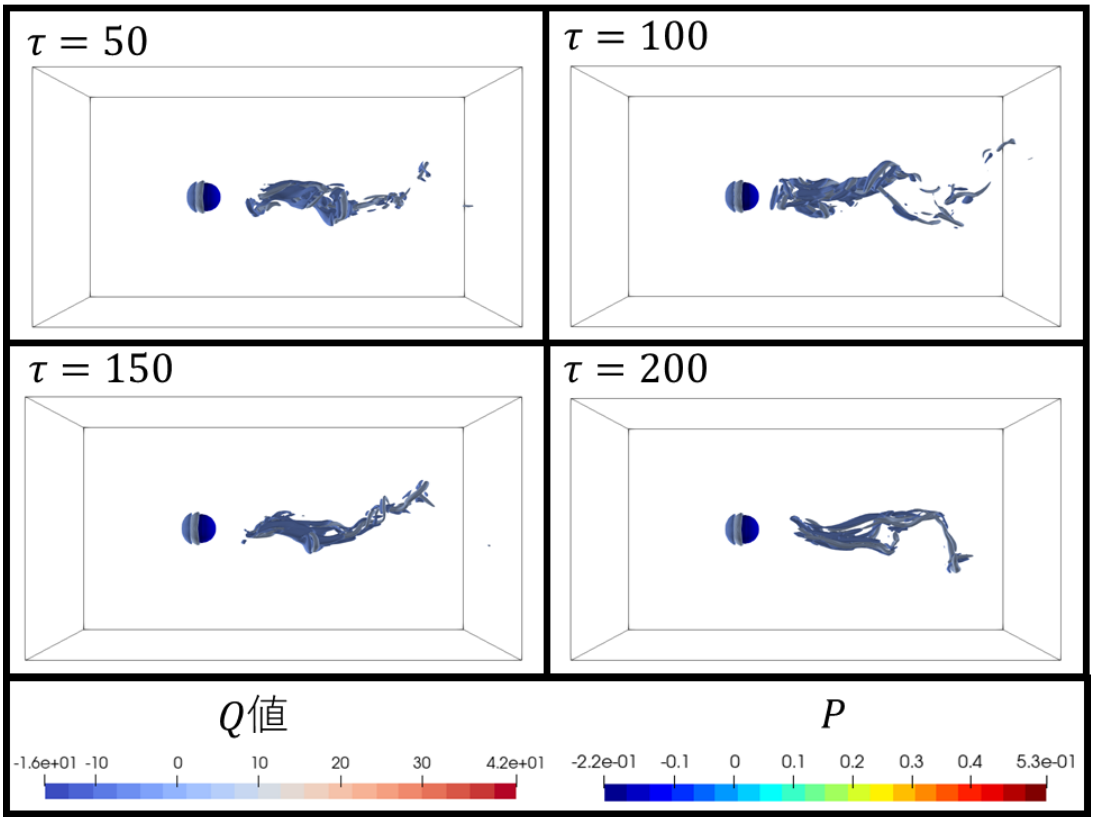


図44　$Re = 1000$におけるQ値の時間履歴

3.1.4　まとめ

本章では一様流中に置かれた球周りの流れで抗力係数の算出と流体場の可視化を行い，流体場の解析や流体力の算出の妥当性を確認した．定量的な評価により定常流れになる$Re <$ 100では解析結果と実験値との誤差が1%以内となり，本解析手法の妥当性を確認した．一方，非定常流れや乱流になるレイノルズ数の計算では誤差が大きくなってしまい，その原因として格子数の不足が考えられることを挙げた．また可視化結果と参考文献を比較することにより，解析結果における流れの特徴が概ねどのRe数でも文献と一致した．

第4章　実験

4.1 目的

本章では物体が自由落下する実験を行った．実験を行った目的は以下の二つになる．

① 物体が自由落下する際の終端速度，終端角速度を求める．終端速度を代表速度として次章で解析を行う．また解析結果との比較にも使用する．

② ある区間（落としてから 1.8~2.0m の間）の落下現象をハイスピードカメラで撮影する．撮影した映像から区間での平均速度を算出し，解析結果との比較に用いる．

4.2 実験装置

実験に使用した装置，材料を以下に示す．
落下する物体はコピー用紙とテープのりから作成し，使用した面積から物体の質量を算出した．

- カメラ（Xiaomi 社製　Redmi Note 10 Pro 内蔵）
- ハイスピードカメラ（Photron 社製　FASTCAM Mini AX-50）
- 光源(REVOX 社製　SLG-150V 光ファイバー用光源装置)
- コピー用紙（A4 一枚5g）
- テープのり(Tombow 社製　PiT パワーC)

図45　光源（左），ハイスピードカメラ（右）

図 46 左の四角錐状のモデルを物体 A，右の四角錐に突起がついたモデルを物体 B と呼ぶことにする．物体 A は図 47 の三角形を四つ張り合わせて作り，物体 B は図 3 の三角形に長方形をつけた面を四つ張り合わせ，点線で90°折って作り回転を見るために一面のみ色付けを行っている．寸法は図 48 に示す．

CAD で作成した解析上での物体モデル（図）との対応を以下に示す．まず，解析上では格子数の関係から紙ほど薄い形状を認識できないため，実際の物体 A，B よりも分厚いモデルを作成している．一方，物理的な整合性を取るため，解析上の物体モデルは紙で作った物体モデルよりも低い密度に設定している．A4 のコピー用紙が一枚 5g，辺の長さが 210mm×297mm なので単位面積当たりの質量は

$$\frac{5 \times 10^{-3}}{(210 \times 10^{-3}) \times (297 \times 10^{-3})} \cong 8.0167 \times 10^{-2} [\mathrm{kg/m^2}]$$

そして，解析上では物体モデルは 1.2mm の厚みを与えているので，物体モデルの密度ρ_sは，

$$\rho_s = \frac{0.080167}{1.2 \times 10^{-3}} \cong 66.81 [\mathrm{kg/m^3}]$$

よって，空気と物体モデルの密度比ρ'は以下のようになる．

$$\rho' = \frac{\rho_s}{\rho_l} \cong 55.67$$

また，解析上での物体モデルは三角形メッシュ数を稼ぐために円形の凹凸をつけているが，この凹凸は流体場の計算に影響を与えない．

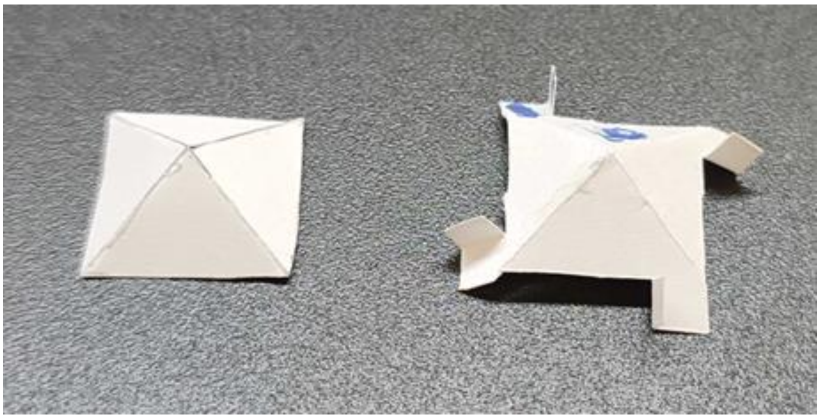


図46　物体モデル（左：物体 A，右：物体 B）

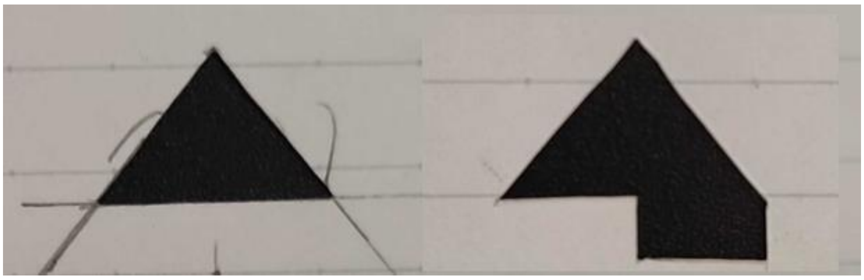


図47　物体を構成する面（左：物体 A，右：物体 B）

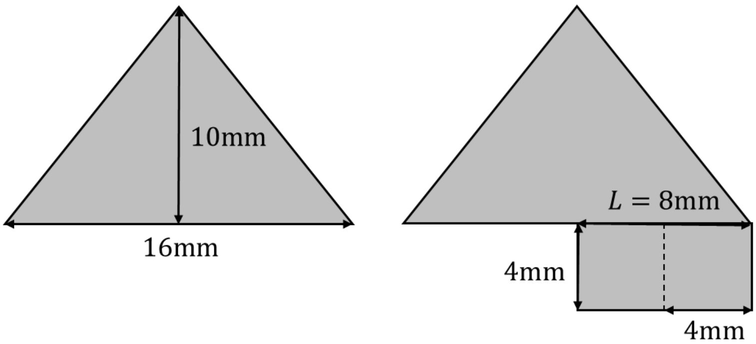


図48　寸法（左：物体 A，右：物体 B）

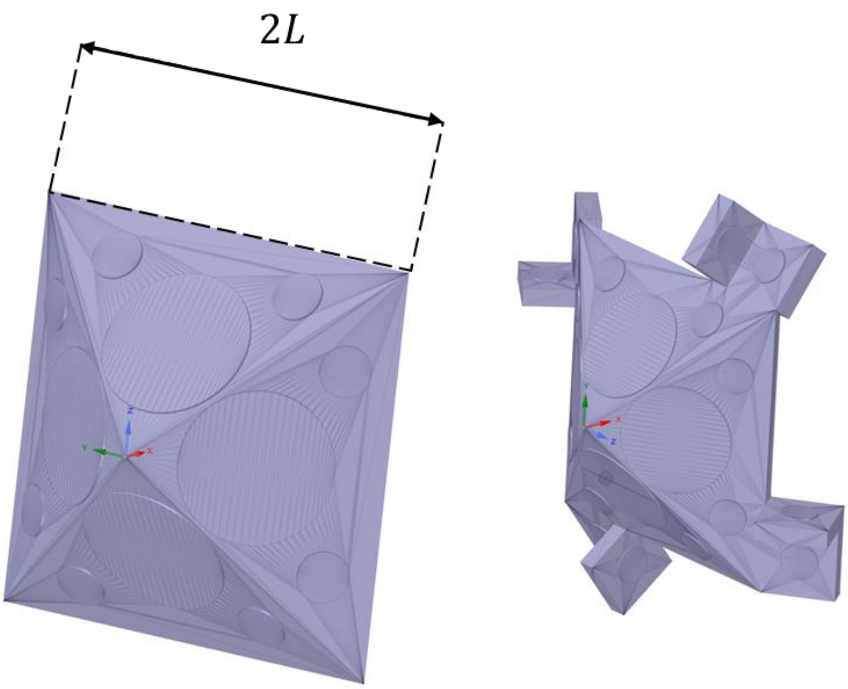


図49　物体モデル（物体 A，物体 B）

4.3 実験方法

本研究では二種類の実験を行った（実験①，実験②）．実験①は物体の終端速度，終端角速度を計測する実験である．図 50 のように物体A，Bを地上約 10m から落下させ，地上 3.5m を通過してから地上に落ちるまでの時間を計測した．計測区間までに落下運動は定常に達することを仮定し物体の終端速度は落下距離を落下時間で割ることにより求めた．また，カメラで物体が地上付近を落下する様子を撮影し，回転数を時間で割ることによって物体の角速度を求めた．

実験②はある区間での物体の速度を計測する実験である．図 50 のように物体A，Bを地上 2m から落下させ，地上 0.2m から地上に落ちるまでの様子を図 45 のハイスピードカメラで撮影し，その区間における平均速度を算出した．なお，解析上では初期位置を原点とし，鉛直上向きを正とした座標系を用いている．

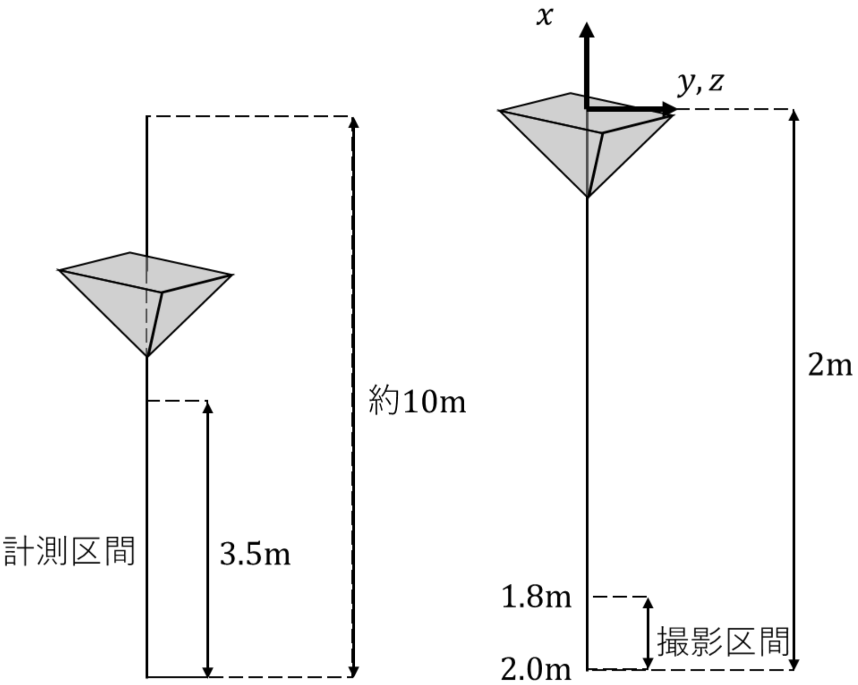


図50　左：実験①，右：実験②

4.4 実験結果（実験①）

実験を行った結果，計測区間 3.5m を物体 A が 2.68s，物体 B が 2.46s で通過した．よって物体 A の終端速度を$u_{fin,\mathrm{A}}$，物体 B の終端速度を$u_{fin,\mathrm{B}}$とすると

$$u_{fin,\mathrm{A}} = \frac{3.5}{2.68} \cong 1.306[\mathrm{m/s}]$$

$$u_{fin,\mathrm{B}} = \frac{3.5}{2.46} \cong 1.423[\mathrm{m/s}]$$

となった．また，一定時間当たりの回転数から物体 B の終端角速度$\omega_{fin,\mathrm{B}}$をカメラで撮影した映像から算出した．物体 B を落下が始まって 6.5 秒後から計測して2.46秒でちょうど 1 回転したので終端角速度は以下のようになる．

$$\omega_{fin,\mathrm{B}} = 2\pi \times \frac{1}{2.46} \cong 2.554[\mathrm{rad/s}]$$

4.5 実験結果（実験②）

実験②は，$-2.0\mathrm{m} < x_0 < -1.8\mathrm{m}$の区間における物体の平均速度をハイスピードカメラで撮影した．撮影した結果は図 51，図 52 のようになった．物体 A，B のこの区間における平均速度をそれぞれ$u_{sec,\mathrm{A}}$，$u_{sec,\mathrm{B}}$とすると

$$u_{sec,\mathrm{A}} = 1.282[\mathrm{m/s}]$$
$$u_{sec,\mathrm{B}} = 1.262[\mathrm{m/s}]$$
$$\frac{u_{sec,\mathrm{A}}}{u_{fin,\mathrm{A}}} \cong 0.9816$$

$$\frac{u_{sec,B}}{u_{fin,\mathrm{B}}} \cong 0.8869$$

となり，$u_{sec,\mathrm{A}}$に関してはほぼ終端速度に達しているが，$u_{sec,\mathrm{B}}$は終端速度の 89%程度の速度であり，この区間では過渡状態であることがわかった．また終端速度に達するまでの時間が物体 A よりも物体 B の方が長くなると推測される．

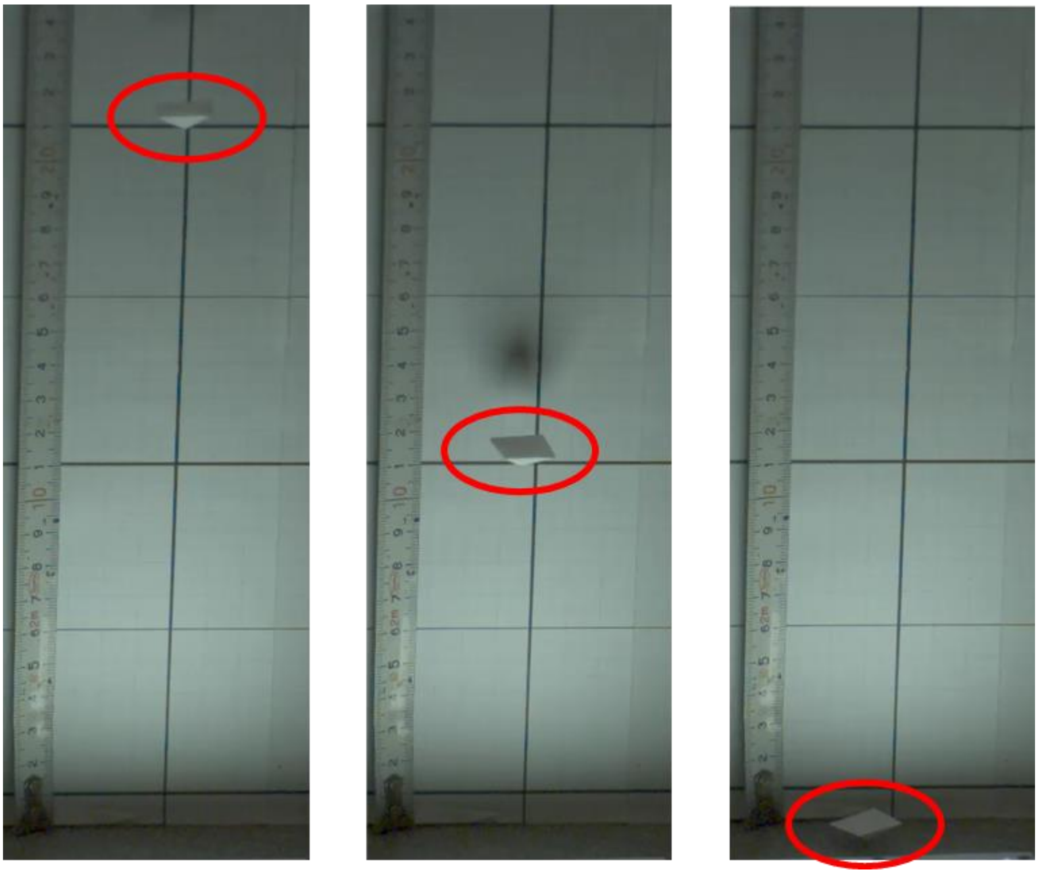


図51　実験②　物体 A の落下

図52　実験②　物体 B の落下

第5章　物体の自由落下計算

5.1 物体の自由落下

第三章で一様流中に置かれた球周りの流れを解析することで，流体場の計算，流体力の算出の妥当性を定量的，定性的に確認した．本章では本解析手法が物体の飛行現象に対して適切であるか，物体 A，B の自由落下現象を解析し，第四章の実験と比較を行い検討する．

5.1.1 解析モデル

図 53 に改めて物体の自由落下計算の解析モデルを示す．物体から見た非慣性座標系を用いており，慣性座標系から見ると物体が解析領域ごと回転しながら落下する系となっている．重力加速度$\vec{g}$はx軸の負の方向に働き，計算領域を$(Cx, Cy, Cz) = (24L, 10L, 10L)$，物体モデルの中心座標を$(x, y, z) = (6L, 5L, 5L)$とする．

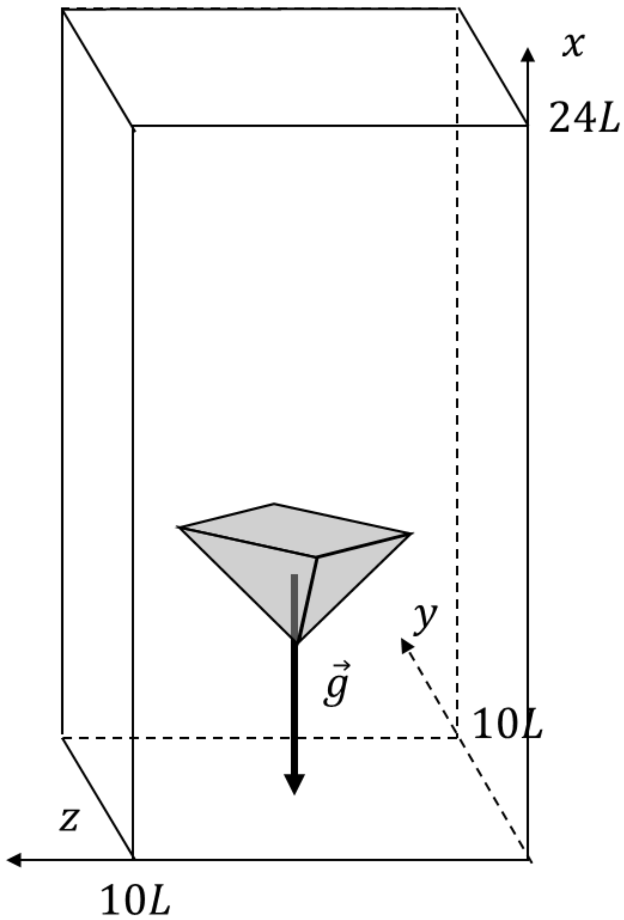


図53　解析モデル（自由落下）

5.1.2 物体モデル

第四章で実験に用いた物体 A，B を模擬した物体モデルを CAD 上で作成し計算に使用した（図 54）．本解析手法のように符号付き距離関数に物体形状の情報を埋め込む手法では，格子幅以下の物体を認識できない．よって CAD 上で作成した物体モデルには意図的に厚みをつけており，その分物体の密度を低くすることによって物理的な整合性を確保している．また，物体は三角形メッシュの数や分布をコントロールするため微小な凹凸をつけているが流体場の計算には影響しない．

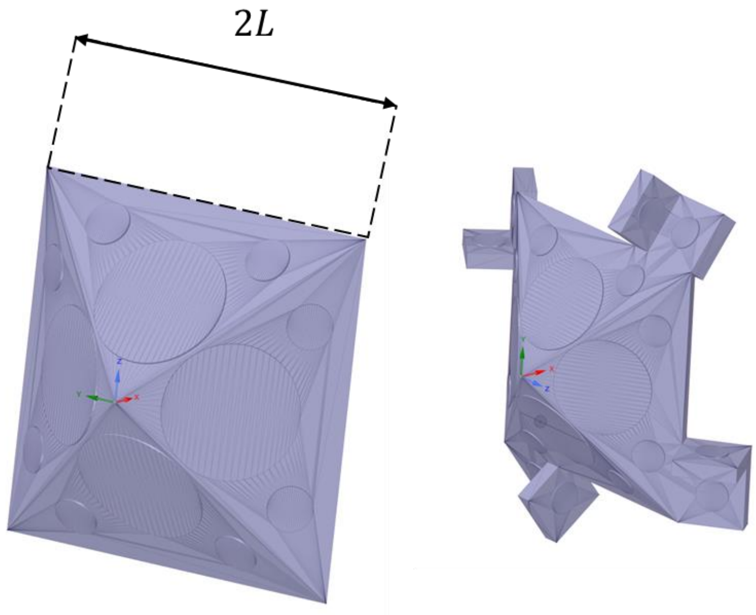


図54　物体モデル（物体 A，物体 B）

5.1.3 基礎式

以下に改めて本計算における無次元式を示す．無次元数はレイノルズ数($Re = u_o L/\nu$)，密度比($\rho' = \rho_s/\rho_l$)，ガリレイ数（$Ga = gL^3/\nu^2$）を用いている．

【連続の式】

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \tag{1.69}$$

【NS 方程式】

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \tau} \times \vec{R}_c + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_c) + \frac{\partial^2 \vec{X}_0}{\partial \tau^2} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{U} \tag{1.70}$$

【重心の運動方程式】

$$\frac{d^2X_0}{d\tau^2} = -\frac{Ga}{Re^2} + \frac{1}{\rho' V}F_x \tag{1.71}$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{d\Omega_x}{d\tau} = \frac{1}{I_X}T'_X \tag{1.72}$$

5.1.4 境界条件，計算条件

表 5 の境界条件では，解析領域外部が静止していると仮定している．また，本章の計算で使用する無次元数は表 6 となっており，Reの算出に用いる代表速度は第四章で測定した終端速度を代入している．

表 5　境界条件

	速度	圧力
流入面	$\vec{U}^{(s)} = \vec{0}$	$\partial P/\partial X = 0$
側壁	$\vec{U}^{(s)} = \vec{0}$	$\partial P/\partial Y = 0$
側壁	$\vec{U}^{(s)} = \vec{0}$	$\partial P/\partial Z = 0$
流出面	$\partial\vec{U}^{(r)}/\partial X = 0$	$P\ = 0$

表 6　計算条件

	記号	物体 A	物体 B
レイノルズ数	$Re[-]$	691.0	743.9
密度比	$\rho'[-]$	55.57	
ガリレイ数	$Ga[-]$	2.195×10^5	
Lあたりの格子数	$nD[-]$	20	
時間刻み	$\Delta\tau[-]$	1.0×10^{-3}	
最大時間（無次元）	$\tau_{max}[-]$	200	

5.2 解析結果

解析結果と第四章で得た実験結果を比較する．図で用いる値は有次元に戻している．

5.2.1 定量的比較：終端速度

実験①で求めた物体 A，B の終端速度と解析結果を比較したものが図 55，図 56 になる．物体 A，B 共に解析で得た終端速度と実験結果がよく一致しており，$100 < \tau < 200$の速度の平均と実験値の誤差は物体 A が 2.64%，物体 B が 0.47%となった．しかし，物体 A に関しては$t = 0.4$付近で並進速度がオーバーシュートしている．剛体の方程式から定常状態では加速度，角加速度の項が消えるため，流体力，トルクの算出が正しければ終端速度，終端加速度実験値と解析結果は一致するはずである．一方速度，角速度の時間履歴や並進距離に関してはそれまでの時間ステップの誤差が蓄積する．本研究では剛体の運動方程式の時間項を一次精度で解いており精度の検証ができておらず，並進速度の誤差蓄積していることがオーバーシュートの原因と考えられ，時間項の離散化精度についてより精度の高い手法を用導入する必要が示唆された．

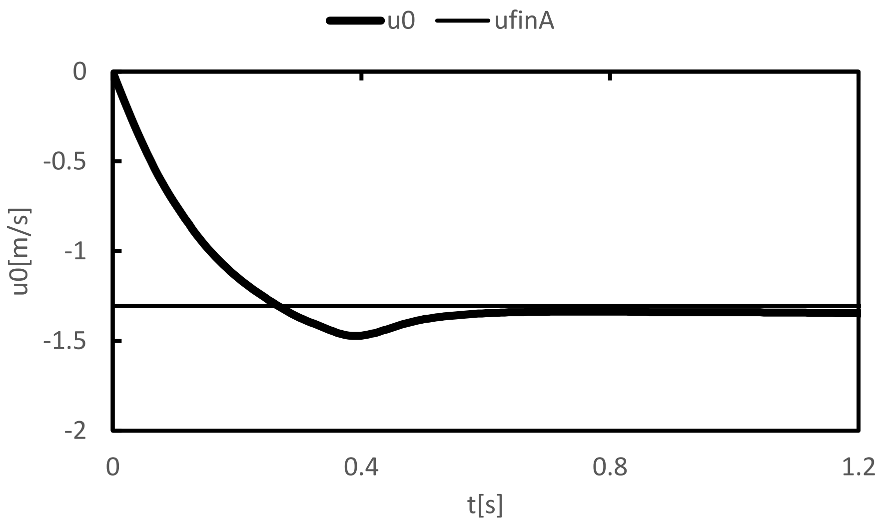


図55　物体 A　重心の速度

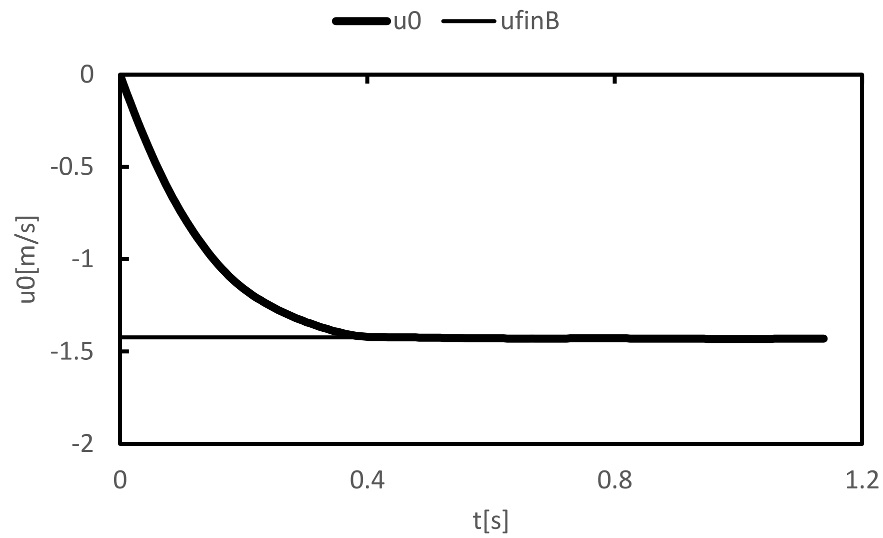


図56　物体 B　重心の速度

5.2.2 定量的比較：終端角速度

実験①で求めた物体 B の終端角速度と解析結果を比較し，それに物体 A の角速度の解析結果を加えたものが図 57 である．まず物体 A に関して，物体 A は角速度が生まれる形状ではないと考えられる．解析結果を見ると過渡状態で角速度が増加するが，時間が経つにつれ収束している現象がみられる．可視化から，過渡状態では渦が物体後流近くで多く発生していることがわかり，この影響でトルクが生じた可能性がある．また図 58 から物体 B の解析で得た角速度は実験値に収束していくように見える．

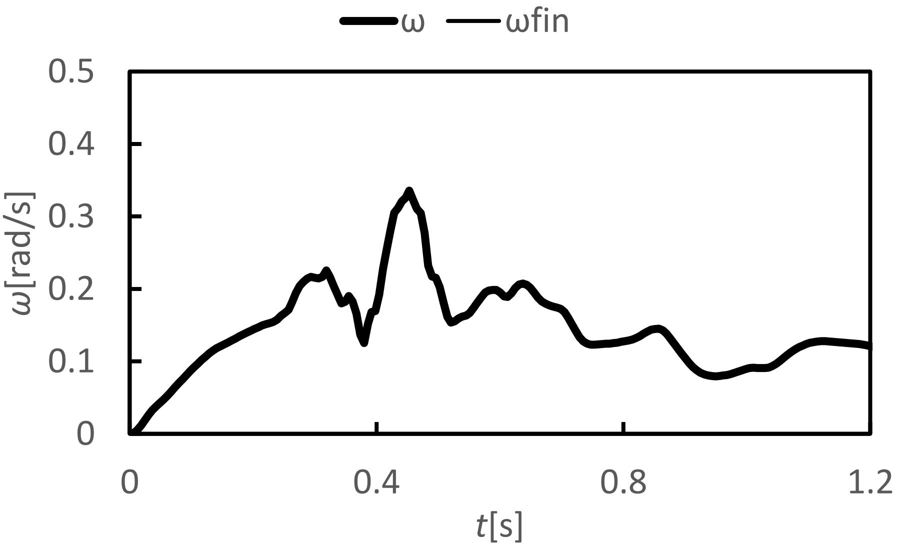


図57　物体 A　角速度

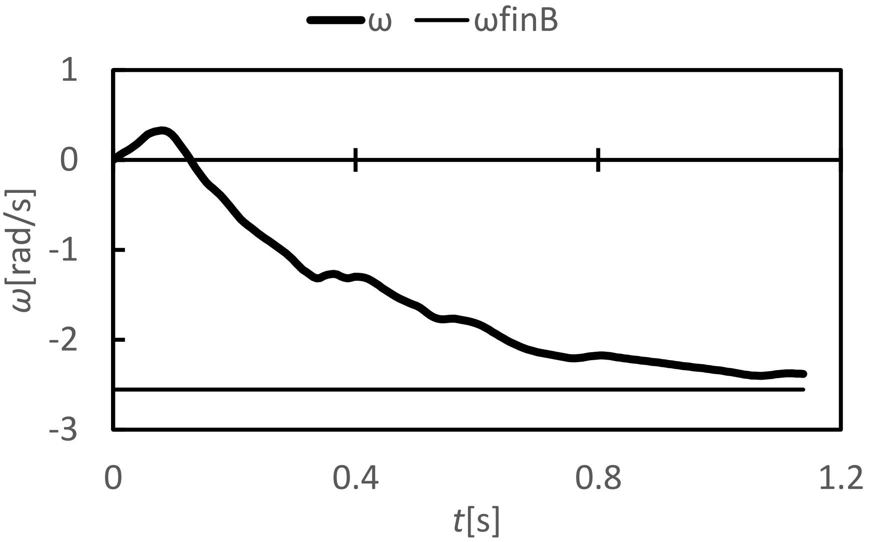


図58　物体 B　角速度

5.2.3 定量的比較：区間速度

次に，$-2\mathrm{m} < x_0 < -1.8\mathrm{m}$で撮影した実験値と解析結果を比較する．図 59, 60 に物体の移動距離を示す．図を見ると，本計算では撮影を行った区間を十分に通過出来なかった．4 章より，撮影を行った$-2\mathrm{m} < x_0 < -1.8\mathrm{m}$の区間で物体 B はまだ終端速度に達していないという実験結果を得たが，解析結果では図 54 から$\mathrm{t} = 0.4\mathrm{s}$から$\mathrm{t} = 0.5\mathrm{s}$でほぼ終端速度に達するという結果になり，終端速度に達するまでの時間に倍以上の誤差が生じていることがわかった．この誤差の原因としては，物体の移動距離が物体の加速度を時間積分することにより算出しているので，剛体の運動方程式で求める重心の速度の誤差が蓄積していることが考えられる．

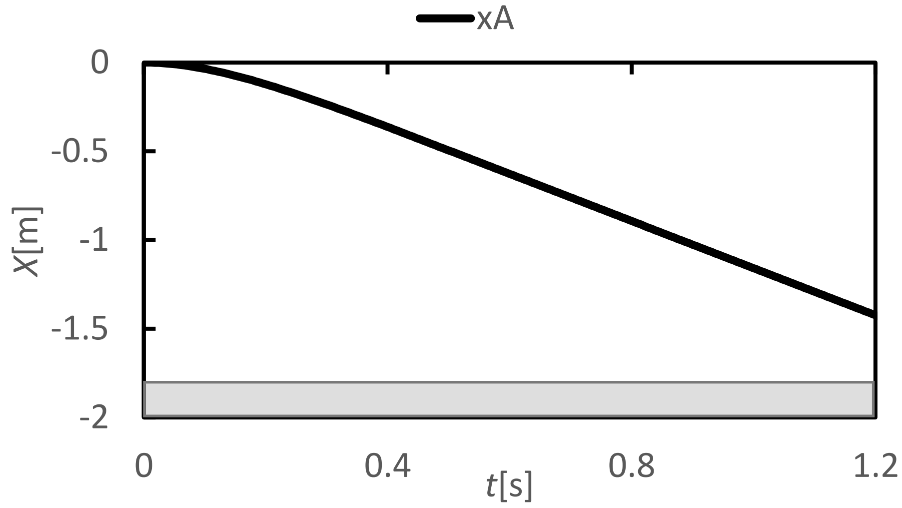


図59　物体 A　移動距離

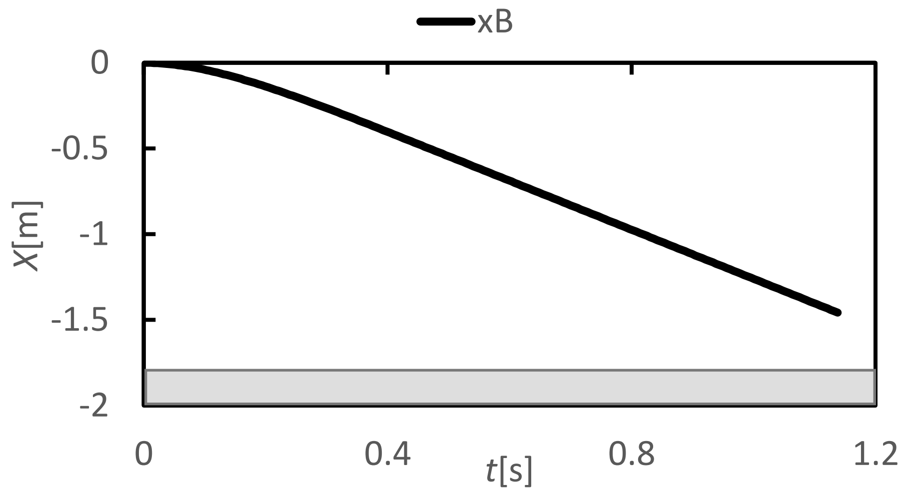


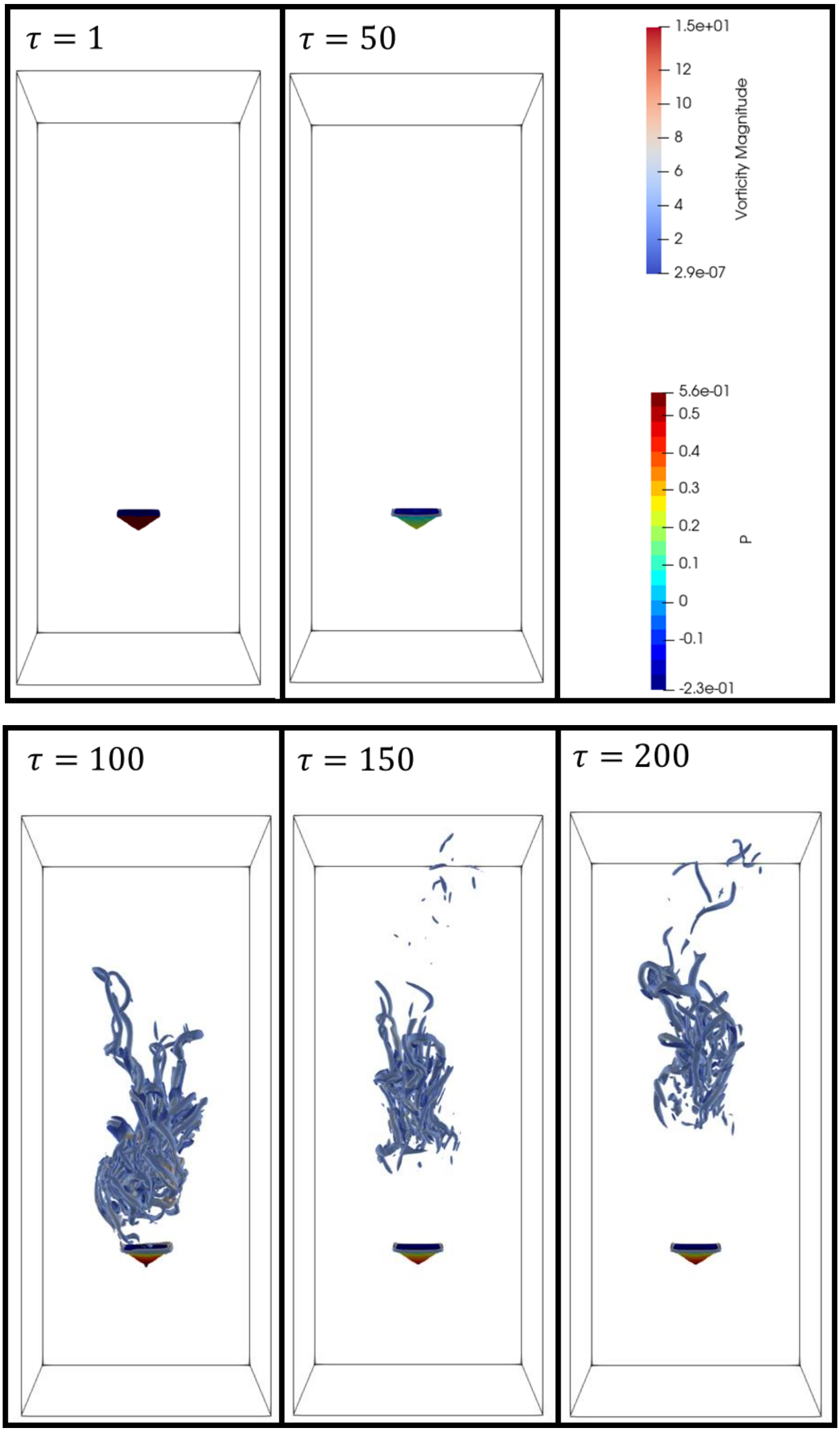
図60　物体 B　移動距離

5.2.4 可視化結果

本節では解析結果の可視化を物体 A，B のそれぞれで行い，図 61，図 63 はQ値の等値面に渦度の絶対値で色付けを行ったもの，図 62，図 64 は流線に圧力の色付けを行ったものである．画像は無次元時間$\tau = 1, 50, 100, 150, 200$で，図 61，図 62 は物体 A，図 63，図 64 は物体 B の可視化である．

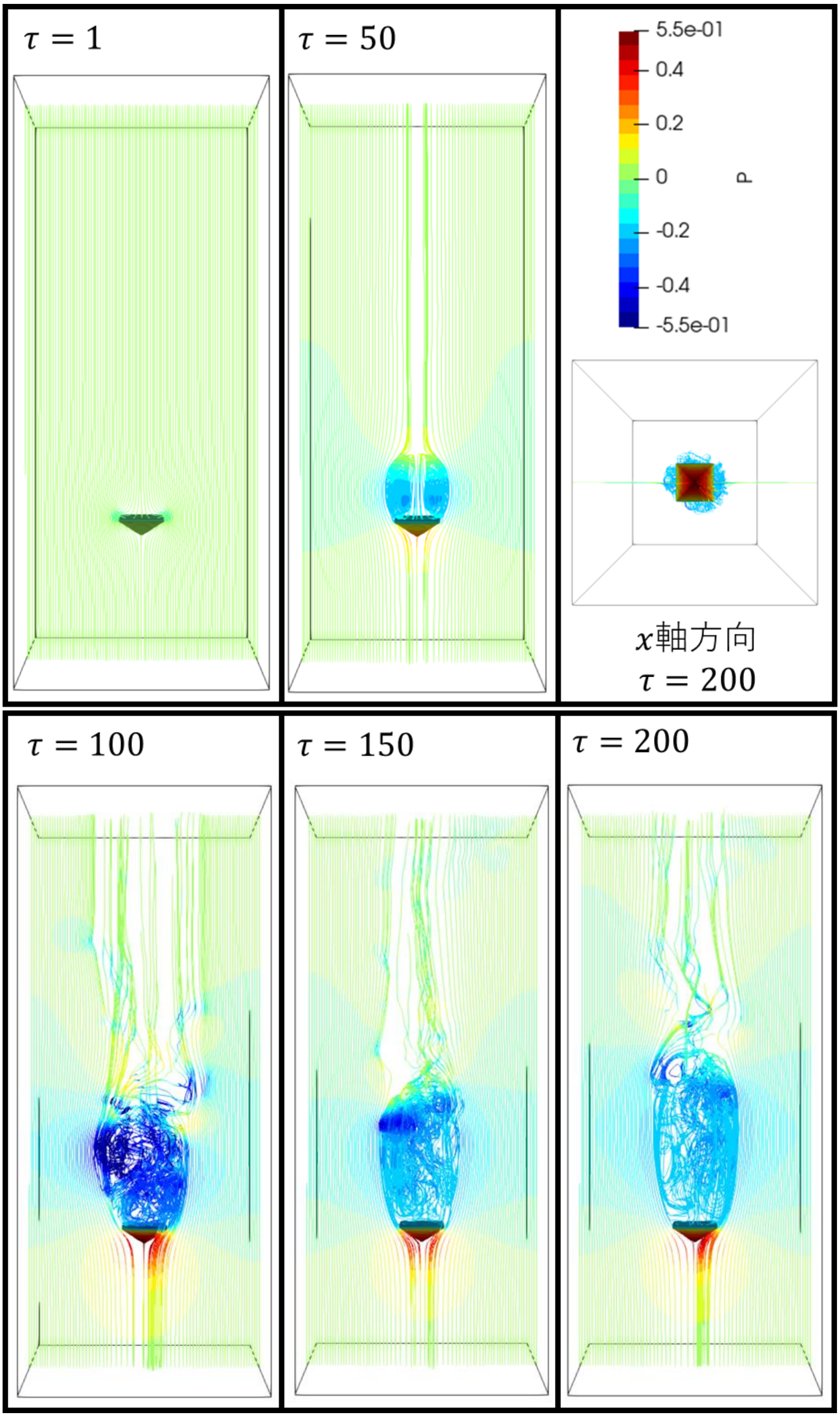
可視化を見ると，物体 A，B ともに物体の後流で渦を発生させながら落下していることがわかる．また，後流の渦は時間とともに物体から離れていくように見える．

一方，図 61 から物体 A の落下では$\tau = 50$から$\tau = 100$の間で後流が非定常的になっているが，物体 B の落下では$\tau = 50$で既に物体後方が非定常的な流れになっており，物体 A よりも物体 B の方が非定常な流れになりやすい．これは物体 B の回転や突起の影響であると考えられる．また図 62 と図 64 の$x = 0$から見た流線を見比べると，物体 A では回転の影響が見えない流れになっているが，物体 B では流体場が回転しているように見える．



τ = 1
τ = 50
1.5e+01
12
10
8
6
4
2
2.9e-07
Vorticity Magnitude
5.6e-01
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-2.3e-01
P
τ = 100
τ = 150
τ = 200

図61　物体 A　Q値



$\tau = 1$
$\tau = 50$
5.5e-01
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-5.5e-01
P
x軸方向
$\tau = 200$
$\tau = 100$
$\tau = 150$
$\tau = 200$

図62　物体 A　流線

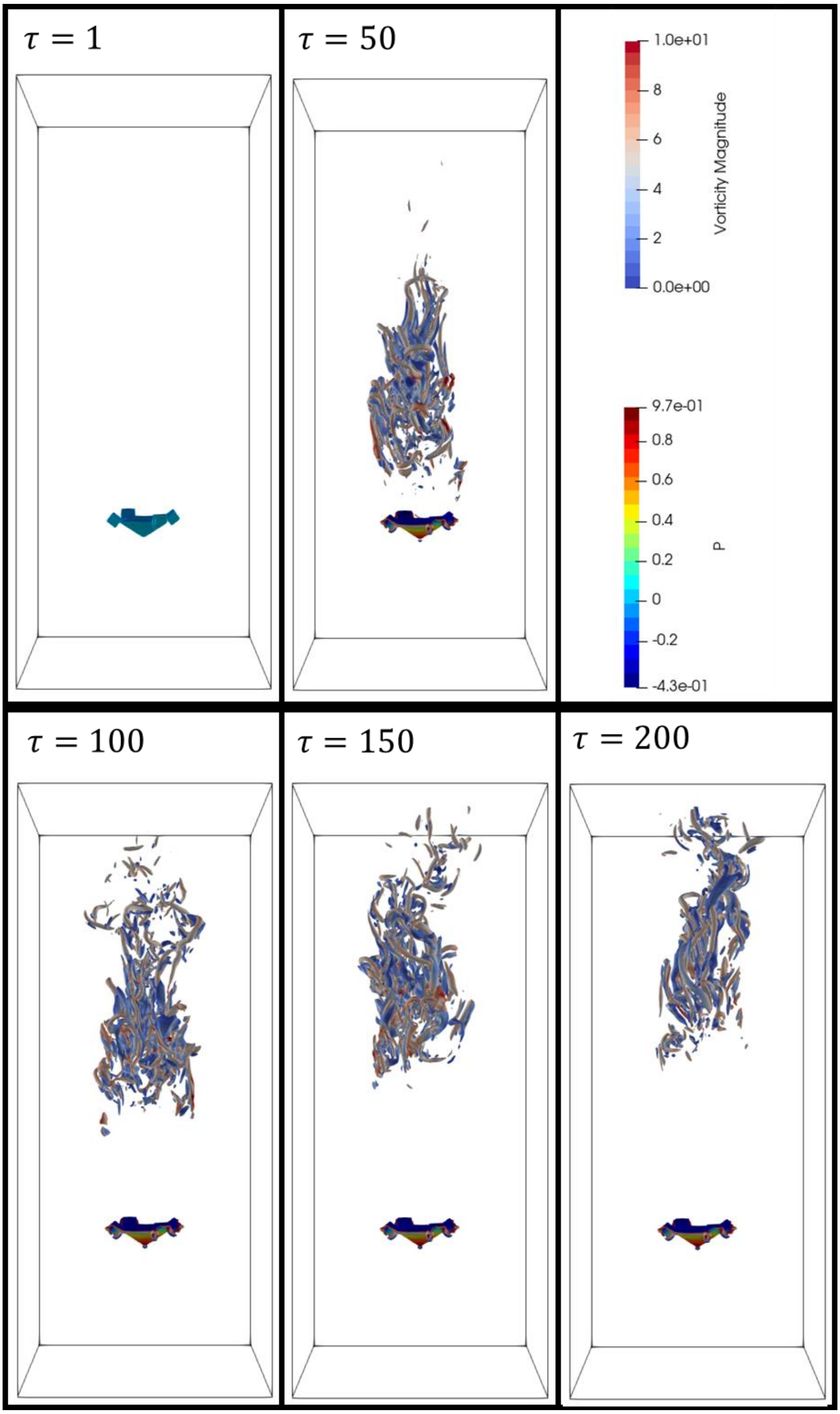
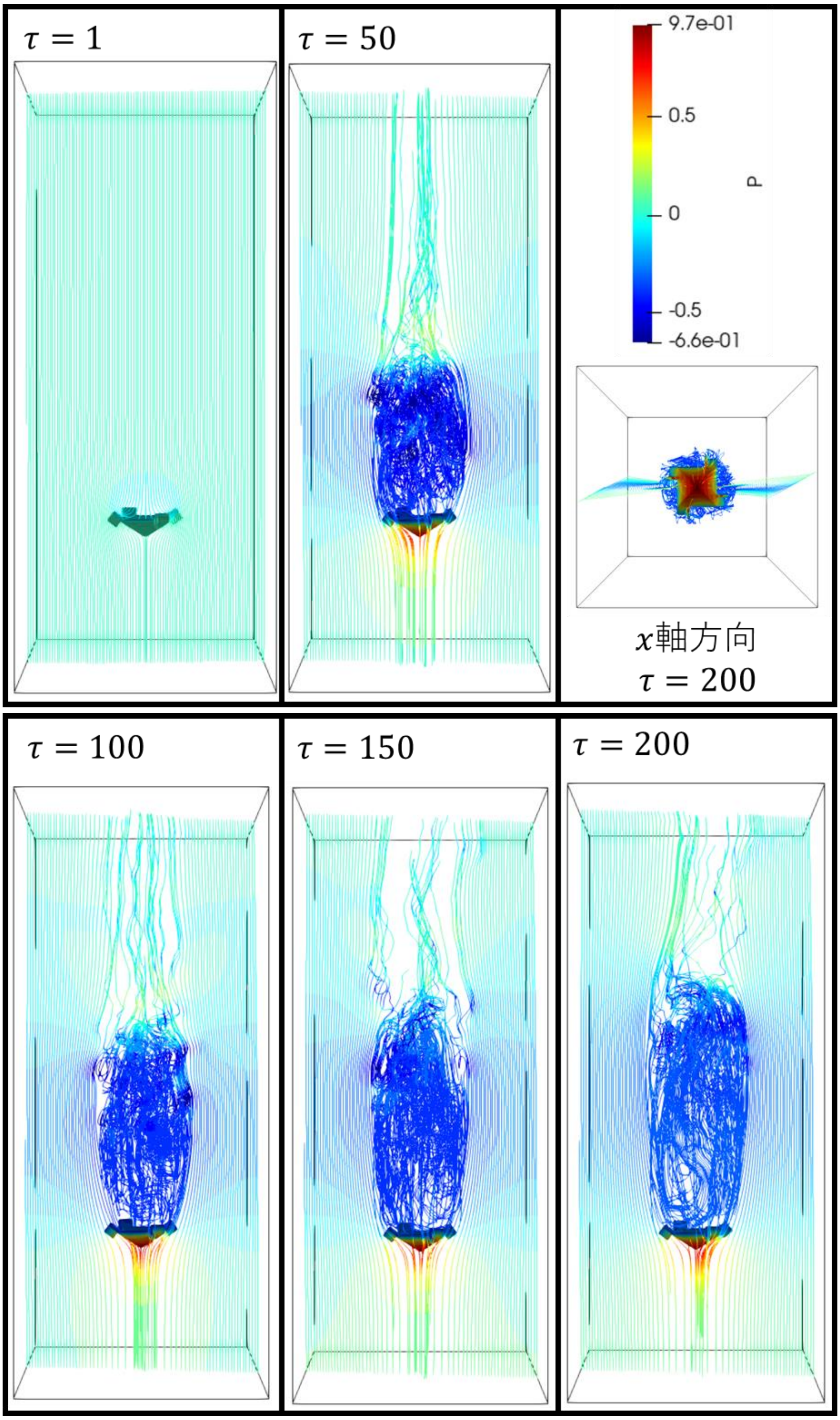

$\tau = 1$
$\tau = 50$
1.0e+01
8
6
4
2
0.0e+00
Vorticity Magnitude
9.7e-01
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-4.3e-01
P
$\tau = 100$
$\tau = 150$
$\tau = 200$

図63　物体 B　Q値



$\tau = 1$
$\tau = 50$
9.7e-01
0.5
0
-0.5
-6.6e-01
P
x軸方向
$\tau = 200$
$\tau = 100$
$\tau = 150$
$\tau = 200$

図64　物体 B　流線

5.3 まとめ

物体 A の終端速度，物体 B の終端角速度が実験値とほぼ一致したことから，物体の並進と回転を伴う流体場の解析ができたといえ，本解析手法が流体，物体が双方運動する系の解析手法として適切であると考えた．一方，数値的な誤差の蓄積が原因とみられる移動距離の誤差や，並進速度のオーバーシュートについては今後原因の究明が求められ，特に剛体の運動方程式の時間項の離散化精度に疑問が残った．また本研究による無次元化では代表速度を実験等で与える必要があり，解析対象ごとに実験を行う必要があるため，代表速度を用いない無次元化を行うことが適切である．

第6章　結言

本研究の目的は物体（翼果）の落下や飛行に関する数値解析手法の確立であり，複雑形状物体の自由落下現象を解析するコードを作成した．計算の高速化のため直交格子を用いて物体形状を符号付き距離関数に埋め込み，非慣性座標系により物体境界を固定して計算を行った．また，GPU による並列計算を行い，物体境界付近での離散化精度を高めるため直接離散化法を導入した．本解析手法の流体場，流体力の算出に関する妥当性検証としては一様流中の球周りの流れを解析し，抗力係数で定量的な評価を行った．その結果流体場，流体力の算出を定量的に評価できたが，本研究で用いた格子数では流れの非定常性が強くなるにつれ流体力の算出誤差が大きくなることがわかった．その後実験で求めた速度を用いて物体の自由落下計算を行い，実験値と比較した．その結果，終端速度，終端角速度がほぼ一致し，本研究の目的である物体の運動（並進と回転）を伴う流体場の解析ができたことから，本研究の研究目的を達成できたといえる．一方，剛体の運動方程式の解析精度には疑問が残った．

今後の展望としてはまず，物体の終端速度を用いない無次元化の導入を行いたい（付録）．次に妥当性検証で高Re数では誤差が大きくなることがわかったのでより高Re数でも精度良く解析ができる手法を導入し，より速く大きな物体を対象とした解析を可能にすることがある．一つの解決策としては格子点の分布を最適化する手法である AMR（Adaptive Mesh Refinement）の導入が挙げられ，メモリを節約し最大格子数を増やせることや計算の高速化が期待できる．次に，自由落下計算で発生した誤差の原因の究明を行うと共に時間項の離散化を高次精度化し，過渡状態における解析の妥当性を検証することが挙げられる．また本研究では物体の運動の自由度について，並進，回転共にx方向のみであったが，物体運動の自由度を増やすことでより複雑な運動をしながら落下する翼果の解析も可能にすることがある．物体の自由度を本研究の 2 自由度よりも増やすと NS 方程式や剛体の運動方程式が大幅に複雑化し，流入面，流出面も時間によって変化するので，より自由度が高い非慣性座標系の基礎式の導出や境界条件の改良を行う必要がある．
以上のまとめを以下に示す．

<u>研究結果</u>

- 一様流中の球周りの流れの解析から流体場，流体力の算出を定量的に評価した．
- 物体の自由落下計算から，物体の落下運動（並進，回転）を伴う流体場の解析ができていることがわかった．

<u>今後の展望</u>

- 無次元化の改良を行う必要がある（付録）
- 高Re数の計算に対応し，より速く大きな物体の落下現象を解析する
- 剛体運動の自由度を増やし，複雑な運動の解析に適応する．
- 回転による誤差が少ない系の設定

付録

付録 A　無次元化

1.3 節により，非慣性座標系における基礎方程式は以下のようになる．以下，$\vec{u}^{(r)}=\vec{u}$として非慣性座標系から見た速度を扱い，回転軸からの変位ベクトルを$\vec{r_c}$とする．

【連続の式】

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$$

【NS 方程式】

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{\partial^2\vec{x}_0}{\partial t^2}+\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}\times\vec{r_c}+2\vec{\omega}\times\vec{u}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r_c})+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=-\frac{1}{\rho_l}\vec{\nabla}p+\nu\nabla^2\vec{u}$$

【重心の運動方程式】

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}=\frac{1}{\rho_s v}f_x-g$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{d\omega_x}{dt}=\frac{1}{I_x}T_x$$

ここで，未定参照量を以下のようおく．

$$\vec{X}=\frac{1}{L}\vec{x},\vec{U}=\frac{1}{u_o}\vec{u},\overrightarrow{R_c}=\frac{1}{L}\vec{r_c},\tau=\frac{1}{t_o}t,\vec{\Omega}=\frac{1}{\omega_o}\vec{\omega},p=\frac{1}{p_0}p,\vec{F}=\frac{1}{f_0}\vec{f},\vec{T}=\frac{1}{T_0}\overrightarrow{T'},V=\frac{1}{L^3}v,$$

$$\overrightarrow{I'}=\frac{1}{I_0}\vec{I}$$

代入して，NS 方程式をu_0/t_0で割ると以下のようになる．

【連続の式】

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=0$$

【NS 方程式】

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau}+\frac{L}{u_0t_0}\frac{\partial^2\vec{X}_0}{\partial\tau^2}+\frac{L\omega_0}{u_0}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\tau}\times\overrightarrow{R_c}+2t_0\omega_0\vec{\Omega}\times\vec{U}+\frac{t_0}{u_0}\omega_0^2L\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{R_c}\right)+\frac{t_0u_0}{L}\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{U}$$

$$=-\frac{t_0}{u_0}\frac{p_0}{\rho_l}\vec{\nabla}P+\frac{t_0}{L^2}\nu\nabla^2\vec{U}$$

【重心の運動方程式】

$$\frac{L}{t_0^2}\frac{d^2X_0}{dt^2}=\frac{1}{L^3f_0}\frac{1}{\rho_sV}F_x-g$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{\omega_0}{t_0}\frac{d\omega_x}{dt}=\frac{T_0}{I_0}\frac{1}{I'_x}T'_x$$

ここで

$$\frac{L}{u_0 t_0} = 1, \frac{L\omega_0}{u_0} = 1\,, \frac{t_0}{u_0}\frac{p_0}{\rho_l} = 1$$

とすると，$t_0 = L/u_0, \omega_0 = u_0/L,\ p_0 = \rho_l u_0/t_0 = \rho_l u_0^2/L$となり，レイノルズ数を

$$\boldsymbol{Re = \frac{Lu_0}{\nu}}$$

と定義すると NS 方程式は以下のようになる．

【NS 方程式】

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\vec{X}_0}{\partial\tau^2} + \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\tau} \times \overrightarrow{R_c} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{R_c}\right) + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{U} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{U}$$

剛体の運動方程式も同様にすると，

【重心の運動方程式】

$$\frac{Lu_0^2}{L^2}\frac{d^2X_0}{dt^2} = \frac{1}{L^3 f_0}\frac{1}{\rho_s V}F_x - g$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{u_0^2}{L^2}\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{T_0}{I_0}\frac{1}{I'_x}T'_x$$

重心の運動方程式に関して整理すると，

$$\frac{d^2X_0}{dt^2} = \frac{1}{u_0^2 L^2 f_0 \rho_s V}F_x - \frac{L}{u_0^2}g$$

ここで，$f_0 = 1/\rho_l u_0^2 L^2$とすると，

$$\frac{d^2X_0}{dt^2} = \frac{\rho_l}{\rho_s V}F_x - \frac{L}{u_0^2}g$$

ここで，密度比とガリレイ数を以下のように定義し上式に代入する．

$$\boldsymbol{\rho' = \frac{\rho_s}{\rho_l}, Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}}$$

【重心の運動方程式】

$$\frac{d^2X_0}{dt^2} = \frac{1}{\rho' V}F_x - \frac{L}{u_0^2}\frac{Ga\nu^2}{L^3} = \frac{1}{\rho' V}F_x - \frac{1}{u_0^2}\frac{\nu^2}{L^2}Ga = \frac{1}{\rho' V}F_x - \frac{Ga}{Re^2}$$

回転の運動方程式に関して，

$$T_0 = \rho_l u_0^2 L^3, I_0 = \rho_l L^5$$

とすると，

$$\frac{\omega_0}{t_0}\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{T_0}{I_0}\frac{1}{I'_x}T'_x$$

$$\frac{u_0/L}{L/u_0}\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{\rho_l u_0^2 L^3}{\rho_l L^5}\frac{1}{I'_x}T'_x$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{T'_x}{I'_x}$$

となる.

付録 B-1　無次元化の変更

本論文における無次元化の手法では，無次元数をRe, Ga, ρ'の三つを使用している．Reは代表速度を設定する必要があり，第五章では実権で得た終端速度を代入しているのでReは時間によらない．一方，物体の自由落下現象では物体の速度（流入速度）は時間変化しており実際には慣性力と粘性力の比が変化する系であるので，本無次元化手法が特に過渡状態においては不適切になっている可能性がある．また，代表速度に関して実験値等を代入する必要があり数値解析上で完結していない．

そこで速度の無次元化を重力加速度と代表長さを用いて表現することで，実験値を用いず，より物体の落下計算に適した無次元化手法を提案する．

前節の代表速度を以下のように置く．

$$u_o = \sqrt{gL}$$

すると，Reは

$$Re = \frac{L\sqrt{gL}}{\nu} = \frac{\sqrt{gL^3}}{\nu} = \sqrt{Ga}$$

となるので，無次元数，無次元支配方程式は以下のようになる．

$$\rho' = \frac{\rho_s}{\rho_l}, Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}$$

【連続の式】

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$$

【NS 方程式】

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \vec{X}_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \tau} \times \overrightarrow{R_c} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{R_c}\right) + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{U} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{\sqrt{Ga}} \nabla^2 \vec{U}$$

【重心の運動方程式】

$$\frac{d^2 X_0}{dt^2} = \frac{1}{\rho' V} F_x - 1$$

【回転の運動方程式】

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{T'_x}{I'_x}$$

付録 B-2　無次元化による比較

本節では第五章で行った物体の自由落下計算（無次元数：Re, Ga, ρ'）と，前節で行った無次元化（無次元数：Ga, ρ'）による自由落下計算の比較を行った．落下物は物体 B を用い，それぞれの計算条件は以下のようになる．

表 7　計算条件（物体 B）

	記号	無次元数：Re, Ga, ρ'	無次元数：Ga, ρ'
レイノルズ数	$Re[-]$	743.9	$-$
密度比	$\rho'[-]$	55.57	
ガリレイ数	$Ga[-]$	2.195×10^5	
Lあたりの格子数	$nD[-]$	20	20
時間刻み	$\Delta\tau[-]$	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}
最大時間	$t_{max}[s]$	1.14	1.2

解析結果の比較を以下の図 65, 66 に示す．図はそれぞれ物体の落下速度，角速度の時間履歴である．図 65 より，物体の落下速度に関しては無次元化による差異はほぼなく実験値に収束していることがわかる．一方図 66 を見ると，およそ$t < 0.4$では無次元化による差異がないのに対して$t > 0.4$では，Ga, ρ'のみ用いた無次元化の方がRe, Ga, ρ'を用いた無次元化よりも角速度の絶対値が大きくなりより早く終端角速度に近づくことが分かった．

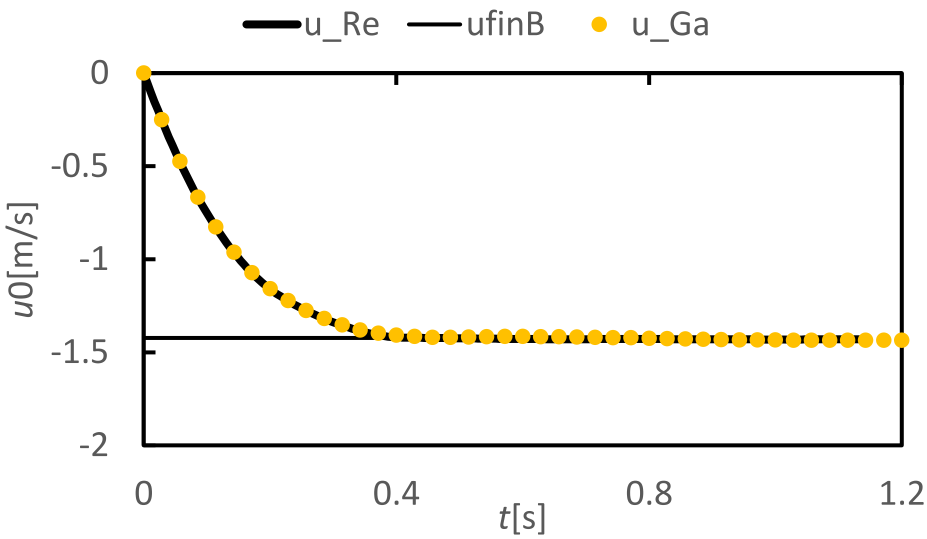


図65　並進速度の比較

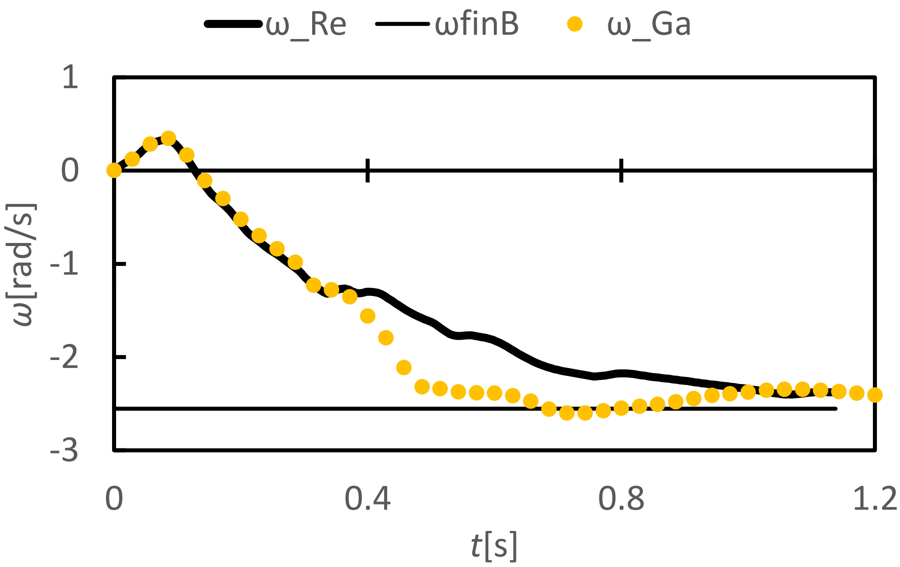


図66　角速度の比較

付録 C　体積，慣性モーメントの算出方法

本研究では剛体の運動方程式を解くために，物体の体積や慣性モーメントを求めている．簡単のために二次元のイメージを図 67 に示した．まず，体積は物体境界内部にある直交格子のセルの個数にセル一個当たりの体積を掛けることで算出を行っており，i, niを物体境界内部のセル番号，セルの個数とすると，物体の無次元体積Vを以下のように求めた．

$$V = \sum_i \Delta X \Delta Y \Delta Z = ni \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

慣性モーメントに関しては，物体境界の内部のセル（微小要素）ごとに，セルの体積と回転軸からの距離との積を計算し，和を取ることにより算出を行っている．X成分の式は以下のようになる．

$$I_X = \sum_i m_i R_i^2 = \rho_s \Delta X \Delta Y \Delta Z \sum_i \left(r_y^2 + r_z^2\right)_i$$

図 67 より，実際の物体境界と算出しているセルの集合とでは誤差が生じており，特に格子数が足りていない場合は体積，慣性モーメントの算出誤差が大きくなるという点には注意が必要である．

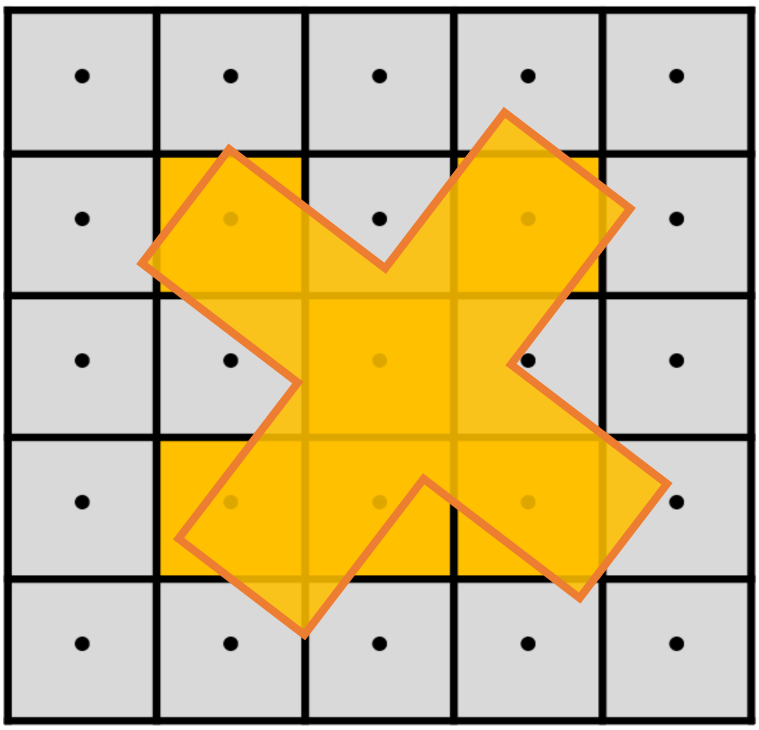


図67　物体境界と内外判定

付録 D　8 点補間

本研究では流体力の算出について，ポリゴンの重心で微小要素を算出し積分している．ポリゴンの重心は任意の点に存在しスタッガード格子の圧力や速度の定義点からずれている．そこでポリゴンの重心における圧力，速度勾配を周囲 8 点から補間しておりその方法を以下に記載する．任意の座標$\vec{X}$にある$F(\vec{X})$に関して，図 68 のように周囲 8 点を定義すると以下の式で補間を行う．

$$F_{low,back} = \frac{1}{\Delta X}\{\Delta X_{IP} F_E + (\Delta X - \Delta X_{IP}) F_C\}$$

$$F_{low,front} = \frac{1}{\Delta X}\{\Delta X_{IP} F_{EU} + (\Delta X - \Delta X_{IP}) F_U\}$$

$$F_{high,back} = \frac{1}{\Delta X}\{\Delta X_{IP} F_{EN} + (\Delta X - \Delta X_{IP}) F_N\}$$

$$F_{high,front} = \frac{1}{\Delta X}\{\Delta X_{IP} F_{ENU} + (\Delta X - \Delta X_{IP}) F_{NU}\}$$

$$F_{low} = \frac{1}{\Delta Z}\left\{\Delta Z_{IP} F_{low,front} + (\Delta Z - \Delta Z_{IP}) F_{low,back}\right\}$$

$$F_{high} = \frac{1}{\Delta Z}\left\{\Delta Z_{IP} F_{high,front} + (\Delta Z - \Delta Z_{IP}) F_{hig,back}\right\}$$

$$F(\vec{X}) = \frac{1}{\Delta Y}\left\{\Delta Y_{IP} F_{high} + (\Delta Y - \Delta Y_{IP}) F_{low}\right\}$$

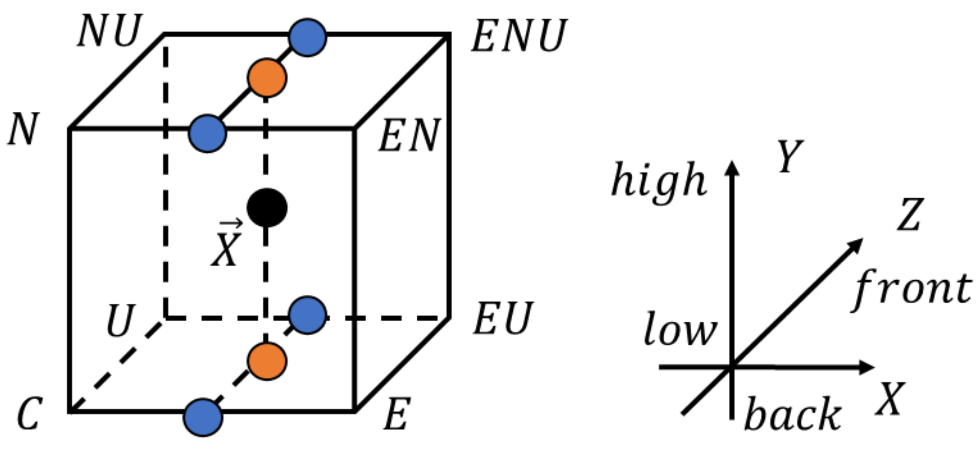


図68　8 点補間

付録 E　数値計算と 3D プリンター

前述したとおり本研究では複雑形状について STL データのデータを用いて表現しており，また STL ファイルは 3D プリンター用のファイル形式でもある．よって今後，物体モデルの数値計算と 3D プリンターで出力した物体の実験とを比較することで，より簡単に計算と実験とを比較したり，設計した形状のシミュレーションや実験検証を行ったりできるといった発展性があると考えた．また，実際の翼果の飛行では重心の落下と比較して比較的回転の影響が大きいが，第五章では回転の影響が少ない形状の計算を行った．そこで本節では，3D プリンターと数値計算の発展性や回転の影響が大きい形状の解析結果を見るため，プロペラを模擬した物体が回転する流体計算と，3D プリンターで出力した物体を使った実験を行った．出力用の物体モデル，計算用に穴を塞いだ物体モデルを以下の図 69 に示す．計算用で穴を塞いだ理由は，出力用の物体モデルで計算した際に小さな穴付近で発散してしまったからである．

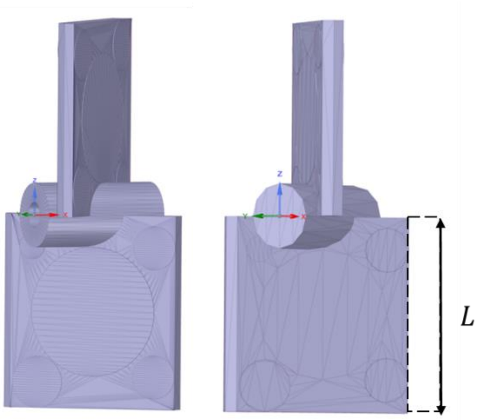


図69　物体 B　流線

E-1　一様流中のプロペラ周りの流れ（数値計算）

本節では，3D プリンターで出力したプロペラが 1m/sで流れる空気中に置かれ回転することを想定し，一様流中に置かれたプロペラ周りの流れの解析を行った．計算モデルは図 70 に，境界条件，計算条件は表 8, 9 になる．計算の高速化のため，密度比を実際の 1/10 として終端角速度を求めた．

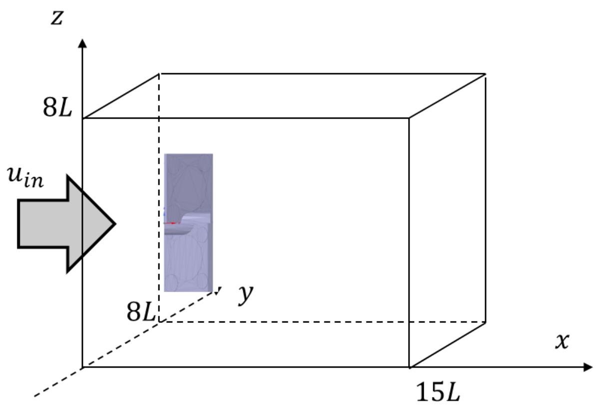


図70　物体 B　流線

表 8　境界条件

	速度	圧力
流入面	$U = U_{in}, V = W = 0$	$\partial P/\partial X = 0$
側壁(Y方向)	$\partial\vec{U}/\partial Y = \vec{0}$	$\partial P/\partial Y = 0$
側壁(Z方向)	$\partial\vec{U}/\partial Z = \vec{0}$	$\partial P/\partial Z = 0$
流出面	$\partial\vec{U}/\partial X = \vec{0}$	$P\ = 0$

表 9　計算条件

	記号	数値
レイノルズ数	$Re[-]$	1984
密度比	$\rho'[-]$	86.5
Lあたりの格子数	$nD[-]$	20
時間刻み	$\Delta\tau[-]$	1.0×10^{-3}
最大時間	$\tau_{max}[-]$	500

解析を行った結果角速度の時間履歴は以下の図 71 になった．なお$\tau < 30$では助走区間として$\omega = 0\mathrm{rad/s}$ を代入した．終端角速度は$\omega \cong 45.8\mathrm{rad/s}$となった．

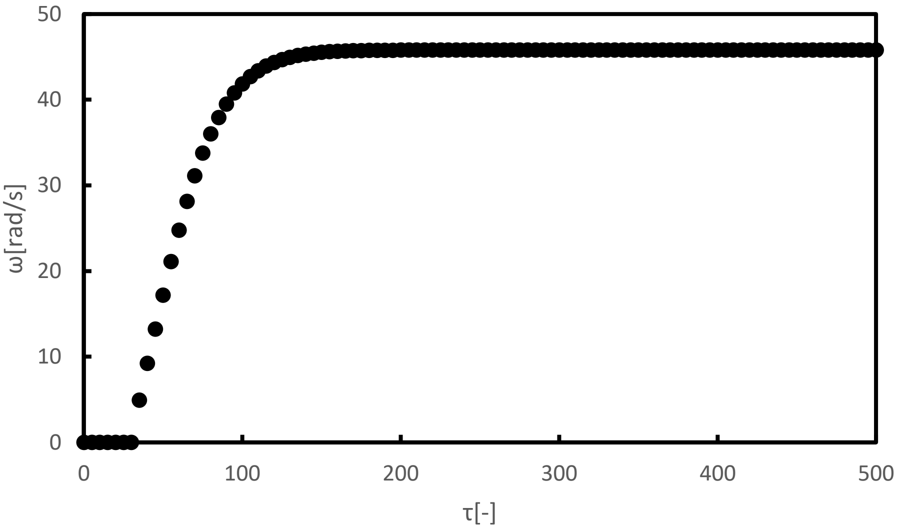


図71　角速度

$\tau = 60, 500$でのQ値の可視化は図 72, 73 になる．図より過渡状態では物体後流に不規則な渦が発生し，収束後では翼端渦と，軸付近から発生する渦に分かれているように見える．また別の角度から見たものが図 74 で，時間とともに前縁渦（LEV）が発生していることがわかる．昆虫等の翼が高迎角で回転するとき、前縁渦の過渡的な形成と安定な付着の両方が高い揚力発生に寄与する[19]ことがわかっており，今後，本研究における数値解析手法を昆虫サイズの物体周りの流れに適用し，流れの詳細を解明することが期待できる．

図72　$\tau = 60$　Q値

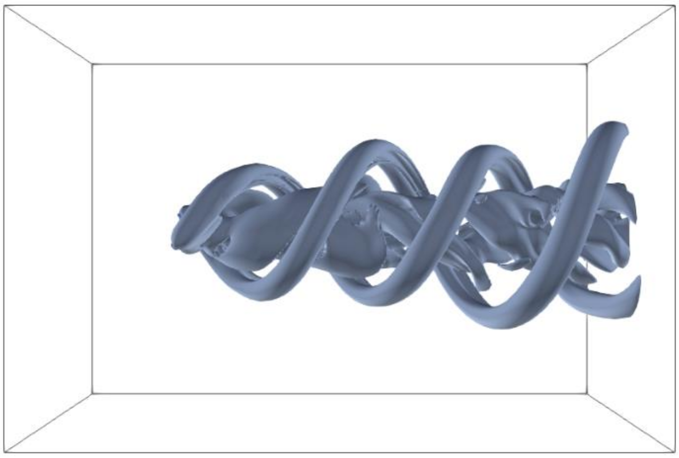


図73　$\tau = 500$　Q値

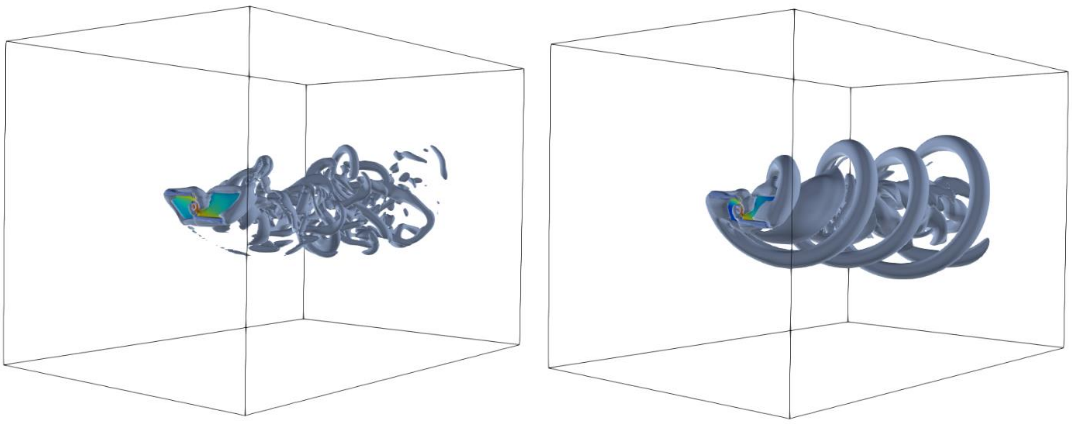


図74　前縁渦の発達（左：$\tau = 60$，右：$\tau = 500$）

E-2　3D プリンターによる出力

物体モデルを出力したものが図 75 である．これを軸に通して約 1m/sで歩いている様子が図 76 であり，約 10 秒で 7 回転したので，$\omega = 0.7 \times 2\pi = 4.40\mathrm{rad/s}$となった．前節では計算コストの都合上密度比を小さくしていることや，回転に関する摩擦抵抗を考慮していないことから定量的な比較は行えないが，今後出力した物体と数値解析上との比較を行うことが期待できる．

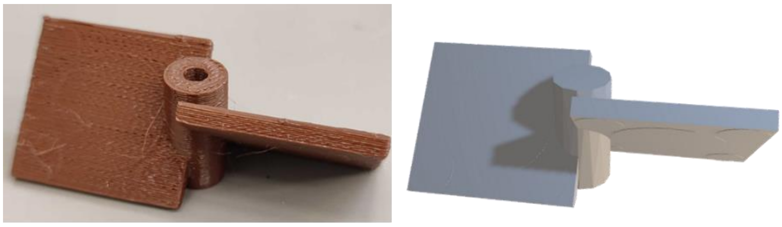


図75　3D プリンターによる出力

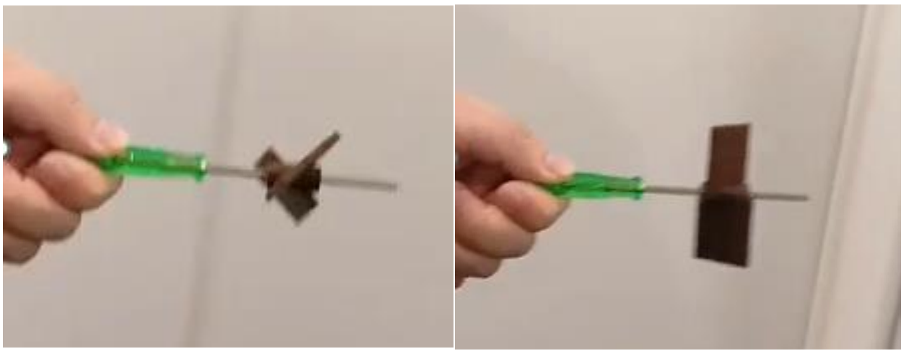


図76　プロペラの回転

参考文献

第一章
[1]Shizuka Minami,Akira Azuma,2003,Various flying modes of wind-dispersal seeds,Journal of Theoretical Biology 225(2003)1-14
[2]Injae Lee,2016,Numerical study of a freely-falling maple seed,ソウル大学大学院　博士論文
[3]伊藤和憲，2018，格子ボルツマン法を用いた移動物体周りの流体解析，首都大学東京大学院　修士論文
[4]牛島省，竹村雅樹，山田修三，禰津家久，2003，多相流場に対する統一的解放に基づく移動物体周辺の非圧縮性流体の数値解析法，応用力学論文集 vol.6,pp.883-890
[5]中谷優浩，2019，距離関数を用いた任意物体形状周りの対流熱伝達計算，首都大学東京大学院　修士論文
[6]池川昌弘，海保真行，加藤千幸，1991，有限要素法/差分法複合非圧縮性流れ解析（第一報，移動する物体周りの二次元流れ解析），日本機械学会論文集(B 編)57 巻 543 号
[7]小林敏夫，他，2003,数値流体力学ハンドブック，丸善株式会社，　pp.21-22
[8]KEYENCE CORPORATION，STL データとは，
https://www.keyence.co.jp/ss/products/3d-printers/agilista/knowledge/stl_about.jsp，最終閲覧日 2023/1/24
[9] 沖田浩平，小野謙二，2011，符号付き距離関数を形状表現に用いた流体ソルバーの精度＊（距離と法線情報を利用した界面近傍における差分と補間の提案），日本機械学会論文集(B 編)77 巻 781 号
[10] 水谷恒一郎，山本悟，2008，簡単な IB 法による三次元任意形状物体周り流れの数値計 算*，日本機械学会論文集(B 編)74 巻 742 号
[11]原田基至，今村太郎，2015，直交格子法における埋め込み境界法と Cut-Cell 法の比較 -壁巻数を用いた乱流解析-，第 29 回数値流体力学シンポジウム B07-1
[12]佐藤範和，梶島岳夫，竹内伸太郎，稲垣昌英，堀之内成明，2013，直交格子法における物体境界近傍の直接離散化法＊（速度場と圧力場の整合性を考慮した高精度化），日本機械学会論文集(B 編)79 巻 800 号

第二章
[13]加藤宏編，1989，現代流体力学　第一版 p6-7，オーム社
[14]田川俊夫，回転座標系における Navier-Stokes 方程式について，
https://aeroastro.sd.tmu.ac.jp/hydrodynamics/main/colums/cfd-heat/Rotating-NS-eq.pdf，最終アクセス日 2023/1/25

[15]柴田祐樹，2015，固気液三相流流れ場の解析手法の開発と諸問題の検討，首都大学東京大学院　修士論文

第三章
[16] 杉山弘，2012，明解入門　流体力学　第一版，森北出版株式会社
[17]気ままに塞翁が馬，乱流の渦構造可視化のための Q 値導出について，https://namagakix.hatenablog.com/entry/2018/02/28/200937#%E3%83%86%E3%83%B3%E3%82%BD%E3%83%AB%E4%B8%8D%E5%A4%89%E9%87%8F，最終アクセス日 2023/1/16
[18]物理のかぎしっぽ，テンソル不変量，http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/TensorInvariance/，最終アクセス日 2023/1/16

付録
[19]Long Chen, Jianghao Wu, Bo Cheng, 2020, Leading-edge vortex formation and transient lift generation on a revolving wing at low Reynolds number, Aerospace Science and
- Technology Volume 97

謝辞

本論文を執筆するにあたり多大なご指導，ご鞭撻を頂きました田川俊夫准教授に心から感謝申し上げます．私が研究に行き詰っているときにいつも的確なご指導を頂きありがとうございます．特に直接離散化の論文を紹介していただいたことは本研究にとって大きな転換点でした．また，本研究室に所属した三年間で，数値流体力学やプログラミングについて何もわからないところから本論文を執筆するまでサポートしてくださった先生や先輩方，同期には頭が上がらないです．先輩が残していただいた資料によく助けられました．お忙しい中，本論文の副査を引き受けてくださった稲澤歩准教授，嶋村耕平准教授にも深く御礼申し上げます．

研究生活を共にした石田和見氏，小林大介氏，小玉希氏は私にとって良い研究仲間でした．研究室や日野バスでくだらないことから研究に関することまで議論したり雑談したりできて私は同期に恵まれたと思っています．特に学部四年時に私だけ冬の院試を受けているときにサポートしてくれたことは忘れられません．先日の研究合宿はとても新鮮で楽しい経験になりました．皆そろっておいしいものを食べたり秋田の自然を満喫したり，かけがえのない思い出になりました．

また，特に佐竹さんには私が卒論，院試，修論等で困っているときにいつも助けていただきました．研究以外のことでも研究室で話していて楽しかったですし，佐竹さんの研究に取り組む姿勢をみて自分も大学院に進学したいと決意するようになりました．

最後に，幼稚園時代から含めると学生生活 22 年の間あらゆる面から支えてくださった家族に心から感謝します．