【学位論文審査の要旨】

１　研究の目的

非線形シュレディンガー方程式及び方程式系は、非線形光学やボーズ・アインシュタイン凝縮現象などを記述する数理モデルとして現れる非線形偏微分方程式（系）である。特に、単独の非線形シュレディンガー方程式に対して、1982 年に Cazenave-Lions によってその定在波解の存在と軌道安定性に関する数学理論が確立されて以来、各種の数理モデルに付随する定在波解の存在問題およびその安定性解析は、極めて興味深く重要な研究テーマとして、数多くの研究がなされている。中でも、質量一定のもとでの付随するエネルギー最小解の存在証明には、Lions による concentration-compactness 手法などの変分法の発展の成果であり、軌道安定性の解析など、幅広い問題の解決手法として波及した優れた方法論が確立された。しかしながら、方程式系の定在波解の存在証明には、単独の方程式に対するスケーリングの議論などが機能しないといった困難が現れるため、方程式系の解析には新たな工夫が必要となる。一方で、周波数を固定しての付随するエネルギー最小解（以後、基底状態と呼ぶ）の存在をネハリ多様体上での変分問題としてとらえ、基底状態の存在証明や特異摂動問題における最小エネルギー及び基底状態の漸近挙動に関し、単独方程式およびボーズ・アイシュタイン凝縮を記述する方程式系などにおいて、精力的に研究がされている。

　本論文では、こうした状況の中で、特に、レーザーとプラズマの相互作用を記述した 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に焦点を合わせ、質量一定でのエネルギー最小解及び周波数一定での基底状態のそれぞれに関し、定在波解の存在証明および解の漸近挙動の研究を推進するものである。3 波相互作用を持つ非線形シュレディンガー方程式系については、その定常問題は変分構造を持つこともあり、ポテンシャルがない場合の Colin-Colin-Ohta(2009)によるスカラー的解の安定性解析から、数学解析が活発になっている。ベクター的定在波解の存在問題に関しては、変分構造はあるものの、システムであるが故のコンパクト性の証明に困難が生じるが、Ardila(2018)が空間 1 次元でポテンシャルがない場合の固定質量問題において、リアレンジメント法を活用して存在証明に成功した。質量固定問題におけるコンパクト性を確保するために、空間高次元でも活用可能な新たなリアレンジメント法が Shibata(2017)によって開発されており、ポテンシャルが対称かつ単調な場合でのコンパクト性の証明への有効性が示唆されていた。さらに、ごく近年、Ikoma-Miyamoto(2020)による interaction 評価に基づくコンパクト性の回復法の有効性が、単独方程式およびボーズ・アインシュタイン系に対して示されるなど、質量固定問題のシステムに対してのコンパクト性の種々の方法論が開発されている。一方、Pomponio(2010)は、無限遠で最大値をもつようなポテンシャルがある場合に、ネハリ多様体上のエネルギー最小化問題の minimizer を捕まえることで、周波数固定問題の基底状態の存在証明に成功した。

特異摂動問題の設定では、より緩いポテンシャル条件下での基底状態の存在や詳しい解の

漸近挙動の解明が期待されることは、単独方程式での Rabinowitz(1992)や Wang(1993)の研究や、ボーズ・アインシュタイン系での Lin-Wei(2005) や Montefusco-Pellacci-Squassina(2008)らの研究で活発になされていた。

本論文の目的は、こうした流れをふまえながら、変分法を軸として、3 波相互作用を持つ非線形シュレディンガー方程式に関する研究を推進することである。特に、質量固定問題においては、Ardila の結果を拡張して、空間多次元およびポテンシャルが対称性持たない場合にまで存在証明を与えること、周波数固定問題においては、３波相互作用の強さを表すパラメータに関し、基底状態のベクター性とスカラー性を分ける正の閾値の存在証明を与えるとともに、特異摂動問題において、より緩いポテンシャル条件下での基底状態の存在とその詳細な解及び最小エネルギーの漸近挙動を解明することである。

２　研究の方法と結果

本論文は、大きく分けて２部構成となっている。

第１部では、質量固定問題でのエネルギー最小解の存在および３波相互作用の強さを表すパラメータ α や自己相互作用の強さを表すパラメータ β を無限にした場合の最小エネルギーの漸近挙動を考察している。第１章では、Ikoma-Miyamoto の手法に基づいて、空間高次元も含め、ポテンシャルに対称性や単調性の仮定なしでの最小化列のコンパクト性の証明に成功している。Ikoma-Miyamoto の方法論に基づいてはいるものの、３波相互作用の数理モデルにおいて、最小化列のすべての質量分解パターンにおいてエネルギー劣加法不等式が成立することを示す必要があり、極めて繊細な解析により成功している。なお、この結果は、既に著者自身によって、ポテンシャルは対称かつ単調な場合に Shibata によるリアレンジメント法を活用してコンパクト性を証明した結果の拡張となっている。第２章では、$\alpha=\beta^{\kappa}$ で、β を無限にした場合の最小エネルギー及び解の漸近挙動を κ の大きさで５つの異なる漸近挙動を持つことを証明している。いずれも、適切なスケール変換を見出し、適切な極限問題を見極めることに成功している。

第２部では、周波数固定問題での基底状態の存在および漸近挙動、さらには特異摂動問題での解および最小エネルギーの漸近挙動を考察している。第３章では、非特異摂動問題の設定で、Pomponio の研究を受けて、まず簡単なスケール変化を活用することで、3 波相互作用の強さを表すパラメータ α を無限にした場合の最小エネルギーの漸近公式を確立した。これにより、α が大きい時に基底状態がベクター的となるという Pomponio による結果の定量的な別証明を与えたことにもなっている。さらに、Pomponio の研究では α が小さい時に、基底状態がスカラー的になるかどうかが不明であったが、ある正の閾値 α^* が存在し、$0<\alpha<\alpha^*$ なら基底状態はスカラー的であり、$\alpha>\alpha^*$ なら基底状態はベクター的になることを証明している。第４章では、特異摂動問題での基底状態の存在およびパラメータ ε が小さい場合の最小エネルギーおよび基底状態の漸近挙動を考察している。存在に関しては、非特異摂動問題の場合より、緩いポテンシャルの仮定のもとで、その存在証明を与えるこ

とに成功している。ネハリ多様体上での変分問題の minimizer の存在証明に帰着されるが、最小化列のコンパクト性が、位置決め関数の性質から保証される点がキーポイントとなっている。位置決め関数は、１点でのポテンシャルの値をも持つ定数ポテンシャルの場合の最小エネルギーとして定義され、位置決め関数が無限遠で最小とならないことが重要となる。この考え方は、全く新しいものではないが、３波相互作用モデルに置いて適切な定式化と解析を成し遂げた成果である。さらに、パラメータ ε が小さい場合の最小エネルギーの漸近公式を得るとともに、基底状態の凝縮現象を位置決め関数に関する分類に応じた正確な結果を得ている。特に、詳細な漸近解析を駆使することで、３波相互作用の強さを表すパタメータ α が大きい場合には、基底状態の３成分ともに、位置決め関数の最小点の近くに凝縮すること、α が小さい場合には、一番小さいポテンシャルの底を持つ成分だけが、そのポテンシャルの底に凝縮し、他の成分はゼロに近づくことを証明している。

３　審査の結果

本論文では、まず、質量固定問題において、リアレンジメント法を活用して、高次元でポテンシャルが対称かつ単調な場合にコンパクト性の証明に成功し、α を無限にした場合の漸近挙動や軌道安定性に関する結果も得ている。さらに、この結果をポテンシャルに対称性や単調でない場合に拡張し、詳細な interaction 評価を駆使してコンパクト性の証明に成功したことは高く評価できる。これらの結果はそれぞれ著名な国際学術雑誌に掲載済みである。本論文では、次に、周波数固定問題において、ベクター的解とスカラー的解を分ける正の閾値の存在を明確にした。さらに、特異摂動問題の設定において、より緩いポテンシャル条件下での基底状態の存在証明に成功し、ε が十分小さい場合での極めて正確で詳細な基底状態の凝縮現象の分類に成功している。この分類は、３波相互作用の強さのパラメータの効果を明確に取り出した結果とも言え、３波相互作用モデルの特徴をとらえた優れた研究成果であると判断する。本論文で展開された方法論および結果は、３波相互作用を持つ非線形シュレディンガー方程式系の定常解の構造について、新しくかつ興味深い知見を与えるものである。今後のこの分野の研究の展開に大いに貢献するものであると判断する。

以上の結果、本論文は博士（理学）の学位に充分値するものと判断する。

４　最終試験の結果

本学の学位規定に従って試験および試問を行った。11 月 8 日に予備審査会を実施した上で、2 月 2 日に公開の席上で論文を発表し、それに関する数理科学専攻教員による質疑応答を以って試験とした。申請論文および関連分野について論文審査委員による試問を行った。これら試験および試問を総合し、専門分野および外国語についても十分な学力を有するものと認め、合格と判定した。