氏　　　　　名	長田　祐輝（おさだ　ゆうき）
所　　　　　属	理学研究科　数理科学専攻
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	理学博　第 42 号
学位授与の日付	令和 5 年 3 月 25 日
課程・論文の別	学位規則第 4 条第 1 項該当
学 位 論 文 題 名	Several variational problems for nonlinear Schrödinger system with three wave interaction 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する種々の変分問題（英文）
論 文 審 査 委 員	主査　教授　倉田　和浩 委員　教授　高桑　昇一郎 委員　准教授　下條　昌彦 委員　准教授　佐藤　洋平（埼玉大学）

【論文の内容の要旨】

1982 年、Cazenave-Lions [1] によって次の単独の非線形シュレディンガー(NLS)方程式の定在波解の存在および安定性が研究された：

$$i\partial_t \Phi + \Delta\Phi + |\Phi|^{p-1}\Phi = 0. \tag{1}$$

ここで、定在波解とは、$\Phi(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$ という形の（1）の解であり、空間的に局在化した波形が進行せずその場で振動するような解である。この研究を皮切りに、ポテンシャル項をもつモデルやより一般の非線形項をもつモデルに対する研究も盛んに行われるようになった。近年では、Bose-Einstein 凝縮現象を記述する相互作用をもったモデル等の連立の方程式系に対する定在波解の存在および安定性に関する研究も活発に行われている。

そうした中で、本論文では次の 3 波相互作用をもつ NLS 方程式系に対する定在波解の存在および漸近挙動を扱う：

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t\Phi_1 + \varepsilon^2\Delta\Phi_1 - V_1(x)\Phi_1 + \beta|\Phi_1|^{p-1}\Phi_1 = -\alpha\Phi_3\overline{\Phi}_2, \\ i\varepsilon\partial_t\Phi_2 + \varepsilon^2\Delta\Phi_2 - V_2(x)\Phi_2 + \beta|\Phi_2|^{p-1}\Phi_2 = -\alpha\Phi_3\overline{\Phi}_1, \\ i\varepsilon\partial_t\Phi_3 + \varepsilon^2\Delta\Phi_3 - V_3(x)\Phi_3 + \beta|\Phi_3|^{p-1}\Phi_3 = -\alpha\Phi_1\Phi_2. \end{cases} \tag{2}$$

$V_j(x) \equiv 0, \varepsilon = 1, \beta = 1$ としたこの方程式系は準線形の Zakharov 方程式系の簡易モデルとして [2] で Colin-Colin-Ohta によって導入された。この方程式系はレーザーとプラズマの相互作用を記述しており、ラマン増幅に関係していると言われている。物理的な状況は次の通りである。入射レーザー場がプラズマに入ると、ラマン型プロセスによって後方

散乱される。これら 2 つの波が相互作用して電子プラズマ波が作られる。3 つの波が組み合わさってイオンの密度変化が生じ、それ自体が先行する 3 つの波に影響を与える。ここで $\left(\Phi_1(t,x),\Phi_2(t,x),\Phi_3(t,x)\right)=(e^{\frac{i\lambda_1 t}{\varepsilon}}u_1(x),e^{\frac{i\lambda_2 t}{\varepsilon}}u_2(x),e^{\frac{i\lambda_3 t}{\varepsilon}}u_3(x))$(但し、$\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$) という形の (2) の解を定在波解という。このとき $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ は次の方程式系をみたす:

$$\begin{cases}-\varepsilon^2\Delta u_1+(V_1(x)+\lambda_1)u_1=\beta|u_1|^{p-1}u_1+\alpha u_3\bar{u}_2,\\ -\varepsilon^2\Delta u_2+(V_2(x)+\lambda_2)u_2=\beta|u_2|^{p-1}u_2+\alpha u_3\bar{u}_1,\\ -\varepsilon^2\Delta u_3+(V_3(x)+\lambda_3)u_3=\beta|u_3|^{p-1}u_3+\alpha u_1u_2.\end{cases} \qquad \left(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,\beta}\right)$$

本論文では、問題 $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,\beta})$ に対して、固定質量問題と固定周波数問題を考える。固定質量問題とは与えられた $a_j>0\ (j=1,2,3)$ に対して、L^2 正規化条件 $\int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^2=a_j$ をみたす $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,\beta})$ の解 $(u_1,u_2,u_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ を求める問題である。固定周波数問題とは、$\lambda_j\ (j=1,2,3)$ を固定して $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,\beta})$ の解 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ を求める問題である。本論文ではそれぞれの問題に対して次の制約条件付きの最小化問題を考える。

固定質量問題に対しては、次の汎関数を定義する:

$$E_\varepsilon^{\alpha,\beta}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^2|\nabla u_j|^2+V_j(x)|u_j|^2-\frac{\beta}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^{p+1}-\alpha\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}u_1u_2\bar{u}_3.$$

ここで、$N\le 3, 1<p<1+\frac{4}{N},\alpha,\beta>0$ である。またポテンシャル $V_j(x)$ には次の条件を課す:

(V1) $\forall j=1,2,3, V_j(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$,　　(V2) $\forall j=1,2,3, V_j(x)\le \lim_{|y|\to\infty}V_j(y)=0\ (a.e. x\in\mathbb{R}^N)$.

次の L^2 正規化条件の下での $E_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ の最小化問題を考える。

$$\xi_\varepsilon^{\alpha,\beta}(a)=\inf\left\{E_\varepsilon^{\alpha,\beta}(\mathbf{u})\,\middle|\,\mathbf{u}\in H,\int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^2=a_j\ (j=1,2,3)\right\}.$$

ここで、$H:=H^1\times H^1\times H^1, H^1:=H^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. 最小化問題 $\xi_\varepsilon^{\alpha,\beta}(a)$ を解くことで、その解は $(P_\varepsilon^{\alpha,\beta})$ の解になる。このとき λ_j はラグランジュ未定乗数として現れる。このとき Osada [7] では次の minimizer の存在結果を得た。

主結果 1([7], $\xi_1^{1,1}(a)$ の minimizer の存在性) $N\le 3,1<p<1+\frac{4}{N}$ とし (V1),(V2), $(V_1,V_2,V_3)\not\equiv(0,0,0)$, $a_j>0\ (j=1,2,3)$ を仮定する。このとき $\xi_1^{1,1}(a)$ の任意の最小化列 $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^\infty$ に対して、部分列をとれば(部分列も同じ記号で表す) $\xi_1^{1,1}(a)$ の minimizer $\mathbf{u}\in H$ が存在して、$\|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}\|_H\to 0\ (n\to\infty)$ が成り立つ。

固定周波数問題に対しては、関数は実数値関数で考える。また、$V_j(x)+\lambda_j$ を改めて $V_j(x)$ と書く。$(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,\beta})$ の解を臨界点として特徴付ける汎関数 $I_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ を定義する。

$$I_\varepsilon^{\alpha,\beta}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^2|\nabla u_j|^2+V_j(x)u_j^2-\frac{\beta}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^{p+1}-\alpha\int_{\mathbb{R}^N}u_1u_2u_3.$$

解を捕まえる空間は $\mathbb{H}:=H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$ で考える。ここで $N\le 5,2\le p<$

$2^*-1, \alpha, \beta > 0, 2^* \coloneqq \infty\ (N=1,2), 2^* \coloneqq \frac{2N}{N-2}\ (N \geq 3)$ である。

$(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,\beta})$ の非自明解の中で汎関数 $I_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ の値を最小にする関数を ground state という。さらに次の制約条件付き最小化問題を考える:

$$c_\varepsilon^{\alpha,\beta} = \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}_\varepsilon^{\alpha,\beta}} I_\varepsilon^{\alpha,\beta}(\mathbf{u}), \mathcal{N}_\varepsilon^{\alpha,\beta} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} | G_\varepsilon^{\alpha,\beta}(\mathbf{u}) = 0\},$$

$$G_\varepsilon^{\alpha,\beta}(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2 |\nabla u_j|^2 + V_j(x)\, u_j^2 - \beta |u_j|^{p+1} - 3\,\alpha \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3.$$

$\mathbf{u}$ が ground state であることと、最小化問題 $c_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ の解であることは同値であることが知られているので、ground state の存在を示すためには最小化問題 $c_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ の解の存在を示せばよい。特異摂動問題の設定で次の主結果を得た。

主結果 2([5], $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,1})$ の ground state の存在性) 以下の $(\mathrm{V1})', (\mathrm{V2})', (\mathrm{C1})_\alpha$ を仮定する。このとき

$$c_\varepsilon^{\alpha,1} \leq \varepsilon^N (\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\boldsymbol{V}(x);\alpha) + o(1)) \text{ as } \varepsilon \to +0$$

が成り立つ。さらに ε が十分小さいとき、$(\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha,1})$ の非負の ground state が存在する。ここで

$(V1)'$ $\forall j = 1,2,3, V_j \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$,

$(V2)'$ $\forall j = 1,2,3, 0 < V_{j,0} \coloneqq \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V_j(x) < \lim_{|x|\to\infty} V_j(x) \eqqcolon V_{j,\infty}$,

$(\mathrm{C1})_\alpha$ $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\boldsymbol{V}(x);\alpha) < \rho(\boldsymbol{V}_\infty;\alpha)$

であり、$z_0 \in \mathbb{R}^N$ に対して $\rho(\boldsymbol{V}(z_0);\boldsymbol{\alpha})$ は次の方程式の最小エネルギーである:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + V_1(z_0) v_1 = |v_1|^{p-1} v_1 + \alpha v_2 v_3, \\ -\Delta v_1 + V_1(z_0) v_1 = |v_1|^{p-1} v_1 + \alpha v_2 v_3, \\ -\Delta v_1 + V_1(z_0) v_1 = |v_1|^{p-1} v_1 + \alpha v_2 v_3. \end{cases}$$

最小エネルギーとは ground state が持っているエネルギーのことである。

固定質量問題と固定周波数問題で N, p 等の範囲の違いが現れるのは、制約条件の違いで汎関数が下に有界であることを保証するための条件が異なるためである。**本論文の目的は、これら2つの最小化問題の解の存在および漸近挙動を変分法を用いて解析することである。**

以下、本論文の構成について説明する。第 1 部では固定質量問題を扱う。Chapter 1 では、Osada [7] の内容を基に、対称性を仮定しないポテンシャル $V_j(x)$ に対して、$\xi_1^{1,1}(a)$ の解の存在性について述べている。この結果は対称性を仮定した Kurata-Osada [4] の結果の拡張になっている。Chapter 2 では、Osada [6] の内容を基に、最小化問題 $\xi_1^{\alpha,\beta}(a)$ に対して、$\alpha = \beta^\kappa$ としたときの $\beta \to \infty$ における $\xi_1^{\alpha,\beta}(a)$ の解の漸近挙動について述べている。κ の大きさに応じて 5 つの異なる漸近挙動の記述に成功した。さらに、$\beta = \alpha^\tau$ としたときの $\alpha \to \infty$ における漸近挙動についても考察した。これは $\beta = 1, \alpha \to \infty$ とした [4] の結果の拡張になっている。第 2 部では固定周波数問題を扱う。Chapter 3 では、

Kurata-Osada [3] の内容を基に、$(P_1^{\alpha,1})$ の ground state の $\alpha \to \infty$ における漸近挙動について述べている。さらに、ある正定数 α^* が存在して、$\alpha > \alpha^*$ ならば、ground state は vector (すべての成分が 0 でない状態)になり、$0 \leq \alpha < \alpha^*$ ならば、scalar (1 つの成分のみ 0 でない状態)になるという結果を得た。Chapter 4 では、Osada [5] の内容を基に、$(P_\varepsilon^{\alpha,1})$ に対して特異摂動問題を考え、ε が十分小さいときに ground state が存在することと、$\varepsilon \to +0$ における漸近挙動について述べている。漸近挙動については α が十分大きいときは ground state の 3 成分は同じ点に凝集し、α が十分小さいときはポテンシャル全体の最小点に凝集するという 2 種類の異なる挙動があることを発見した。

参考文献

[1] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys., **85** (1982), 549-561.

[2] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire, **26** (2009), 2211-2226.

[3] K. Kurata and Y. Osada, Asymptotic expansion of the ground state energy for nonlinear Schrödinger system with three wave interaction, Commun. Pure Appl. Anal., **20** (2021), 4239-4251.

[4] K. Kurata and Y. Osada, Variational problems associated with a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **27** (2022), 1511-1547.

[5] Y. Osada, A singular perturbation problem for a nonlinear Schrödinger system with three wave interaction, (2022), submitted.

[6] Y. Osada, Energy asymptotic expansion for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, SUT J. Math., **58** (2022), 51-75.

[7] Y. Osada, Existence of a minimizer for a nonlinear Schrödinger system with three wave interaction under non-symmetric potentials, Partial Differ. Equ. Appl., **3** (2022), 18 pp.