集合と性質

── ツェルメロによる公理的集合論に対するワイルの批判 ──

宮川 弘美

はじめに

本論文では，ワイル（H. Weyl 1885-1955）が初期の著作『連続体』*Das Kontinuum* (1918)で展開しているツェルメロ(E. Zermelo 1871-1953)による公理的集合論への批判を取り上げ，これを検討する．周知の通り，集合論は19世紀末にカントール(G. Cantor 1845-1918)によって提唱された．当初カントールによる集合論は公理的体系を持っていなかったため，素朴集合論として，現在一般的となっている公理的集合論とは区別される．素朴集合論が初めて公理的体系にまとめられたのは，1908年にツェルメロによって発表された論文，「集合論の基礎に関する研究 I 」"Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I"（以下，1908a論文と略）においてである．集合論が公理化されることとなったそもそものきっかけは，20世紀初頭，集合論で明らかとなった，いわゆるラッセルパラドクスをはじめとする一連のパラドクスにある．必ずしもすべての研究者がこのパラドクスの問題を重視した訳ではない．しかし少なくとも一部の数学者，論理学者にとって，それらパラドクスの出現は，数学に「危機」をもたらすものとして認識された．というのも，それらパラドクスが露呈したものは，集合論あるいは論理学にのみ関わる問題にとどまらず，集合論や論理学を基盤として成立している数学の論理的正当性を，その体系全般にわたって脅かす《矛盾》として，深刻に受け止められたからである．ツェルメロにとっても，やはりパラドクスの出現は深刻な問題であった．諸矛盾の排除を目指

したことが，ツェルメロに集合論の公理化を促した重要な契機の一つであったと思われる．実際にツェルメロが行なったのは，予防策を講じることにより，パラドクスを生じるような集合を前もってその体系から排除しておくというものである．この予防策は一つの公理としてツェルメロの体系の中に組み込まれた．それがいわゆる分出公理である．ワイルのツェルメロ批判は，まさにこの分出公理に向けられた．ツェルメロとワイルでは，パラドクスに対する方策ないし，集合論そのものについての見解が著しく異なっており，その相違が，分出公理をめぐる問題として噴出する．ワイルの観点からすれば，ツェルメロの分出公理はあくまで応急処置に過ぎず，集合論が直視すべき根本的な問題の解決には繋がっていない．それどころか，かえって集合論の抱える問題の所在を浮き彫りにするものですらある．では，分出公理についての考察から明らかとなる，ツェルメロによる公理的集合論の問題とはいかなるものだとワイルは考えたのであろうか．これを明らかにすることが，本論文の目標である．

1　ラッセルパラドクスと包括公理，ツェルメロの分出公理

ワイルは，ツェルメロの体系（以下，体系Z）の分出公理に現われる「確定的クラス述語」という表現の不明瞭さを，自身の研究の出発点として挙げている．そこで，まずツェルメロによって与えられた分出公理について，確認しておこう．

> 公理Ⅲ（分出公理）．クラス述語 Klassenaussage E(x) が，集合Mのすべての要素について確定的 definit である場合はいつでも，Mは次のような部分集合，すなわち，E(x)が真となるようなMの要素xを要素として含んでいるような 部分集合M_Eを持つ．(Zermelo [1908a] 202)

ここで述べられた内容を論理式で表わすと，以下のようになる：

$$\forall m \exists m_E \forall x \ (x \in m_E \Leftrightarrow x \in m \ \wedge \ E(x))$$

つまり言い換えると，「任意の集合mに対して，『クラス述語』あるいは，性質E(x)を成り立たせるようなmの元xの全体から成るmの部分集合m_Eが存在する.」となる．この公理によって，我々は我々に与えられた何らかの集合から，その集合の部分集合を得ることが可能となる．しかし，な

ぜこの公理が問題となるのであろうか．そのことについて理解するためには，まず，この公理を設定したツェルメロの元来の目的と，その出所に遡ってみる必要がある．先にも述べた通り，ツェルメロが，カントール以来の素朴集合論を公理化するに当たって，分出公理を諸公理の一つとして設定した直接の目的は，ラッセルパラドクス等の矛盾の出現を防ぐことにあった．ラッセルパラドクスは，集合論で明らかとなった一連の逆理の中でも，最も良く知られているものであり，既に多くの研究が為されている．ここでこのパラドクスについて，それらの研究成果も含め，改めて詳しく述べる力量も余裕もないが，本論文の主題と関係するので，今少し，その概略を確認しておこう．ラッセル（B. Russell 1872-1970）が書簡を通じ，自分の気付いた集合論のパラドクスについてフレーゲ（G. Frege 1848-1925）に伝えたのは，1902年のことである．またこれとほぼ同時期に，ツェルメロも，ラッセルとは独立に，このパラドクスについてある私的サークルで取り上げていたことが知られている（Fraenkel – Bar-Hillel 5）．自分自身を要素として含まない集合すべてより成る集合に，自分自身を含まない集合の集合そのものは，要素として含まれるのか否か．論理的には，含まれることも，含まれないことも帰結し，矛盾する．これがいわゆるラッセル（あるいはラッセル－ツェルメロの）パラドクスである．

周知の通り，このパラドクスは，フレーゲが初めて明示したとされる包括公理をめぐって明らかとなった．包括公理とは，大まかに言えば，集合を単なる諸事物の集まりではなく，何らかの性質を満たすものたちの集まり，すなわち《概念ないし性質の外延 Umfang eines Begriffs》として捉える見方を定式化したものである．これを論理式で表記すると，次のようになる．

包括公理： $\exists e \forall x \ (x \in e \Leftrightarrow E(x))$

（「何らかの性質E（x）を成り立たせるすべてのxより成る，ある集合eが存在する．」）

カントールによって最初に集合論が提唱された際，カントール自身によって与えられた集合概念，つまり，集合とは何であるのかについての概念は，必ずしも明瞭なものではなかった[1]．今や我々は包括公理により，それを

1） Fraenkel–Bar–Hillelは，包括公理を，カントールの素朴集合論より導かれたものと解釈している（Fraenkel–Bar–Hillel 31）．

明示する手段を得たのである．すなわち，集合を《性質の外延》とするこの見方に従い，性質によって集合が決定されるとするなら，我々は，その性質によって選び出される諸対象を介して，その集合がいかなるものであるのかを明確に示すことができるのである．但し，集合を得るためには，何がその集合の要素となるのかを厳密に決定できるような性質が，まずもって与えられるのでなければならない．そうして何らかの性質が特定された後，それらの性質を持つとされたものたちによって，はじめて一つの集合が成立する．この立場においては，ある対象 x が《何らかの集合 e に属する》とは，e が性質Ｅの外延である場合にその対象 x が《性質Ｅを持つ》という，まさにそのことを意味するのである．従って，集合を《性質の外延》とするならば，次の書き換えが常に可能でなければならない：

$$E(a) \Leftrightarrow a \in \{x \mid E(x)\}$$
$$\Leftrightarrow a \in e$$

すなわち，

> 表現 Die Ausdrücke《ある対象 a が性質Ｅを持つ》（つまり《これに対応する，空所を一つ持った判断図式 E(x)が，x = a について真》）と，《a は集合（E）の元である》とは同義である．(Weyl [DK] 13,（　）内及び強調原文.)

ところが，先に述べたように包括公理からは，パラドクスの招来されることが明らかとなった．今仮に，この包括公理に従って，何らかの性質Ｅが与えられたならば，同時に性質Ｅを持つ x すべてより成る集合 $e = \{x \mid E(x)\}$ が特定されるものとしよう．ここで，性質Ｅとして $\neg(x \in x)$ をとれば，集合 $R = \{x \mid \neg(x \in x)\}$（性質 $\neg(x \in x)$ を持つ x すべてより成る集合）が得られる．従って，$\forall x\ (x \in R \Leftrightarrow \neg(x \in x))$ となるが，ここで x を R で例化することにより，$R \in R \Leftrightarrow \neg(R \in R)$ となって，矛盾する（《R が R の要素である》ことと，《R が R の要素ではない》ことが同値となってしまっている）．これがラッセルパラドクスの構図である．ここで我々が仮定したのは，包括公理だけであった．従って，包括公理を保持しようとするならば，我々はラッセルパラドクスを免れ得

一方で，集合を単なる諸事物の集まりだとする立場を，元来のカントールの考え方により即したものとする見解もある．(Weyl [1946] 2，戸田山49)．この点については，Hallett 38を参照．

ないのである．

では，どうすればパラドクスから逃れることができるだろうか．まず，なぜ包括公理からこうしたパラドクスが生じたのか，振り返って整理してみよう．すると，その原因として，次の二つを指摘できる．すなわち：

① そもそも集合を《性質の外延》と見たこと．

② 集合を《性質の外延》とする際，その性質として，パラドクスに結び付くようなものが現われ得ること．

そこで差し当たり，これらの原因それぞれに対して，我々が取り得る方策として考えられるのは，

①' 集合をもはや《性質の外延》とは捉えないこととし，包括公理を放棄する．

②' 集合を《性質の外延》とする見方は変えず，集合を《性質の外延》と見なし得るその性質に，パラドクスに結び付くようなものが現われないよう，何らかの基準を設定する．この際，基本的に包括公理は保持される．

我々は，①'と②'のどちらの方法を選ぶかによって，異なる集合観を取ることになる．もし①'を選択するなら，我々は，集合を《性質の外延》ではなく，《単なる諸事物の集まり》だとする立場を取ることを余儀なくされる．では，集合を《単なる諸事物の集まり》とする見方とは，どのようなものだろうか．集合を《性質の外延》とする立場と，《単なる諸事物の集まり》と見る立場の相違について，ワイルは次のように表現している：

> 赤い being red という性質や，奇数である being odd という性質は，全ての赤い物体の集合や，全ての奇数の集合より確かに先立っている prior to. 反対に，もし一袋分のじゃがいもだとか，紙に鉛筆で描かれた曲線に関して，その袋の中に入っているというじゃがいもの性質 the property of a potato to be in the bag，あるいは，その曲線上にあるという点の性質 the property of a point to lie on the curve が導入されるなら，その場合集合（ないし，その集合を表わしているより具体的な構造）は，性質より先立っている．(Weyl［1946］2,（ ）内原文)

集合を《性質の外延》とする見方，すなわち，包括公理を保持する集合観においては，「性質が集合に先立っている」．まず何らかの性質を特定し，

当該の性質を持つ対象が決定されてはじめて集合が成立する．これに対し，今一つの集合の捉え方，つまり集合を《単なる諸事物の集まり》として捉える立場では，集合はただの《袋》でしかない．その《袋》の中に入っているじゃがいもは，何らかの性質を持つことを条件に選び出されたのではない．集合とは，何らかの対象（必ずしも複数である必要はない）をあたかも《袋》に入っているかのように，単に一つのものにまとめただけのものと見なすというのである．集合の要素となっているものが，いかなる性質を持っているのかは，もはや問われない．そこには，対象の入った《袋》があるだけなのである．

我々は，ラッセルによって指摘されたパラドクスを前に，①'と②'のどちらかを選択するよう迫られることとなった．集合は《性質の外延》なのか，単なる《袋》なのか．②'を選択するのであれば，パラドクスを回避する為に，集合を決定する性質に，何らかの基準を設けなければならない．もし，その基準の設定が首尾よく行なわれ，パラドクスの原因とならないような性質の範囲を定めることができれば，それらの性質を持つ諸対象を通じ，我々は，集合が何であるのかを明瞭に説明する手段を確保できる．但し，性質の範囲を定める基準の設定は，容易ならざる課題であろうことが，予想される．一方，もし①'を選択するならば，我々は，パラドクスの直接の原因から解放され，矛盾を含まない集合論体系を，②'よりも単純な形で構築できるように思われる．だがその場合には，もはや集合を《性質の外延》として説明することは許されず，諸性質を持つ諸対象を介して集合へと至る道は閉ざされる．その結果，我々は，不明瞭な集合概念を明確化するという課題に再び直面することになり，集合について，それが何であるのかを説明し得ぬまま，その存在だけは主張し続けなければならない．ワイルはここで②'を選択し，集合を《性質の外延》とする立場を決然と保持し続ける．

> フレーゲが，……明確に強調しているように，《集合》とは単にある概念の外延であり，《対応 Zuordnung》は，単にある関係の外延，ないし，彼が言うように，関係の《値の範囲 Wertverlauf 》と理解して差し支えない．（Weyl［DK］35，《　》内原文）

では，ツェルメロの解決方法は，①'と②'のどちらに当たるであろうか．

2 Zermeloの集合は《性質の外延》か

ここで再び，先に見たツェルメロの分出公理を，その形に注意しながら，包括公理と比較してみよう．すると，

分出公理： $\forall m \exists m_E \forall x\ (x \in m_E \Leftrightarrow \underline{x \in m\ \wedge}\ E(x))$

包括公理： $\exists e \forall x\ (x \in e \Leftrightarrow E(x))$

分出公理が，包括公理に，下線を付した「$x \in m\ \ \wedge$」の部分，すなわち《集合m_Eを形成するxは，既に与えられた何らかの集合mの要素である》という制限を課したものであることが理解されよう．つまり，ツェルメロは，まず「$x \in m$」とすることによって，集合論の対象となるものの範囲を，予め集合だと認められているものに限定する．しかるに，《性質$\neg(x \in x)$を持つxすべてより成る集合R》は矛盾を導出する．体系Zでは，まさにそれが矛盾となるが故に，Rを集合だとしたことの誤りであったことが導かれる．よって，集合Rは体系Zにおいては集合とは見なされない[2)]．従って，ラッセルパラドクスの原因となったRは，変項mの範囲（量化域）から予め排除される．こうした手続きを施した上で，体系Zにおいて集合と認められたものの要素となっているxについてのみ，それらが性質Eを持つか否かを問題にするというのが，分出公理の眼目である．では果たして，分出公理は本当にうまく機能するであろうか．念の為に，体系Zにおいて，先程のラッセルパラドクスと同じ問題は生じないのかどうか，確認してみよう．今，体系Zで与えられる任意の集合mをとり，mの要素で，かつ「自分自身を要素として含まない」という性質を適用して得られるm

2） まず，体系Zにおいて，先のラッセルパラドクスを引き起こしたラッセル集合Rの存在を仮定する：

$$\exists R \forall x\ (x \in R \Leftrightarrow \neg(x \in x)) \cdots\cdots (A)$$

ここで，xをRで例化すれば，先に見たラッセルパラドクスに至る過程と同様に，矛盾が導出される．もし包括公理$\exists e \forall x\ (x \in e \Leftrightarrow E(x))$を，体系Zにおいても公理として採用していれば，命題(A)は，包括公理の「E」に$\neg(x \in x)$を代入しただけのものであるから，これを否定することはできない．しかし，体系Zにおいて，包括公理は公理ではなく，命題(A)は，あくまで仮定であった．よって，先程ここからラッセルパラドクスに陥ったのとは異なり，我々は仮定した命題(A)を否定することができる：

$$\neg \exists R \forall x\ (x \in R \Leftrightarrow \neg(x \in x))$$

従って，体系Zではラッセル集合の存在は否定される．すなわち，性質$\neg(x \in x)$を持つものすべてより成る集合は，体系Zにおいては集合とは認められない．

の部分集合ωを分出することを考える．分出公理により，mの部分集合で，次の条件を満たすようなωの存在が保証される．すなわち，

$$\forall x \ \{x \in \omega \Leftrightarrow x \in m \land \neg (x \in x)\}$$

ここでxをωで例化すると，

$$\omega \in \omega \Leftrightarrow \omega \in m \land \neg (\omega \in \omega)$$

続いて，双方向矢印「⇔」の左辺から右辺への演繹によって，

$$\neg (\omega \in \omega) \cdots (1)$$

さらにここから，

$$\neg (\omega \in m) \cdots (2)$$

が導かれる．(1)より，集合mの部分集合ωは，ω自身を要素として含まないこと，かつ，(2)より，ωは集合mの要素ではないこと（すなわち，集合mに要素として含まれない集合ωの存在）が帰結する．集合mは，体系Zの任意の集合であった．従って，体系Zにおいて集合と認められたどの集合に対しても，上のようなωが存在することになる．よって，体系Zのいずれの集合も，全ての集合を要素として含むことはない．ラッセルパラドクスは，一般に全集合の集合からの分出によって生じるものとして定式化される．つまり，もしmが全集合の集合であり得たとすれば，ωは実際には先のラッセルクラスRと同様に，パラドクスを引き起こすこととなったであろう．しかし，mは，全ての集合の集合ではあり得ないのであるから，上の様なmの部分集合ωによってラッセルパラドクスが生じることはない．こうして分出公理によって，体系Zにおいて先程のような矛盾を導出する集合が形成される可能性はなくなり，パラドクスの出現は阻止されることになる．

> ……集合は，この公理によると，独立して定義されるのでなく，常に，既に与えられた集合から，部分集合として分出される be *separated* のでなければならない；こうして「あらゆる集合の集合」「あらゆる順序数の集合」といった矛盾を含む諸概念や，…「超限パラドクスultrafinite paradoxes」は排除される．（Zermelo［1908a］202，強調原文）

つまり，ツェルメロの分出公理は，形の上では包括公理に修正を加えたものとなっており，一見した限りでは，包括公理を保持し，ワイルと同様に集合を《性質の外延》とする立場を取って，②'の方法を選択しているかの

ように解釈できる．このことはまた，ツェルメロが包括公理という容易にパラドクスと結び付く問題含みの公理を廃棄せず，敢えて制限を加えてまで体系Ｚに残しているという，そのこと自体からも，裏付けられるように思われる．だが，ツェルメロが分出公理を設定したのは，集合を《性質の外延》とする見方を保持するためだったのだろうか．

> 現在，〔集合論という〕この分野の存在そのものが，ある特定の諸矛盾ないし「アンチノミー」によって脅かされている．…これらの矛盾に対して，完全に十分な解決はまだ見つけられていない．特に，「ラッセルアンチノミー」，…という観点からすると，今日，任意の，論理的に確定し得るある概念に，その外延としてある集合ないしクラスを割り当てることはもはや許されないように思われる．集合についてのカントールによる元来の定義（1895），すなわち「我々の知覚ないし思考の，何らかの十分に識別された well-distinguished 諸対象を，一つの全体に集めた集まり」という定義は，従って確かに何らかの制限を必要とする．　(Zermelo［1908a］200,〔　〕内は引用者)

確かに，この引用の最後の部分から明らかなように，ツェルメロは，カントールによる元来の集合の定義に「制限」の必要があると述べている．ここで一つ断わっておくと，ツェルメロは包括公理を，カントールの素朴集合論における，元来の集合の定義の定式化と捉えていた．従って，この引用においてツェルメロが制限すべきだとしたものは，直接には包括公理を指していると解釈すべきであり，分出公理が，ある意味で包括公理に制限を加えたものであるとする理解と一致する．それでは，ツェルメロは，包括公理を修正した上で，その元来の意味，すなわち集合を《性質の外延》だとする立場を取ったのであろうか．しかし，すぐに気付かれるように，ツェルメロは同じこの引用中程の部分で，「任意の，論理的に確定し得るある概念に，その外延としてある集合ないしクラスを割り当てること」つまり，集合を《性質の外延》と見ることが「もはや許されない」ものであると，明確に述べているのである．ツェルメロは，集合を《性質の外延》と見る立場を守ったのか，放棄したのか？

だが，ここでこの問題に結論を出すのはやや性急に過ぎよう．我々には，まだ判断材料が不足している．そこで視点を変え，ツェルメロに対するワ

イルの批判について検討し，ツェルメロの体系がいかなるものであるのか，今少し詳しく分析してみよう.

3 ツェルメロの体系における問題点の指摘
―「確定的」性質の不明瞭性 ―

はじめに確認したように，ワイルは，ツェルメロの分出公理についての問題を，自身の研究の出発点としている：

> 私は元々，ツェルメロの集合論についての諸公理から出発した．……私にとって重要なのは，ツェルメロが，重要な《部分集合Untermengen》についての公理IIIの中で用いている《確定的クラス述語》という概念を，ツェルメロによって行われている以上に正確に記述することである．ツェルメロの説明は，私には不十分と unbefriedigend 思われたのである．　(Weyl〔DK〕36，強調及び《　》内原文)
>
> ツェルメロの説明によれば，ある確定した言明 Aussage とは，それが成立するかまたは不成立であるかが，一意に，かつ恣意的でなく，集合論の諸対象の間に存立している根本的関係 ε〔要素関係のこと．以後，引用以外は「∈」で表記する.〕に基づき決定され得るもののことである．……「一意に，かつ恣意的でなくその成立が決定する」という表現は，私にはあまりに漠然としているように思われるのであり，この点に限って言えば，さらにもっとずっと厳密化すべきものである．
>
> (Weyl〔1910〕304，〔　〕内引用者)

ここでワイルが指摘しているのは，本稿第1章の冒頭で引用した，ツェルメロによる分出公理の記述において見られた「《確定的クラス述語》という概念」が「不十分」であり，さらに，この概念について，ツェルメロの説明する，「ある確定した言明」が「一意に，かつ恣意的でなくその成立が決定する」という表現が曖昧だということである．これらワイルからの引用に対応する，「ツェルメロの説明」の箇所を見てみよう．問題となっているこの箇所で，ツェルメロは，次のようにこの「確定的」という概念を定義している：

> ある問い，ないし言明 assertion Eが確定的だと言われるのは，その領

域の根本的諸関係が，諸公理，及び普遍的に妥当な論理諸法則によって，恣意性の余地なくEが成立するかしないかを確定する場合である．同様に「クラス述語」E(x)…が確定的だと言われるのは，E(x)が，クラスRのどの一つの個体xについても確定的である場合である．例えば，a ε bであるかないかという問いは，M⊆Nであるかないかという問いと同様に，常に確定的である． (Zermelo [1908a] 201)

ツェルメロは，上の引用箇所に先立ち，我々に許される「根本的諸関係」として，「a = b」及び「a ∈ b」という関係にのみ言及している (Zermelo [1908a] 201)．つまり，上の引用箇所においてツェルメロは，それら「根本的諸関係」である「a = b」及び「a ∈ b」によって構成された単純な原子的述語に関しては，「その領域の」すべての対象について，その真偽が確定し得るものであることを宣しているのである．また一般に，原子的述語が，今述べた意味で確定的なものであれば，それらの原子的述語を論理結合子によって結合した複合的述語についても，皆確定的であると見なされる．それ故，それら「=」と「∈」を含んだ単純な諸述語に加え，それらの単純な述語から，現在一般に論理定項として考えられる，否定（¬），かつ（∧），または（∨），ならば（⇒）及び量化子などを適用することによって得られる複合的諸述語も，すべて先と同じ意味で確定的であるということが導かれるであろう．だが，1908a論文のこの箇所で述べられた，ツェルメロの「確定的」性質という概念の不明瞭であることは，ワイル以後も，多くの研究者によってしばしば指摘されている (Fraenkel–Bar-Hillel 37f., Heijenoort [FG] 199, 285, Skolem 292f., Fraenkel 286)．特に，フレンケル (A. A. Fraenkel 1891-1965) 及びスコーレム (T. Skolem 1887-1963) は，ほぼ同時期に (1921及び1922)，それぞれ独立にこの「確定的」性質に関する曖昧さを修正し，ツェルメロの分出公理に代えて，置換公理を設定した (田中151, Fraenkel-Bar–Hillel 37)．では，ここで述べられている「確定的」性質は，いかなる意味で曖昧なのか．

3.1 「確定的」性質の不明瞭性――体系Zにおける特定言語の欠如

まず指摘すべきであるのは，ツェルメロが，我々がここで用いることのできる言語を特定していない，という点である．ツェルメロの上の引用箇

所から見る限り，ツェルメロは《諸公理》と《論理諸法則》に訴えてはいるものの，実際に体系Zでいかなる言明が形成され得るのかについては，あたかも自明であるかのように述べているのみである．確かにツェルメロは，「a = b」及び「a ∈ b」という関係を，我々に許される「根本的諸関係」として定めてはいる．しかし，ツェルメロがこの論文全体で記述していることからは，我々は確定的な言明はおろか，どんな言明をも得ることはできない．なぜなら，我々がここで用いてよい言語が実際には特定されていないため，いかなる言明の形成が可能であるのか決定できないからである．一般に，何らかの理論を成立させようとする時，その理論で扱われる言明の範囲が定められねばならないであろう．そのためには，まず対象言語を特定する手続きが必要である．ツェルメロの1908a論文には，現在では当然とさえ言えるこうした視点が欠けている．

ワイルの批判の一つは，ツェルメロの「確定的」なる言明についての不明瞭さが，こうした言語特定の欠如と結び付いているという点に向けられたものである，と解釈できよう．ワイルは，論理学が数学にとって必要不可欠なものであり，極めて重要な役割を果たすものであることを，当時既に，はっきりと認識していた．より具体的に言えば，数学研究という我々の活動が，ある意味で言語を手段とするものであるということ，さらに，言語によって表現される各命題間の推論規則を抜きにしては，数学が成立し得ないということへの洞察から，それらの推論規則を研究対象として扱う論理学の重要性が十分に意識されていたということである．

> 論理的推論が持つ，認識論的方法上の意義 Die erkenntnistechnische Bedeutung は，明白なものであり，かつ既に広く知られるところとなっている．そしてまた，演繹的方法が，まさに数学に対して果たす役割についても周知のことである．　　(Weyl [DK] 10)

ワイルが，『連続体』を出版するに先立ち，1910年に行った講演においても，論理学を重視するという基本的姿勢は，明確に提示されている（Weyl [1910]）．1910年代当時，フレーゲやラッセル，ホワイトヘッド（A. N. Whitehead 1861-1947）等の論理主義的プログラムを除いて（Russell-Whiteheadの『プリンキピア』は1910-13 [3]），数学と論理学との関係付けを主張した研究は，余り知られていない．先に触れたフレンケルやスコー

レムらの研究が，いずれも1920年代に入ってから発表されたものであることを思えば，特に数学者の立場から，数学研究を行なうための必須の手段として論理学を捉えていたという点でのワイルの先駆性は，注目に値すると言えよう．こうしたワイルの立場からすれば，ツェルメロによる集合論に論理学的考察の欠如していることは，看過することのできない欠陥の一つであったに違いない．ツェルメロの「確定的性質」に関する曖昧さは，一つにはこうした特定言語の欠如に由来するのである．

3.2 《性質》と要素関係

だが，ワイルがツェルメロの「確定的性質」に関する不明瞭さを指摘したのは，特定言語の欠如という点を批判するためだけではない．恐らくツェルメロにとっても，言語に関するこうした批判は，彼の体系Zの持つ本質的な問題を突いた重要な指摘であるとは，受け取られなかったであろう．上で見た通り，我々もこの問題に関しては，ツェルメロの体系に対して十分に好意的な解釈を与えることが可能であった．また実際，スコーレムが，許容される述語を一階の言語に限定したことも，体系Zにおけるこうした言語特定の問題に対して，ワイルと共通した意図に基づくものか否かは別としても，一応の決着を与えたものと解釈できる（Skolem，Heijenoort [FG] 285，Shapiro 177ff.）．これに対しここでさらに注目したいのは，先に確認したように，ツェルメロが自身の体系における「根本的関係」の一つとして，要素関係を導入したという点である．このことは何を意味するであろうか．

この問題を考察するに当たり，ワイルとツェルメロの体系を比較して，それぞれの体系における要素関係の位置付けに関する違いを見ることにしよう．まずワイルの立場においては，集合とは《性質の外延》であり，いかなる集合eも，何らかの性質Eに基づいて $e = \{x \mid E(x)\}$ として導入される．また従って，ワイルの体系においてある式が，何らかの集合を表示する単純な名前を含んでいたとしたら，その式は必ず $\{x \mid \Phi(x)\}$ という形に書き換えられるのでなければならない．すなわち，

3） Russell, B. and Whitehead, A. N. *Principia Mathematica*, Cambridge Univ. Press, 1910-13.

$$a \in e \Leftrightarrow a \in \{x \mid E(x)\}$$

すると包括公理に基づき，さらに次の書き換えが可能である：

$$E(a) \Leftrightarrow a \in \{x \mid E(x)\}$$

この式の右辺は，対象 a が性質Eの外延の要素であることを表わしている．左辺では，対象 a が性質Eによって述語付けられている．ワイルにとって要素関係，つまりある対象 a が《何らかの集合 e の要素である》とは，その対象 a が《性質Eを持つ》ということを言い換えたに過ぎない．ワイルの体系においては，与えられた集合を規定する性質がたとえ要素関係を表わす記号「∈」を含んだ形で定式化されていても，上の書き換えによって，最終的にそれらの「∈」のすべてが消去可能である．つまりどの性質も，「∈」を全く含まない形で表示され得るのであるから，性質は本来要素関係からは構成されない筈である．ワイルの体系では要素関係それ自体は根本的関係ではなく，対象と性質（の外延）を結ぶ「繋辞 copula」に過ぎない．

> 「繋辞」ε は，語られた文「6 は素数である」における，「であるis」に相当する． (Weyl [1946] 4)

例えば今，空集合 ϕ について考えよう．ワイルの体系では，集合が何らかの性質の外延であるという原理は，当然空集合に対しても適用されることになる．そこで，一見空疎ではあるが，空集合とは《空集合の要素である》という性質を持つものたちの集まりであると考えよう．するとひとまず空集合は，$\phi = \{x \mid x \in \phi\}$ として表わされる．さらに，《空集合の要素である》という性質を「member-Empty」によって示すとすれば，《a が空集合の要素である》ことを表わす「$a \in \phi$」は，上の書き換えに従い，次のように表記されよう：

$$\text{member-Empty}(a) \Leftrightarrow a \in \{x \mid x \in \phi\}$$

この式だけでは，右辺において空集合を規定する性質が「$x \in \phi$」によって表示されているため，性質「member-Empty」が，本質的に要素関係を含んだものであるかのように思われる．しかしワイルの体系において，空集合は《自己同一的でない》という性質の外延である．すなわち，いかなる対象も持ち得ないことが証明可能であるような性質の外延として捉えるのでなければ，そもそも空集合とは何であるのか理解され得ないのである．すると $\phi = \{x \mid \neg x = x\}$ であるから，a が空集合の要素であるとは結局，

$$\text{member-Empty}(a) \Leftrightarrow a \in \{x \mid \neg x = x\}$$
$$\Leftrightarrow \neg a = a$$

となる．かくして初めに与えられた，《aが空集合の要素である》ことを表わした論理式「$a \in \phi$」から，「$\neg a = a$」への変形によって，「∈」が消去された．ワイルの体系においては，他のいかなる集合についても空集合の場合と同様に，要素関係の含まれない性質を用いて規定できるのでなければならない．ワイルにとって要素関係それ自体は，性質そのものの構成に与らせるべき根本的関係ではなく，あくまで性質（の外延）と対象とを繋ぐ役割を果たすに過ぎない．

一方ツェルメロの体系で空集合とは，そもそも公理「$\exists y \forall x\ (\neg x \in y)$」によってその存在が措定されるものであり，何らかの性質を元に導入されるのではない．だがここでワイルの場合と比較するために，ツェルメロの体系において《aが空集合の要素である》ことを，あえて上の表記法に合わせて表わすとすれば，以下のようになろう（Sは何らかの集合とする）：

$$\text{member-Empty}(a) \Leftrightarrow a \in \{z \in S \mid \exists y\ [\forall x\ (\neg x \in y \wedge z \in y)]\} \cdots\cdots \text{i)}$$

またここから，次式へと変形してみよう：

$$\text{member-Empty}(a) \Leftrightarrow \exists y\ [\forall x\ (\neg x \in y \wedge a \in y)] \cdots\cdots \text{ii)}$$

i)からii)へのこの書き換えによって，ワイルの場合と同様，i)において「a」と「$\{z \in S \mid \exists y\ [\forall x\ (\neg x \in y \wedge z \in y)]\}$」とを繋いでいた「∈」は消去されたかに見える．だが，ii)の右辺において《空集合の要素である》という性質を表わす複合述語「$\exists y\ [\forall x\ (\neg x \in y \wedge \xi \in y)]$」にまだ残っている他の「∈」について，ここからさらなる消去はできない．「$\xi \in y$」の「∈」を消去するためには，「y」から「$\{w \mid \Phi(w)\}$」という形への書き換えが可能でなければならないが，「y」は，この複合述語全体をスコープとする存在量化によって束縛されており，この書き換えが不可能だからである．これに対し，i)とii)に基づき

$$\text{member-Empty}(a) \Leftrightarrow \neg a = a \cdots\cdots \text{iii)}$$

が証明可能であると言われるかもしれない．しかし既に述べた通り，この体系で空集合とは，公理「$\exists y \forall x\ (\neg x \in y)$」によって，つまり《いかなる要素も含まないようなある一意に定まる集合》として規定されるもの

であって，性質《自己同一的でない》の外延なのではない．《空集合の要素である》ことと，《自己同一的でない》こととが同値であることを示すiii)の式が成り立つのは，性質《空集合の要素である》を持つものも，《自己同一的でない》を持つものも一切存在せず，これら二つの性質の共外延的であることが証明されるからに過ぎない．

ここで取り上げた性質《空集合の要素である》に限らず，ツェルメロの体系では根本的関係として要素関係と同一性しか設定されていないため，分出に用いられる，ツェルメロが「確定的」だとした性質は，原則的に要素関係によって構成されていることとなる．そして，その要素関係は決して還元されることがなく，式に現われる「∈」は決して消去されない．体系Ｚでは，例えば「$a \in \{x \in S \mid \Phi(x)\}$」といった式が登場しても，「a」と「$\{x \in S \mid \Phi(x)\}$」を繋ぐ「∈」は，ワイルの言う「繋辞」ではない．また従って，$\{x \in S \mid \Phi(x)\}$ 自体，性質Φの（Ｓに制限された）外延と見なし得るようなものではない．かくして，体系Ｚにおける集合は，決して《性質の外延》とはなっていない．確かに分出公理は，形式的には包括公理に制限を加えたものであり，その制限によってラッセルパラドクスが防止されたのであった．だが我々は，包括公理と分出公理の形式上の類似のみならず，これら二つの公理が，《性質の外延》としての集合と，単なる《袋》としての集合という相反する集合観をそれぞれ反映したものであることにも注目すべきである．ツェルメロは，要素関係を根本的関係とすることで集合を単なる《袋》とする見方を選択し，包括公理を実質的には放棄している．しかしその一方では，各集合を何らかの集合の部分集合として分出するに際し，性質を用いて各集合を規定するという方法を取り続けているのである．

3.3 ワイルのツェルメロ批判

ツェルメロの分出公理についての以上の検討を通じ，ここまでのところで明らかとなったのは，次の二点である：

1) ツェルメロは包括公理を放棄し，集合を《性質の外延》とは捉えていない．
2) 体系Ｚでは，要素関係が根本的関係として性質を構成する．

ワイルは，これら二つの点のいずれに対しても批判を向けている．そのポイントとは：

1′）集合は《性質の外延》とすべきである．

2′）要素関係は《性質》を構成する根本的関係ではなく，体系Ｚの性質は《性質》として認められない．

以下，これらのワイルによるツェルメロ批判の根拠を順に検討し，分出公理に対する総括的評価を確認しよう．

1′）ワイルがラッセルパラドクスを前にしながら，なおも集合を《性質の外延》とする見方を保持したのは，そもそも集合を他の概念では捉えられないと考えたためである．恐らくその根底には，集合に関する実在論の受け入れを拒否するというワイルの基本的姿勢がある．かといって，ワイルは集合の存在を完全に否定する訳ではなく，性質を介した上での集合の存在は認めている．集合に対するこうしたワイルの立場を，中世の普遍論争における，実在論と唯名論の中道としての概念論に準えることもできよう[4)]．もし集合を《性質の外延》とする見方を放棄するのであれば，集合が何であるのかについての別の説明が必要となる．しかしツェルメロの体系では，集合は諸公理を満たす対象という以外に説明の手段を持たない．ワイルにとってこの説明は，集合の存在を認めるのに不十分なのである．

2′）だが，集合を《性質の外延》とする立場を維持するならば，今度はパラドクスに対処するための手段が必要となる．そのためにワイルが取った方策とは，《性質》の構成方法を厳密に定義し，本来外延をとってはならないような，正当ならざる性質がもはや出現しないように集合論，とりわけ解析学を構築することであった．ワイルが要求する性質の正当性には，①原初的と認められた性質，及びそれらの性質のみから自身の定める厳密な構成法に則して得られたものであること，②外延をとってもパラドクスが生じないと保証されること，という二つの条件があると言える．条件①を満たす諸性質の範囲を，過不足なく，完全に条件②の性質の範囲と一致させられるのかという問題は置くとして，いずれにせよワイルは，（性質についての自身の定める構成法が適正であると前提した上で）少なくと

4) W.V.O.クワイン，20-22頁．

も条件①に基づく限り，パラドクスは生じないと考える．この基準に照らして現行の集合論・解析学を見ると，重要な定理として通用している諸言明の内には，直接パラドクスと結び付かないまでも，正当とは認められない性質から成るものが数多く紛れ込んでいるのだとワイルは主張する．その典型が，いわゆる非可述的と呼ばれる２階量化を含んだ形で表わされるものである．例えば自然数Ｎに関する次の定義は，典型的な非可述的定義の例である：

$$Nx \Leftrightarrow \forall F\ \{[F0 \wedge \forall y\ (Fy \Rightarrow FSy)] \Rightarrow Fx\}$$

ここでは，定められるべき当の性質Ｎ自身が，右辺のＦの一例としてその量化域に既に含まれており，その量化域に対する量化を行なうことで性質Ｎの定義が与えられている．ワイルはこうした形の言明を悪循環と見なし，実質的な定義とは認めない．そして，ラッセルパラドクスを引き起こした性質$\neg(x \in x)$も，やはり非可述的定義の典型例の一つであり，誤った生成過程を経て得られたものと考えられる．ところが，ツェルメロの体系において与えられる重要な性質の大部分は，いずれもこうした非可述的な形でしか表わされ得ない．ここではその仕組について詳論できないが，大まかに言えば，それはツェルメロが，前節で見た通り，要素関係を根本的関係として設定したことに起因する．このことにより，ツェルメロによって与えられる“性質”は，もはやワイルにとっての性質ではなく，また要素関係も，ツェルメロの体系においては対象と性質（の外延）とを繋ぐ「繋辞」とはなっていない．それにも拘わらずツェルメロは，それぞれの集合の分出に当たり，“性質”を用いて規定するという方策を取る．分出公理が集合論の公理として自然であり，かつ説得力を持つものと受け止められるのは，この公理が形式的には包括公理に制限を加えたに過ぎないものであり，ツェルメロが集合を性質の外延とする見方を保ったかに見えるからである．しかし，ツェルメロの体系において集合は，実際には性質の外延とはなっていない．こうした問題を抱える以上，ワイルにとってツェルメロの理論は，包括公理からなぜパラドクスが生じることになったのか，つまり，集合論そのものが抱える根本的な問題の構造の解決を何ら提示したことにはならないであろう．ツェルメロの理論に対するこうした批判的見解は，ワイルがその後直観主義的，及び形式主義的思想変遷を経た後も尚，

一貫した問題意識として保持し続けたものと見て差し支えない.

> Ｚのような体系に対し，それは幾つかのアンチノミーの諸原因についての真の洞察に基づいているのではなく，周知の諸矛盾を避けるのに必要な最低限の譲歩によって，カントールの元来の考えを一時的に取り繕っているのだとして，反対することもできよう．実際，今のところはそこからいかなる矛盾も出てきていない，という経験的事実以外に，Ｚが無矛盾である consistency ことを保証するものはない.
>
> (Weyl ［1946］ 11)

> 性質を集合に変換するconversion に当たって，何らかの制限，すなわち，ラッセルパラドクスを防ぐのに十分なだけ厳格な，しかし，数学に対してはできる限りの自由を提供するような制限が課せられねばならない．こうした態度は，全実用主義的である；目に見える症状の手当てはするが，根底にある病気の診断もしなければ治療もしない．こうした公理的方法の例として，真っ先に挙げられるのはツェルメロの体系である（1908）…… (Weyl ［1949］ 231，（　）内原文)

4　ま　と　め

ワイルは，分出公理についての批判検討を通じ，ツェルメロの体系の抱える以上の問題点を明らかにした．では，ワイル自身の体系は実際にはどのようなものであろうか．そしてそれは，ツェルメロの体系以上に我々に豊かな内容を提供する，説得力のあるものとなっているか．というのも，現在の一般的評価に従うなら，ツェルメロの体系は豊富な数学的対象を提供し得る，強力な集合論体系となっているのである．こうした点も含め，ワイルの体系についての検討は次なる課題とし，別の機会に改めて報告したいと思っている.

文 献 表

Weyl, H. [DK] *Das Kontinuum -Kritische Untersuchungen über die Gurndlagen der Analysis*, Veit, Leipzig, 1918.

—— [TC] *The Continuum -A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, tr. by S. Pollard & T. Bole, New York: Dover Publications, Inc., 1987.

—— [GA] *Hermann Weyl Gesammelte Abhandlungen*, K. Chandrasekharan (Hg.), Berlin: Springer-Verlag, 1968.

—— [1910] "Uber die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe," Mathematischnaturwissenschaftliche Blätter 7, 93-95 und 109-113, rep. in [GA] Vol. I, pp. 298-304.

—— [1946] "Mathematics and Logic -A Brief Survey Serving as Preface to a Review of The Philosophy of Bertrand Russell," *American Mathematical Monthly* 53, pp. 2-13, rep. in [GA] Vol. IV, pp. 268-279.

—— [1949] *Philosophy of Mathematics and Natural Sceience*, Princeton: Princeton Univ. Press. 菅原正夫他訳『数学と自然科学の哲学』岩波書店，1968.

Zermelo, E. [1908a] "Investigations in the Foundations of Set Theory I (1908a)," in Heijenoort [FG], pp. 139-141.

Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y. et al. *Foundations of Set Theory.* Amsterdam: North-Holland, 1984 (1958).

Hallett, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size.* Oxford Univ. Press, 1984.

Heijenoort, J. v. (ed.) [FG] *From Frege to Gödel. A. Source Book in Mathematical Logic*, Harvard Univ. Press, 1879-1931.

Shapiro, S. *Foundations with Foundationalism -A Case for Second-order Logic*, Oxford: Clarendon Press, 1991.

Skolem, T. "Some Remarks on Axiomatized Set Theory (1922)," in Heijenoort [FG], pp. 290-301.

W. V. O. クワイン『論理的観点から一論理と哲学をめぐる九章』飯田隆訳，勁草書房，1996 (1992).

岡本賢吾「論理主義は何をするのか」『科学哲学』34-1，日本科学哲学会 2001，7-19頁.

田中尚夫『選択公理と数学』遊星社，1990.

戸田山和久「〈つくられたもの〉としての集合」『哲学』5，1988年冬号，哲学書房，49-64頁.