

## 【学位論文審査の要旨】

### 【論文の内容の要旨】

#### 1. 研究の背景

本論文は、解析解の存在しない複雑な金融派生証券の価格付けに対して、ウィナー・伊藤カオス展開に基づいて精度の高い近似解を導出した研究論文である。

経済学やファイナンスの分野では、拡散過程による確率現象のモデル化が頻繁に用いられている。金融派生証券の価格付けにおいても、原資産の従う価格過程を拡散過程で表現することが多い。特に実務では、資産価格モデルとして、局所ボラティリティ・モデルや確率ボラティリティ・モデル、あるいはそれらを複合したハイブリッド・モデルが広く支持されている。しかし、そのような資産価格の上に書かれたヨーロッパン・オプション価格の簡単な解析解は、ブラック・ショールズモデル（幾何ブラウン運動）などの特別な場合を除いて存在しない。

また、株式、為替、金利等のオプション市場では、ヨーロッパン・オプションのボラティリティにスキューやスマイルと呼ばれる構造が観察されることはよく知られている。この事実は従来のブラック・ショールズモデルのような単純なモデルでは市場の価格特性を表現できないことを意味する。キャリブレーションの対象となるオプション市場のスキューやスマイルを取り込むため、より複雑なモデルを使う必要性が増しているのである。

一方、実務においてモデルのキャリブレーションに用いるに足る十分な流動性を持った商品はヨーロッパン・オプションに限られているため、ヨーロッパン・オプション価格の効率的算出の可否が原資産のモデル化における実質的なボトルネックとなっている。したがって、高い精度でかつ簡単に計算できるヨーロッパン・オプション価格の近似解の導出が金融実務上もっとも重要な課題となっている。

#### 2. 本論文の構成

本論文は本文 83 頁（A4, 日本語, 13 個の表および 19 個の図を含む）から構成されている。構成は以下の通りである（小節は省略する）。

##### 第 1 章 序章

##### 第 2 章 Wiener-Ito カオス展開

- 2.1 はじめに
- 2.2 局所ボラティリティ・モデル
- 2.3 原資産価格の展開
- 2.4 ヨーロッパン・オプションの近似式
- 2.5 数値計算
- 2.6 小括

##### 第 3 章 確率ボラティリティ・モデルへの応用

- 3.1 はじめに
- 3.2 確率ボラティリティ・モデル

3.3	カオス展開法
3.4	ヨーロピアン・オプションの近似式
3.5	数値計算
3.6	小括
第4章	複雑な金融派生商品の価格付けへの応用
4.1	はじめに
4.2	多次元資産への拡張
4.3	カオス展開法
4.4	一般的モデルへの応用
4.5	数値計算
4.6	小括
第5章	結論
付録A	命題2.3.1の証明
付録B	補題2.3.4の証明
付録C	条件付き期待値の公式
付録D	補題4.3.1の証明
付録E	関数 $a(T)$ の定義
付録F	条件付き期待値の公式2
	参考文献

### 3. 本論文の概要

「1. 研究の背景」で指摘した問題意識の下、本学位論文では、原資産価格過程が一般的な拡散過程に従う場合に、金融派生証券の精度の高い近似価格を明示的に導出する手法を提案している。

具体的には、第1章で研究の動機および既存研究について詳細に説明し、本研究の当該分野における位置づけを明確にしている。

第2章では、本論文の理論的基礎となるアイデアを局所ボラティリティ・モデルの場合について詳細に説明している。まず、ウィナー・伊藤カオス展開に基づき原資産価格をエルミート多項式で展開する。次に、展開された価格に対して逐次代入を繰り返すことで、原資産価格を伊藤の重複積分の形に書き換える。この際、3次の重複積分までを残し、残りの項を切り捨てるという近似を行なう。最後に、近似された原資産価格の従う特性関数を算出し、特性関数の反転公式を用いて密度関数を近似する。オプション価格は、この近似密度関数を用いて解析的に表現されることを示している。近似の妥当性は一連の補題と命題で示されている。

第3章では、前章で展開されたアイデアを確率ボラティリティ・モデルの場合へと拡張している。ボラティリティ過程を一般的な平均回帰過程とし、ウィナー・伊藤カオス展開された原資産過程との2次元拡散過程に逐次代入法を適用する。最終的な近似表現はやや複雑になるが、現在の計算機を使えば問題になるものではない。

第4章では、ここまで展開してきた手法をより複雑な商品であるアジア・オプションとバスケット・オプションへ応用している。これらのオプションは為替や商品市場で活発に

取引されており、評価の極めて難しいオプションとして知られている。主なアイデアは一般的加重関数により平均や和を記述し、積分の順序交換を用いることで、複雑なペイオフを3次の伊藤重複積分に帰着させることである。

そして第5章で全体をまとめ、今後の研究課題について述べている。複雑な式展開や証明は付録に収録されている。

本論文をとおして、近似の精度を検証するため、市場に則したデータを用いた数値例を示している。結果として、満期の長いオプションに対しても、市場で観測されるボラティリティ・スキューを高い精度で復元することに成功している。さらに、先行研究との比較をとおして、本論文が提案する手法の近似精度が優れていることを示している。特に、従来の手法では近似の精度が劣化した満期が長くボラティリティが高いオプションに対しても高い精度が保たれる点を強調している。

なお、第2章の内容は査読付き論文（共著）として *Journal of Computational Finance, Volume 18, pages 1~31* (2015) に掲載された。また、第3章の内容は査読付き論文（単著）として *Quantitative Finance, Volume 14, pages 1923~1936* (2014) に、さらに第4章の内容は査読付き論文（共著）として *Applied Mathematical Finance, Volume 21, pages 109~139* (2014) に掲載されている。

## 【論文審査結果の要旨】

### 1. 審査結果

本論文の第一の貢献は、原資産価格過程に一般的な拡散過程を仮定した場合のヨーロッパン・オプション価格に対する近似手法を開発したことである。特に、評価の難しい確率ボラティリティ・モデルやアジア・オプション、バスケット・オプションに対して極めて精度の高い近似解を導いた貢献は非常に大きい。

次に、近似精度を検証するため、市場に則したデータを用いて、満期が長くボラティリティの高いオプションに対しても、高い近似精度が保たれることを確認したことである。従来の近似手法は、満期や行使価格あるいはボラティリティに関して適用範囲に制限があったが、本手法は広範囲に渡る金融派生証券に対して適用可能である。これが本論文の第二の貢献である。

以上のように、本論文は論旨も明快で、着想の独創性に優れている。ヨーロッパン・オプション価格の近似手法開発に関する貢献度は大いに評価され将来の発展が期待できる学位論文であるが、いくつかの問題点や課題も残されている。

第一に、本近似手法が適用可能なボラティリティ関数の形状に関する議論がないことである。ボラティリティ関数を2次のテーラー展開で近似しているが、この近似による限界を明示すべきであろう。

第二に、本手法のアメリカン・オプションへの拡張に関する方向性について議論がなされていない。オプション市場ではアメリカン・オプションも活発に取引されており、評価が極めて困難なアメリカン・オプション価格の近似解の開発が待たれている。

しかし、これらの問題点や課題は本論文が提案した近似手法の価値を決して損なうものではない。むしろ、今後の発展的な研究課題と位置付けられるべきものである。

## 2. 合否判定

本審査委員会は、学位申請者である舟橋秀治に対して、平成 26 年 12 月 25 日に本論文を中心に公開審査（面接試問）を実施した。その結果、申請者が本論文だけでなく、金融工学の理論および実務への応用に関して博士学位を取得するにふさわしい学識を有していることが確認できた。よって、本審査委員会は申請者舟橋秀治に対して、首都大学東京博士（経済学）の学位を授与することが適当であると判定する。