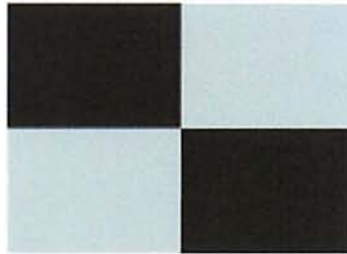

2015 年度修士論文報告書

Connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ システムの 最適配置導出方法に関する研究

指導教員 山本 久志



首都大学東京
システムデザイン研究科
システムデザイン専攻
経営システムデザイン学域
学修番号：14892506
小村 徹

目次

第 1 章	序論.....	p.1
1.1	はじめに.....	p.1
1.2	本論文の構成.....	p.2
1.3	システムの定義.....	p.3
1.3.1	Consecutive- k -out-of- n :F システム.....	p.3
1.3.2	Connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システム	p.7
第 2 章	Connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムの 最適配置問題.....	p.10
2.1	Connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムの関連研究	p.10
2.1.1	Connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムの信頼度算出方法	p.10
(i)	$m = r$ ($n = s$) の場合	p.11
(ii)	$m \neq r$ ($n \neq s$) の場合	p.11
2.1.2	システムの対称性を排除した順列生成の為の性質と定理.....	p.12
2.2	$m = r, s = 2$ における connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムの 最適配置問題.....	p.14
第 3 章	最適配置導出方法.....	p.18
3.1	システムの最適配置法則性.....	p.19
3.1.1	最適配置に影響しない範囲.....	p.26
3.1.2	最適配置の必要条件.....	p.30
3.1.3	最適配置におけるコンポーネント故障確率の値の関係性.....	p.35
3.2	解法アルゴリズムの考え方と手順.....	p.38
第 4 章	提案アルゴリズムの評価.....	p.42
	数値実験.....	p.43
第 5 章	結論.....	p.46

参考文献.....p.47

謝辭.....p.49

第 1 章 序論

1.1 はじめに

現代社会のシステムは様々な素材や機能を持つ部品の組み合わせによる構造、または相互に連携して機能するネットワーク構造等、大規模化と複雑化が進んでいる。このようなシステムの進歩を多様化と呼ぶならば、多様化するシステムは現代社会を構成する重要な機能を担っており、システムの故障／停止が現代社会に及ぼす影響の大きさは計り知れないものがある。これからの社会においてシステムを設計・運用するためには、このように多様化するシステムに合わせた耐久性、保全性そして設計信頼性の評価と、システムの目的に合わせた運用計画が必要になることは自明といえる。

例えば、電力は我々の生活に欠かせないエネルギー源であり、一世帯のエネルギー消費の 44.9%を占めている[18]。この電力供給が失われるような場合、我々の生活において約半分のエネルギー供給を失うことになる。更に家庭のみならず、社会活動全体に与える影響は甚大であることは容易に想像できる。この電力供給システムは、日本国内に限って考えるならば、様々な発電手段による 1,300 箇所以上の発電所と、発電所から電力に用いられる 83,000km 以上の送電線、そして各所で利用できる電圧へと変換する 6,600 箇所以上の変電施設等が組み合わされたネットワークシステムで構成され[19]、膨大な部品の組み合わせにより構成される大規模なシステムと言える。更に、このようなシステムは機能を連携し協調することでより高度の機能を実現し、また連携するネットワーク上の他の部品が機能を補完することでシステム全体の機能を維持できるようなシステムでは、システムの一部が集中して故障したことで全体に大きな影響を与える問題も考えられる。

システムの信頼設計のためには、システムが果たすべき機能や、システムの環境状況を細部に検討し、適切な材料やコンポーネントを選択することに加え、信頼性評価を行うことは品質保証の面からも必須事項である。そこで信頼性の評価の手法として、信頼性予測の方法が重要になってくる。

ここで、本論文におけるシステムとは「所定の任務を達成するために、選定され、配列され、互いに連係して動作する一連のアイテム（ハードウェア、ソフトウェア、人間要素）の組み合わせ（JIS Z8115）」を意味するものとする。また、システムを構成する“アイテム”を、以下コンポーネントと呼ぶ。

コンポーネントの信頼度とシステムの信頼度の関係についての理論的な考察は Barlow and Proschan[2] 等に基本的な部分がまとめられているが、大規模なシステムの信頼度を求めるためには、高速な計算機を用いても多くの時間を必要とする。そこで対象とするシステムの性質を利用した信頼度算出方法がシステムの評価をするために必要となる。

そこで本論文では、大規模化と複雑化が進んだシステムの一つとして、consecutive- k -out-of- n :F システムを 2 次元に拡張したシステムの一つである、connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムに注目する。このシステムについて、各々のコンポーネントの故障確率が与えられた際に、システムの最適配置を高速に算出する方法を提案することを目的とする。

1.2 本論文の構成

本論文の構成は次の通りである。1.3 項にて本論文で注目する connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムの概念について記述し、第 2 章にて connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムの最適配置について記述する。次に、第 3 章にて connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムの効率的な最適配置導出方法について述べる。そして第 4 章にて最適配置導出アルゴリズムの有効性を検証する。最後に第 5 章にて本論文の結論と今後の課題を述べる。

1.3 システムの定義

本章では、本論文で注目する $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムについて述べる．そのために、まず $\text{consecutive-}k\text{-out-of-}n:F$ システムの概念と関連研究について述べる．次に本研究で注目する $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムを定義し、システムの実用例について述べる．

1.3.1 Consecutive- k -out-of- $n:F$ システム

$\text{Consecutive-}k\text{-out-of-}n:F$ システムとは、稼働もしくは故障の二状態を持ち得る n 個のコンポーネントにより構成されたシステムにおいて、少なくとも k 個以上連続するコンポーネントが故障しているとき、かつ、そのときにのみシステム全体が故障となるシステムである．この $\text{consecutive-}k\text{-out-of-}n:F$ システムの簡単なシステム例を図 1.1 に示す．

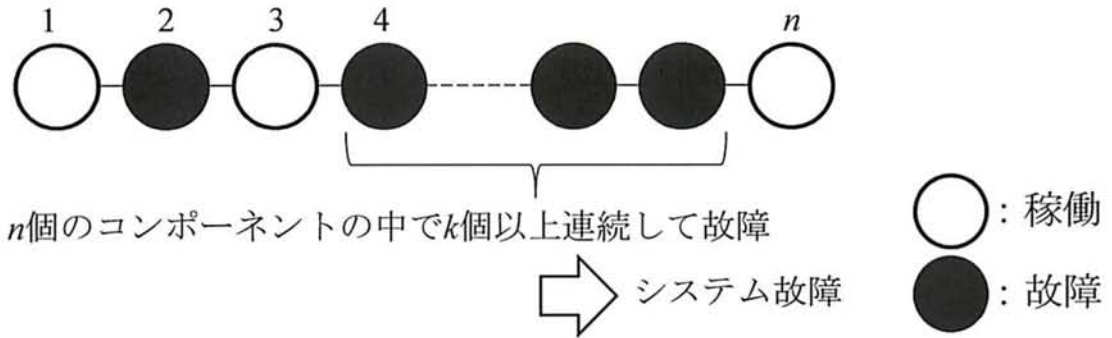


図 1.1 Consecutive- k -out-of- $n:F$ システムの故障例

$\text{Consecutive-}k\text{-out-of-}n:F$ システムに関する研究は、多くの研究者により高速かつ効率的な信頼度算出方法や極限定理、寿命分布に基づいた算出方法等、様々な研究が行われてきた．更にこのシステムを拡張した新たなシステムの提案も行われている．そのシステムのひとつが、本論文で注目する $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムである．また、このシステムに関する主要な問題のひとつとして、システム信頼度が最大となるコンポーネントの配置を求める問題、すなわち最適配置問題がある．最適配置の導出や配置傾向については、Chang 他[3], Kou and Zuo[5]等により過去の研究がまとめられ、報告されている．

consecutive- k -out-of- n :F システムの適用例として、街灯システムや通信システム等が挙げられる。以下に街灯システムの例を挙げる。

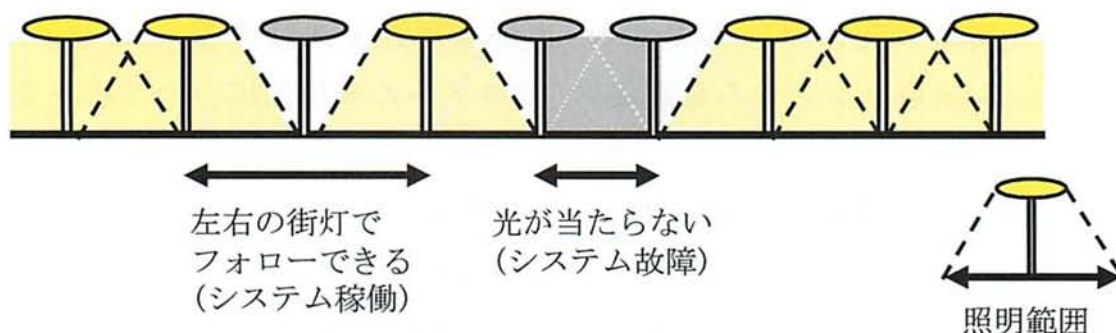


図 1.2 街灯システム

(i) Consecutive- k -out-of- n :F システムの信頼度算出

Consecutive- k -out-of- n :F システムを数理的に解析するための評価尺度として信頼度がある。Consecutive- k -out-of- n :F システムの信頼度を再帰的に計算することで高速に算出する方法は Hwang[4] によって示されている。

・ Hwang が与えた信頼度計算の漸化式

はじめに、consecutive- k -out-of- n :F システム内のコンポーネントを並べて一端から数えたときに、 i 番目に数えられるコンポーネントをコンポーネント i と呼ぶ (図 1.3)。

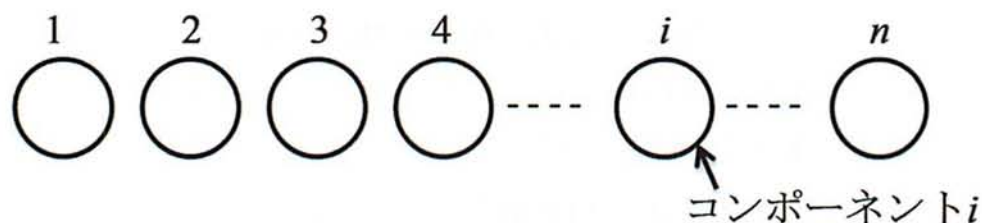


図 1.3 コンポーネント i

記号定義

- n : コンポーネントの総数.
 k : 故障コンポーネントの数.
 q_i : コンポーネント i の故障確率 ($i = 1, 2, \dots, n$)
 p_i : コンポーネント i の信頼度 ($i = 1, 2, \dots, n$) (ただし, $p_i = 1 - q_i$)

このとき consecutive- k -out-of- n :F システムの信頼度 $R(k, n)$ は(1.1)式で表すことができる.

$$R_L(k, i) = \begin{cases} \sum_{l=n-k+1}^n p_l \left(\prod_{j=l+1}^n q_j \right) R_L(k, l-1) & i > k \\ 1 - \prod_{j=1}^i q_j & i = k \\ 1 & i < k \end{cases} \quad (1.1)$$

(ii) Consecutive- k -out-of- n :F システムの最適配置に関する不変性

Consecutive- k -out-of- n :F システムの最適配置問題について述べる. 最適配置問題とは, 各コンポーネントの故障は互いに独立であるが, 信頼度が同一でない場合に, コンポーネントをどのように配置すればシステム信頼度が最大となるかという問題である. ここで, コンポーネントを自由に入れ替えてもシステムとしては問題がないことを前提とする. また, コンポーネントの故障確率に $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ の関係があるものとする. また, 以下の記号を定義する.

記号定義

- \mathbf{Q} : q_i を要素とする n 次元ベクトル $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. ($i = 1, 2, \dots, n$)
 π : 1 から n までの自然数で構成される順列. ただし $\pi \equiv (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$, すなわちコンポーネント番号で表されるコンポーネントの配置(システム構成)を表す.
 S_n : 順列 π 全ての集合.

$$D_n : D_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}.$$

以下、順列 π を用いてコンポーネントの配置(システム構成)を表し、順列 π を配置 π と呼ぶことにする。配置 π が示す順列でコンポーネントが配置されたとすると、システムは一意に決定する。例えば、 $n=5$ のときに配置 $\pi=(2,4,1,5,3)$ は、左からコンポーネント番号 2, 4, 1, 5, 3 の順番にコンポーネントが配置されているシステムに対応する。

また $R(n; \pi, Q)$ をコンポーネント故障確率 Q が与えられ、配置 π の順序で左からコンポーネントが配置された consecutive- k -out-of- n :F システムの信頼度とする。

このとき consecutive- k -out-of- n :F システムの最適配置問題は

$$R(n; \pi^*, Q) = \max_{\pi \in S_n} R(n; \pi, Q) \quad (1.2)$$

を満たす配置 π^* (最適配置) を求める問題となる。最適配置 π^* は一般にコンポーネント故障確率 Q に依存することになるが、ある特殊なシステムでは依存しないことが分かっている。

- ・最適配置に関する不変性

最適配置問題に関して“不変性”(invariant)と呼ばれる概念がある。

定義(Malon[7][8]) :

$\forall Q \in D_n$ に対して

$$R(n; \pi^*, Q) = \max_{\pi \in S_n} R(n; \pi, Q) \quad (1.3)$$

である配置 π^* が存在するならば、システムは不変性(invariant)を持つという。

すなわち、不変性とは最適配置がコンポーネント故障確率の値に依存せず、各コンポーネント故障確率の大小関係のみに依存する性質を意味する。

Consecutive- k -out-of- n :F システムの不変性について Malon[7][8]が提唱し、まとめられた結果を表 1.1 に示す。例えば、 $k=2$ の場合には不変な最適配置が存在し、consecutive-2-out-of- n :F システムの最適配置は $(1, n, 3, n-$

$2, \dots, n-3, 4, n-1, 2$)となる. 不変性を持つことが示されているのは $k=1, 2, n-2, n-1, n$ の場合である. これらの場合以外, すなわち $3 \leq k \leq n-3$ の consecutive- k -out-of- n :F システムには不変性を持たないことが証明されている (Malon[7][8]).

表 1.1 Consecutive- k -out-of- n :F システムの不変な最適配置

k	不変な最適配置
1	任意
2	$1, n, 3, n-2, \dots, n-3, 4, n-1, 2$
$n-2$	$1, 4, \text{任意}, 3, 2$
$n-1$	$1, \text{任意}, 2$
n	任意

1.3.2 Connected- (r, s) -out-of- (m, n) :F システム

Connected- (r, s) -out-of- (m, n) :F システムは, システムを構成するコンポーネントが m 行 n 列の長方形格子に配置され, システム内の任意の $r \times s$ 格子内のコンポーネントが全て故障する場合にシステム故障となるシステムである (図 1.4) .

まず, 本論文を通して共通に用いられる記号を次に与える.

$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, mn$ に対して,

q_k : コンポーネント k の故障確率. ただし, 一般性を失うことなく $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_{mn}$ を満足する.

p_k : コンポーネント k の信頼度. $p_k = 1 - q_k$.

$\pi(i, j)$: 行 i , 列 j に配置されたコンポーネント番号.

$\pi = (\pi(1, 1), \pi(2, 1), \dots, \pi(m, n))$

: コンポーネント番号で表されるコンポーネントの配置.

$q_{\pi(i, j)}$: $\pi(i, j)$ に配置されたコンポーネントの故障確率.

$p_{\pi(i, j)}$: $\pi(i, j)$ に配置されたコンポーネントの信頼度.

$R((r, s), (m, n); [p_{\pi(i, j)}])$

: 各コンポーネントの信頼度が, $p_{\pi(i, j)}$ である connected- (r, s) -

out-of-(m, n):F システムの信頼度.

$R(s, n; [p_i])$

:各コンポーネントの信頼度が, p_i である連続 s -out-of- n :F システムの信頼度.

Connected-(r, s)-out-of-(m, n):F システムでは, 本論文において次のことを仮定する.

1. 全てのコンポーネント及びシステムは稼働・故障の二状態をとる.
2. 全てのコンポーネントの故障は統計的に独立に発生する.
3. 各コンポーネントの故障確率は既知であるとする.

Boehme, Kossow and Preuss [2] では, 更にシステムが故障する条件を一般化したシステムを提案している. このシステムは総称して connected- X -out-of-(m, n):F システムと表記されている. ここで X はシステム全体が故障となる形状を意味する. 例えば, X を(r, s)と置き換えた場合, connected-(r, s)-out-of-(m, n):F システムとなる.

また, Boehme, Kossow and Preuss [2] は connected- X -out-of-(m, n):F システムのシステムが故障する形状 X が, 一つではなく複数の形状を持つ場合を提案している. 例えば, 故障条件が(r_1, s_1)-or-(r_2, s_2)の場合, このシステムは, $r_1 \times s_1$ 格子内のコンポーネントが全て故障するか, または $r_2 \times s_2$ 格子内のコンポーネントが全て故障する場合にシステムが故障する. このシステムの応用例として, 監視カメラシステムが挙げられる.

システム例 (監視カメラシステム (図 1.5))

4 行 4 列に配置された 16 個のカメラによる監視カメラシステムを考える.

半径 d 円の範囲を監視することができる各々のカメラが, 行方向と列方向の二点間に対して, 等しく d の距離で離れて格子状に配置されているとする. このとき, 監視カメラシステムの監視範囲は, connected-(2,1)-or-(1,2)-out-of-(4,4):F システムで表現することができる (Boehme, Kossow and Preuss[2]).

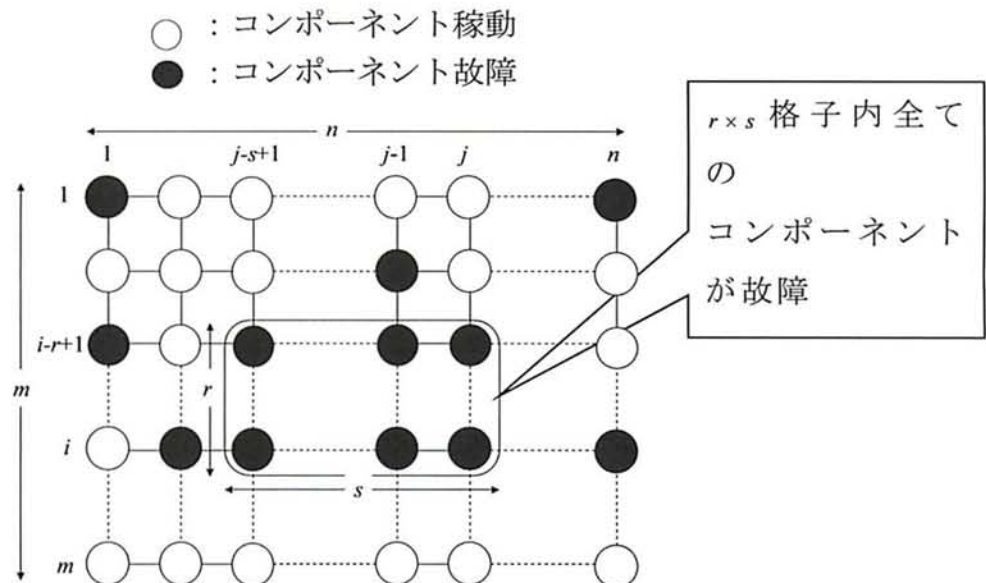


図 1.4 **connected-(r,s)-out-of-(m,n):F** システムの故障例

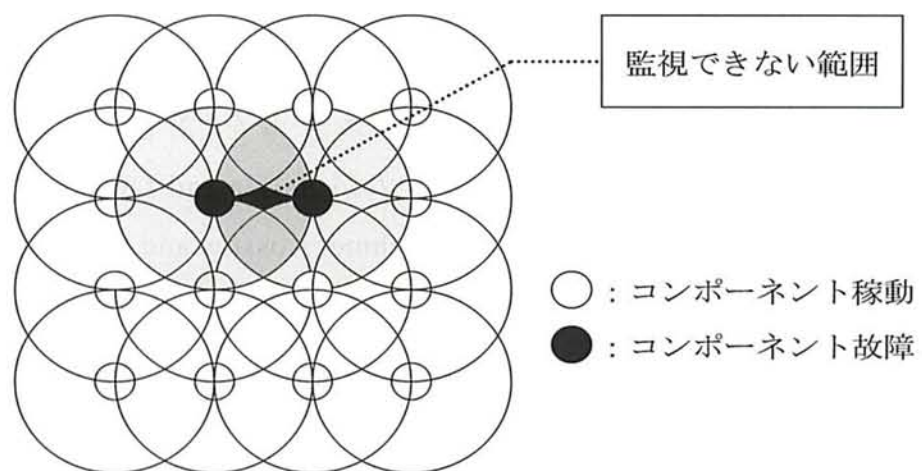


図 1.5 監視カメラシステム

つまり図 2.2 のように配置された監視カメラにおいて、各カメラ（図中では小円で表す）が監視範囲半径 d （図中では大円で表す）を持つとき、この監視カメラシステムを、各カメラを 1 個のコンポーネントとした **connected-(2,1)-or-(1,2)-out-of-(4,4):F** システムとみなすことができる。ただし、図中の○を正常な照明、●を故障した照明とする。このとき、図 2.2 のように隣接した 2 個のカメラが故障した場合には図の黒塗り部分には死角ができることになる。

このシステム例の詳細については野口他 [16] で説明されている。

第 2 章 $\text{Connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ システム の最適配置問題

本章では、本論文で注目する $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ システムの最適配置問題について述べる。はじめに本研究で注目する $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ システムの関連研究を紹介し、最適配置問題について述べる。そして、第 3 章で紹介する提案アルゴリズムに一部用いた $m = r$ の場合の信頼度の算出方法と最適配置算出方法を、1 次元の $\text{consecutive-}k\text{-out-of-}n\text{:F}$ システムの信頼度算出方法と最適配置問題に帰着させた先行研究の紹介を行う。

2.1 $\text{Connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ システムの関連研究

$\text{Consecutive-}k\text{-out-of-}n\text{:F}$ システムを 2 次元に拡張した、2 次元 $\text{consecutive-}k\text{-out-of-}n\text{:F}$ システムが Salvia and Lasher [9] によって提案されている。このシステムは Boehme, Kossow and Preuss [2] において“隣接 $(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ 格子システム (英語名 $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ lattice system)” という名称で表記されている。なお, Boehme, Kossow and Preuss [2] は $\text{consecutive-}k\text{-out-of-}n\text{:F}$ システムを 2 次元に拡張したシステムを提案している。

本論文では、以下、(線形) $\text{consecutive-}k\text{-out-of-}n\text{:F}$ システムを 2 次元に拡張したシステムについて議論する。はじめに、2 パターンのシステム信頼度算出方法について述べ、2 次元システムにおける特徴の 1 つであるコンポーネント配置の対称性を排除した順列生成方法について述べる。

2.1.1 $\text{Connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ システムの信頼度算出方法

$\text{Connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n)\text{:F}$ システムの信頼度は、 $m \times n$ 個のコンポーネントの状態を全て列挙 (2^{mn} 個) し、システム正常状態 (または、システム故障状態) になる確率を単純に加えれば求めることができる。しか

し, $m = 5, n = 5$ の場合でも, コンポーネントの状態は $2^{25} = 3.36 \times 10^7$ 個あり, 最近高速化された計算機であっても, ある程度の計算時間を要する. ゆえに, 多くの研究者により, このシステムの効率的なシステム信頼度を算出する方法が提案されてきた.

(i) $m = r$ ($n = s$) の場合

Connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムに関して, 初めてシステム信頼度の算出方法を提案したのは, Boehme et al. [2] である. Boehme et al. [2] は, $m = r$ の場合について考察し, このシステムが, 全てのコンポーネントが故障している列 (行) が, 連続して s 列 (r 行) 存在すればシステム故障となることに着目して, このシステムの信頼度を求める問題が, consecutive- s -out-of- n :F システム (または, consecutive- r -out-of- m :F システム) の信頼度を求める問題に帰着することを示した.

ここで, 任意の列および行におけるコンポーネント故障確率の積を

$$\begin{aligned} Q_i &= \prod_{l=1}^s (1 - p_{\pi(i,l)}), \quad Q_j = \prod_{l=1}^r (1 - p_{\pi(l,j)}) \text{ で表す. } m = r \text{ の場合の信頼度は,} \\ R((r,s), (m,n); [p_{\pi(i,j)}]) &= \\ R(s,n; [(1-Q_1), (1-Q_2), \dots, (1-Q_n)]) &= \\ R\left(s,n; \left[1 - \prod_{l=1}^r (1 - p_{\pi(l,1)}), 1 - \prod_{l=1}^r (1 - p_{\pi(l,2)}), \dots, 1 - \prod_{l=1}^r (1 - p_{\pi(l,n)})\right]\right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

であり, $n = s$ の信頼度は,

$$\begin{aligned} R((r,s), (m,n); [p_{\pi(i,j)}]) &= \\ R(r,m; [(1-Q_1), (1-Q_2), \dots, (1-Q_m)]) &= \\ R\left(r,m; \left[1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_{\pi(1,j)}), 1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_{\pi(2,j)}), \dots, 1 - \prod_{j=1}^s (1 - p_{\pi(m,j)})\right]\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる.

(ii) $m \neq r$ ($n \neq s$) の場合

“ $m = r$ または $n = s$ ” 以外の connected- (r,s) -out-of- (m,n) :F システムに関しては, Zuo[15]が, ALW 法と呼ばれる方法が有効であることを示唆した. ALW 法 (Abraham [1], Locks [6] と Wilson [11]) は, 一般的なネ

ットワークシステムの信頼度を求める方法であり、極小パスまたは極小カットが求められていることを前提条件とする SDP 法 (sum of disjoint products) に分類される。SDP 法は最終的にシステム信頼度を互いに排反な項の和として表現するが、ALW 法は、その排反項を効率的に求める方法である。Connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ システムの極小カットは自明であるので、ALW 法は容易に connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ システムに適用できる。しかし、ALW 法を connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ システムに適用した場合に、 m と n が小さなシステムの場合でも、計算機の計算時間や記憶領域が多く必要とされることが判明している (Yamamoto and Miyakawa [12,13])。

そこで、Yamamoto and Miyakawa [12,13]が、connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ システムの信頼度を効率的に算出する方法を提案した。この方法は、connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ システムの最も端に位置する行の状態に注目し、その状態により場合分けすることにより問題とするシステムの行数を減じていく方法である。これは行だけではなく、列の状態に注目しても同様な定理が得られる。この方法は現状最も効率的にシステム信頼度を算出することができる。

2.1.2 システムの対称性を排除した順列生成の為の性質と定理

本項では、鈴木他 [17] により提案された対称性を排除した順列生成の性質と定理を紹介する。この対称性を排除した順列の生成を行う基本アルゴリズムは本提案法と共通となる分枝限定アルゴリズムを使用している。またこのアルゴリズムは、コンポーネントの順列生成に対し条件を用いることで、生成順列数を減らす方法である。ここで紹介する性質と定理の利点は、生成順列数を大きく減らすことができるところにある。生成順列の総数は $mn!$ 個あるのに対し、“対称性を排除された配置”の総数は、長方形の場合は最大 $\frac{(mn)!}{4}$ 個未満、正方形の場合は最大 $\frac{(n^2)!}{8}$ 個未満となる。

以下、対称性を排除した順列生成の性質と定理の説明をするにあたり、

必要な記号を本論文に沿った形に直して紹介する.

記号定義

$i = 1, 2, \dots, m$ と $j = 1, 2, \dots, n$ に対して

- (i, j) : i 行 j 列であるコンポーネント配置位置とする.
- $p(i, j)$: (i, j) に配置されたコンポーネント番号.
- \mathbf{P} : mn 次元ベクトル, $(p(1, 1), p(1, 2), \dots, p(m, n))$ とする.

更に, 2 次元座標 (i, j) を, 1 次元座標 $\tau = (i-1)n + j$ で表すことにし, 以下を定義する.

B_τ : 1 から順に τ までコンポーネントを配置した時に,
まだ未配置である設備の集合.

$\max^{(k)}(B_\tau)$: 集合 B_τ で k 番目に大きな設備番号.

性質 (鈴木他 [17])

本論文で考察する最適配置問題では, コンポーネントの相対的配置によって信頼度を計算させるため, 明らかに同じ信頼度となる配置が存在する. 例えば, ある配置を回転または反転させた配置は同じ信頼度となる. 長方形 ($m \neq n$) のときは, 明らかに同じ信頼度となる配置が 4 個存在し, 正方形 ($m=n$) のときは 8 個存在する. このことは, ある配置の信頼度を算出すれば長方形の場合は残りの 3 個の配置の信頼度, 正方形の場合は残り 7 個の配置の信頼度を算出する必要がないことを意味する. つまり,

(1) 長方形 ($m \neq n$) のとき

$$p(1) = \min(p(1), p(mn-n+1), p(n), p(mn)) \quad (2.3)$$

(2) 正方形 ($m = n$) のとき

$$p(1) = \min(p(1), p(n^2 - n + 1), p(n), p(n^2)) \quad (2.4)$$

$$\text{かつ} \quad p(n^2 - n + 1) > p(n) \quad (2.5)$$

を満足する配置のみを考えることにする. ここで, $p(1, 1) = p(1)$, $p(m, 1) = p(mn - n + 1)$, $p(1, n) = p(n)$, $p(m, n) = p(mn)$ であることから, 上記条件は四隅のセルに置くコンポーネントに関する条件であり, 上記条件を満た

す配置を回転または反転させた配置は、上記条件を満足しないことに注意されたい。また、上記条件を満足する配置を“対称性を排除された配置”と呼ぶことにする。

各コンポーネントを、 $\tau=1, \tau=2, \dots, \tau=mn$ の順で配置するときに、次の定理は“対称性を排除された配置”のみを列挙するときに有用となる。

定理（鈴木他[17]）

各コンポーネントを、 $\tau=1, \tau=2, \dots, \tau=mn$ の順で配置した場合、“対称性を排除された配置”は次の条件を満たす。

(1) 長方形 ($m \neq n$) の場合は、

(a) $\tau=1$ のとき、 $p(\tau) \leq mn-3$

(b) $1 < \tau < n$ のとき、 $\max^{(3)}(B_\tau) > p(1)$

(c) $\tau=n$ のとき、 $p(1) < p(\tau)$

(d) $n < \tau < mn-n+1$ のとき、 $\max^{(2)}(B_\tau) > p(1)$

(e) $\tau=mn-n+1$ のとき、 $p(1) < p(\tau)$

(f) $mn-n+1 < \tau < mn$ のとき、 $\max^{(1)}(B_\tau) > p(1)$

(g) $\tau=mn$ のとき、 $p(1) < p(\tau)$

(2) 正方形 ($m=n$) の場合は、上記条件(a), (b), (f)と(g)に加え、

(c') $\tau=n$ のとき、 $p(1) < p(\tau) \leq n^2-1$

(d') $n < \tau < mn-n+1$ のとき、

$\max^{(2)}(B_\tau) > p(1)$ かつ $\max^{(1)}(B_\tau) > p(n)$

(e') $\tau=n^2-n+1$ のとき、 $p(n) < p(\tau)$

である。

2.2 $m=r, s=2$ における connected-(r,s)-out-of-(m,n):F システムの最適配置問題

はじめに、最適配置問題について定義する。最適配置問題とは、1次元システムである consecutive- k -out-of- n :F システムにおける最適配置問題と同様に、コンポーネント信頼度が同一ではない場合に、コンポーネントをどのように配置すればシステム信頼度が最大となるかという問題

である.

定義

最適配置 π^* は以下の条件を満たす.

$$R((r, s), (m, n); \pi^*) = \max_{\pi \in S_n} \{R((r, s), (m, n); \pi)\} \quad (2.6)$$

“ $m = r$ ” である限定された条件のもとで connected- (r, s) -out-of- $(m, n):F$ システムを考えると、このシステムは 1 次元に帰着させて考えることが可能となる.

次に、“ $m = r, s = 2$ ” である限定された条件のもとで connected- (r, s) -out-of- $(m, n):F$ システムを考えると、このシステムは 1 次元に帰着させて最適配置を求めることが可能となる.

まず、前節 2.1.1 項(i)で述べたように $m = r$ の場合には、そのシステムを consecutive- s -out-of- $n:F$ システムとみなして信頼度を求める問題に帰着することができる. また、 $s = 2$ より connected- (r, s) -out-of- $(m, n):F$ システムを consecutive-2-out-of- $n:F$ システムとしてみなすことができ、このシステムの最適配置を考察する上で、Malon[7]の示す最適配置の定理が適用できるようになり、 $m = r$ における connected- $(r, 2)$ -out-of- $(m, n):F$ システムの最適配置をより効率よく求めることが可能となる. しかし、ただ $m \times n$ 個のコンポーネントの配置を全て列挙($mn!$ 個)させ、システム信頼度が最大となるものを見つけることは効率が良くないということは前節 2.1.1 項と 2.1.2 項からも自明である.

この問題では、最適配置となり得る配置案よりも、最適配置にはなり得ない配置案の方が多く存在することは明らかである. したがって、何らかの工夫を講じて最適配置になり得る配置案だけを考慮し、作成することが必要となる.

そこで、Omura et al. [10] は $m = r, s = 2$ である connected- (r, s) -out-of- $(m, n):F$ システムの最適配置を効率的に算出するための方法を提案した. この方法は、与えられた $m \times n$ 個のコンポーネント故障確率から得られる、列故障確率（以下に定義）の取り得る値（ ${}_{mn}C_m$ 個）に注目し、効率的に Malon[7]の与える最適配置を生成する方法である.

はじめに、以下の記号を定義する.

記号定義

$u = 1, 2, \dots, mnC_m$ に対して,

Q_u : 列故障確率を表す. 列故障確率とは, ある一列に配置されたコンポーネントの故障確率を全て掛け合わせた値. また u は列故障確率のインデックス番号.

$j = 1, 2, \dots, n$ に対して,

$\varphi(j)$: 列 j における列故障確率 Q_u のインデックス番号.

Φ : 1 から n までの自然数で構成される順列. ただし,
 $\Phi = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$, すなわち, 列故障確率のインデックス番号で表されるコンポーネントの配置.

また, Q_u は以下の式を満たす.

$u = 1, 2, \dots, mnC_m$ に対して,

$$Q_u \in \left\{ \prod_{l=1}^m q_{i_l} \mid i_l = 1, 2, \dots, mn \ (l = 1, 2, \dots, m), i_1 > i_2 > \dots > i_m \right\} \quad (2.7)$$

ただし, $Q_1 \geq Q_2 \geq \dots \geq Q_{mnC_m}$ の関係を満たす.

このとき, 以下に示す定理を満たすようにコンポーネントを配置することで, Malon[7]の与える最適配置だけを効率的に得ることができる.

定理 (Omura et al.[10])

最適配置 $\Phi^* \equiv (\varphi^*(1), \varphi^*(2), \dots, \varphi^*(n))$ は以下の式を満たす.

$$(1) \quad 1 \leq \varphi^*(1) \leq mnC_m - n + 1. \quad (2.8)$$

(2) $j = 1, 2, \dots, n$ に対して,

$$\begin{cases} (-1)^j [\varphi^*(j) - \varphi^*(j-1)] \geq |n - 2j + 3|, \\ \quad (n \text{ is even and } \frac{n}{2} + 1 < j.) \\ (-1)^{j+1} [\varphi^*(j) - \varphi^*(j-1)] \geq |n - 2j + 3|, \\ \quad (n \text{ is odd or } j \leq \frac{n}{2} + 1.) \end{cases} \quad (2.9)$$

例えば, $\varphi^*(1) - \varphi^*(2) < (n - 2)$ の時, 残りの $m(n - 2)$ のコンポーネントをどのように配置しても Malon[7]の与える最適配置を得ることはできない. よって, この定理を用いることで早い段階で最適配置になり得るかどうかの判定ができ, 配置の探索数を大幅に減らすことができる.

第3章 最適配置導出方法

本論文で注目する最適配置問題は実行可能解の数が有限な組み合わせ最適化問題であるため、全てのコンポーネント配置について信頼度を求めれば厳密解を求めることができるのは自明である。しかしながら、第2章でも述べたように $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムのコンポーネント配置は全部で $mn!$ 通りあり、それぞれの配置を全て列挙して信頼度を計算するならば、システムを配置する行と列が大きくなると膨大な計算量が必要となり、解を得ることが困難となる。

これまで $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムの最適配置を求めるための研究はほとんどされてきておらず、厳密な最適配置問題の解を求めるアルゴリズムは Omura et al[10] による $m = r, s = 2$ の場合しか提案されていない。

そこで本章では、 $2r > m$ かつ $2s > n$ に限定された場合における $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムについて条件付きの最適配置問題を考察する。また、上記条件における $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムの最適配置の厳密解を効率的に求めるアルゴリズムを提案し、評価を行う。3.1 節ではアルゴリズムの裏付けとなる定理について述べ、3.2 節でアルゴリズムの基本的な考え及び手順について述べる。

3.1 システムの最適配置法則

本論文で提案するアルゴリズムの裏付けとなる定理について述べる．まず，2.1 節で述べたように， $m \neq r$ である $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムは Yamamoto and Miyakawa[12,13]の提案する方法を用いることで信頼度を求めることができる．

また， $2r > m$ かつ $2s > n$ の場合，システムの最小故障範囲である $r \times s$ (以下，極小カットと呼称する) が 2 つ以上生起する場合，必ず故障範囲に重複する部分が生ずる．この複数の極小カットから構成される図形 (位置の集合) の性質に注目し，探索する配置数を減らすことができ，最適配置となり得る配置を効率よく見つける為の定理を考案した．ここで，定理に共通して用いる記号と，定理の証明に用いる記号を定義する．

記号定義

a, b : コンポーネントが配置されている位置 ($a \neq b$) .

T, Z, X_i, X_j : 位置の集合 (以下，範囲と呼称する) を表す．

また，

$$h_r = m - r$$

$$h_s = n - s$$

と定義する．次に，

$i = 1, 2, \dots, (m-r+1)(n-s+1)$ ，に対して，

C_i : システムが故障する最小範囲，または位置の集合．
極小カットと呼称する．

$EC_i^{(\pi)}$: 配置 π の時，極小カット C_i 内のコンポーネント全てが故障する事象．

また，以下の集合を定義する．

$$Y_a = \{i \mid a \in C_i\}, Y_b = \{i \mid b \in C_i\}, Y_{ab} = \{i \mid a, b \in C_i\}$$

加えて， $i = 1, 2, \dots$ に対して以下を定義する．

D_i : 極小カットから構成される図形 (図 3.1) . すなわち位置の集合を表す．

$ED_i^{(\pi)}$: 配置 π の時，図形 D_i 内のコンポーネント全てが故障する

$dom(D_i)$: 図形 D_i を構成する極小カットの生起確率の係数を表す.

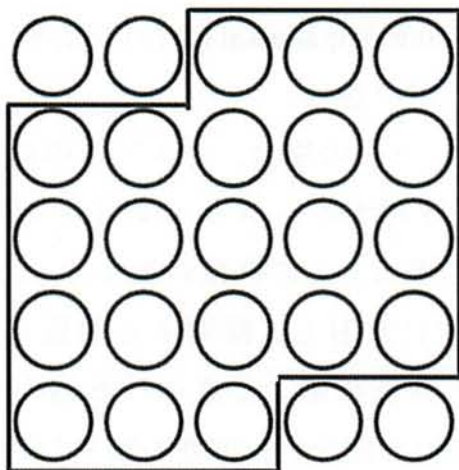


図 3.1 複数の極小カットから構成される図形 D_i

また、一般的にシステム信頼度 R は、

$$R = 1 - \Pr \{ \text{極小カットが一個以上生起する事象} \}$$

で表され、包除定理を用いることにより次の式で表される。

 $x=1,2,\dots$ のとき,

$$\begin{aligned}
 R &= 1 - P_r \left\{ \bigcup_{i=1}^x EC_i \right\} \\
 &= 1 - \sum_j P_r \{EC_j\} + \sum_{j < l} P_r \{EC_j \cap EC_l\} - \dots - (-1)^{x-1} P_r \{EC_j \cap \dots \cap EC_x\}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

またシステムにおいて、極小カットから構成される図形は以下の式で表される.

$$\begin{aligned}
\sum \text{dom}(D_i) P_r \{ED_i^{(\pi)}\} &= P_r \left\{ \bigcup_{i=1}^x EC_i \right\} \\
&= P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i \right) \right\} \\
&= P_r \left\{ \bigcup_{i \in Y_a} EC_i \right\} + P_r \left\{ \bigcup_{i \in Y_b} EC_i \right\} + P_r \left\{ \bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i \right\} \\
&\quad - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i \right) \right\} - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i \right) \right\} \\
&\quad - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i \right) \right\} + P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで、(3.1)式は包除定理より各項に符号が付く．更にこの式では同じシステムの故障状態を重複して計算している．また、生起する極小カットの組み合わせ（図形 D_i ）に対して次の4つの場合を表す記号を定義する．

$X_{ab} = \{i \mid a \in D_i, b \in D_i\}$: 位置 a のコンポーネントを包含し、位置 b のコンポーネントも包含する．

$X_{\bar{a}b} = \{i \mid a \notin D_i, b \in D_i\}$: 位置 a のコンポーネントを包含せず、位置 b のコンポーネントは包含する．

$X_{a\bar{b}} = \{i \mid a \in D_i, b \notin D_i\}$: 位置 a のコンポーネントを包含し、位置 b のコンポーネントは包含しない．

$X_{\bar{a}\bar{b}} = \{i \mid a \notin D_i, b \notin D_i\}$: 位置 a のコンポーネントを包含せず、位置 b のコンポーネントも包含しない．

つまり、配置 π の時のシステム信頼度 $R_{a,b}^{(\pi)}$ は互いに排反である4つの極小カットの組み合わせ（位置 a, b の包含関係を持つ図形）が生起する事象の項で表すことができる．

補助定理

$$R_{a,b}^{(\pi)} = 1 - \sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{(\pi)}\} - \sum_{i \in X_{\bar{a}b}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{(\pi)}\} - \sum_{i \in X_{a\bar{b}}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{(\pi)}\} - \sum_{i \in X_{\bar{a}\bar{b}}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{(\pi)}\} \quad (3.3)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \sum \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{(\pi)}\} &= \sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{\pi}\} + \sum_{i \in X_{\bar{a}b}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{\pi}\} \\ &\quad + \sum_{i \in X_{a\bar{b}}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{\pi}\} + \sum_{i \in X_{\bar{a}\bar{b}}} \text{dom}(D_i)P_r\{ED_i^{\pi}\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

また、(3.2)式及び(3.3)式の各項は上記の位置 a, b の包含関係を持つ図形を複数構成する．つまり、図形 D_i の生起確率は複数の極小カットが生起する確率で表すことができる．

よって、次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i) P_r \{ED_i^{(\pi)}\} &= -P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} + P_r \left\{ \left(\left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \\
&= -P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \times \left[1 - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right) \left| \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \right] \\
&= -P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \times \left[P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right)^c \left| \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) P_r \{ED_i^{(\pi)}\} &= P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \\
&= P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \times \left[1 - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right) \left| \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \right] \\
&= P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \times P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right)^c \left| \left(\bigcup_{i \in Y_a} EC_i^{(\pi)} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) P_r \{ED_i^{(\pi)}\} &= P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \\
&= P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \times \left[1 - P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right) \left| \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \right] \\
&= P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \times P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right)^c \left| \left(\bigcup_{i \in Y_b} EC_i^{(\pi)} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) P_r \{ED_i^{(\pi)}\} = P_r \left\{ \left(\bigcup_{i \in Y_{ab}^-} EC_i^{(\pi)} \right) \right\} \tag{3.8}$$

ここで, (3.4)式が成立することに注意する.

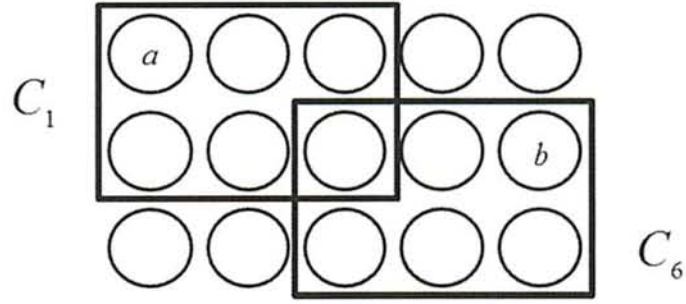


図 3.2 Connected-(2,3)-out-of-(3,5):F システム

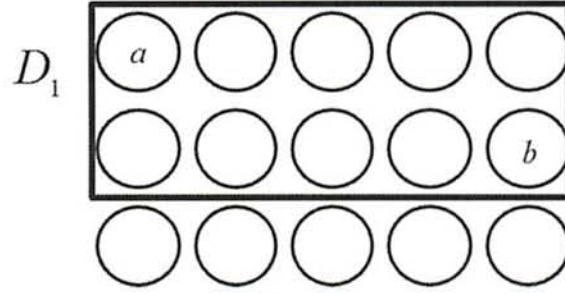


図 3.3 X_{ab} を満たす図形 D_1

具体例として, connected-(2,3)-out-of-(3,5):F システムの場合において考える. このとき, 極小カットは 6 つ存在する.

配置 π を図 3.2 が示す配置と仮定するとき, 各極小カットを構成するコンポーネント配置は以下のように表される.

$$C_1 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3)\}$$

$$C_2 = \{\pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4)\}$$

$$C_3 = \{\pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5)\}$$

$$C_4 = \{\pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(3,1), \pi(3,2), \pi(3,3)\}$$

$$C_5 = \{\pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4)\}$$

$$C_6 = \{\pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

とし, $a = \pi(1,1)$, $b = \pi(2,5)$ とする. このとき, X_{ab} を満たす図形 D_i は 13 個存在する. ここで D_1 を,

$$D_1 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5)\}$$

とすると (図 3.3),

$$ED_1^{(\pi)} = EC_1^{(\pi)} \cap EC_3^{(\pi)} = EC_1^{(\pi)} \cap EC_2^{(\pi)} \cap EC_3^{(\pi)}$$

また, d は D_i を構成する極小カットが奇数である図形の個数, d' は D_i を構成する極小カットが偶数である図形の個数とすると,

包除定理((3.1)式)より, $dom(D_i)$ は,

$$dom(D_i) = d - d' \quad (3.9)$$

と表せる. よって,

$$P_r\{ED_1^{(\pi)}\} \times dom(D_1) = P_r\{ED_1^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

となり, 図形 D_1 は極小カットの生起確率の係数を考慮することにより相殺されるので考える必要がなくなる.

また, D_2 から D_{13} までを,

$$D_2 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,1), \pi(3,2), \pi(3,3)\}$$

$$D_3 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4)\}$$

$$D_4 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_5 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,1), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_6 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,1), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_7 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,1), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4)\}$$

$$D_8 =$$

$$\{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,1), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_9 = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(1,5), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_{10} = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_{11} = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_{12} = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

$$D_{13} = \{\pi(1,1), \pi(1,2), \pi(1,3), \pi(1,4), \pi(2,1), \pi(2,2), \pi(2,3), \pi(2,4), \pi(2,5), \pi(3,2), \pi(3,3), \pi(3,4), \pi(3,5)\}$$

とするとき, X_{ab} を満たす図形 D_i の生起確率は,

$$P_r\{ED_2^{(\pi)}\} \times dom(D_2) = P_r\{ED_2^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

$$P_r\{ED_3^{(\pi)}\} \times dom(D_3) = P_r\{ED_3^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

$$P_r\{ED_4^{(\pi)}\} \times dom(D_4) = P_r\{ED_4^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

$$P_r\{ED_5^{(\pi)}\} \times dom(D_5) = P_r\{ED_5^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

$$P_r\{ED_6^{(\pi)}\} \times dom(D_6) = P_r\{ED_6^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

$$P_r\{ED_7^{(\pi)}\} \times dom(D_7) = P_r\{ED_7^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

$$P_r\{ED_8^{(\pi)}\} \times dom(D_8) = P_r\{ED_8^{(\pi)}\} \times (2-2) = 0$$

$$P_r\{ED_9^{(\pi)}\} \times dom(D_9) = P_r\{ED_9^{(\pi)}\} \times (1-1) = 0$$

$$P_r\{ED_{10}^{(\pi)}\} \times dom(D_{10}) = P_r\{ED_{10}^{(\pi)}\} \times (0-1) = -P_r\{ED_{10}^{(\pi)}\}$$

$$P_r\{ED_{11}^{(\pi)}\} \times dom(D_{11}) = P_r\{ED_{11}^{(\pi)}\} \times (1-0) = P_r\{ED_{11}^{(\pi)}\}$$

$$\begin{aligned}
P_r\{ED_{12}^{(\pi)}\} \times \text{dom}(D_{12}) &= P_r\{ED_{12}^{(\pi)}\} \times (1-0) = P_r\{ED_{12}^{(\pi)}\} \\
P_r\{ED_{13}^{(\pi)}\} \times \text{dom}(D_{13}) &= P_r\{ED_{13}^{(\pi)}\} \times (0-1) = -P_r\{ED_{13}^{(\pi)}\}
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i) P_r\{ED_i^{(\pi)}\} &= -P_r\{ED_{10}^{(\pi)}\} + P_r\{ED_{11}^{(\pi)}\} + P_r\{ED_{12}^{(\pi)}\} - P_r\{ED_{13}^{(\pi)}\} \\
&= -P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} + P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_2^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} \\
&\quad + P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} - P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_2^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} \\
&= -P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} \times \left[1 - P_r\{EC_2^{(\pi)} \cup EC_5^{(\pi)} | EC_1^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\}\right] \\
&= -P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} \times \left[P_r\{(EC_2^{(\pi)} \cup EC_5^{(\pi)})^c | EC_1^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\}\right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

と表すことができる.

$X_{ab}, X_{\bar{a}\bar{b}}, X_{\bar{a}\bar{b}}$ についても同様に,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in X_{\bar{a}\bar{b}}} \text{dom}(D_i) P_r\{ED_i^{(\pi)}\} \\
&= P_r\{EC_3^{(\pi)}\} + P_r\{EC_6^{(\pi)}\} \\
&\quad - P_r\{EC_2^{(\pi)} \cap EC_3^{(\pi)}\} - P_r\{EC_2^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} - P_r\{EC_3^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)}\} - P_r\{EC_3^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} \\
&\quad - P_r\{EC_3^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} - P_r\{EC_5^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} + P_r\{EC_2^{(\pi)} \cap EC_3^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)}\} \\
&\quad + P_r\{EC_2^{(\pi)} \cap EC_3^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} + P_r\{EC_2^{(\pi)} \cap EC_3^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} + P_r\{EC_2^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} \\
&\quad + P_r\{EC_3^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} + P_r\{EC_3^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} - P_r\{EC_2^{(\pi)} \cap EC_3^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} \\
&= P_r\{EC_3^{(\pi)}\} \times P_r\{(EC_2^{(\pi)} \cup EC_4^{(\pi)} \cup EC_5^{(\pi)})^c | EC_3^{(\pi)}\} \\
&\quad + P_r\{EC_6^{(\pi)}\} \times P_r\{(EC_2^{(\pi)} \cup EC_5^{(\pi)})^c | EC_6^{(\pi)}\} \\
&\quad - P_r\{EC_3^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)}\} \times P_r\{(EC_2^{(\pi)} \cup EC_5^{(\pi)})^c | (EC_3^{(\pi)} \cap EC_6^{(\pi)})\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in X_{\bar{a}\bar{b}}} \text{dom}(D_i) P_r\{ED_i^{(\pi)}\} \\
&= P_r\{EC_1^{(\pi)}\} - P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)}\} - P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} \\
&\quad + P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_2^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)}\} + P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_2^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} + P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} \\
&\quad - P_r\{EC_1^{(\pi)} \cap EC_2^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} \\
&= P_r\{EC_1^{(\pi)}\} \times P_r\{(EC_2^{(\pi)} \cup EC_4^{(\pi)} \cup EC_5^{(\pi)})^c | EC_1^{(\pi)}\}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) P_r \{ED_i^{(\pi)}\} \\
&= P_r \{EC_2^{(\pi)}\} + P_r \{EC_4^{(\pi)}\} + P_r \{EC_5^{(\pi)}\} \\
&\quad - P_r \{EC_2^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)}\} - P_r \{EC_2^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} - P_r \{EC_4^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} \\
&\quad + P_r \{EC_2^{(\pi)} \cap EC_4^{(\pi)} \cap EC_5^{(\pi)}\} \\
&= P_r \{EC_2^{(\pi)} \cup EC_4^{(\pi)} \cup EC_5^{(\pi)}\}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

と表すことができる.

(3.10)式, (3.11)式, (3.12)式及び(3.13)式から, システム信頼度は複数の極小カットが生起する確率で表すことができる.

3.1.1 最適配置に影響しない範囲

本論文では, 各コンポーネントを $(1,1), (2,1), \dots, (m,1), (2,1), \dots, (m,n)$ の順で行列に配置する. これは本項で述べる定理 1 を用いやすくするためである. また, 図 3.4, 図 3.5 及び図 3.6 は定理 1 が示す範囲を表している.

定理 1

以下のそれぞれの範囲内のコンポーネントを入れ替えてもシステム信頼度は変化しない.

- (1) $Z = \{(i, j) \mid h_r < i \leq r \text{ かつ } h_s < j \leq s\}.$
- (2) $j = 1, 2, \dots, h_s$ と $j = s+1, s+2, \dots, n$ に対して,
 $X_j = \{(i, j) \mid h_r < i \leq r\}.$
- (3) $i = 1, 2, \dots, h_r$ と $i = r+1, r+2, \dots, m$ に対して,
 $X_i = \{(i, j) \mid h_s < j \leq s\}.$

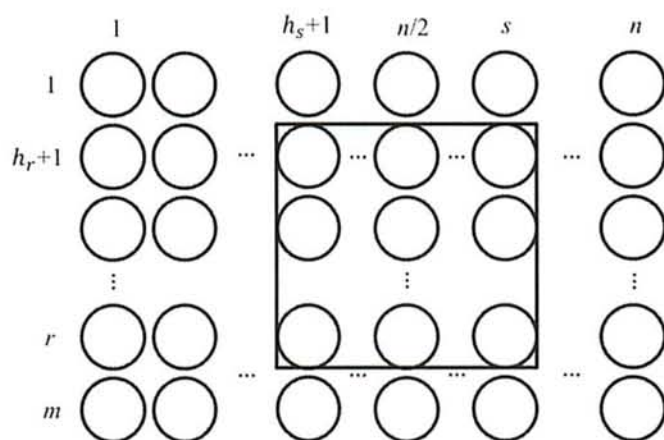


図 3.4 定理 1-(1)が示す範囲

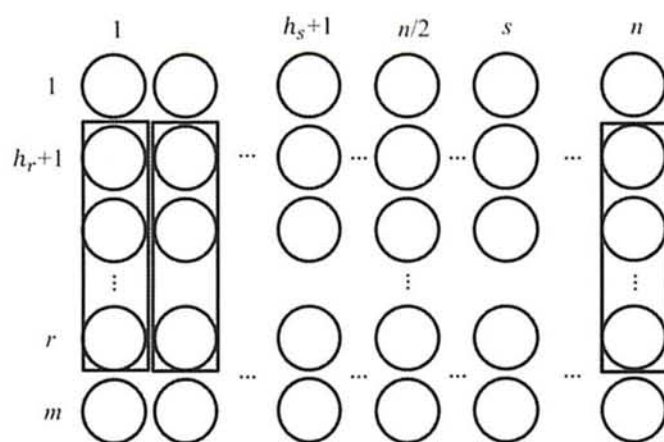


図 3.5 定理 1-(2)が示す範囲

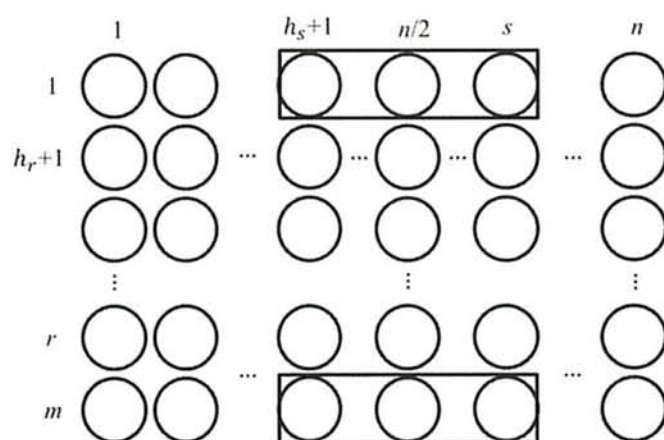


図 3.6 定理 1-(3)が示す範囲

定理 1 より探索する配置の総数は最大で,

$$\frac{1}{2[(m-r)\{(2s-n)!\} + (n-s)\{(2r-m)!\}] + \{(2s-n)(2r-m)\}!}$$

の比率だけ減らすことが可能となる.

定理 1 の証明

定理の証明は, システム内の位置 a のコンポーネントと位置 b のコンポーネントを入れ替えた時のシステム信頼度の差を求めることで行う.

ここで,

π_1 : 位置 a にコンポーネント k , 位置 b にコンポーネント l を配置し, 残りの位置は任意にコンポーネントを配置.

π_2 : 位置 a にコンポーネント l , 位置 b にコンポーネント k を配置し, 残りの配置は π_1 と同じ配置.

とする.

配置 π_1 と配置 π_2 の信頼度の差を考えると,

$$\begin{aligned} R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} &= \sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] + \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] \\ &\quad + \sum_{i \in X_{ab}^+} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] + \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで, 位置 a のコンポーネントが包含され, 位置 b のコンポーネントも包含される図形の全コンポーネント故障の生起確率は位置 a, b のコンポーネントを入れ替える前と後では変化がないため,

$$\sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] = 0 \quad (3.15)$$

となる. また, 位置 a のコンポーネントが包含されず, 位置 b のコンポーネントも包含されない図形の全コンポーネント故障の生起確率も同様に,

$$\sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] = 0 \quad (3.16)$$

となる.

位置 a のコンポーネントが包含され、位置 b のコンポーネントは包含されない図形と、位置 a のコンポーネントが包含されず、位置 b のコンポーネントは包含される図形の全コンポーネント故障の生起確率は、位置 a, b のコンポーネントを入れ替える前と後では異なる値をとる。

このことから、システム信頼度の差は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} &= \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] \\ &\quad + \sum_{i \in X_{a\bar{b}}} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

i. 定理 1-(1)の証明

コンポーネントの配置がシステム信頼度に影響しないということは $R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = 0$ と同義である。

$a, b \in Z$ であるとき、

位置 a のコンポーネントが包含され、位置 b のコンポーネントが包含されない極小カットは存在しない。また、位置 b のコンポーネントが包含され、位置 a のコンポーネントが包含されない極小カットも存在しないので、

$$X_{ab}^- = \phi \text{ かつ } X_{a\bar{b}} = \phi \text{ より、}$$

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = 0$$

(証明終)

ii. 定理 1-(2), 1-(3)の証明

まず、定理 1-(2)の証明を行う。

位置 a, b が属する集合を以下に定義する。

$j = 1, 2, \dots, h_s$ または $j = s+1, s+2, \dots, n$ に対して、

$a, b \in X_j$ とする。

i. と同様に $R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = 0$ を示す。

このとき、位置 a のコンポーネントが包含され、位置 b のコンポーネントが包含されない極小カットは存在しない。また、位置 b のコンポーネントが包含され、位置 a のコンポーネントが包含されない極小カットも存在しないので、

$$X_{ab}^- = \phi \text{ かつ } X_{a\bar{b}} = \phi \text{ より、}$$

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = 0$$

定理 1-(3)は定理 1-(2)の範囲を行から列に変えただけであり、同様に証明をすることができる.

(証明終)

3.1.2 最適配置の必要条件

本項で述べる定理 2 は, システムが最適配置となるコンポーネント配置の必要条件を示している.

定理 2

最適配置 π^* は次の条件を満たす.

(1) $(i, j) \in Z$ に対して,

$$\pi^*(i, j) \geq 2(rn - 2rs + ms). \quad (3.18)$$

(2) (a) $1 \leq j_1 < j_2 \leq h_s$ である j_1 と j_2 に対して,

$$\prod_{i=1}^m q_{\pi^*(i, j_1)} > \prod_{i=1}^m q_{\pi^*(i, j_2)}. \quad (3.19)$$

(b) $s+1 \leq j_2 < j_1 \leq n$ である j_1 と j_2 に対して,

$$\prod_{i=1}^m q_{\pi^*(i, j_1)} > \prod_{i=1}^m q_{\pi^*(i, j_2)}. \quad (3.20)$$

(3) (a) $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ とするとき, $(i, j) \in T$ に対して,

$$\min_{(i, j) \in T} \pi^*(i, j) = \pi^*(1, 1). \quad (3.21)$$

(b) $T = \{(i, j) \mid m-r \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s\}$ とするとき, $(i, j) \in T$ に対して,

$$\min_{(i, j) \in T} \pi^*(i, j) = \pi^*(m, 1). \quad (3.22)$$

(c) $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq r, n-s \leq j \leq n\}$ とするとき, $(i, j) \in T$ に対して,

$$\min_{(i, j) \in T} \pi^*(i, j) = \pi^*(1, n). \quad (3.23)$$

(d) $T = \{(i, j) \mid m-r \leq i \leq m, n-s \leq j \leq n\}$ とするとき, $(i, j) \in T$ に対して,

$$\min_{(i,j) \in T} \pi^*(i,j) = \pi^*(m,n). \quad (3.24)$$

定理 2-(1)は、範囲 Z において故障確率の低いコンポーネントが配置されることを示している。次に定理 2-(2)は、任意の列 j に配置された m 個のコンポーネント故障確率の積で表される値を、列 j における列故障確率（定義は後述）とすると、最適配置となる配置の列故障確率の値は $n/2$ 列目に近いほど低い値をとることを表している。定理 2-(3)は、位置 $(1,1)$ 、位置 $(m,1)$ 、位置 $(1,n)$ 及び位置 (m,n) には、それぞれの位置を含む極小カット内において、故障確率の最も大きいコンポーネントが配置されることを示している。

よって、定理 2 を満たす配置だけを考えることにより、最適配置を効率よく得ることが可能となる。

定理 2 の証明

定理 1 の証明と同様の方法で証明を行う。つまりシステム内の位置 a のコンポーネントと位置 b のコンポーネントを入れ替えた時のシステム信頼度の差をとることで証明を行う。

i. 定理 2-(1)の証明

まず、位置 a, b が属する集合を以下に定義する。

$a \in Z, b \notin Z$ とするとき、常に $R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0$ であることを示す。

このとき、位置 b のコンポーネントが包含され、かつ、位置 a のコンポーネントが包含されない極小カットは存在しないので、

$X_{ab}^- = \phi$ より、

$$\sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] = 0 \quad (3.25)$$

よって、

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{ab}^+} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] \quad (3.26)$$

ここで、 $ED_i^{(\pi)}/a$ を配置が π である図形 $D_i^{(\pi)}$ から位置 a のコンポーネントを除いたコンポーネント群のコンポーネントが全て故障する事象と定義すると、

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i) [q_i \cdot P_r \{ED_i^{(\pi_2)}/a\} - q_k \cdot P_r \{ED_i^{(\pi_1)}/a\}] \quad (3.27)$$

と表せる。

また、 $D_i^{(\pi_2)}$ と $D_i^{(\pi_1)}$ に包含されるコンポーネントは $D_i^{(\pi_2)}$ 内のコンポーネント l と $D_i^{(\pi_1)}$ 内のコンポーネント k 以外（位置 a 以外）は同じコンポーネント群であるので、 $ED_i^{(\pi_2)}/a = ED_i^{(\pi_1)}/a$ より、

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = (q_l - q_k) \sum_{i \in X_{ab}} \text{dom}(D_i) [P_r \{ED_i^{(\pi_1)}/a\}] \quad (3.28)$$

これより、 $q_l \geq q_k$ ならば、

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0 \quad (\text{証明終})$$

ii. 定理 2-(2)(a), (b) の証明

まず以下の記号を定義する。

$1 \leq j_1 < j_2 \leq h$, である j_1 と j_2 に対して、

Q_j : 列 j の $1 \leq i \leq m$ の範囲に配置されたコンポーネント故障確率の積. 列故障確率と呼称する.

ただし、 $Q_j = \prod_{i=1}^m q_{\pi(i,j)}$ とする.

A, B : コンポーネントが配置される位置を表す m 次元ベクトル.

ただし、

$$\mathbf{A} = (\pi(1, j_1), \pi(2, j_1), \dots, \pi(m, j_1)),$$

$$\mathbf{B} = (\pi(1, j_2), \pi(2, j_2), \dots, \pi(m, j_2))$$

とする.

ここで、

π'_1 : 位置 **A** に配置したコンポーネントの列故障確率を Q_{j_1} とし、位置 **B** に配置したコンポーネントの列故障確率を Q_{j_2} とする. 残りの位置は一意にコンポーネントを配置.

π'_2 : 位置 **A** に配置したコンポーネントの列故障確率を Q_{j_2} とし、位

置 **B** に配置したコンポーネントの列故障確率を Q_{j_1} とする. 残りの配置は π'_1 と同じ配置.

とする.

このとき, システム信頼度の差は以下の式で表される.

$$\begin{aligned} R_{A,B}^{(\pi'_1)} - R_{A,B}^{(\pi'_2)} &= \sum_{i \in X_{AB}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi'_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi'_1)}\}] \\ &\quad + \sum_{i \in X_{AB}^+} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi'_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi'_1)}\}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

またこのとき, $2r > m$ かつ $2s > n$ の条件のもとでは, 位置 **A** のコンポーネントが包含され, 位置 **B** のコンポーネントが包含されない極小カットは存在しないので,

$$X_{AB} = \emptyset \quad \text{より,} \quad \sum_{i \in X_{AB}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi'_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi'_1)}\}] = 0$$

よって,

$$R_{A,B}^{(\pi'_1)} - R_{A,B}^{(\pi'_2)} = \sum_{i \in X_{AB}^+} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi'_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi'_1)}\}] \quad (3.30)$$

となる.

ここで, $ED_i^{(\pi')}/\mathbf{B}$ を配置が π' である図形 $D_i^{(\pi')}$ から位置 **B** のコンポーネントを除いたコンポーネント群のコンポーネントが全て故障する事象と定義すると,

$$R_{A,B}^{(\pi'_1)} - R_{A,B}^{(\pi'_2)} = \sum_{i \in X_{AB}^+} \text{dom}(D_i) [Q_{j_1} \cdot P_r\{ED_i^{(\pi'_2)}/\mathbf{B}\} - Q_{j_2} \cdot P_r\{ED_i^{(\pi'_1)}/\mathbf{B}\}] \quad (3.31)$$

と表せる.

また, $D_i^{(\pi'_2)}$ と $D_i^{(\pi'_1)}$ に包含されるコンポーネントは, 位置 **B** に配置されたコンポーネント以外は同じコンポーネント群であるので,

$$ED_i^{(\pi'_2)}/\mathbf{B} = ED_i^{(\pi'_1)}/\mathbf{B} \quad \text{より,}$$

$$R_{A,B}^{(\pi'_1)} - R_{A,B}^{(\pi'_2)} = (Q_{j_1} - Q_{j_2}) \sum_{i \in X_{AB}^+} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi'_1)}/\mathbf{B}\}] \quad (3.32)$$

これより, $1 \leq j_1 < j_2 \leq h$, である j_1 と j_2 に対して $\prod_{i=1}^m q_{\pi(i,j_1)} > \prod_{i=1}^m q_{\pi(i,j_2)}$ であれば, システム信頼度の差は正となる. つまり, 信頼度を高い値にす

る為には、位置 **A** の列故障確率を位置 **B** の列故障確率より高い値にする必要がある。

(b)の場合についても同様に証明できる。

(証明終)

iii. 定理 2-(3)(a)の証明

まず、位置 a, b が属する集合を以下に定義する。

$T = \{(i, j) | 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ とし、 $a = \pi(1, 1), b \in T$ とするとき、常に $R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0$ であることを示す。

このとき、位置 a のコンポーネントが包含され、位置 b のコンポーネントが包含されない極小カットは存在しないので、

$$X_{a\bar{b}} = \emptyset \quad \text{より、} \quad \sum_{i \in X_{a\bar{b}}} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] = 0$$

よって、

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{a\bar{b}}} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] \quad (3.33)$$

ここで、 $ED_i^{(\pi)}/b$ を配置が π である図形 $D_i^{(\pi)}$ から位置 b のコンポーネントを除いたコンポーネント群のコンポーネントが全て故障する事象と定義すると、

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{a\bar{b}}} \text{dom}(D_i) [q_k \cdot P_r\{ED_i^{(\pi_2)}/b\} - q_l \cdot P_r\{ED_i^{(\pi_1)}/b\}] \quad (3.34)$$

と表せる。

また、 $D_i^{(\pi_2)}$ と $D_i^{(\pi_1)}$ に包含されるコンポーネントは $D_i^{(\pi_2)}$ 内のコンポーネント k と $D_i^{(\pi_1)}$ 内のコンポーネント l 以外（位置 b 以外）は同じコンポーネント群であるので、

$$ED_i^{(\pi_2)}/b = ED_i^{(\pi_1)}/b \quad \text{より、}$$

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = (q_k - q_l) \sum_{i \in X_{a\bar{b}}} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_1)}/b\}] \quad (3.35)$$

これより、 $q_k \geq q_l$ ならば、

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0$$

(b), (c)及び(d)の場合においても T の範囲を変えて同様に証明することができる。

(証明終)

3.1.3 最適配置におけるコンポーネント故障確率の値の関係性

最適配置におけるコンポーネント故障確率の値にはある関係性があることが見てとれる．それは、次の 4 つの範囲内に配置されたコンポーネント故障確率は、以下の大小関係を満たすというものである．

定理 3

最適配置 π^* は次の条件を満たす．

- (1) $(i_1, j_1) \in T$ とする．ただし、 $T = \{(i, j) | 1 \leq i \leq h_r, 1 \leq j \leq h_s\}$ である．

この時、

$i_2 = i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, h_r$ に対して、

$$\pi^*(i_1, j_1) > \pi^*(i_2, j_1). \quad (3.36)$$

また、 $j_2 = j_1 + 1, j_1 + 2, \dots, h_s$ に対して、

$$\pi^*(i_1, j_1) > \pi^*(i_1, j_2). \quad (3.37)$$

である．

- (2) $(i_1, j_1) \in T$ とする．ただし、 $T = \{(i, j) | r+1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq h_s\}$ である．

この時、

$i_2 = i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, m$ に対して、

$$\pi^*(i_2, j_1) > \pi^*(i_1, j_1). \quad (3.38)$$

また、 $j_2 = j_1 + 1, j_1 + 2, \dots, h_s$ に対して、

$$\pi^*(i_1, j_1) > \pi^*(i_1, j_2). \quad (3.39)$$

である．

- (3) $(i_1, j_1) \in T$ とする．ただし、 $T = \{(i, j) | 1 \leq i \leq h_r, s+1 \leq j \leq n\}$ である．

この時、

$i_2 = i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, h_r$ に対して、

$$\pi^*(i_1, j_1) > \pi^*(i_2, j_1). \quad (3.40)$$

また、 $j_2 = j_1 + 1, j_1 + 2, \dots, n$ に対して、

$$\pi^*(i_1, j_2) > \pi^*(i_1, j_1). \quad (3.41)$$

である．

- (4) $(i_1, j_1) \in T$ とする．ただし、 $T = \{(i, j) | r+1 \leq i \leq m, s+1 \leq j \leq n\}$ である．

この時,

$i_2 = i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, m$ に対して,

$$\pi^*(i_2, j_1) > \pi^*(i_1, j_1). \quad (3.42)$$

また, $j_2 = j_1 + 1, j_1 + 2, \dots, n$ に対して,

$$\pi^*(i_1, j_2) > \pi^*(i_1, j_1). \quad (3.43)$$

である.

定理 3 の証明

はじめに定理 3-(1)の証明について考える. 定理 1, 定理 2 と同様にコンポーネントを入れ替える前と後の信頼度の差をとることで証明を行う. まず, 位置 a, b を以下に定義する.

$T = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq h_r, 1 \leq j \leq h_s\}$ であり, $(i, j) \in T$ とするとき,

$a = (i, j), b = (i, j + 1)$ とし常に $R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0$ であることを示す.

このとき, 位置 a のコンポーネントが包含され, 位置 b のコンポーネントが包含されない極小カットは存在しないので,

$$X_{ab}^- = \emptyset \quad \text{より,} \quad \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] = 0$$

よって,

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r\{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r\{ED_i^{(\pi_1)}\}] \quad (3.44)$$

ここで, $ED_i^{(\pi)}/b$ を配置が π である図形 $D_i^{(\pi)}$ から位置 b のコンポーネントを除いたコンポーネント群のコンポーネントが全て故障する事象と定義すると,

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [q_k \cdot P_r\{ED_i^{(\pi_2)}/b\} - q_l \cdot P_r\{ED_i^{(\pi_1)}/b\}] \quad (3.45)$$

と表せる.

また, $D_i^{(\pi_2)}$ と $D_i^{(\pi_1)}$ に包含されるコンポーネントは $D_i^{(\pi_2)}$ 内のコンポーネント k と $D_i^{(\pi_1)}$ 内のコンポーネント l 以外 (位置 b 以外) は同じコンポーネント群であるので,

$$ED_i^{(\pi_2)}/b = ED_i^{(\pi_1)}/b \quad \text{より,}$$

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = (q_k - q_l) \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r \{ED_i^{(\pi_1)} / b\}] \quad (3.46)$$

これより, $q_k \geq q_l$ ならば,

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0$$

次に, $T = \{(i, j) | 1 \leq i \leq h_r, 1 \leq j \leq h_s\}$ であり, $(i, j) \in T$ とするとき,
 $a = (i, j)$, $b = (i+1, j)$ とし常に $R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0$ であることを示す.

このとき, 位置 a のコンポーネントが包含され, 位置 b のコンポーネントが包含されない極小カットは存在しないので,

$$X_{ab}^- = \emptyset \quad \text{より,} \quad \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r \{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r \{ED_i^{(\pi_1)}\}] = 0$$

よって,

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r \{ED_i^{(\pi_2)}\} - P_r \{ED_i^{(\pi_1)}\}] \quad (3.47)$$

ここで, $ED_i^{(\pi)} / b$ を配置が π である図形 $D_i^{(\pi)}$ から位置 b のコンポーネントを除いたコンポーネント群のコンポーネントが全て故障する事象と定義すると,

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [q_k \cdot P_r \{ED_i^{(\pi_2)} / b\} - q_l \cdot P_r \{ED_i^{(\pi_1)} / b\}] \quad (3.48)$$

と表せる.

また, $D_i^{(\pi_2)}$ と $D_i^{(\pi_1)}$ に包含されるコンポーネントは $D_i^{(\pi_2)}$ 内のコンポーネント k と $D_i^{(\pi_1)}$ 内のコンポーネント l 以外 (位置 b 以外) は同じコンポーネント群であるので,

$$ED_i^{(\pi_2)} / b = ED_i^{(\pi_1)} / b \quad \text{より,}$$

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} = (q_k - q_l) \sum_{i \in X_{ab}^-} \text{dom}(D_i) [P_r \{ED_i^{(\pi_1)} / b\}] \quad (3.49)$$

これより, $q_k \geq q_l$ ならば,

$$R_{a,b}^{(\pi_1)} - R_{a,b}^{(\pi_2)} \geq 0$$

(2),(3)及び(4)についても同様に証明することができる.

(証明終)

このコンポーネント故障確率の値の大小関係は、各範囲内における 2 つのコンポーネントの大小関係を比較することで一般性を得ている。

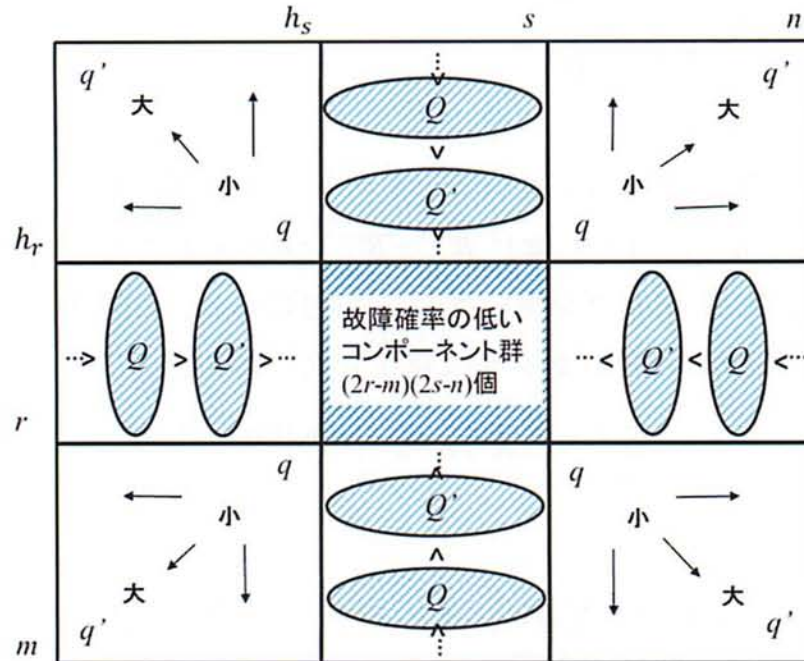


図 3.7 システムの最適配置法則性

ただし、対角線上に配置されたコンポーネント故障確率の大小関係については不明であり、今後さらなる検証が必要である。また、以下に定理 1、定理 2 と定理 3 をまとめたものを示す（図 3.7）（斜線部は、コンポーネントの配置がシステム信頼度に影響を与えない範囲を示している）。

つまり、このコンポーネント故障確率の値の大小関係を用いることで、さらに配置の探索数を減らすことができる。

3.2 解法アルゴリズムの考え方と手順

提案するアルゴリズムの基本的な考え方は分枝限定法（以下、BB と表記する）の考え方に基づく。このとき定理を満足するコンポーネントの配置の列挙処理は、探索木を用いて表すことができる。図 3.8 に connected-(2,2)-out-of-(3,3):F システムの配置の探索木（定理による排除後の一部）を示す。各ノードに表される数値は配置されたコンポーネント番号を表し、First depth（階層 1）のノードは配置 $(\pi(1,1))$ 、Second depth（階層 2）のノードは配置 $(\pi(1,1), \pi(2,1))$ 、Third depth（階層 3）のノード

は配置 $(\pi(1,1), \pi(2,1), \pi(3,1))$, 以下同様で, Ninth depth (階層 9) のノードが配置 $(\pi(1,1), \pi(2,1), \dots, \pi(3,3))$ に対応する. ノードから出るエッジは次に配置するコンポーネント番号に対応し, まだ配置されていない番号, かつ, 定理を満足する番号のみが, 次のノードを示すエッジとなる. この探索木を深さ優先探索 (DFS) で探索すれば, 定理を満足する全ての配置が探索できることになる.

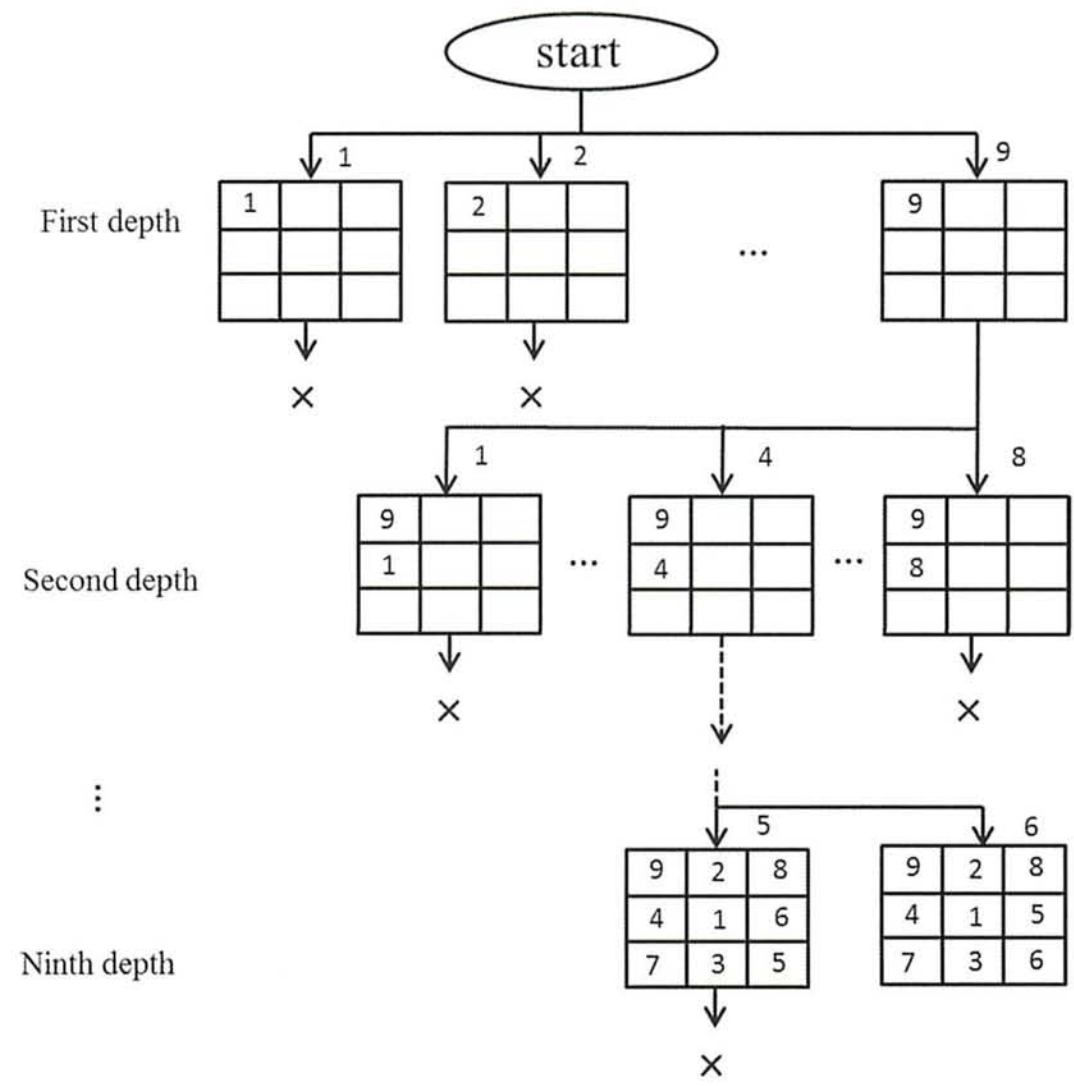


図 3.8 コンポーネント配置探索木

まず, BB 法によりコンポーネントを配置していく過程で, 各ノードが $\pi(i, j)$ (定理 1 が示す範囲) であるとき, $\pi(i, j) > \pi(i+1, j)$ を満足するようにコンポーネントを配置していく. ここで, 無駄な探索の排除 (分枝停止) は,

(1) 求める配置が定理 1 を満足する.

また,

(2) 定理 2 と定理 3 を満足する.

ことに基づいて行う.

以上の考えに基づき, 実際に提案アルゴリズムを用いて最適配置を求める手順を説明する. ここで MAX_REL は求めたシステム信頼度の最大値を記憶する変数とする.

STEP 0 : (初期設定)

MAX_REL 及び i に 0 を代入する. j に 1 を代入する.

STEP 1 :

i を一つ加算する. 定理 (鈴木他[17]) 及び定理 2-(1)を満たすようなコンポーネントを列挙する. また,

$1 \leq i \leq r$ のとき, $\pi(i, j) > \pi(i+1, j)$ を満たすように新たなコンポーネントを列挙する.

$r < i < m$ のとき, $\pi(i, j) < \pi(i+1, j)$ を満たすように新たなコンポーネントを列挙する.

STEP 2 :

$i = m$ かつ $j = 1$ のとき, STEP 3 へ進む. または $j > 1$ かつ $i = m$ のとき, Q_u の値の関係が定理 2-(2)(a)または 2-(2)(b)を満たせば STEP 3 へ進む. そうでない場合は STEP 1 へ戻る.

STEP 3 :

j を一つ加算する.

$1 \leq j \leq s$ のとき, $\pi(i, j) > \pi(i, j+1)$ を満たすように新たなコンポーネントを列挙する.

$s < j < n$ のとき, $\pi(i, j) < \pi(i, j+1)$ を満たすように新たなコンポーネントを列挙する.

$j < n$ ならば i に 0 を代入し STEP 1 へ戻る. $j = n$ ならば STEP 4 へ進む.

STEP 4 :

$\text{MAX_REL} < R((r,s), (m,n); \pi)$ ならば $R((r,s), (m,n); \pi)$ を MAX_REL に代入し, 配置 π を記憶する.

STEP 5 :

MAX_REL である配置 π が最適配置 π^* となる.

第 4 章 提案アルゴリズムの評価

はじめに，提案したアルゴリズムを用いた場合の計算時間のオーダーを評価する．一般にコンポーネントの配置数は $mn!$ 通り存在する．そして， $R((r,s), (m,n); \pi)$ の計算オーダーは $O(r^{n-s}n^rsm)$ となる．そのため本アルゴリズム計算オーダーは最悪の場合 $O(r^{n-s}s(mn)^{mn})$ となり，コンポーネント数 n と m に対して指数オーダーになることは避けられない．

しかしながら，上述の計算量の評価は最悪の場合であり，提案アルゴリズムは配置列挙の際に鈴木他[17]による反転・回転排除を行う定理と前章で提案した定理 1，定理 2 と定理 3 を用いて分枝限定による排除を行って効率化している．そのため，実際の計算効率がどの程度になるかを確認するため，以下の数値実験により検証した．その数値実験の一例を示す．計算時間の検証では，C++言語を用いて実装したアルゴリズムを，Intel(R)Core(TM)i7-3770(3.40GHz) CPU，4.00GB RAM，Microsoft(R)Windows 7 Professional，そしてコンパイラとしてMicrosoft(R)Visual Studio(R)2010 Professional を用いて実行ファイルを生成し，計算時間の測定を行った．

また，本数値実験における比較対象は以下の通りとする．ここで MAX_REL は求めたシステム信頼度の最大値を記憶する変数とする．

提案アルゴリズム：PA

定理 1 と反転・回転排除を行う定理に基づいてコンポーネントを列挙し，MAX_REL を記憶し，定理 2 と定理 3 に基づいて分枝停止を行うことで最適配置を求める．信頼度は Yamamoto and Miyakawa[12]が与えた信頼度算出式を用いて求める．

本論文で提案したアルゴリズムである．

全数列举法：EM

全ての配置を列举し、 $R((r,s),(m,n);\pi)$ を計算させて最適配置を求める。ただし、 $R((r,s),(m,n);\pi)$ は Yamamoto and Miyakawa[12]が与えた信頼度算出式を用いて求める。

数値実験

数値実験において、コンポーネント故障確率は次のように与える。
 $k=1,2,\dots,mn$ に対して、

$$q_k = q_{\max} - \frac{q_{\max} - q_{\min}}{mn - 1} \times (k - 1) \tag{4.1}$$

また、以下の表の最適配置に記されている番号は、コンポーネント番号 k を表す。

表 4.1 Connected-(2,s)-out-of-(3,n):F システムの最適配置算出時間と最適配置

(2,s)-(3,n)	PA	EM	最適配置			
$s = 2$ $n = 3$	0.000s	0.378s		1	8	2
				6	9	5
				3	7	4
$s = 3$ $n = 4$	0.060s	6404.9s	4	8	9	3
			5	11	12	6
			2	7	10	1

表 4.2 Connected-(3,s)-out-of-(4,n):F システムの最適配置算出時間と最適配置

(3,s)-(4,n)	PA	EM	最適配置				
s = 4 n = 5	180.0s	(*)191 $\times 10^{11}h$	4	10	11	13	2
			5	15	17	18	6
			9	16	19	20	7
			3	8	12	14	1
s = 3 n = 5	43.53h	N/A	4	8	9	6	2
			12	15	19	16	11
			14	17	20	18	13
			3	7	10	5	1

(*): 予測時間

表 4.3 Connected-(4,s)-out-of-(5,5):F システムの最適配置算出時間と最適配置

(4,s)-(5,n)	PA	EM	最適配置				
s = 4	7.018h	N/A	4	9	15	16	2
			5	17	18	19	7
			6	20	21	23	8
			13	22	24	25	14
			3	10	11	12	1

表 4.1, 表 4.2 及び表 4.3 より, 実験した範囲内ではあるが, 提案アルゴリズムである PA の最適配置算出時間は EM の最適配置算出時間を全ての場合で上回っていることが確認できる. PA と EM の時間を比較すると, connected-(2,3)-out-of-(3,4):F システムにおいて PA は EM の 9.4×10^{-4} %程度の時間で最適配置を求めることができています. それ以上のシステムサイズになると EM では計算時間がかかり過ぎてしまい, 最適配置を得ることは困難となってしまいます. このことから m, n が大きくなるほど EM に対する効率の良さが顕著に現れている. またこの実験結果からも

わかるように、極小カットのサイズが小さくなってしまうと、最適配置を算出するにはまだ多くの時間が必要となる。

第 5 章 結論

本論文では、最適配置問題の厳密解を高速に算出する方法を提案した。その特徴は、

1. ある範囲内におけるコンポーネントの配置探索数を定理 1 により削減したこと。
2. 定理 2 と定理 3 を用いて分枝停止を行ったこと。

である。提案法の算出時間は最悪の場合コンポーネント数 m, n に対して指数オーダとなることは避けられないが、提案アルゴリズムが分枝限定による排除を行って効率化しているため、実際に数値実験により検証した結果、計算時間が大幅に短縮されることを示した。実験した範囲内ではあるが、本論文で提案した方法は $\text{connected-}(r,s)\text{-out-of-}(m,n):F$ システムの最適配置の厳密解法として有効であり、特に m, n が大きくなるほど効率が良いことが明らかになった。

しかし現状において、本論文で提案した手法は $2r > m, 2s > n$ という条件のもとでの高速算出方法であり、上記条件以外の場合には提案した定理を用いることができないため、反転排除だけを行うことになり、本手法と同じように高速に計算することは困難であると考えられる。この点を改善することが今後の課題である。

参考文献

- [1] Abraham, J.A.: "An improved method for network reliability," *IEEE Transactions on Reliability*, R-28, pp.58-61 (1979)
- [2] Boehme T. K., Kossow A. and Preuss W.: "A generalization of consecutive- k -out-of- $n:F$ system," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.41, No.3, pp.451-457 (1992)
- [3] Chang, G. J. Cui, L. and Hwang, F. K.: "Reliabilities of consecutive- k Systems: Network Theory and Applications," Vol.4, Kluwer Academic Publishers (2000)
- [4] Hwang, F. K.: "Fast Solution for Consecutive- k -out-of- $n : F$ system," *IEEE Transaction on Reliability*, Vol.31, No.5, pp.447-448 (1982)
- [5] Kuo, W. and Zuo, M. J.: "*Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications*," John Wiley & Sons Inc. (2002)
- [6] Locks, M.O.: "A minimizing algorithm for sum of disjoint products," *IEEE Transactions on Reliability*, R-36, pp.445-453 (1987)
- [7] Malon, D. M.: "Optimal Consecutive-2-out-of- $n:F$ Component Sequencing," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.33, No.5, pp.414-418 (1984)
- [8] Malon, D. M.: "Optimal Consecutive- k -out-of- $n:F$ Component Sequencing," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.34, No.1, pp.46-49 (1985)
- [9] Salvia, A.A. and Lasher, W.C.: "2-dimensional consecutive- k -out-of- $n:F$ models" *IEEE Transactions on Reliability*, 39, pp.382-385 (1990)
- [10] Toru Omura, Tomoaki Akiba, Xiao Xiao, Hisashi Yamamoto.: "Algorithm for Obtaining Optimal Arrangement of a Connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ System - the case of $m = r$ and $s = 2$ -", *IEICE* , Vol.E98-A, No.10, pp.2018-2024 (2014).
- [11] Wilson, J.M.: "An improved minimizing algorithm for sum of disjoint products," *IEEE Transactions on Reliability*, 39, pp.42-45 (1990)

- [12] Yamamoto, H. and Miyakawa, M.: "Reliability of a linear connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ lattice system," *IEEE Transactions on Reliability*, 44, pp.333-336 (1995)
- [13] Yamamoto, H. and Miyakawa, M.: "Reliability of a circular connected- (r,s) -out-of- $(m,n):F$ lattice system," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 39, pp.389-406 (1996)
- [14] Zuo, M.J. and Way Kou.: "Design and performance analysis of consecutive- k -out-of- n structure," *Naval Research Logistics*, Vol.37, Issue2, pp.203-230
- [15] Zuo, M. J.: "Reliability & design of 2-dimensional consecutive- k -out-of- n system," *IEEE Transactions on Reliability*, 42, pp.488-490 (1993)
- [16] 野口恵一, 佐々木正文, 柳繁, 弓削哲史: "監視範囲を考慮したセンサシステムのシステム信頼度," 電子情報通信学会論文誌, Vol.J79-A, No.8, pp.1444-1453 (1996)
- [17] 山本久志, 鈴木淳, 中村智明: "対称性を利用した設備最適配置問題解法のための分枝限定アルゴリズム," 日本経営工学会論文誌, Vol.55, No.5, pp.294-299 (2004)
- [18] (財)省エネルギーセンター: EDMC/エネルギー・経済統計要覧 (2006)
- [19] 電気事業連合会: 2008 年度電力統計情報, <http://www5.fepc.or.jp/tok-bin/kensaku.cgi>

謝辞

本研究を進めるにあたり、終始熱心にご指導、ご教示いただいた山本久志先生、遠くから時間を割いて本校まで来ていただき、丁寧かつ親切なご指導をいただいた秋葉知昭先生、お忙しい中論文作成にアドバイスを下さった肖霄先生、副査を担当してくださった梶原先生、會田先生に厚く御礼申し上げます。また、様々な面でお世話になった山本研究室の皆様、この場を借りて御礼申し上げます。

皆様、本当にありがとうございました。