

# Hardy 空間を用いた非線形楕円型方程式系の解の正則性

論文著者名 和田 智博

## 1 本文要約

### Bethuel の定理

$H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  は有界な Lipschitz 関数とする. このとき,

$$\Delta u = 2H(u)u_{x_1} \wedge u_{x_2}$$

の任意の弱解  $u \in W^{1,2}(\mathbf{B}, \mathbf{R}^3)$  は  $\mathbf{B} := \{x^2 + y^2 < 1\}$  上のコンパクト部分集合で Hölder 連続となる.

この新しい証明方法を Strzelecki, P[1] が 2 次元の場合に与えました. 特に, この証明方法は Lorentz 空間を用いずに Hardy 空間のみを用いて証明するもので

$$M_p(a, r) \leq \lambda_0 M_p(a, 4r)$$

の不等式の証明を与えることで, この不等式を用いて Hölder 連続の証明を行っていました. さらに,

### 定理 0

$u, H$  を Bethuel の定理を満たすものとする. もしトレース  $\Psi = u|_{\partial \mathbf{B}} : \partial \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}^3$  が連続なら, このとき  $u \in C^0(\overline{\mathbf{B}}, \mathbf{R}^3)$  となる.

この証明についても, 以下の不等式

$$M_p(a, r; u) \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^\mu M_p(a, R, u)$$

の証明を与えることで, 新しい証明を与えていました. [1] の論文のなかで  $n$  次元拡張を行った本論文の主定理も, 2 次元の時と同様に Hardy 空間を用いることで同様の証明方法で成り立つだろうと書かれており, 本論文では実際に主定理に証明を与え成り立つことを確かめていく.

## 主定理

$n > 2$  とし  $H : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  を有界な Lipschitz 関数とする. 全ての  $y \in \mathbf{R}^{n+1}$  は

$$(1 + |y|)|\nabla H(y)| \leq C$$

(これは, Heinz, E[7] で使われている) を満足するとし,  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  を  $C^1$  級の境界をともなう有界領域と仮定する. このとき,

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{n-2} \nabla u) = H(u)u_{x_1} \wedge \cdots \wedge u_{x_n}$$

の全ての弱解  $u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbf{R}^{n+1})$  は  $\Omega$  で局所的に Hölder 連続となる. もしトレース  $u|_{\partial \Omega}$  が連続なら, このとき  $u$  は  $\Omega$  の境界を含めて連続となる.

## 2 導入

### 2.1 概要

我々は曲面方程式

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{n-2}\nabla u) = H(u)u_{x_1} \wedge \cdots \wedge u_{x_n}$$

の任意の弱解  $u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbf{R}^{n+1})$  の正則性を確かめていく. このとき  $H : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  は有界な Lipschitz 関数で  $u$  は  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^{n+1}$  への写像である. ここで,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) \in W^{1,n}(\Omega, \mathbf{R}^{n+1})$  は任意の  $\phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbf{R}^{n+1})$  について

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi H(u) u_{x_1} \wedge \cdots \wedge u_{x_n} dx$$

を満たす限り,  $\operatorname{div}(|\nabla u|^{n-2}\nabla u) = H(u)u_{x_1} \wedge \cdots \wedge u_{x_n}$  の弱解である. ( $\alpha$  は多重指数) さらに, 本論文を紹介していく上で重要な定理とその証明方法をいくつか紹介していく.

#### 2.1.1 Bethuel の定理

$H: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  は有界な Lipschitz 関数とする. このとき,  $\Delta u = 2H(u)u_{x_1} \wedge u_{x_2}$  の任意の弱解  $u \in W^{1,2}(B, \mathbf{R}^3)$  は  $B$  上のコンパクト部分集合で Hölder 連続となる.

#### 2.1.2 定理 0 (Strzelecki, P 2002)

$u, H$  を Bethuel の定理を満たすものとする. もしトレース  $\Psi = u|_{\partial B} : \partial B \rightarrow \mathbf{R}^3$  が連続なら, このとき  $u \in C^0(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$  となる.

[1] の論文より Bethuel の定理は以下の証明の結果を用いることで与えられる.

#### 2.1.3 定理 1.1 (Strzelecki, P 2002)

$\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{4})$ ,  $\lambda_0 \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon := 2 - p \in (0, \varepsilon_0)$ .  $R_0 = R_0(\varepsilon, u) > 0$  があって, 弱解  $u$  の最大値関数  $M_p$  は, 全ての  $a \in B$ ,  $r \leq \frac{1}{4} \min(R_0, 1 - |a|)$  で

$$M_p(a, r) \leq \lambda_0 M_p(a, 4r)$$

の不等式を満足する.

#### 定理 1.1 の証明

$a \in B$ ,  $r \leq \frac{1}{4}(1 - |a|)$  を固定.  $\xi \in C_0^\infty(B(a, 2r))$  は  $B(a, r)$  上  $\xi \equiv 1$ ,  $|\nabla \xi| \leq \frac{2}{r}$  を満たす切断関数である.

$$\tilde{u} = \xi(u - [u]_A)$$

以後  $[u]_A$  は  $A := B(a, 2r) \setminus B(a, r)$  での  $u$  の平均値である.

## 1. テスト関数の選択

$G^k := |\nabla \tilde{u}|^{-\varepsilon} \nabla \tilde{u}^k$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ,  $2 - \varepsilon \leq q \leq \frac{2}{1-\varepsilon}$  とする.

Hodge decomposition より

$$G^k = \nabla v^k + \beta^k$$

ここで  $\beta^k \in L^q(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ ,  $v^k \in W^{1,q}(\mathbf{R}^2)$ ,

$$\int_{B(a,2r)} v^k(x) dx = 0$$

としても一般性を失わない.

全ての  $1 < q \leq \frac{2}{1-\varepsilon}$  について

$$\|\nabla v^k\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} + \|\beta^k\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \leq C \|G^k\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}$$

さらに, Poincaré 不等式より

$$\|G^k\|_{L^q} \leq C \left( \int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)q} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

ここで,  $\phi := (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$  とし,  $\phi^k := \xi v^k$ ,  $k=1,2,3$  を H 曲面方程式のテスト関数とする.  $\nabla \phi$  が  $q_0 = \frac{2}{1-\varepsilon} > 2$  次元で積分可能なとき, Sobolev の埋め込み定理から,  $1 - \frac{2}{q_0} = \varepsilon$  で  $\phi$  は有界で Hölder 連続な関数となる.  $C = C_q$  は  $q$  にのみ依存する. ここで  $q$  が前述の不等式を満たすことより  $[\frac{7}{4}, \frac{8}{3}]$ , でしかない. Riesz-Thorin convexity theorem より  $C = \max(C_{\frac{7}{4}}, C_{\frac{8}{3}})$  とできる. 上記の不等式を満たす  $q$  は  $\varepsilon$  に依らない定数  $C$  によるものと分かる. これより,

$$\|\nabla v^k\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leq C \left( \int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)q} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

となる.

## 2. 補題 1

$\phi = \xi v$  は以下の不等式を満たす.

$$\|\nabla \phi\|_{L^2(B(a,2r))} \leq C r^\varepsilon J_p(a, 2r)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\|\phi\|_{L^\infty(B(a,2r))} \leq C(\varepsilon) r^\varepsilon J_p(a, 2r)^{\frac{p-1}{p}}, C(\varepsilon) \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)$$

補題 1 の証明

$|\nabla \xi| \leq \frac{2}{r}$ ,  $\int_{B(a,2r)} v = 0$  なので, Poincaré 不等式より

$$\|\nabla \phi\|_{L^2(B(a,2r))} \leq \sup |\xi| \|\nabla v\|_{L^2(B(a,2r))} + \frac{C'}{r} \left( \int_{B(a,2r)} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(B(a,2r))}$$

更に Hölder 不等式を,  $\frac{p'}{2} = \frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}, (\frac{p'}{2})' = \frac{2-\varepsilon}{2}$  で用いて

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(B(a,2r))} &\leq C \left( \int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C r^{\frac{2-\varepsilon}{2}} \left( \int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{2-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} \\ &= C r^\varepsilon J_p(a, 2r)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

$|\phi| \leq |v(x)|$  を使う.  $v$ : 平均値が 0, 連続より

$$\|\phi\|_{L^\infty(B(a,2r))} \leq |\text{osc}_{B(a,2r)} v|$$

となる. ここで,  $\text{osc}$  について以下に定義する.

$$\text{osc}_{B(a,2r)} v = \sup_{x \in B(a,2r)} v(x) - \inf_{x \in B(a,2r)} v(x)$$

$\nabla v \in L^q, q_1 = p' = \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} > 2$  を用いた Sobolev の埋め込み定理より

$$\begin{aligned} |\text{osc}_{B(a,2r)} v| &\leq C(\varepsilon) r^{1-\frac{2}{q_1}} \|\nabla v\|_{L^{q_1}(B(a,2r))} \\ &\leq C(\varepsilon) r^{1-\frac{2}{q_1}} \left( \int_{B(a,2r)} |\nabla v|^{\frac{1-\varepsilon}{q_1}} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &= C(\varepsilon) r^\varepsilon J_p(a, 2r)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

### 3. 左辺の評価

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx &= \int_{B(a,2r)} \frac{\partial u^k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi^k}{\partial x_\alpha} dx \\ &= \int_{B(a,2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial x_\alpha} dx \\ &+ \int_{B(a,2r)} \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x_\alpha} v^k - \frac{\partial v^k}{\partial x_\alpha} (u - [u]_A) \right) dx =: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

ここで  $\beta^k = 0$  より

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{B(a,2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial x_\alpha} dx \\ &= \int_{B(a,2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial v^k}{\partial x_\alpha} + \beta_\alpha^k \right) dx \\ &= \int_{B(a,2r)} |\nabla \tilde{u}(x)|^p dx \\ &\geq \int_{B(a,r)} |\nabla u(x)|^p dx \end{aligned}$$

$\nabla \xi$  は  $A$  にのみサポートされているので

$$|I_2| \leq \frac{C}{r} \int_A (|v| |\nabla u| + |\nabla v| |u - [u]_A|) dx$$

となる. この不等式は  $p' = \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}, p = 2-\varepsilon = (1-\varepsilon)p'$  として Hölder の不等式を用い,  $|v|^{p'}, |u - [u]_A|^p$  の積分評価について Poincaré 不等式を用いて得られる. Hodge decomposition より  $\int |\nabla v|^{p'}$  の有界を結論付ける.  $B(a, 2r)$  における部分積分をするために Cauchy の不等式を用いて,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{C}{r} \left[ \left( \int_{B(a, 2r)} |v|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla v|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |u - [u]_A|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\leq C \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla v|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \int_A |\nabla u|^p dx + \frac{1}{8} \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^p dx \end{aligned}$$

$I_1, I_2$  の評価より

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx \geq \int_{B(a, r)} |\nabla u|^p dx - C_0 \int_A |\nabla u|^p dx - \frac{1}{8} \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^p dx$$

$C_0$  は絶対定数である.

#### 4. 右辺の評価

$$-2 \int_{\Omega} H(u) \phi u_{x_1} \wedge u_{x_2} dx$$

この式は, 係数を  $\pm 2$  として線型な組み合わせで

$$J_{lkj} = \int_{\Omega} H(u) \phi^l \det(Du^k, Du^j) dx$$

について,  $(l, j, k)$  を  $(1, 2, 3)$  の順列とする.  $J = J_{123}$  のときを考えていく.

$\omega := H(u) \phi^1$  として

$$|J| = \left| \int_{\mathbf{R}^2} \xi_1(u^2 - [u^2]_{a, 2r}) \det(D\omega, Du^3) dx \right|$$

ここで,  $\xi_1$  は  $B(a, 2r)$  上  $\xi_1 \equiv 1, |\nabla \xi_1| \leq \frac{2}{r}$  を伴う,  $C_0^\infty(B(a, 2r))$  級関数である. この積分を有界にするために, Coifman, Lions, Meyer, Semmes の Hardy 空間の双対性と有界平均振動の有界関数空間を組み合わせたものを用いて,

$$\begin{aligned} |J| &\leq C \|\xi_1(u^2 - [u^2]_{a, 2r})\|_{\text{BMO}(\mathbf{R}^2)} \|\det(D\omega, Du^3)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{R}^2)} \\ &\leq C \|\xi_1(u - [u]_{a, 2r})\|_{\text{BMO}(\mathbf{R}^2)} \|D\omega\|_{L^2(B(a, 2r))} \|\nabla u\|_{L^2(B(a, 2r))} \end{aligned}$$

補題 1 より

$$\begin{aligned}
\|D\omega\|_{L^2(B(a,2r))} &\leq \|H\|_\infty \|\nabla\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \|\phi\|_\infty \|\nabla(H \circ u)\|_{L^2(B(a,2r))} \\
&\leq C(H, \varepsilon) r^\varepsilon (1 + \|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r))}) J_p(a, 2r)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C(H, \varepsilon) r^\varepsilon M_p(a, 4r)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^2 dx \leq 1$$

としても一般性を失わない. これは  $2r \leq R_0$  を満足するときに得られる. ここで  $R_0$  は前述を満たすものとする.

これより,

$$\|\xi_1(u - [u]_{a,2r})\|_{\text{BMO}(\mathbf{R}^2)} \leq C M_p(a, 4r)^{\frac{1}{p}}$$

を主張する. 以上の不等式から

$$2 \left| \int_{\Omega} H(u) \phi u_{x_1} \wedge u_{x_2} dx \right| \leq C_1(H, \varepsilon) r^\varepsilon M_p(a, 4r) \|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r))}$$

## 5. 主張の証明

$f = \xi_1(u - [u]_{a,2r})$  とする. 場合分けで考えていく, もし  $\rho > \frac{r}{2}$  なら,

$$\int_{B(z,\rho)} |f - [f]_{z,\rho}| dx \leq \frac{2}{\pi \rho^2} \int_{B(z,\rho)} |f| dx \leq \frac{8}{\pi r^2} \int_{B(a,3r)} |u - [u]_{a,2r}| dx$$

これは Poincaré 不等式と Hölder 不等式によるもので, 最後の項は  $M_p(a, 3r)^{\frac{1}{p}}$  を超えない.

他方で,  $\rho \leq \frac{r}{2}$  とする.  $B(z, \rho) \subset B(a, 4r)$  とでき,  $f$  は  $B(z, \rho)$  上で 0 となる.

$g = u - [u]_{a,2r}$  とする.  $x \in B(z, \rho)$  で三角不等式を用いて

$$\begin{aligned}
|f(x) - [f]_{z,\rho}| &\leq |\xi_1(x)g(x) - \xi_1(x)[g]_{z,\rho}| + |\xi_1(x)[g]_{z,\rho} - [\xi_1 g]_{z,\rho}| \\
&\leq |g(x) - [g]_{z,\rho}| + \frac{C}{r\rho} \int_{B(z,\rho)} |g(y)| dy
\end{aligned}$$

$|\xi_1(x) - \xi_1(y)| \leq C \frac{|x-y|}{r}$  を用いた.  $\nabla g = \nabla u$  として, Poincaré の不等式と Hölder の不等式を用いると

$$\int_{B(z,\rho)} |g - [g]_{z,\rho}| dx \leq C(\rho^{p-2} \int_{B(z,\rho)} |\nabla g|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq C M_p(a, 4r)^{\frac{1}{p}}$$

続いて, Schwarz, Poincaré, Sobolev, Hölder の不等式をこの順に用いて,

$$\begin{aligned}
\frac{C}{r\rho} \int_{B(z,\rho)} |g(y)| dy &\leq \frac{C}{r} \left( \int_{B(z,\rho)} |g|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C}{r} \left( \int_{B(a,4r)} |u - [u]_{a,2r}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C}{r} \int_{B(a,4r)} |\nabla u| dy \leq C M_p(a, 4r)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

## 6. $\varepsilon_0$ の選び方.

$r^\varepsilon = r^{2-p}$  として

$$J_p(a, r) \leq \frac{1}{4} J_p(a, 2r) + C_0 \left( 2^\varepsilon J_p(a, 2r) - J_p(a, r) \right) + C_1(\varepsilon) M_p(a, 4r) \|\nabla u\|_{L^2(B(a, 2r))}$$

$\varepsilon_0 > 0$  を  $2^{\varepsilon_0} C_0 \leq C_0 + \frac{1}{4}$  を満たすように固定する.  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  を取ってきて

$$(C_0 + 1) J_p(a, r) \leq (C_0 + \frac{1}{2}) J_p(a, 2r) + C_1(\varepsilon) M_p(a, 4r) \|\nabla u\|_{L^2(B(a, 2r))}$$

十分小さい  $R_0(\varepsilon)$  を選んでくる. 全ての  $a \in B, r < \frac{1}{2} R_0(\varepsilon)$  について  $\|\nabla u\|_{L^2(B(a, 2r) \cap B)} \leq (4C_1(\varepsilon))^{-1}$  があって

$$J_p(a, r) \leq \lambda_0 M_p(a, 4r)$$

この時,  $\lambda_0$  は  $\lambda_0 = \frac{C_0 + \frac{3}{4}}{C_0 + 1} < 1$  を満たす.

$B(z, \rho) \subset B(a, r)$  であり,  $B(z, 4\rho) \subset B(a, 4r)$  より

$$J_p(a, r) \leq \lambda_0 M_p(z, 4\rho) \leq \lambda_0 M_p(a, 4r)$$

以上より  $B(z, \rho) \subset B(a, r)$  上での上限が定まった.

□

さらに定理 0 は [1] の論文の証明より以下の結果を用いることで与えられる.

### 2.1.4 定理 1.2 (Strzelecki, P 2002)

$u \in W^{1,2}(B, \mathbf{R}^3)$  とする. ある  $p \leq 2$  と  $\mu$  について

$$M_p(a, r; u) \leq C \left( \frac{r}{R} \right)^\mu M_p(a, R; u)$$

は全ての  $a \in B, 0 < r < R \leq \min(R_0, 1 - |a|)$  で成り立つ. ここで  $R_0$  は正値で固定する. もし, トレース  $\Psi := u|_{\partial B}$  が  $\partial B$  上で連続ならこのとき,  $u \in C^0(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$  となる.

#### 証明

$u(x_1, x_2) = v(\rho, \theta)$  とする.  $y_0 \in \partial B, y_0 = (1, \theta_0)$  とし,  $\xi(\theta) := \Psi(\exp(i\theta))$  とする. ここで  $\omega$  を  $\xi$  の連続率とする.

$$\Sigma_p(\delta) := \sup \{ M_p(a, \delta)^{\frac{1}{p}} : \text{dist}(a, \partial B) \geq \delta \}$$

ここで,

$$M_p(a, r) \leq \text{const} \left( \int_{B(a, r)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}$$

結果として,  $\Sigma(\delta) \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$  となる.  $x = (x_1, x_2) = \rho \exp(i\theta)$  は  $\mathbf{B}$  の内部点である.  $1 - \rho < R_0, 1 - \rho = \delta$  とする.  $0 < \sigma < 2\pi$  について

$$\int_{\theta}^{\theta+\sigma} \int_{1-\delta}^1 |v_r(r, \vartheta)|^2 r dr d\vartheta \leq \int_{\{x; 1-\delta \leq |x| \leq 1\}} |\nabla u|^2 dx =: I(\delta)$$

上式から,

$$\int_{\theta}^{\theta+\sigma} \int_{1-\delta}^1 |v_r(r, \vartheta)|^2 r dr d\vartheta \leq \frac{I(\delta)}{1-\delta}$$

それゆえ正の 1 次元ルベグ測度  $E_{\sigma} \subset (\theta, \theta + \sigma)$  が存在して, 全ての  $\theta_1 \in E_{\sigma}$  で

$$\int_{1-\delta}^1 |v_r(r, \theta_1)|^2 dr \leq \frac{I(\delta)}{\sigma(1-\delta)}, \quad \lim_{r \rightarrow 1-} v(r, \theta_1) = \xi(\theta_1)$$

$\theta_1$  について, Schwarz の不等式から,

$$\begin{aligned} |\xi(\theta_1) - v(\rho, \theta_1)| &= |v(1, \theta_1) - v(\rho, \theta_1)| \\ &\leq \int_{\rho}^1 |v_r(r, \theta_1)| dr \\ &\leq (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\rho}^1 |v_r(r, \theta_1)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sigma} \right) \frac{\sqrt{I(\delta)}}{(1-\delta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$\sigma = \frac{1}{4}\delta$  とする. ある  $x' \in B(x, \frac{1}{2}\delta)$  で

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x')| &\leq C_0 \left( \frac{|x - x'|}{\delta} \right)^r M_p(x, \delta)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_0 \left( \frac{|x - x'|}{\delta} \right)^r \Sigma_p(\delta) \end{aligned}$$

三角不等式より

$$|u(x) - \Psi(y_0)| \leq |u(x) - u(x')| + |u(x') - \Psi(x'/|x'|)| + |\Psi(x'/|x'|) - \Psi(y_0)|$$

この右辺の第 1 項と第 2 項について上記の不等式を与える. 最後に,  $\xi$  と  $\theta_1$  を選んできて

$$\begin{aligned} |\Psi(x'/|x'|)| &= |\xi(\theta_1) - \xi(\theta_0)| \\ &\leq \omega(|\theta_1 - \theta_0|) \\ &\leq \omega(|\theta - \theta_0| + \frac{\delta}{4}) \end{aligned}$$

全ての評価を組み合わせると  $\delta = 1 - \rho$  とすると,

$$|u(x) - \Psi(y_0)| \leq C_0 \Sigma_p(1 - \rho) + 2 \left( \frac{I(1 - \rho)}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} + \omega(|\theta - \theta_0| + \frac{1 - \rho}{4})$$

これより,  $u = \Psi$  である.

□

本論文では上記の二つの証明を応用して主定理を証明していく.



## 2.2 本論文において使用する定義

$p \in (1, 2]$ ,  $a \in B$ ,  $r \leq 1 - |a| \equiv \text{dist}(a, \partial B)$  として

$$J_p(a, r) := \frac{1}{r^{2-p}} \int_{B(a, r)} |\nabla u(y)|^p dy$$

$$M_p(a, r) := \sup_{z \in B(a, r), \rho < r - |a - z|} J_p(z, \rho)$$

と定義する.  $M_p(a, \cdot)$  は  $r$  の単調関数で Hölder 連続であり,

$$M_p(a, r) \leq \pi^{1-\frac{p}{2}} \left( \int_{B(a, r)} |\nabla u(y)|^2 dy \right)^{\frac{p}{2}}$$

より,  $r \rightarrow 0$  で  $M_p(a, r) \rightarrow 0$  となる.

さらに, 高次元化した際に使用する定義として,

$p \in (1, 2]$ ,  $a \in \Omega$ ,  $r \leq 1 - |a| \equiv \text{dist}(a, \partial\Omega)$  として

$$J_p(a, r) := \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(a, r)} |\nabla u(y)|^p dy$$

$$M_p(a, r) := \sup_{z \in B(a, r), \rho < r - |a - z|} J_p(z, \rho)$$

と定義する.  $M_p(a, \cdot)$  は  $r$  の単調関数で Hölder 連続であり,

$$M_p(a, r) \leq \pi^{1-\frac{p}{n}} \left( \int_{B(a, r)} |\nabla u(y)|^n dy \right)^{\frac{p}{n}}$$

より,  $r \rightarrow 0$  で  $M_p(a, r) \rightarrow 0$  となる.

### 2.2.1 Riesz-Thorin convexity theorem

$(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$  および  $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$  を  $\sigma$ -有限測度空間とする.

$1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty, 1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty$  とし,

$$T : L^{p_0}(\mu_1) + L^{p_1}(\mu_1) \rightarrow L^{q_0}(\mu_2) + L^{q_1}(\mu_2)$$

を  $L^{p_0}(\mu_1)(L^{p_1}(\mu_1))$  から  $L^{q_0}(\mu_2)(L^{q_1}(\mu_2))$  への有界線型作用素とする. ここで,  $p_\theta, q_\theta$  は  $0 < \theta < 1, f \in L^{p_0}(\mu_1) \cap L^{p_1}(\mu_1), f \in L^{q_0}(\mu_2) \cap L^{q_1}(\mu_2)$  について

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^\theta, \|f\|_{q_\theta} \leq \|f\|_{q_0}^{1-\theta} \|f\|_{q_1}^\theta$$

を満たすものとする. このとき  $T$  は  $L^{p_\theta}(\mu_1)$  から  $L^{q_\theta}(\mu_2)$  への有界作用素であり, 作用素ノルムに関する次の不等式を満たす:

$$\|T\|_{L^{p_\theta} \rightarrow L^{q_\theta}} \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^\theta$$

### 2.2.2 BMO 関数

$D \subset \mathbf{R}^n, n \geq 2$  上の局所可積分な関数  $f$  が以下を満たすとき BMO 関数という

$$\|f\|_* = \sup_Q |Q|^{-1} \int_Q |f - f_Q| dx < \infty$$

### 2.2.3 Hardy 空間

Hardy 空間とは単位円板あるいは上半平面上のある種の正則関数の空間. 特に, 本論文では以下で定義するものとする.

$$H^1(\mathbf{R}^N) = \{f \in L^1(\mathbf{R}^N) \mid \sup_{t>0} |h_t * f| \in L^1(\mathbf{R}^N)\}$$

ただし,  $h_t = \frac{1}{t^n} h(\frac{\cdot}{t}), h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), h \geq 0, \text{Supp } h \subset B(0, 1)$  とする.

### 2.2.4 Schwarz の不等式

自乗可積分関数  $f, g$  に対して以下が成り立つ.

$$|\int f(x)g(x)dx|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx$$

### 2.2.5 Poincaré の不等式

$p$  は  $1 \leq p < \infty$  を満たすものとし,  $\Omega$  は少なくとも 1 つの境界をもつ部分集合とする, このとき,  $\Omega$  と  $p$  にのみ依存する定数  $C$  で Sobolev 空間  $W_0^{1,p}(\Omega)$  内の全ての関数  $u$  に対して以下が成り立つ.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

### 2.2.6 Sobolev の不等式

$U$  は  $\mathbf{R}^n$  の有界開部分集合で, 境界は  $C^1$  級とする.  $u \in W^{k,p}(U)$  とする,  $k < \frac{n}{p}$  のとき,  $u \in L^q(U)$  ( $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ ) で,  $k, p, n, U$  にのみ依存する定数  $C$  において以下が成り立つ.

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

### 2.2.7 Hölder の不等式

$1 \leq p \leq q \leq \infty$  で,  $f$  が  $L^p, L^q$  に属しているとする. 任意の  $p \leq r \leq q$  に対して  $f$  は  $L^p$  に属し,  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$  なる  $0 \leq \alpha \leq 1$  にたいして以下が成り立つ.

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

### 2.2.8 Coifman, Lions, Meyer, Semmes の定理

スカラー関数  $u$  と,  $\mathbf{R}^N (N \geq 2)$  上のベクトル場  $v$  において, 以下が成り立つ.

$$\begin{cases} \nabla u \in L^2((\mathbf{R}^N)^N), u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbf{R}^N) & N \geq 3 \\ u \in L^q_{loc}(\mathbf{R}^N) \text{ for all } q < \infty & N = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla v \in L^2((\mathbf{R}^N)^{N \times N}), \quad \operatorname{div} v = 0 \\ v \in L^{\frac{2N}{N-2}}((\mathbf{R}^N)^N) & N \geq 3 \\ v \in L^q_{loc}((\mathbf{R}^N)^N) \text{ for all } q < \infty & N = 2 \end{cases}$$

このとき,  $\nabla u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathbf{H}^1(\mathbf{R}^N)$  とする.

### 2.2.9 Hodge decomposition

可微分多様体  $M$  上の任意の微分形式  $\omega$  について, その  $k$ -形式は 3 つの  $L^2$  成分に分解できる

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma \quad (\Delta\gamma = 0)$$

### 2.2.10 補題 2 (Gilbarg, D. Trudinger, N.S)

$\omega$  は非減少関数で区間  $(0, R_0]$  で成り立つとする. 全ての  $R \leq R_0$  について,

$$\omega(\tau R) \leq \gamma\omega(R) + \sigma(R)$$

を満たす. ここで  $\sigma$  は非減少関数,  $0 < \gamma, \tau < 1$ . このとき,  $\mu \in (0, 1)$  と  $R \leq R_0$  について

$$\omega(R) \leq C \left( \left( \frac{R}{R_0} \right)^\alpha \omega(R_0) + \sigma(R^\mu R_0^{1-\mu}) \right)$$

ただし,  $C = C(\gamma, \tau), \alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu)$  は正值な定数である.

以上の証明及び定義を用いて Strzelecki, P の新証明を応用し, 高次元化した主定理の証明の流れを述べていく.

## 3 本論

まず, 主定理の  $u$  が Hölder 連続であることを証明するために, 定理 1.1 を  $n$  次元に拡張した定理 2.1 を証明する.

### 3.1 定理 2.1

$\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{4})$ ,  $\lambda_0 \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon := n - p \in (0, \varepsilon_0)$ .  $R_0 = R_0(\varepsilon, u) > 0$  があって, 弱解  $u$  の最大値関数  $M_p$  は, 全ての  $a \in \Omega$ ,  $r \leq \frac{1}{4} \min(R_0, 1 - |a|)$  で

$$M_p(a, r) \leq \lambda_0 M_p(a, 4r)$$

の不等式を満足する.

#### 証明

$a \in \Omega$ ,  $r \leq \frac{1}{4}(1 - |a|)$  を固定する.  $\xi \in C_0^\infty(B(a, 2r))$  は  $B(a, r)$  上  $\xi \equiv 1$ ,  $|\nabla \xi| \leq \frac{2}{r}$  を満たす切断関数である.

$$\tilde{u} = \xi(u - [u]_A)$$

#### 1. テスト関数の選択

$G^k := |\nabla \tilde{u}|^{-\varepsilon} \nabla \tilde{u}^k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n+1$ )  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ,  $n - \varepsilon \leq q \leq \frac{n}{1-\varepsilon}$  とする.  
Hodge decomposition より

$$G^k = \nabla v^k + \beta^k$$

ここで  $\beta^k \in L^q(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ ,  $v^k \in W^{1,q}(\mathbf{R}^n)$ ,

$$\int_{B(a, 2r)} v^k(x) dx = 0$$

としても一般性を失わない.

全ての  $1 < q \leq \frac{n}{1-\varepsilon}$  について

$$\|\nabla v^k\|_{L^q(\Omega)} + \|\beta^k\|_{(\Omega)} \leq C \|G^k\|_{L^q(\Omega)}$$

さらに, Poincaré 不等式より

$$\|G^k\|_{L^q} \leq C \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)q} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\phi := (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{n+1})$  とし,  $\phi^k := \xi v^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$  を H 曲面方程式のテスト関数とする.  $\nabla \phi$  が  $q_0 = \frac{n}{1-\varepsilon} > n$  次元で積分可能なとき, Sobolev の埋め込み定理から,  $1 - \frac{n}{q_0} = \varepsilon$  で  $\phi$  は有界で Hölder 連続な関数となる.  $C = C_q$  は  $q$  にのみ依存する. ここで  $q$  が前述の不等式を満たすことより  $[\frac{7}{4}, \frac{8}{3}]$  でしかない. Riesz-Thorin convexity theorem より  $C = \max(C_{\frac{7}{4}}, C_{\frac{8}{3}})$  とできる. 上記の不等式を満たす  $q$  は  $\varepsilon$  に依らない定数  $C$  によるものと分かる. これより,

$$\|\nabla v^k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)q} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

## 2. 左辺の評価

$k = 1, 2, \dots, n+1, \alpha = 1, 2, \dots, n$  とする.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx &= \int_{B(a, 2r)} \frac{\partial u^k}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \phi^k}{\partial x_{\alpha}} dx \\ &= \int_{B(a, 2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v^k}{\partial x_{\alpha}} dx \\ &+ \int_{B(a, 2r)} \frac{\partial \xi}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x_{\alpha}} v^k - \frac{\partial v^k}{\partial x_{\alpha}} (u - [u]_A) \right) dx =: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

ここで  $\beta^k = 0$  より

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{B(a, 2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v^k}{\partial x_{\alpha}} dx \\ &= \int_{B(a, 2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial v^k}{\partial x_{\alpha}} + \beta_{\alpha}^k \right) dx \\ &= \int_{B(a, 2r)} |\nabla \tilde{u}(x)|^p dx \\ &\geq \int_{B(a, r)} |\nabla u(x)|^p dx \end{aligned}$$

$\nabla \xi$  は  $A$  にのみサポートされているので

$$|I_2| \leq \frac{C}{r} \int_A (|v| |\nabla u| + |\nabla v| |u - [u]_A|) dx$$

この不等式は  $p' = \frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}, p = n - \varepsilon = (1 - \varepsilon)p'$  として Hölder の不等式を用い,  $|v|^{p'}, |u - [u]_A|^p$  の積分評価について Poincaré 不等式を用いて得られる. Hodge decomposition より  $\int |\nabla v|^{p'}$  の有界を結論付ける.  $B(a, 2r)$  における部分積分をするために Cauchy の不等式を用いて,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{C}{r} \left[ \left( \int_{B(a, 2r)} |v|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla v|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |u - [u]_A|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\leq C \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla v|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left( \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \int_A |\nabla u|^p dx + \frac{1}{8} \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^p dx \end{aligned}$$

$I_1, I_2$  の評価より

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx \geq \int_{B(a, r)} |\nabla u|^p dx - C_0 \int_A |\nabla u|^p dx - \frac{1}{8} \int_{B(a, 2r)} |\nabla u|^p dx$$

$C_0$  は絶対定数.

### 3. 右辺の評価

$$\int_{\Omega} H(u) \phi u_{x_1} \wedge u_{x_2} \wedge \cdots \wedge u_{x_n} dx$$

は線型な組み合わせで

$$J_{a_1 \dots a_{n+1}} = \int_{\Omega} H(u) \phi^{a_1} \det(Du_1^{a_2}, \dots, Du_{n+1}^a) dx$$

について,  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  を  $(1, 2, \dots, n+1)$  の順列とする.  $J = J_{12 \dots n+1}$  のときを考えていく.  
 $\omega := H(u) \phi^1$  として

$$|J| = \left| \int_{\Omega} \xi_1 (u^2 - [u^2]_{a,2r}) \det(D\omega, Du^3, \dots, Du^{n+1}) dx \right|$$

ここで,  $\xi_1$  は  $B(a, 2r)$  上  $\xi_1 \equiv 1, |\nabla \xi_1| \leq \frac{2}{r}$  を伴う,  $C_0^\infty(B(a, 2r))$  級関数である. この積分を有界にするために, Coifman, Lions, Meyer, Semmes の Hardy 空間の双対性と有界平均振動の有界関数空間を組み合わせるものを用いて,

$$\begin{aligned} |J| &\leq C \|\xi_1 (u^2 - [u^2]_{a,2r})\|_{\text{BMO}(\mathbf{R}^n)} \|\det(D\omega, Du^3, \dots, Du^{n+1})\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|\xi_1 (u - [u]_{a,2r})\|_{\text{BMO}(\mathbf{R}^n)} \|D\omega\|_{L^2(B(a,2r))} \|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r))}^{n-1} \end{aligned}$$

補題 1 より

$$\begin{aligned} \|D\omega\|_{L^2(B(a,2r))} &\leq \|H\|_\infty \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_\infty \|\nabla(H \circ u)\|_{L^2(B(a,2r))} \\ &\leq C(H, \varepsilon) r^\varepsilon (1 + \|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r))}) J_p(a, 2r)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C(H, \varepsilon) r^\varepsilon M_p(a, 4r)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

ここで

$$\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^2 dx \leq 1$$

としても一般性を失わない. これは  $2r \leq R_0$  を満足するときに得られる. ここで  $R_0$  は前述を満たすものとする.

これより,

$$\|\xi_1 (u - [u]_{a,2r})\|_{\text{BMO}(\mathbf{R}^n)} \leq C M_p(a, 4r)^{\frac{1}{p}}$$

を主張する. 以上の不等式から

$$2 \left| \int_{\Omega} H(u) \phi u_{x_1} \wedge u_{x_2} \wedge \cdots \wedge u_{x_n} dx \right| \leq C_1(H, \varepsilon) r^\varepsilon M_p(a, 4r) \|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r))}^n$$

#### 4. 主張の証明

$f = \xi_1(u - [u]_{a,2r})$  とする. 場合分けで考えていく, もし  $\rho > \frac{r}{2}$  なら,

$$\int_{B(z,\rho)} |f - [f]_{z,\rho}| dx \leq \frac{2}{\pi\rho^2} \int_{B(z,\rho)} |f| dx \leq \frac{8}{\pi r^2} \int_{B(a,3r)} |u - [u]_{a,2r}| dx$$

これは Poincaré 不等式と Hölder 不等式によるもので, 最後の項は  $M_p(a, 3r)^{\frac{1}{p}}$  を超えない. 他方で,  $\rho \leq \frac{r}{2}$  とする.  $B(z, \rho) \subset B(a, 4r)$  とでき,  $f$  は  $B(z, \rho)$  上で 0 である.  $g = u - [u]_{a,2r}$  とする.  $x \in B(z, \rho)$  で三角不等式を用いて

$$\begin{aligned} |f(x) - [f]_{z,\rho}| &\leq |\xi_1(x)g(x) - \xi_1(x)[g]_{z,\rho}| + |\xi_1(x)[g]_{z,\rho} - [\xi_1 g]_{z,\rho}| \\ &\leq |g(x) - [g]_{z,\rho}| + \frac{C}{r\rho} \int_{B(z,\rho)} |g| dy \end{aligned}$$

$|\xi_1(x) - \xi_1(y)| \leq C \frac{|x-y|}{r}$  を用いた.  $\nabla g = \nabla u$  として, Poincaré の不等式と Hölder の不等式を用いると

$$\int_{B(z,\rho)} |g - [g]_{z,\rho}| dx \leq C(\rho^{p-2} \int_{B(z,\rho)} |\nabla g|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq CM_p(a, 4r)^{\frac{1}{p}}$$

続いて, Schwarz, Poincaré, Sobolev, Hölder の不等式をこの順に用いて,

$$\begin{aligned} \frac{C}{r\rho} \int_{B(z,\rho)} |g| dy &\leq \frac{C}{r} \left( \int_{B(z,\rho)} |g|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{r} \left( \int_{B(a,4r)} |u - [u]_{a,2r}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{r} \int_{B(a,4r)} |\nabla u| dy \leq CM_p(a, 4r)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

#### 5. $\varepsilon_0$ の選び方.

$r^\varepsilon = r^{n-p}$  として,

$$J_p(a, r) \leq \frac{1}{4} J_p(a, 2r) + C_0 \left( 2^\varepsilon J_p(a, 2r) - J_p(a, r) \right) + C_1(\varepsilon) M_p(a, 4r) \|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r))}$$

$\varepsilon_0 > 0$  を  $2^{\varepsilon_0} C_0 \leq C_0 + \frac{1}{4}$  を満たすように固定する.  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  を取ってきて

$$(C_0 + 1) J_p(a, r) \leq (C_0 + \frac{1}{2}) J_p(a, 2r) + C_1(\varepsilon) M_p(a, 4r) \|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r))}$$

十分小さい  $R_0(\varepsilon)$  を選んでくる. 全ての  $a \in B, r < \frac{1}{2} R_0(\varepsilon)$  について

$$\|\nabla u\|_{L^2(B(a,2r) \cap B)} \leq (4C_1(\varepsilon))^{-1}$$

があって

$$J_p(a, r) \leq \lambda_0 M_p(a, 4r)$$

このとき,  $\lambda_0$  は  $\lambda_0 := \frac{C_0 + \frac{3}{4}}{C_0 + 1} < 1$  を満たす.

$B(z, \rho) \subset B(a, r)$  であり,  $B(z, 4\rho) \subset B(a, 4r)$  より

$$J_p(a, r) \leq \lambda_0 M_p(z, 4\rho) \leq \lambda_0 M_p(a, 4r)$$

以上より  $B(z, \rho) \subset B(a, r)$  上での上限が定まった.

□

ここで, 補題 2 より

$$M_p(a, r) \leq \lambda_0^{-1} \left( \frac{r}{R} \right)^\mu M_p(a, R)$$

である. さらに上記の不等式と定理 2.1 を用いることで以下の不等式が与えられる.

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \int_{B(a, \frac{r}{8})} |u(x) - u_{a, \frac{r}{8}}(z)| dz + \int_{B(a, \frac{r}{8})} |u(y) - u_{a, \frac{r}{8}}(z)| dz \\ &\leq C \left( \frac{r}{8} \right)^{p-2} \left( \int_{B(a, \frac{r}{8})} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C M_p(a, r)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left( \frac{|x - y|}{R} \right)^\gamma M_p(a, R)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

これは,  $\gamma$ -次 Hölder 連続性の証明に他ならない.

さらに,  $\Omega$  の境界を含めて  $u$  が連続であることを証明するために定理 1.2 を  $n$  次元に拡張したものを以下に示していく.

### 3.2 定理 2.2

$u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbf{R}^{n+1})$  とする. ある  $p \leq n$  と  $\mu$  について

$$M_p(a, r; u) \leq C \left( \frac{r}{R} \right)^\mu M_p(a, R; u)$$

は全ての  $a \in \Omega, 0 < r < R \leq \min(R_0, 1 - |a|)$  で成り立つ. ここで  $R_0$  は正値で固定する. もし, トレース  $\Psi := u|_{\partial\Omega}$  が  $\partial\Omega$  上で連続ならこのとき,  $u \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^{n+1})$  となる.

**証明**

$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(\rho, y)$  とする.  $y_0 \in \partial\Omega$  とし,  $\xi(y) := \Psi(\exp(iy))$  とする.  $B(a, r)$  についてここで  $\omega$  を  $\xi$  の連続率とする.

$$\Sigma_p(\delta) := \sup\{M_p(a, \delta)^{\frac{1}{p}} : \text{dist}(a, \partial\Omega) \geq \delta\}$$



ここで,

$$M_p(a, r) \leq \text{const} \left( \int_{B(a, r)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}$$

結果として  $\Sigma(\delta) \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$

$1 - \rho < R_0, 1 - \rho = \delta$  とする.

$$\int_{\partial B(y, a)} \int_{1-\delta}^1 |v_r(r, y)|^2 \frac{|y-a|}{r} dr dS(y) \leq \int_{\{x; 1-\delta \leq |x| \leq 1\}} |\nabla u|^2 dx =: I(\delta)$$

このように,

$$\int_{\partial B(y, a)} \int_{1-\delta}^1 |v_r(r, y)|^2 dr dS(y) \leq \frac{I(\delta)}{1-\delta}$$

それゆえ正の  $n$  次元ルベグ測度  $E \subset \partial B(y, a)$  が存在して, 全ての  $y' \in E$  について

$$\int_{1-\delta}^1 |v_r(r, y')|^2 dr \leq \frac{I(\delta)}{|n\alpha(n)a^{n-1}|(1-\delta)}, \lim_{r \rightarrow 1-} v(r, y') = \xi(y')$$

ここで,  $n\alpha(n)$  は  $\mathbf{R}^n$  における単位球  $\partial B(0, 1)$  の表面領域とする.  $y'$  について, Schwarz の不等式から,

$$\begin{aligned} |\xi(y') - v(\rho, y')| &= |v(1, y') - v(\rho, y')| \\ &\leq \int_{\rho}^1 |v_r(r, y')| dr \\ &\leq (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\rho}^1 |v_r(r, y')|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \frac{\delta}{|n\alpha(n)a^{n-1}|} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{I(\delta)}}{(1-\delta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$\sigma = \frac{1}{4}\delta$  とする. ある  $x' \in B(x, \frac{1}{2}\delta)$  で

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x')| &\leq C_0 \left( \frac{|x-x'|}{\delta} \right)^r M_p(x, \delta)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_0 \left( \frac{|x-x'|}{\delta} \right)^r \Sigma_p(\delta) \end{aligned}$$

三角不等式より

$$|u(x) - \Psi(y_0)| \leq |u(x) - u(x')| + |u(x') - \Psi(x'/|x'|)| + |\Psi(x'/|x'|) - \Psi(y_0)|$$

この右辺の第1項と第2項について上記の不等式を与える. 最後に,  $\xi$  と  $y'$  を選んできて,

$$\begin{aligned} |\Psi(x'/|x'|)| &= |\xi(y') - \xi(y_0)| \\ &\leq \omega(|y' - y_0|) \\ &\leq \omega(|y - y_0| + \frac{\delta}{4}) \end{aligned}$$

全ての評価を組み合わせて  $\delta = 1 - \rho$  とすると,

$$|u(x) - \Psi(y_0)| \leq C_0 \Sigma_p(1 - \rho) + 2 \left( \frac{I(1 - \rho)}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} + \omega(|y - y_0| + \frac{1 - \rho}{4})$$

これより,  $u = \Psi$  となる.

□

以上より本論文の主定理は満たされた.

## 謝辞

本論文は首都大学東京理工学研究科数理情報科学, 高桑昇一郎教授並びに澤野嘉宏准教授, 石谷謙介准教授にご指導頂きました。この場を借りてお礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Strzelecki, P  
“A new proof of regularity of weak solutions of the H-surface equation” Springer-Verlag, 2002
- [2] Bethuel, F  
“Unrésulant de régularité pour des solutions de l’équation des surfaces à courbure moyenne prescrite” C.R.Acad. Sci. Paris 314 (1992), 1003-1007
- [3] Lawrence, C. Evans  
“Partial Differential Equations SECOND EDITION” Graduate Studies in Mathematics, 2010
- [4] Coifman, R. Lions, P. L. Meyer, Y. Semmes, S  
“Compensated compactness and Hardy spaces” J.Math.Pures, 1993, 247-286
- [5] Gilbarg, D. Trudinger, N. S  
“Elliptic Partial Differential Equations of Second Order” Springer-Verlag, 1983, 200-212
- [6] Iwaniec, T. Martin, G  
“Quasiregular mappings in even dimensions.” Acta Math, 1993, 29-81
- [7] Heinz, E  
“Ein Regularitätssatz für schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Ph. Klasse, 1975, 1-13