

修士学位論文

題名: ある Machin 型公式の有限性について

指導教授 内田 幸寛 准教授

平成 29 年 1 月 10 日 提出

首都大学東京 大学院
理工学研究科 数理情報科学専攻
学修番号 15878323

氏名 両角 知也

目次

1	序文	3
1.1	研究の背景	3
1.2	主結果の概略	5
2	整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の諸性質	5
3	主結果	6
3.1	補題	6
3.2	$\sqrt{5}$ の有理整数の逆数倍の逆正接関数 2 項の和で, $\pi/2$ の有理整数倍を表す方法	8
4	謝辞	19

記号

本論文を通して用いる記号をまとめておく.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ を自然数全体の集合とする.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ を有理整数全体の集合とする.
- $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$ を非負の有理整数全体の集合とする.
- $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を有理整数全体の集合から 0 を除いた集合とする.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ を有理数全体の集合とする.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ を虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数全体の集合とする.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \setminus \{0\}$ を整数全体の集合から 0 を除いた集合とする.
- $b^e \mid a$ かつ $b^{e+1} \nmid a$ の時, $b^e \parallel a$ と表す.

また, 本論文における逆正接関数 $x = \text{Arctan} y$ の値域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ とする. さらに, 2 章でも注意するが $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の元を整数と呼ぶことから, これと区別するために通常の \mathbb{Z} の元を有理整数と呼ぶことにする.

1 序文

1.1 研究の背景

円周率の計算を行う手段として、逆正接関数の展開公式 $\text{Arctan}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, ($|x| \leq 1$) は早くから使われていた. 例えば x に 1 を代入した Gregory–Leibniz の公式や, x に $1/\sqrt{3}$ を代入した Hally の公式が知られていたが, これらの公式は収束が遅い為, 数値計算には適していない. そこで, 改善策として複数個の逆正接関数を組み合わせて計算する方法が登場する. Machin(John Machin; 1680–1751) は 1706 年に以下の 7 つの公式を発見した.

Machin の公式たち

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{3} \quad (\text{M1})$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\text{Arctan} \frac{1}{2} - \text{Arctan} \frac{1}{7} \quad (\text{M2})$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\text{Arctan} \frac{1}{3} + \text{Arctan} \frac{1}{7} \quad (\text{M3})$$

$$\frac{\pi}{4} = 3\text{Arctan} \frac{1}{4} + \text{Arctan} \frac{5}{99} \quad (\text{M4})$$

$$\frac{\pi}{4} = 3\text{Arctan} \frac{1}{4} + \text{Arctan} \frac{1}{20} + \text{Arctan} \frac{1}{1985} \quad (\text{M5})$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan} \frac{1}{5} - \text{Arctan} \frac{1}{239} \quad (\text{M6})$$

$$\frac{\pi}{4} = 8\text{Arctan} \frac{1}{10} - \text{Arctan} \frac{1}{100} - \text{Arctan} \frac{11}{5637} + \text{Arctan} \frac{10893}{41480222056636} \quad (\text{M7})$$

なお, (M6) がいわゆる Machin の公式として有名である. これらの公式のように, π をいくつかの逆正接関数を使って表した式を, Machin 型公式と呼ぶことにする. 19 世紀の終わりに Størmer(Carl Størmer; 1874–1957) は [12] で, Machin の公式の (M1)–(M3), (M6) のように分子が 1, すなわち有理整数の逆数の 2 つの逆正接関数の和で $\pi/4$ の有理整数倍を表す方法は, その 4 通りしかないという事実を証明した.

Størmer の定理

$$\frac{\pi}{4}k = p\text{Arctan}\frac{1}{a} + q\text{Arctan}\frac{1}{b}$$

(但し, $k \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |a| \neq |b|, p, q \in \mathbb{N}, \gcd(p, q) = 1$)

を満たすものは, 項の順序を除いて Machin が発見した以下の 4 通りだけである.

$$(M1) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3}$$

$$(M3) \quad \frac{\pi}{4} = 2\text{Arctan}\frac{1}{3} + \text{Arctan}\frac{1}{7}$$

$$(M2) \quad \frac{\pi}{4} = 2\text{Arctan}\frac{1}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{7}$$

$$(M6) \quad \frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\frac{1}{5} - \text{Arctan}\frac{1}{239}$$

では Størmer の定理を拡張し, 逆正接関数を 3 項にした時 $\pi/4$ の有理整数倍を表す方法は
何通りあるのだろうか. 2013 年時点では 105 通りあることが知られているが, その有
限性は示されていない. しかしこの仮定を有理数に変えると, 項の数に依らずに無数に多
くの書き換えができることが逆正接関数の加法定理によって示される. そうではあるが,
Størmer の定理のように仮定を制限し 2 つの逆正接関数を使って π を表すという問題は,
可能性が有限個しかないことがしばしばあり, さらに本質的な所で不定方程式の有理整数
解を求めるといふ問題と同等である. そういう意味でも興味深い研究対象と言える. よっ
て, 以降本論文における Machin 型公式は逆正接関数の項が 2 つのものとする. 最近の研
究によると, 2009 年に逆正接関数に黄金比 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ のべき乗を代入した場合の
Machin 型公式の有限性について示した Luca と Stănică[9] による結果がある.

Luca, Stănică の定理

$$\frac{\pi}{4} = a\text{Arctan}(\phi^\kappa) + b\text{Arctan}(\phi^\ell)$$

(但し, $\kappa, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |\kappa| \geq |\ell|, \kappa + \ell \neq 0, a, b \in \mathbb{Q}$)

を満たすものは, 項の順序を除いて以下の 12 通りだけである.

$$(1) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{5}\text{Arctan}(\phi^6) + \frac{2}{5}\text{Arctan}(\phi^2) \quad (7) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(\phi^1) - \text{Arctan}(\phi^{-3})$$

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(\phi^{-6}) + 2\text{Arctan}(\phi^{-2}) \quad (8) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(\phi^3) - \text{Arctan}(\phi^{-1})$$

$$(3) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\text{Arctan}(\phi^2) - \frac{1}{3}\text{Arctan}(\phi^{-6}) \quad (9) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{7}\text{Arctan}(\phi^5) + \frac{3}{7}\text{Arctan}(\phi^3)$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(\phi^6) - 2\text{Arctan}(\phi^{-2}) \quad (10) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(\phi^{-5}) + 3\text{Arctan}(\phi^{-3})$$

$$(5) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}\text{Arctan}(\phi^3) + \frac{1}{3}\text{Arctan}(\phi^1) \quad (11) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{3}{5}\text{Arctan}(\phi^3) - \frac{1}{5}\text{Arctan}(\phi^{-5})$$

$$(6) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(\phi^{-3}) + \text{Arctan}(\phi^{-1}) \quad (12) \quad \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}(\phi^5) - 3\text{Arctan}(\phi^{-3})$$

なお, 円周率の研究についての歴史的な経緯等を詳しく知りたいのであれば, 中村 [2] 等を

参照してほしい。

1.2 主結果の概略

Størmer の定理は、虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の整数環、すなわち Gauss の整数環上で議論することにより結果を得ることができる。 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の類数は 1 である。虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ も類数が 1 であり、これらもそれぞれの整数環上で同様な議論をすることにより、別の Machin 型公式の有限性を示すことができる。これは Ljunggren[6] を参照してほしい。これらの研究を踏まえ、今回は類数が 2 の虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数環上における Machin 型公式を考えた。本論文で述べる主結果は、次の通りである。

主結果

$$\frac{\pi}{2}k = p\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{a} + q\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{b}$$

(但し, $k \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |a| \neq |b|, p, q \in \mathbb{N}, \gcd(p, q) = 1$)

を満たすものは、項の順序を除いて以下の 10 通りだけである。

- | | |
|--|--|
| (1) $\pi = \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{-7} + 3\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{1}$ | (6) $\frac{\pi}{2} = \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{-20} + 4\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| (2) $\frac{\pi}{2} = 2\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{2} + \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{-20}$ | (7) $\frac{3}{2}\pi = 4\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{1} + \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{20}$ |
| (3) $\pi = \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{1}$ | (8) $\frac{\pi}{2} = 4\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{7} + 3\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{20}$ |
| (4) $\pi = 3\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{7}$ | (9) $\frac{\pi}{2} = \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{1} + \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| (5) $0 = \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{-5}$ | (10) $\frac{\pi}{2} = \text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{7} + 3\text{Arctan}\frac{\sqrt{5}}{5}$ |

類数が 1 の場合との大きな違いは、イデアルを用いて議論を進めていくところにある。2 章では虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の諸性質を、本論文を読むにあたり必要最低限なもののみを簡潔に説明する。3 章では、主結果を導くにあたり必要な補題を 1 つ証明してから、主結果の説明をする。

2 整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の諸性質

この章では、二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の諸性質を、本論文を読むにあたり必要最低限なもののみを簡潔に説明する。詳しい証明等を知りたいのであれば、青木 [1] 等を参照してほしい。

- ・ 虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の部分集合 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数環といい, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の元を $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数という.
- ・ $z = x + y\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に対して $\bar{z} = x - y\sqrt{-5}$ とおき, これを z の共役という.
- ・ $z = x + y\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に対して, $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})/\mathbb{Q}}(z) = z \cdot \bar{z} = x^2 + 5y^2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を z のノルムという.
- ・ $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})/\mathbb{Q}}(\epsilon) = 1$ なる $\epsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ を, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の単数という. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の単数は ± 1 である.
- ・ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のイデアル J に対して, $\bar{J} = \{\bar{z} \mid z \in J\}$ とおく時, \bar{J} は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のイデアルであり, J の共役イデアルという.
- ・ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のイデアル $J \neq (0)$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $J\bar{J} = (n)$ となる. この $n \in \mathbb{N}$ を J のノルムといい, $N(J)$ で表す.
- ・ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の単項イデアル $J = (z)$, $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に対して, $N(J) = N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})/\mathbb{Q}}(z)$ である.
- ・ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のイデアル J_1, J_2 に対して, $N(J_1 J_2) = N(J_1) N(J_2)$ である.
- ・ (0) と (1) 以外の $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の任意のイデアルは, 素イデアルの積に順序を除いて一意的に分解できる. (素イデアル分解の一意性).

3 主結果

3.1 補題

まず, 主結果を導くにあたり必要な補題を証明する.

補題 3.1. $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に対して, 以下は同値である.

(1) ある自然数 n に対し, z^n は有理整数である.

(2) ある有理整数 v , 非負の有理整数 k が存在して, $z = (\sqrt{-5})^k v$ と書ける.

証明. $z = 0$ の時は明らかであるので, 以下 $z \neq 0$ とする.

(1) \Leftrightarrow (2) z は元々有理整数か, 2 乗すれば有理整数になるので明らかである.

(1) \Rightarrow (2) $z^n = m \in \mathbb{Z}$ とし, $z = x + y\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \setminus \{0\}$ と書く. z が単数ならば明らかなので, 以下 z は単数でないものとする. 今 $z^n = m \in \mathbb{Z}$ より $z^n = \bar{z}^n = (\bar{z})^n$ なの

で, $(z/\bar{z})^n = 1$ である. $\zeta = z/\bar{z}$ とおくと ζ は 1 の n 乗根であり, $\zeta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ である. また,

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})/\mathbb{Q}}(\zeta) = \zeta \cdot \bar{\zeta} = \frac{z}{\bar{z}} \cdot \frac{\bar{z}}{z} = 1$$

なので, ζ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の単数である. すなわち, $\zeta = \pm 1$ である.

・ $\zeta = 1$ の時,

$$\frac{z}{\bar{z}} = 1 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow x + y\sqrt{-5} = x - y\sqrt{-5}.$$

よって $y = 0$ なので, $z = x$ である.

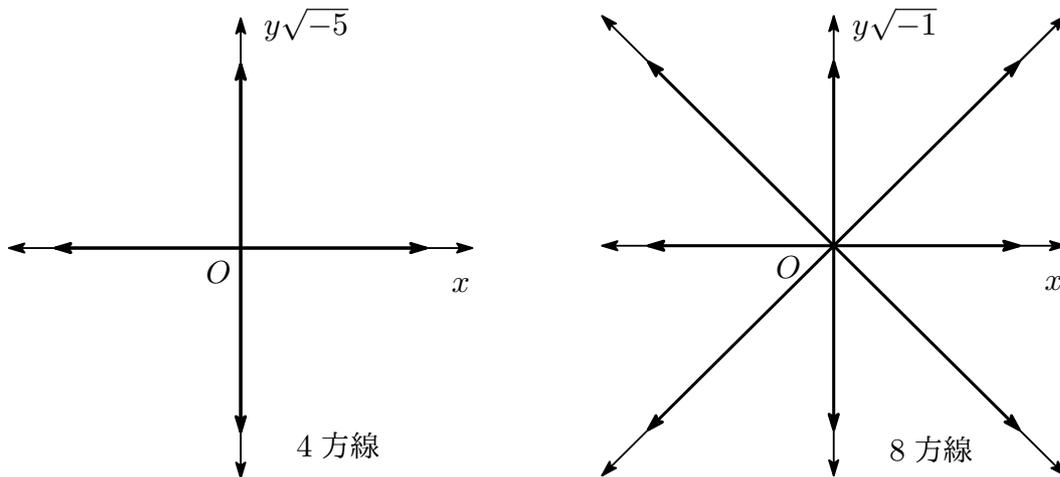
・ $\zeta = -1$ の時,

$$\frac{z}{\bar{z}} = -1 \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow x + y\sqrt{-5} = -x + y\sqrt{-5}.$$

よって $x = 0$ なので, $z = y\sqrt{-5}$ である.

以上より, z はある有理整数 v , 非負の有理整数 k を用いて, $z = (\sqrt{-5})^k v$ と書ける. \square

今示した補題は, z^n が有理整数ならば z は下左図の矢印上にあるということを行っている. つまり z の偏角 $\arg z$ は, $\pi/2$ の有理整数倍である. この図を, 4 方線と名付けておく. なお, この図は Calcut[3] の論文中において Størmer の定理を再考する際に用いていた図 (8 方線) の類似となっている.



この補題を用い, $\sqrt{5}$ の有理数倍の逆正接関数の有理整数倍を有限個足し合わせて, π の有理数倍を表す方法を調べる. すなわち,

$$\frac{k\pi}{n} = \sum_{j=1}^l m_j \operatorname{Arctan} \left(\frac{b_j \sqrt{5}}{a_j} \right) \quad (1)$$

という式である. ただし, 全ての j に対して $n, a_j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}, m_j, b_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ で $|b_j/a_j|$ は互いに異なるものとし, $\gcd(n, k) = \gcd(m_1, \dots, m_l) = \gcd(a_j, b_j) = 1$ と仮定する. この時, 次の系が成り立つ.

系 等式 (1) が仮定も含めて成り立つ時, ある有理整数 h が存在し, $\frac{k\pi}{n} = h \cdot \frac{\pi}{2}$ となる.

証明. 2π の有理整数倍の違いを同一視して,

$$\begin{aligned} \frac{k\pi}{n} &= \sum_{j=1}^l m_j \operatorname{Arctan} \left(\frac{b_j \sqrt{5}}{a_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^l m_j \arg (a_j + b_j \sqrt{-5}) = \sum_{j=1}^l \arg (a_j + b_j \sqrt{-5})^{m_j} \\ &= \arg \left\{ \prod_{j=1}^l (a_j + b_j \sqrt{-5})^{m_j} \right\}. \end{aligned}$$

$z = \prod_{j=1}^l (a_j + b_j \sqrt{-5})^{m_j}$ とおくと上式から, $k\pi = n \arg z = \arg z^n$ と変形できる. 従って, $z^n \in \mathbb{Z}$ である. よって補題 3.1 より, $k\pi/n = \arg z$ は $\pi/2$ の有理整数倍である. \square

3.2 $\sqrt{5}$ の有理整数の逆数倍の逆正接関数 2 項の和で, $\pi/2$ の有理整数倍を表す方法

この節では, 次の Machin 型公式について考察する.

$$\frac{\pi}{2}k = p \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{a} + q \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{b}. \quad (2)$$

但し, $k \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |a| \neq |b|, p, q \in \mathbb{N}, \gcd(p, q) = 1$ と仮定する.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}k &= p \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{a} + q \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{b} \\ &= p \arg (a + \sqrt{-5}) + q \arg (b + \sqrt{-5}) \\ &= \arg (a + \sqrt{-5})^p + \arg (b + \sqrt{-5})^q \\ &= \arg \left\{ (a + \sqrt{-5})^p (b + \sqrt{-5})^q \right\}. \end{aligned}$$

$z = (a + \sqrt{-5})^p (b + \sqrt{-5})^q$ とおくと, z は 4 方線上にあることが分かる. $z = x + y\sqrt{-5}$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) と表すことができるので,

$$\begin{cases} z = x & (\text{実軸}) \text{ の時, } k \text{ は偶数.} & (*) \\ z = y\sqrt{-5} & (\text{虚軸}) \text{ の時, } k \text{ は奇数.} & (**) \end{cases}$$

(*) の時, $x = \bar{x}$ より,

$$(a + \sqrt{-5})^p (b + \sqrt{-5})^q = (a - \sqrt{-5})^p (b - \sqrt{-5})^q.$$

(**) の時, $y\sqrt{-5} + \overline{y\sqrt{-5}} = 0$ より,

$$(a + \sqrt{-5})^p (b + \sqrt{-5})^q = - (a - \sqrt{-5})^p (b - \sqrt{-5})^q.$$

よって,

$$(a + \sqrt{-5})^p (b + \sqrt{-5})^q = \pm (a - \sqrt{-5})^p (b - \sqrt{-5})^q \quad (3)$$

である. $a + \sqrt{-5}$ と $a - \sqrt{-5}$ について,

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{-5}, a - \sqrt{-5}) &= (2\sqrt{-5}, a - \sqrt{-5}), \\ (2\sqrt{-5}) &= (2, 1 + \sqrt{-5})^2 (\sqrt{-5}). \end{aligned}$$

ここで, $(2\sqrt{-5}, a - \sqrt{-5}) = (2, 1 + \sqrt{-5})^e (\sqrt{-5})^f$, $e = 0, 1, 2$, $f = 0, 1$ とする. $e = 2$ の時は $(2, 1 + \sqrt{-5})^2 = (2)$ であり, これは $2 \mid a - \sqrt{-5}$ を意味するが, $\frac{a - \sqrt{-5}}{2} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ より適さない. よって, $e = 0, 1$ である. $b + \sqrt{-5}$ と $b - \sqrt{-5}$ について, $(b + \sqrt{-5}, b - \sqrt{-5})$ にも同様のことが言える.

以上から, $I_a = (a + \sqrt{-5}, a - \sqrt{-5})$, $I_b = (b + \sqrt{-5}, b - \sqrt{-5})$ とした時, 表 1, 表 2 のようになる. (但し, 文字の入れ換えは除く). (3) から,

$$\left(\frac{(a + \sqrt{-5})}{I_a} \right)^p \left(\frac{(b + \sqrt{-5})}{I_b} \right)^q = \left(\frac{(a - \sqrt{-5})}{I_a} \right)^p \left(\frac{(b - \sqrt{-5})}{I_b} \right)^q.$$

但し, (3) は通常方程式であるのに対し, 上式はイデアルの方程式であることに注意する. さて, \mathfrak{p} を $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の素イデアルとし, ある自然数 n に対して $\mathfrak{p}^n \parallel \frac{(a + \sqrt{-5})}{I_a}$ とすると $\mathfrak{p} \nmid \frac{(a - \sqrt{-5})}{I_a}$ であり, このことから $\mathfrak{p} \nmid \frac{(b + \sqrt{-5})}{I_b}$ でもあるので, $\mathfrak{p}^{np} \parallel \left(\frac{(b - \sqrt{-5})}{I_b} \right)^q$ である. よって, $q \mid np$ で $\gcd(p, q) = 1$ より, $q \mid n$ である. そこで $n = qn'$ と書けるので,

$$\mathfrak{p}^{qn'} \parallel \frac{(a + \sqrt{-5})}{I_a}, \mathfrak{p}^{n'p} \parallel \frac{(b - \sqrt{-5})}{I_b}.$$

ゆえに $J = \prod_p p^{n'}$ とおくと,

$$\frac{(a + \sqrt{-5})}{I_a} = J^q, \frac{(b - \sqrt{-5})}{I_b} = J^p.$$

よって,

$$(a + \sqrt{-5}) = I_a J^q, (b - \sqrt{-5}) = I_b J^p \quad (4)$$

であり, 両辺のノルムをとると,

$$a^2 + 5 = N(I_a) N(J)^q, b^2 + 5 = N(I_b) N(J)^p$$

である. 以後, $A = N(J)$ と書く. (但し, $A \in \mathbb{N}$).

表 1 $I_a = I_b$ の場合

$I_a = I_b$	e	f
(1)	0	0
$(\sqrt{-5})$	0	1
$(2, 1 + \sqrt{-5})$	1	0
$(2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$	1	1

表 2 $I_a \neq I_b$ の場合

I_a	e	f	I_b	e'	f'
(1)	0	0	$(\sqrt{-5})$	0	1
(1)	0	0	$(2, 1 + \sqrt{-5})$	1	0
(1)	0	0	$(2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$	1	1
$(\sqrt{-5})$	0	1	$(2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$	1	1
$(2, 1 + \sqrt{-5})$	1	0	$(\sqrt{-5})$	0	1
$(2, 1 + \sqrt{-5})$	1	0	$(2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$	1	1

さて, これ以降いくつもの場合分けを行っていくが, その際に出てくるいくつかの不定方程式の有理整数解について補題としてまとめておく.

補題 3.2. $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, y, n \in \mathbb{N}$ とする.

- (1) 不定方程式 $x^2 + 5 = y^n$ に対し,
- ・ $n = 2$ の時, 有理整数解は $(x, y) = (\pm 2, 3)$ のみである.
 - ・ $n \geq 3$ の時, 有理整数解は存在しない.
- (2) 不定方程式 $x^2 + 5 = 2y^n$ に対し,
- ・ n が偶数の時, 有理整数解は存在しない.
 - ・ $n = 3$ の時, 有理整数解は $(x, y) = (\pm 7, 3)$ のみである.
 - ・ $n \geq 5$ の奇数の時, 有理整数解は存在しない.
- (3) 不定方程式 $5x^2 + 1 = y^n$ に対し,
- ・ $n \geq 3$ の奇数の時, 有理整数解は存在しない.
 - ・ $n = 4$ の時, 有理整数解は $(x, y) = (\pm 4, 3)$ のみである.
- (4) 不定方程式 $5x^2 + 1 = 2y^n$ に対し,
- ・ n が偶数の時, 有理整数解は存在しない.
 - ・ $n \geq 3$ の奇数の時, 有理整数解は存在しない.

これらの結果は, Cohn[4], Ljunggren[5],[8], Nagell[10],[11] によるものである.

◎ $I_a = I_b$ の場合

まず, 各場合分けに共通して不適な組を先にまとめておく. (但し, 文字の入れ換えを除く).

- ・ $(p, q) = (1, 1)$ の時, $|a| \neq |b|$ という仮定より不適である.
- ・ $(p, q) = (1, 2)$ の時, 計算により共に $a, b \in \mathbb{Z}$ となる組み合わせは存在せず, 不適である.

以下, 場合分けを行っていく.

- $I_a = I_b = (1)$ の時, $a^2 + 5 = A^q, b^2 + 5 = A^p$ ($N(I_a) = N(I_b) = 1$) である. 補題 3.2 (1) と $\gcd(p, q) = 1$ より文字の入れ換えを除くと $(p, q) = (1, 1), (1, 2)$ であるが, これらは不適である.
- $I_a = I_b = (\sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = 5A^q, b^2 + 5 = 5A^p$ ($N(I_a) = N(I_b) = 5$) である. そこで $a = 5a', b = 5b' (a', b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ とおくと, $5a'^2 + 1 = A^q, 5b'^2 + 1 = A^p$ に帰着される. 補題 3.2 (3) と $\gcd(p, q) = 1$ より文字の入れ換えを除くと $(p, q) = (1, 1), (1, 2), (1, 4)$ であるが, $(p, q) = (1, 1), (1, 2)$ は不適である. $(p, q) = (1, 4)$ の時, $5a'^2 + 1 = A^4, 5b'^2 + 1 = A$ であり, $(a', A) = (\pm 4, 3)$ である. この時

$5b'^2 + 1 = 3$ となるが, これを満たす $b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は存在しないので, 不適である.

- $I_a = I_b = (2, 1 + \sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = 2A^q, b^2 + 5 = 2A^p$ ($N(I_a) = N(I_b) = 2$) である. 補題 3.2 (2) と $\gcd(p, q) = 1$ より文字の入れ換えを除くと $(p, q) = (1, 1), (1, 3)$ であるが, $(p, q) = (1, 1)$ は不適である. $(p, q) = (1, 3)$ の時, $a^2 + 5 = 2A^3, b^2 + 5 = 2A$ であり, $(a, A) = (\pm 7, 3)$ である. この時 $b = \pm 1$ であるので, $(a, b) = (\pm 7, \pm 1)$ (複号任意) である.

・ $(a, b) = (7, 1)$ を (2) に代入して計算すると,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} + 3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{7\sqrt{5}}{22} \right) \neq \frac{\pi}{2} k$$

であり, これは不適である. $(a, b) = (-7, -1)$ も同様に不適である.

・ $(a, b) = (-7, 1)$ を (2) に代入して計算すると,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-7} + 3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} \equiv 0 \pmod{\pi}$$

であり近似計算を行うと,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-7} + 3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} = \pi$$

となり条件を満たす. $(a, b) = (7, -1)$ も同様である.

以上より, 条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (1, 3), (a, b) = (\pm 7, \mp 1)$ (複号同順) が得られる.

- $I_a = I_b = (2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = 10A^q, b^2 + 5 = 10A^p$ ($N(I_a) = N(I_b) = 10$) である. そこで $a = 5a', b = 5b'$ ($a', b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) とおくと, $5a'^2 + 1 = 2A^q, 5b'^2 + 1 = 2A^p$ に帰着される. 補題 3.2 (4) と $\gcd(p, q) = 1$ より文字の入れ換えを除くと $(p, q) = (1, 1)$ のみであるが, これは不適である.

◎ $I_a \neq I_b$ の場合

まず, 各場合分けに共通して不適な組を先にまとめておく.

- ・ I_a 又は I_b のどちらか一方のみが単項イデアルでなく, $(p, q) = (1, 1)$ の時, (4) から $(a + \sqrt{-5}) = I_a J, (b - \sqrt{-5}) = I_b J$ であるが, それぞれの左辺は単項イデアルであるので右辺も単項イデアルでなければならず, 不適である.

以下, 場合分けを行っていく.

○ $I_a = (1), I_b = (\sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = A^q, b^2 + 5 = 5A^p$ である. 補題 3.2 (1), (3) と $\gcd(p, q) = 1$ より, $(p, q) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (4, 1)$ である.

・ $(p, q) = (1, 1)$ の時, (3) に代入して計算すると,

$$(a + \sqrt{-5})(b + \sqrt{-5}) = \pm (a - \sqrt{-5})(b - \sqrt{-5})$$

$$\Leftrightarrow (ab - 5) + (a + b)\sqrt{-5} = \pm\{(ab - 5) - (a + b)\sqrt{-5}\}.$$

・ z が実軸上にある時,

$$(ab - 5) + (a + b)\sqrt{-5} = (ab - 5) - (a + b)\sqrt{-5}$$

より, $b = -a$ である. $a^2 + 5 = A, b^2 + 5 = 5A$ に代入し A を求めると $A = 0$ となるが, これは $A \neq 0$ に矛盾するので不適である.

・ z が虚軸上にある時,

$$(ab - 5) + (a + b)\sqrt{-5} = -\{(ab - 5) - (a + b)\sqrt{-5}\}$$

より, $ab = 5$ である. よって, $(a, b) = (\pm 1, \pm 5), (\pm 5, \pm 1)$ (複号同順) である.

・ $(a, b) = (\pm 1, \pm 5)$ の時, $a = 1$ を $I_a = (a + \sqrt{-5}, a - \sqrt{-5})$ に代入すると,

$$I_1 = (1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}) = (1 + \sqrt{-5}, 2)$$

となり, 不適である. $a = -1$ も同様に不適である.

・ $(a, b) = (\pm 5, \pm 1)$ の時, 上の議論と同様に不適である.

・ $(p, q) = (1, 2)$ の時, $a^2 + 5 = A^2, b^2 + 5 = 5A$ である. この時 $(A, a) = (3, \pm 2)$ であるが, $A = 3$ を $b^2 + 5 = 5A$ に代入して計算すると, $b^2 = 10$ となり $b \notin \mathbb{Z}$ であるから不適である.

・ $(p, q) = (2, 1)$ の時, (3) に代入すると,

$$(a + \sqrt{-5})^2 (b + \sqrt{-5}) = \pm (a - \sqrt{-5})^2 (b - \sqrt{-5}).$$

・ z が実軸上にある時,

$$(a + \sqrt{-5})^2 (b + \sqrt{-5}) = (a - \sqrt{-5})^2 (b - \sqrt{-5})$$

より, $a(a + 2b) = 5$ である. よって, $(a, b) = (\pm 1, \pm 2), (\pm 5, \mp 2)$ (複号同順) である.

・ $(a, b) = (\pm 1, \pm 2)$ の時, $a^2 + 5 = A, b^2 + 5 = 5A^2$ に代入し A を求めると, $6 = A, 9 = 5A^2$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である.

- ・ $(a, b) = (\pm 5, \mp 2)$ の時, $a^2 + 5 = A, b^2 + 5 = 5A^2$ に代入し A を求めると, $30 = A, 9 = 5A^2$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である.
- ・ z が虚軸上にある時,

$$(a + \sqrt{-5})^2 (b + \sqrt{-5}) = -(a - \sqrt{-5})^2 (b - \sqrt{-5})$$

より, $b = 10a / (a^2 - 5)$ である. $b \in \mathbb{Z}$ となる為には, $|10a| \geq |a^2 - 5|$ でなければならない. この時 a の範囲は, $1 \leq |a| \leq 10$ である. この範囲において a, b がともに有理整数になる組み合わせは, $(a, b) = (\pm 2, \mp 20)$ (複号同順) である. これらを $a^2 + 5 = A, b^2 + 5 = 5A^2$ に代入し A を求めると, $A = 9$ である. $(a, b) = (2, -20)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$2 \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-20} = \frac{\pi}{2}$$

となり, 条件を満たす. $(a, b) = (-2, 20)$ も同様である.

以上より, 条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (2, 1), (a, b) = (\pm 2, \mp 20)$ (複号同順) が得られる.

- ・ $(p, q) = (4, 1)$ の時, $a^2 + 5 = A, b^2 + 5 = 5A^4$ であり, $(A, b) = (3, \pm 20)$ である. この時 $a^2 + 5 = 3$ となるが, これを満たす $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は存在しないので, 不適である.

- $I_a = (1), I_b = (2, 1 + \sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = A^q, b^2 + 5 = 2A^p$ である. 補題 3.2 (1), (2) と $\gcd(p, q) = 1$ より, $(p, q) = (1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)$ であるが, $(p, q) = (1, 1)$ は不適である.

- ・ $(p, q) = (1, 2)$ の時, $a^2 + 5 = A^2, b^2 + 5 = 2A$ であり, $(A, a) = (3, \pm 2)$ である. この時 $b = \pm 1$ であるので, $(a, b) = (\pm 2, \pm 1)$ (複号任意) である.

- ・ $(a, b) = (2, 1)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$1 \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} = \pi$$

となり, 条件を満たす. $(a, b) = (-2, -1)$ も同様である.

- ・ $(a, b) = (-2, 1)$ を (2) に代入して計算すると,

$$1 \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-2} + 2 \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} = \text{Arctan} (4\sqrt{5}) \neq \frac{\pi}{2} k$$

であり, これは不適である. $(a, b) = (2, -1)$ も同様に不適である.

以上より、条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (1, 2), (a, b) = (\pm 2, \pm 1)$ (複号同順) が得られる。

- ・ $(p, q) = (3, 1)$ の時, $a^2 + 5 = A, b^2 + 5 = 2A^3$ であり, $(A, b) = (3, \pm 7)$ である. この時 $a^2 + 5 = 3$ となるが, これを満たす $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は存在しないので不適である.
- ・ $(p, q) = (3, 2)$ の時, $a^2 + 5 = A^2, b^2 + 5 = 2A^3$ であり, $(A, b) = (3, \pm 7)$ である. この時 $a = \pm 2$ であるので, $(a, b) = (\pm 2, \pm 7)$ (複号任意) である.
 - ・ $(a, b) = (2, 7)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} = \pi$$

となり, 条件を満たす. $(a, b) = (-2, -7)$ も同様である.

- ・ $(a, b) = (2, -7)$ を (2) に代入して計算すると,

$$3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-7} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{-308\sqrt{5}}{239} \right) \neq \frac{\pi}{2}k$$

であり, これは不適である. $(a, b) = (-2, 7)$ も同様に不適である.

以上より、条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (3, 2), (a, b) = (\pm 2, \pm 7)$ (複号同順) が得られる。

- $I_a = (1), I_b = (2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = A^q, b^2 + 5 = 10A^p$ である. 補題 **3.2** (1), (4) と $\gcd(p, q) = 1$ より, $(p, q) = (1, 1), (1, 2)$ であるが, $(p, q) = (1, 1)$ は不適である.
 - ・ $(p, q) = (1, 2)$ の時, $a^2 + 5 = A^2, b^2 + 5 = 10A$ であり, $(A, a) = (3, \pm 2)$ である. この時 $b = \pm 5$ であるので, $(a, b) = (\pm 2, \pm 5)$ (複号任意) である.
 - ・ $(a, b) = (2, 5)$ を (2) に代入して計算すると,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5} = \operatorname{Arctan} (-4\sqrt{5}) \neq \frac{\pi}{2}k$$

であり, これは不適である. $(a, b) = (-2, -5)$ も同様に不適である.

- ・ $(a, b) = (2, -5)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-5} = 0$$

となり, 条件を満たす. $(a, b) = (-2, 5)$ も同様である.

以上より、条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (1, 2), (a, b) = (\pm 2, \mp 5)$ (複号同順) が得られる。

○ $I_a = (\sqrt{-5}), I_b = (2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = 5A^q, b^2 + 5 = 10A^p$ である。補題 3.2 (3), (4) と $\gcd(p, q) = 1$ より, $(p, q) = (1, 1), (1, 2), (1, 4)$ であるが, $(p, q) = (1, 1)$ は不適である。

・ $(p, q) = (1, 2)$ の時, $I_a = (1), I_b = (\sqrt{-5})$ における, $(p, q) = (2, 1)$ の時と同様の議論を行う。

・ z が実軸上にある時, $(a, b) = (\pm 2, \pm 1), (\pm 2, \mp 5)$ (複号同順) である。

・ $(a, b) = (\pm 2, \pm 1)$ の時, $a^2 + 5 = 5A^2, b^2 + 5 = 10A$ に代入し A を求めると, $9 = 5A^2, 6 = 10A$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である。

・ $(a, b) = (\pm 2, \mp 5)$ の時, $a^2 + 5 = 5A^2, b^2 + 5 = 10A$ に代入し A を求めると, $9 = 5A^2, 30 = 10A$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である。

・ z が虚軸上にある時, $(a, b) = (\pm 20, \mp 2)$ (複号同順) である。これらを $a^2 + 5 = 5A^2, b^2 + 5 = 10A$ に代入し A を求めると, $405 = 5A^2, 9 = 10A$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である。

・ $(p, q) = (1, 4)$ の時, $a^2 + 5 = 5A^4, b^2 + 5 = 10A$ であり, $(A, a) = (3, \pm 20)$ である。この時 $b = \pm 5$ であるので, $(a, b) = (\pm 20, \pm 5)$ (複号任意) である。

・ $(a, b) = (20, 5)$ を (2) に代入して計算すると,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{20} + 4 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{-79\sqrt{5}}{40} \right) \neq \frac{\pi}{2} k$$

であり, これは不適である。 $(a, b) = (-20, -5)$ も同様に不適である。

・ $(a, b) = (-20, 5)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-20} + 4 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\pi}{2}$$

となり, 条件を満たす。 $(a, b) = (20, -5)$ も同様である。

以上より、条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (1, 4), (a, b) = (\pm 20, \mp 5)$ (複号同順) が得られる。

○ $I_a = (2, 1 + \sqrt{-5}), I_b = (\sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = 2A^q, b^2 + 5 = 5A^p$ である。補題 3.2 (2), (3) と $\gcd(p, q) = 1$ より, $(p, q) = (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)$ であるが, $(p, q) = (1, 1)$ は不適である。

- ・ $(p, q) = (1, 3)$ の時, $a^2 + 5 = 2A^3, b^2 + 5 = 5A$ であり, $(A, a) = (3, \pm 7)$ である. この時 $b^2 + 5 = 15$ となるが, これを満たす $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は存在しないので不適である.
- ・ $(p, q) = (2, 1)$ の時, $I_a = (1), I_b = (\sqrt{-5})$ における, $(p, q) = (2, 1)$ の時と同様の議論を行う.
 - ・ z が実軸上にある時, $(a, b) = (\pm 1, \pm 2), (\pm 5, \mp 2)$ (複号同順) である.
 - ・ $(a, b) = (\pm 1, \pm 2)$ の時, $a^2 + 5 = 2A, b^2 + 5 = 5A^2$ に代入し A を求めると, $6 = 2A, 9 = 5A^2$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である.
 - ・ $(a, b) = (\pm 5, \mp 2)$ の時, $a^2 + 5 = 2A, b^2 + 5 = 5A^2$ に代入し A を求めると, $30 = 2A, 9 = 5A^2$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である.
 - ・ z が虚軸上にある時, $(a, b) = (\pm 2, \mp 20)$ (複号同順) である. これらを $a^2 + 5 = 2A, b^2 + 5 = 5A^2$ に代入し A を求めると, $9 = 2A, 405 = 5A^2$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である.
- ・ $(p, q) = (2, 3)$ の時, $a^2 + 5 = 2A^3, b^2 + 5 = 5A^2$ であり, $(A, a) = (3, \pm 7)$ である. この時 $b^2 + 5 = 45$ であるが, これを満たす $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は存在しないので不適である.
- ・ $(p, q) = (4, 1)$ の時, $a^2 + 5 = 2A, b^2 + 5 = 5A^4$ であり, $(A, b) = (3, \pm 20)$ である. この時 $a = \pm 1$ であるので, $(a, b) = (\pm 1, \pm 20)$ (複号任意) である.
 - ・ $(a, b) = (1, 20)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$4 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} + 1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{20} = \frac{3}{2} \pi$$

となり, 条件を満たす. $(a, b) = (-1, -20)$ も同様である.

- ・ $(a, b) = (1, -20)$ を (2) に代入して計算すると,

$$4 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} + 1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-20} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{79\sqrt{5}}{40} \right) \neq \frac{\pi}{2} k$$

であり, これは不適である. $(a, b) = (-1, 20)$ も同様に不適である.

以上より, 条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (4, 1), (a, b) = (\pm 1, \mp 20)$ (複号同順) が得られる.

- ・ $(p, q) = (4, 3)$ の時, $a^2 + 5 = 2A^3, b^2 + 5 = 5A^4$ であり, $(A, a) = (3, \pm 7)$ である. この時 $b = \pm 20$ であるので, $(a, b) = (\pm 7, \pm 20)$ (複号任意) である.

・ $(a, b) = (7, 20)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$4 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} + 3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{20} = \frac{\pi}{2}$$

となり, 条件を満たす. $(a, b) = (-7, -20)$ も同様である.

・ $(a, b) = (7, -20)$ を (2) に代入して計算すると,

$$4 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} + 3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-20} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{417199\sqrt{5}}{736120} \right) \neq \frac{\pi}{2}k$$

であり, これは不適である. $(a, b) = (-7, 20)$ も同様に不適である.

以上より, 条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (4, 3), (a, b) = (\pm 7, \pm 20)$ (複号同順) が得られる.

○ $I_a = (2, 1 + \sqrt{-5}), I_b = (2, 1 + \sqrt{-5})(\sqrt{-5})$ の時, $a^2 + 5 = 2A^q, b^2 + 5 = 10A^p$ である. 補題 3.2 (2), (4) と $\gcd(p, q) = 1$ より, $(p, q) = (1, 1), (1, 3)$ である.

・ $(p, q) = (1, 1)$ の時, $I_a = (1), I_b = (\sqrt{-5})$ における, $(p, q) = (1, 1)$ の時と同様の議論を行う.

・ z が実軸上にある時, $A \neq 0$ に矛盾するので不適である.

・ z が虚軸上にある時, $(a, b) = (\pm 1, \pm 5), (\pm 5, \pm 1)$ (複号同順) である.

・ $(a, b) = (\pm 1, \pm 5)$ の時, $a^2 + 5 = 2A, b^2 + 5 = 10A$ に代入し A を求めると, $A = 3$ である. $(a, b) = (1, 5)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} + 1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\pi}{2}$$

となり条件を満たす. $(a, b) = (-1, -5)$ も同様である.

・ $(a, b) = (\pm 5, \pm 1)$ の時, $a^2 + 5 = 2A, b^2 + 5 = 10A$ に代入し A を求めると, $30 = 2A, 6 = 10A$ となり A の値がそれぞれ異なるので不適である.

以上より, 条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (1, 1), (a, b) = (\pm 1, \pm 5)$ (複号同順) が得られる.

・ $(p, q) = (1, 3)$ の時, $a^2 + 5 = 2A^3, b^2 + 5 = 10A$ であり, $(A, a) = (3, \pm 7)$ である. この時 $b = \pm 5$ であるので, $(a, b) = (\pm 7, \pm 5)$ (複号任意) である.

・ $(a, b) = (7, 5)$ を (2) に代入し近似計算を行うと,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} + 3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\pi}{2}$$

となり, 条件を満たす. $(a, b) = (-7, -5)$ も同様である.

・ $(a, b) = (7, -5)$ を (2) に代入して計算すると,

$$1 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} + 3 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-5} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{-22\sqrt{5}}{35} \right) \neq \frac{\pi}{2}k$$

であり, これは不適である. $(a, b) = (-7, 5)$ も同様に不適である.

以上より, 条件を満たす組み合わせとして $(p, q) = (1, 3), (a, b) = (\pm 7, \pm 5)$ (複号同順) が得られる.

以上をまとめると, 次の結果を得る.

主結果

$$\frac{\pi}{2}k = p \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{a} + q \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{b}$$

(但し, $k \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |a| \neq |b|, p, q \in \mathbb{N}, \gcd(p, q) = 1$)

を満たすものは, 項の順序を除いて以下の 10 通りだけである.

- | | |
|---|--|
| (1) $\pi = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-7} + 3 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1}$ | (6) $\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-20} + 4 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| (2) $\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-20}$ | (7) $\frac{3}{2}\pi = 4 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} + \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{20}$ |
| (3) $\pi = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1}$ | (8) $\frac{\pi}{2} = 4 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} + 3 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{20}$ |
| (4) $\pi = 3 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7}$ | (9) $\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{1} + \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| (5) $0 = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{-5}$ | (10) $\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{7} + 3 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{5}}{5}$ |

4 謝辞

本論文を執筆するにあたり, 内田幸寛准教授には丁寧かつ熱心なご指導を頂きました. 深く感謝致します. また, お忙しい中副査を快諾して頂き, 貴重な意見を下さった内山成憲教授と津村博文教授に感謝致します. 最後に, 外部からの進学にも関わらず親しくして頂いた同じ研究室の高橋祐一郎君と松井貴弘君に感謝致します.

参考文献

- [1] 青木昇『素数と2次体の整数論』数学のかんどころ 15 (共立出版, 2012).
- [2] 中村滋『円周率 歴史と数理』数学のかんどころ 22 (共立出版, 2013).
- [3] J. S. Calcut. *Gaussian Integers and Arctangent Identities for π* . The American Mathematical Monthly, Vol.**116**, No. 6, (2009), 515–530.
- [4] J. H. E. Cohn. *Eight Diophantine equations*. Proc. London Math. Soc. (3) **16** (1966) 153–166.
- [5] W. Ljunggren. *Über die Gleichung $1 + Dx^2 = 2y^n$ und $1 + Dx^2 = 4y^n$* . Det Kgl. Norsk Vid.-Selsk. Forh. **15**, 30 (1943), 115–118.
- [6] W. Ljunggren. *Über einige Arcustangensgleichungen die auf interessante unbestimmte Gleichungen führen*. Ark. Mat. Astr. Fys. Sth. **29A**, 13 (1943), 11 pp.
- [7] W. Ljunggren. *Sur une généralisation d'un théorème de C. Størmer*. Arch. f. Mat. og Naturvid. **47**, 11 (1944), 145–152.
- [8] W. Ljunggren. *On the diophantine equation, $Cx^2 + D = 2y^n$* . Math. Scand. **18** (1966) 69–86.
- [9] F. Luca, P. Stănică. *On Machin's formula with powers of the golden section*. Int. J. Number Theory **5** (2009), no. 6, 973–979.
- [10] T. Nagell. *Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$* . Norsk Mat. Forenings Skr. I No.2 Oslo (1921), 14 pp.
- [11] T. Nagell. *Sur l'impossibilité de quelques équations à deux indéterminées*. Norsk Mat. Forenings Skr. I No.13 Oslo (1923), 65–82.
- [12] C. Størmer. *Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, k de l'équation, $m \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$* . Videnskabs-Selskabets Skrifter. Mathem.-naturv. Klasse. (1895) No. **11**.