論文著者名　宮崎　仁

Hardy 空間を用いた調和写像の弱解の正則性

要約

H-曲面方程式

$$\Delta u = 2H(u)u_{x_1} \wedge u_{x_2}$$

の弱解 $u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ が有界な Lipschitz 関数ゆえ Hölder 連続になるという定理が Bethuel により証明された.

Bethuel の定理

H:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は有界な Lipschitz 関数とする. このとき, $\Delta u = 2H(u)u_{x_1} \wedge u_{x_2}$ を解く任意の弱解 $u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ は 2 次元の単位球 B 上のコンパクト部分集合で Hölder 連続となる.

この定理の証明の困難な部分は, $W^{1,2}$ 級である u の右辺 $H(u)u_{x_1} \wedge u_{x_2}$ が可積分関数である時を想定しているところにある. $H \circ u$ が Hardy 空間に属さず, u を定数としたとき, $W^{1,2}$ から L^∞ への埋め込み写像がない場合, $H(u)$ の勾配が重可積分である必要がなく, BMO 空間に属すことがなくなる. このことにより, テスト関数 ζ が Hardy 空間にも BMO 空間にも属さないものとなってしまう問題が生じる. Bethuel はこれらを解消するため Lorentz 空間と Wente の推測を用いた証明をした.

Strzelecki は Bethuel の定理に対し, Hardy 空間の双対空間が BMO 空間となることを利用し, Hardy 空間の一部の利用可能な定理を用いた証明を与えた. これにより, Lorentz 空間を用いず Sobolev 空間の範囲のみを用いることでの証明ができた.

本論文の主旨としては, Lorentz 空間を用いて任意の調和写像の正則性を示した Hélein の定理に対し, Hardy 空間を用いることでより簡潔な証明を与えることである.

本論の流れとして, まずはじめに Strzelecki による H-曲面方程式の弱解の正則性の証明を見ていく. 続いてユークリッド空間から n 次元球面への調和写像の正則性を考える. そして主定理として Hélein の定理に対して Hardy 空間を用いた新たな証明を与える.

主定理

任意の弱調和写像 $u \in W^{1,2}(B, N)$ は連続になる

1 諸定義・諸定理

本論文で取り扱う定義, および定理に関してまとめる.

1.1 調和写像

M=(M, g) をコンパクトな m 次元 Riemann 多様体, N=(N, h) をコンパクトな n 次元 Riemann 多様体とする. M から N への C^∞ 級写像 u に対し, エネルギー汎関数を以下のように定義する.

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_M ||du||^2 dv_g$$

u が調和写像になることは, u の任意の C^∞-変分 $\{u_t\}$ に対して以下が成り立つことを言う.

$$\frac{d}{dt}E(u_t)|_{t=0} = 0$$

この式に Euler-Lagrange 方程式を用いて以下のように一般化できる.

$$\Delta u + \sum_{i,j} g^{ij} A_u(D_i u, D_j u) = 0$$

特に, 球面への調和写像 $u = (u^1, \ldots, u^n)$ は, 以下のように表すことができる.

$$\Delta u^i + |\nabla u|^2 u^i = 0$$

1.2 弱調和写像

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \int_B \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right\rangle dx = 0$$

ただし, $\phi \in L^\infty \cap W_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^d), \phi(x) \in T_{u(x)}N$

1.3 Hardy 空間

単位円板あるいは上半平面上のある種の正則関数の空間のことをいう. 例として本論文では以下を定義する.

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N); \sup_{t>0} |h_t \star f| \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$$
$$h_t = 1/t^N h(./t), h \in C_0^\infty, (\mathbb{R}^N), h \geq 0, \mathrm{Supp} h \subset B(0,1)$$

1.4 Bethuel の定理

H:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は有界な Lipschitz 関数とする. このとき, $\Delta u = 2H(u)u_{x_1} \wedge u_{x_2}$ の任意の弱解 $u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ は 2 次元単位円板 B 上のコンパクト部分集合で Hölder 連続となる.

1.5 BMO 空間

$n \geq 2$ 上の局所可積分な関数 f に対し, BMO 空間を以下のように定義する.

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n); ||f||_{BMO} = \sup_Q |Q|^{-1} \int_Q |f - f_Q| dx < \infty\}$$

$Q; n$ 次元開球, $|Q|$ で Lebesgue 測度, $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx$

1.6 Schwarz の不等式

自乗可積分関数 f, g に対して以下が成立する

$$|\int f(x)g(x)dx|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx$$

1.7 Poincaré の不等式

p は $1 \leq p < \infty$ を満たすものとし, Ω は少なくとも 1 つの境界をもつ部分集合とする. このとき, Ω と p にのみ依存する定数 C で Sobolev 空間 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 内の全ての関数 u に対して以下が成立する.

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

1.8 Sobolev の不等式

U は $\mathbb{R}^n$ の有界開部分集合で, 境界は C^1 級とする. $u \in W^{k,p}(U)$ とする.
$k < \frac{n}{p}$ のとき, $u \in L^q(U)(\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n})$ で, k, p, n, U にのみ依存する定数 C において以下が成立する.

$$||u||_{L^q(U)} \leq C||u||_{W^{k,p}(U)}$$

1.9 Hölder の不等式

$1 \leq p \leq q \leq \infty$ で, f が L^p, L^q に属しているとする. 任意の $p \leq r \leq q$ に対して f は L^p に属し, $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ なる $0 \leq \alpha \leq 1$ にたいして以下が成立する.

$$||f||_{L^p} \leq ||f||^{\alpha}_{L^p} ||f||^{1-\alpha}_{L^q}$$

1.10 Hodge decomposition

可微分多様体 M 上の任意の微分形式 ω について, その k-形式は 3 つの L^2 成分に分解できる

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma \qquad (\Delta\gamma = 0)$$

特に M をコンパクト Riemann 多様体とすると, 与えられた閉形式の同値類の任意の元 ω は次のように書くことができる.

$$\omega = d\alpha + \gamma \qquad (\Delta\gamma = 0)$$

1.11 Coifman, Lions, Meyer, Semmes の定理

スカラー関数 u と, $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ 上のベクトル場 v において, 以下が成立する.

$$\begin{cases} \nabla u \in L^2((\mathbb{R}^N)^N), u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N) & N \geq 3 \\ u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ for all } \ q < \infty & N = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla v \in L^2((\mathbb{R}^N)^{N\times N}), & \text{div } v = 0 \\ v \in L^{\frac{2N}{N-2}}((\mathbb{R}^N)^N) & N \geq 3 \\ v \in L^q_{loc}((\mathbb{R}^N)^N) \text{ for all } \ q < \infty & N = 2 \end{cases}$$

このとき, $\nabla u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ となる.

1.12 Riesz-Thorin の凸円定理

$(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を σ-有限測度空間とする. $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty, 1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty$ とし, $T : L^{p_0}(\mu_1) + L^{p_1}(\mu_1) \to L^{q_0}(\mu_2) + L^{q_1}(\mu_2)$ を $L^{p_0}(\mu_1)(L^{p_1}(\mu_1))$ から $L^{q_0}(\mu_2)(L^{q_1}(\mu_2))$ への有界線型作用素とする. ここで, $0 < \theta < 1$, $f \in L^{p_0}(\mu_1) \cap L^{p_1}(\mu_1), f \in L^{q_0}(\mu_2) \cap L^{q_1}(\mu_2)$ として, p_θ, q_θ は, 以下を満たすものとする.

$$||f||_{p_\theta} \leq ||f||_{p_0}^{1-\theta}||f||_{p_1}^{\theta}, ||f||_{q_\theta} \leq ||f||_{q_0}^{1-\theta}||f||_{q_1}^{\theta}$$

このとき, T は $L^{p_\theta}(\mu_1)$ から $L^{q_\theta}(\mu_2)$ への有界作用素であり, 以下が成り立つ.

$$||T||_{L^{p_\theta}\to L^{q_\theta}} \leq ||T||_{L^{p_0}\to L^{q_0}}^{1-\theta}||T||_{L^{p_1}\to L^{q_1}}^{\theta}$$

1.13 本論文において使用する定義

$p \in (1,2]$, $a \in B$, $r \leq 1-|a| \equiv \mathrm{dist}(a,\partial B)$ として

$$J_p(a,r) := \frac{1}{r^{2-p}} \int_{B(a,r)} |\nabla u(y)|^p dy$$

$$M_p(a,r) := \sup_{z \in B(a,r), \rho < r-|a-z|} J_p(z,\rho)$$

と定義する. $M_p(a,\cdot)$ は r の単調関数で Hölder 連続であり,

$$M_p(a,r) \leq \pi^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_{B(a,r)} |\nabla u(y)|^2 dy \right)^{\frac{p}{2}}$$

より, $r \to 0$ で $M_p(a,r) \to 0$ となる.

2 二次元における H-曲面方程式の弱解の正則性

この章から, Strzelecki による Bethuel の定理の証明を見ていく. まずは 1.13 で定義した M_p が, 以下の定理を満たすことを示す.

定理 1

$\varepsilon_0 \in (0,\frac{1}{4}), \lambda_0 \in (0,1)$ とする. $\varepsilon := 2-p \in (0,\varepsilon_0)$ とし, $R_0 = R_0(\varepsilon,u) > 0$ なるものがあり

$$\Delta u = 2H(u) u_{x_1} \wedge u_{x_2} \qquad \cdots (2.1)$$

の弱解 u のうち最大となる $M_p(a,r)$ がすべての $a \in B, r \leq \frac{1}{4}\min(R_0, 1-|a|)$ で

$$M_p(a,r) \leq \lambda_0 M_p(a,4r)$$

を満たす.

3 定理 1 の証明

$a \in B$ と半径 $r \leq \frac{1}{4}(1-|a|)$ を固定する. $\zeta \in C_0^\infty(B(a,2r))$ を $B(a,r)$ 上の切断関数

$$\zeta \equiv 1, |\nabla \zeta| \leq \frac{2}{r}$$

とする. $\tilde{u} = \zeta(u-[u]_A)$ として, $[u]_A$ は A:=$B(a,2r) \setminus B(a,r)$ の u の平均値を表す. 以下, ε と p は $\varepsilon = 2-p$ とする.

3.1 テスト関数の選択

$$G^k := |\nabla\tilde{u}^{-\varepsilon}|\nabla\tilde{u}^k, k = 1, 2, 3$$

とする. G^k は, $L^q(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)(1 \leq q \leq \frac{2}{1-\varepsilon})$ 級のベクトル場である.
以下,

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{4}, 2 - \varepsilon \leq q \leq \frac{2}{1-\varepsilon} \qquad \cdots (3.1.1)$$

に限るものとする.
Hodge decomposition により,

$$G^k = \nabla v^k + \beta^k$$

とできる. ここで, $\beta^k \in L^q(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ はダイバージェンス 0 のベクトル場で, v^k は (3.1.1) を解くすべての q における $W^{1,q}(\mathbb{R}^2)$ 級に属す.

$$⨍_{B(a,2r)} v^k(x)dx = 0 \ (k = 1, 2, 3)$$

としても一般性を失わない.
$1 < q \leq \frac{2}{1-\varepsilon}$ で

$$||\nabla v^k||_{L^q(\mathbb{R}^2)} + ||\beta^k||_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C||G^k||_{L^q(\mathbb{R}^2)} \qquad \cdots (3.1.2)$$

とできる.
さらに, Poincaré 不等式の応用で

$$||G^k||_{L^q} \leq C(\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)q}dx)^{\frac{1}{q}}$$

となる.
$\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ とし, $\phi^k := \zeta v - k, k = 1, 2, 3$ で, (2.1) の H-曲面のテストベクトルとする.
$\nabla\phi g$ が $q_0 = \frac{2}{1-\varepsilon} > 2$ で積分可能な時, Sobolev の埋め込み定理から指数 $1 - \frac{2}{q_0} = \varepsilon$ で ϕ は Hölder 連続で有界となる. ここで, 定数 C $= C_q(in(3.1.2))$ は q にのみ依存するが, (3.1.1) により, $q \in [\frac{7}{4}, \frac{8}{3}]$ といった区間でしか用いられない.
Riesz-Thorin の凸円定理より, C は $C = \max(C_{\frac{7}{4}}, C_{\frac{8}{3}})$ とできる. Poincaré 不等式での定数に似せて条件を満たすすべての q が ε によらない定数 C で成り立つか知ることができる.
したがって,

$$||\nabla v^k||_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)q}dx)^{\frac{1}{q}}$$

なる C の存在を確認できる.

3.2 テスト関数の評価

3.1 で定めたテスト関数についての評価として, 以下の補題を与える.

補題 1

関数 $\phi = \zeta v$ は, 以下の不等式を解く.

$$||\nabla\phi||_{L^2(B(a,2r))} \leq Cr^{\varepsilon} J_p(a,2r)^{\frac{p-1}{p}} \cdots (3.2.1)$$

$$||\phi||_{L^\infty(B(a,2r))} \leq C(\varepsilon) r^{\varepsilon} J_p(a,2r)^{\frac{p-1}{p}}, C(\varepsilon) \to 0\ (\varepsilon \to 0) \cdots (3.2.2)$$

補題 1 の証明

(3.2.1) を示す. $||\nabla\zeta|| \leq \frac{2}{r}$ で, $⨍_{B(a,2r)} v = 0$ より Poincaré 不等式より

$$\begin{aligned} ||\nabla\phi||_{L^2(B(a,2r))} &\leq \{\sup|\zeta|\}||\nabla v||_{L^2(B(a,2r))} + \frac{C}{r}(\int_{B(a,2r)} |v|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C||\nabla v||_{L^2(B(a,2r))} \end{aligned}$$

となる.(3.1.2) と, Hölder 不等式を $\frac{p'}{2} = \frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}, (\frac{p'}{2})' = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$ で用いて

$$\begin{aligned} ||\nabla v||_{L^2(B(a,2r))} &\leq C\left(\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{(1-\varepsilon)2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Cr^{\frac{2-\varepsilon}{2}}\left(\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{2-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} \\ &= Cr^{\varepsilon} J_p(a,2r)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

(3.2.2) は, $|\phi(x)| \leq |v(x)|$ を使う. v は平均値が 0 で連続ゆえ

$$||\phi||_{L^\infty(B(a,2r))} \leq |\mathrm{osc}_{B(a,2r)} v|$$

となる.
ここで, osc とは, 以下のように定義する.

$$\mathrm{osc}_{\mathrm{B(a,2r)}} v = \sup_{x\in B(a,2r)} v(x) - \inf_{x\in B(a,2r)} v(x)$$

$\nabla v \in L^{q_1}, q_1 = p' = \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} > 2$ を用い, Sobolev の埋め込み定理で

$$\begin{aligned} |\mathrm{osc}_{B(a,2r)} v| &\leq C(\varepsilon) r^{1-\frac{2}{q_1}} ||\nabla v||_{L_1^q(B(a,2r))} \\ &\leq C(\varepsilon) r^{1-\frac{2}{q_1}} (\int_{B(a,2r)} |\nabla v|^{\frac{1-\varepsilon}{q_1}} dx)^{\frac{1}{q_1}} \end{aligned}$$

以上より, 右辺は $C(\varepsilon) r^{\varepsilon} J_p(a,2r)^{\frac{p-1}{p}}$ となり, 補題 1 が成り立つ. $\square$

系

(3.2.1) および (3.2.2) は ϕ を v に置き換えても成り立つ.

ここから, テスト関数 ϕ を用いて, (2.1) を満たす u に関して評価していく.

3.3 左辺の評価

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx &= \int_{B(a,2r)} \frac{\partial u^k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \phi^k}{\partial x_\alpha} dx \\
&= \int_{B(a,2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v^k}{\partial x_\alpha} dx + \int_{B(a,2r)} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha}(\frac{\partial u^k}{\partial x_\alpha} v^k - \frac{\partial v^k}{\partial x_\alpha}(u-[u]_A))dx \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{B(a,2r)} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial x_\alpha}(\frac{\partial v^k}{\partial x_\alpha} + \beta^k_\alpha)dx = \int_{B(a,2r)} |\nabla \tilde{u}(x)|^p dx \\
&\geq \int_{B(a,r)} |\nabla u(x)|^p dx
\end{aligned}$$

$\nabla\zeta$ は A にのみ依存するので, $|I_2| \leq \frac{C}{r}\int_A (|v||\nabla u| + |\nabla v||u-[u]_A|)dx$ である.

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \frac{C}{r}[(\int_{B(a,2r)} |v|^{p'}dx)^{\frac{1}{p'}}(\int_A |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_{B(a,2r)} |\nabla v|^{p'}dx)^{\frac{1}{p'}}(\int_A |u-[u]_A|^p dx)^{\frac{1}{p}}] \\
&\leq C(\int_{B(a,2r)} |\nabla v|^{p'}dx)^{\frac{1}{p'}}(\int_A |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^{p'}dx)^{\frac{1}{p'}}(\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\int_A |\nabla u|^p dx + \frac{1}{8}\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^p dx
\end{aligned}$$

I_1, I_2 より,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx \geq \int_{B(a,r)} |\nabla u|^p dx - C_0 \int_A |\nabla u|^p dx - \frac{1}{8}\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^p dx \qquad \cdots (3.3.1)$$

3.4 右辺の評価

$$J_{lkj} = \int_\Omega H(u)\phi^l det(Du^k, Du^j)dx \qquad (l,j,k) \text{ は } (1,2,3) \text{ の順列}$$

$w := H(u)\phi^l$ として, $J = J_{123}$ の評価をする. 部分積分により以下を得る.

$$|J| = |\int_{\mathbb{R}^2} \zeta_1(u^2 - [u^2]_{a,2r})det(Dw, Du^3)dx|$$

ζ_1 は $B(a,2r)$ 上 $\zeta_1 \equiv 1, |\nabla\zeta_1| \le \frac{2}{r}$ を満たす $C_0^\infty(B(a,3r))$ 級の関数である. 計算すると

$$\begin{aligned} |J| &\le C||\zeta_1(u^2 - [u^2]_{a,2r})||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)}||det(Dw, Du^3)||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\le C||\zeta_1(u - [u]_{a,2r})||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)}||Dw||_{L^2(B(a,2r))}||\nabla u||_{L^2(B(a,2r))} \end{aligned}$$

補題 1 より

$$\begin{aligned} ||Dw||_{L^2(B(a,2r))} &\le ||H||_\infty||\nabla\phi||_{L^2(\mathbb{R}^2)} + ||\phi||_\infty||(\nabla H \circ u)||_{L^2(B(a,2r))} \\ &\le C(H,\varepsilon)r^\varepsilon(1 + ||\nabla u||_{L^2(B(a,2r))})J_p(a,2r)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\le C(H,\varepsilon)r^\varepsilon M_p(a,4r)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

上式に

$$||\zeta_1(u - [u]_{a,2r})||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)} \le CM_p(a,4r)^{\frac{1}{p}} \qquad \cdots (3.4.1)$$

を代入して

$$2|\int_\Omega H(u)\phi u_{x_1} \wedge u_{x_2} dx| \le C_1(H,\varepsilon)r^\varepsilon M_p(a,4r)||\nabla u||_{L^2(B(a,2r))} \qquad \cdots (3.4.2)$$

ただし, $C_1(H,\varepsilon)r^\varepsilon$ は任意の正値 ε において有限で, $\varepsilon \to 0$ で 0 に近づくものとする.

次節では BMO 空間を用いたノルム計算である (3.4.1) について証明する.

3.5 (3.4.1) の証明

$$||f||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^2)} := \sup_{z\in\mathbb{R}^2, \rho>0} \fint_{B(z,\rho)} |f - [f]_{z,\rho}| dx$$

$f = \zeta_1(u - [u]_{a,2r})$ とする. 2 パターンに分けて考える.
$\rho > \frac{r}{2}$ のとき,

$$\begin{aligned} \fint_{B(z,\rho)} |f - [f]_{z,\rho}| dx &\le \frac{2}{\pi\rho^2}\int_{B(z,\rho)} |f| dx \\ &\le \frac{8}{\pi r^2}\int_{B(a,3r)} |u - [u]_{a,2r}| dx \end{aligned}$$

Poincaré と Hölder の不等式から, 右辺の積分は $M(a,3r)^{\frac{1}{p}}$ を超えない.
$\rho \le \frac{r}{2}$ のとき, $B(z,\rho) \subset B(a,4r)$ とでき, f は $B(z,\rho)$ 上で 0 となる.
$g = u - [u]_{a,2r}$ とする. $x \in B(z,\rho)$ で, 三角不等式より

$$\begin{aligned} |f(x) - [f]_{z,\rho}| &\le |\zeta_1(x)g(x) - \zeta_1(x)[g]_{z,p}| + |\zeta_1(x)[g]_{z,\rho} - [\zeta_1 g]_{z,\rho}| \\ &\le |g(x) - [g]_{B(z,\rho)}| + \frac{C}{r\rho}\int_{B(z,\rho)} |g(y)| dy \qquad \cdots (3.5.1) \end{aligned}$$

$|\zeta_1(x)-\zeta_1(y)| \le C\frac{|x-y|}{r}$ であることを使う. $\nabla g = \nabla u$ で, Poincaré・Hölder を用いて

$$\begin{aligned}\fint_{B(z,\rho)} |g-[g]_{z,\rho}|dx &\le C(\rho^{p-2}\int_{B(z,\rho)} |\nabla g|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ &\le CM_p(a,4r)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

(3.5.1) の右辺第二項 $\frac{C}{r\rho}\int_{B(z,\rho)}|g(y)|dy$ は定数として扱い, 平均化した際の値の変化はないものとする.
Schwarz・Poincaré・Sobolev・Hölder をこの順番に用いて

$$\begin{aligned}\frac{C}{r\rho}\int_{B(z,\rho)}|g(y)|dy &\le \frac{C}{r}(\int_{B(z,\rho)}|g|^2dy)^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{r}(\int_{B(z,\rho)}|u-[u]_{a,2r}|^2dy)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{C}{r}(\int_{B(a,4r)}|u-[u]_{a,2r}|^2dy)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{C}{r}\int_{B(a,4r)}|\nabla u|dy \\ &\le CM_p(a,4r)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

3.6 ε_0 の選択

(3.3.1) と (3.4.2) を組み合わせる. $r^\varepsilon = r^{2-p}$ として 2 つをあわせると

$$J_p(a,r) \le \frac{1}{4}J_p(a,2r) + C_0((2^\varepsilon)J_p(a,2r) - J_p(a,r)) + C_1(\varepsilon)M_p(a,4r)||\nabla u||_{L^2(B(a,2r))}$$

ε_0 を $2^{\varepsilon_0}C_0 \le C_0 + \frac{1}{4}$ なるように固定する. これにより, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ となり,

$$(C_0+1)J_p(a,r) \le (C_0+\frac{1}{2})J_p(a,2r) + C_1(\varepsilon)M_p(a,4r)||\nabla u||_{L^2(B(a,2r))}$$

$R_0(\varepsilon)$ を $a \in B, r < \frac{1}{2}R_0(\varepsilon)$ で $||\nabla u||_{L^2(B(a,2r)\cap B)} \le \frac{1}{4C_1(\varepsilon)}$ なるようにとると

$$\lambda_0 = \frac{C_0+\frac{3}{4}}{C_0+1} < 1 \text{ で } J_p(a,r) \le \lambda_0 M_p(a,4r)$$

となる. $B(z,\rho) \subset B(a,r)$ において $B(z,4\rho) \subset B(a,4r)$ なので

$$J_p(z,\rho) \le \lambda_0 M_p(z,4\rho) \le \lambda_0 M_p(a,4r)$$

$B(z,\rho) \subset B(a,r)$ 上での上限が定まることにより, 定理が満たされた. □

次の章で, 定理 1 を満たすことを利用し, 弱解 u の Hölder 連続性について考える.

4 Hölder 連続性

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ を, 定理 1 を満たすものとする. このとき, 任意のコンパクト部分集合 $K \subset \Omega$ に対し, ある定数 C_K が存在し, 以下を満たす.

$$\int_{B(a,\rho)} |\nabla u|^{2-\varepsilon} dy \leq C_K \rho^{\varepsilon+\mu}$$

ここで, λ_0 が定数であることから, $\mu = \log_4(\frac{1}{\lambda_0}) > 0$ となる. Morrey's Dirichlet Growth Theorem が成り立ち, u は $\gamma := \frac{\mu}{2-\varepsilon}$ として, C^γ 級となる.
特に, $0 < r \leq R \leq R_0, R \leq 1 - |a|$ のとき, 以下が成り立つ.

$$M_p(a,r) \leq \frac{1}{\lambda_0}(\frac{r}{R})^\mu M_p(a,R) \qquad \cdots (4.1)$$

$$|u(x) - u(y)| \leq C(\frac{|x-y|}{R})^\gamma M_p(a,R)^{1/p} \cdots (4.2)$$

4.1 (4.1) の証明

以下の補題から導き出すことができる.

4.1.1 補題 2

ω を非減少関数とし, $(0, R_0]$ で, $R \leq R_0$ のとき,

$$\omega(\tau R) \leq \gamma\omega(R) + \sigma(R), 0 < \gamma, \tau < 1$$

特に, $\mu \in (0,1), R \leq R_0$ のとき,

$$\omega(R) \leq C((\frac{R}{R_0})^\mu \omega(R_0) + \sigma(R^\mu R_0^{1-\mu}))$$

今回の場合, $\sigma = 0$ となる. □

4.2 (4.2) の証明

三角不等式, Poincaré の不等式, および定理 1 を用いて計算する,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)| \\ &\leq \fint_{B(a,\frac{r}{4})} |u(x) - u(z)| dz + \fint_{B(a,\frac{r}{4})} |u(z) - u(y)| dz \\ &\leq C(r^{p-2} \int_{B(a,\frac{r}{4})} |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C M_p(a,r)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(\frac{|x-y|}{R})^\gamma M_p(a,R)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

以上から, γ-次 Hölder 連続であることを導き出すことができた. □

5　境界の正則性

境界の正則性に関しては以下の条件を満たすとき成り立つといえる.

5.1　補題 3

$u \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^N)$ とし, ある $p \leq 2, \mu$ について, 全ての $a \in B, 0 < r < R \leq \min(R_0, 1-|a|)$ で以下が成り立つとする.

$$M_p(a,j;u) \leq C(\frac{r}{R})^{\mu_p}(a,R;u)$$

このとき, トレース $\Psi := u|_{\partial B}$ が ∂B 上連続なら, $u \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^N)$

証明

Morrey's Dirichlet Growth Theorem より, u は単位円板上で Hölder 連続で, (4.2) を満たす.
$u(x_1,x_2) = v(\rho,\theta)$ とする. $y_0 \in \partial B, y_0 = (1,\theta_0)$ を固定し, $\zeta(\theta) := \Psi(\exp(i\theta))$ とする.
$\Sigma_p(\delta) := \sup\{M_p(a,\delta)^{\frac{1}{p}} : \mathrm{dist}(a,\partial B) \geq \delta\}$ と定義する.
ここで, $M_p(a,r) \leq \mathrm{const}(\int_{B(a,r)} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{p}{2}}$ より, $\Sigma_p(\delta) \to 0 (\delta \to 0)$.
$x = (x_1,x_2) = \rho\exp(i\theta)$ は B の内部点とする. $1-\rho < R_0$ とし, $\delta = 1-\rho$ とおく.
任意の $0 < \sigma < 2\pi$ において, 以下が成り立つ,

$$\int_\theta^{\theta+\sigma}\int_{1-\delta}^1 |v_r(r,\vartheta)|^2 r dr d\vartheta \leq \int_{\{x:1-\delta\leq|x|\leq 1\}} |\nabla u|^2 dx =: I(\delta)$$

したがって,

$$\int_\theta^{\theta+\sigma}\int_{1-\delta}^1 |v_r(r,\vartheta)|^2 dr d\vartheta \leq \frac{I(\delta)}{1-\delta}$$

同時に, 正の一次元 *Lebesgue* 測度をもつ $E_\sigma \subset (\theta, \theta+\sigma)$ で, 任意の $\theta_1 \in E_\sigma$ において以下を満たすものが存在する.

$$\int_{1-\delta}^1 |v_r(r,\theta_1)|^2 dr \leq \frac{I(\delta)}{\sigma(1-\delta)}, \lim_{r\to 1-} v(r,\theta_1) = \zeta(\theta_1)$$

Schwarz の不等式を用いて, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
|\zeta(\theta_1) - v(\rho,\theta_1)| &= |v(1,\theta_1) - v(\rho,\theta_1)| \\
&\leq \int_\rho^1 |v_r(r,\theta_1)| dr \ \cdots (5.1.1) \\
&\leq (1-\rho)^{\frac{1}{2}} (\int_\rho^1 |v_r(r,\theta_1)|^2 dr)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\frac{\delta}{\sigma})^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{I(\delta)}}{(1-\delta)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

ここで, $\sigma = \frac{1}{4}\delta$ とする. (4, 2) より, ある点 $x' \in B(x, \frac{1}{2}\delta)$ において, 以下が成立.

$$|u(x) - u(x')| \leq C_0(\frac{|x - x'|}{\delta})^\gamma M_p(x, \delta)^{\frac{1}{p}} \leq C_0(\frac{|x - x'|}{\delta})^\gamma \Sigma_p(\delta) \ \cdots (5.1.2)$$

$x' \in B(x, \frac{1}{2}\delta)$ を, x と動径座標となるようにとり, $\theta_1 \in E_\sigma$ とする. 三角不等式より, 以下を得る.

$$|u(x) - \psi(y_0)| \leq |u(x) - u(x')| + |u(x') - \psi(\frac{x'}{|x'|})| + |\psi(\frac{x'}{|x'|}) - \psi(y_0)|$$

右辺第一項, 第二項においては (5.1.1), (5.1.2) を用いればよい.
最終項においては, 連続関数 ζ と, θ_1 の選択により, 以下を得る.

$$|\psi(\frac{x'}{|x'|}) - \psi(y_0)| = |\zeta(\theta_1) - \zeta(\theta_0)| \leq \omega(|\theta_1 - \theta_0|) \leq \omega(|\theta - \theta_0| + \frac{\delta}{4})$$

以上を組み合わせ, $\delta = 1 - \rho$ とすることで, 以下の結果を得ることができる.

$$|u(x) - \psi(y_0)| \leq C_0\Sigma_p(1 - \rho) + 2(\frac{I(1 - \rho)}{\rho})^{\frac{1}{2}} + \omega(|\theta - \theta_0| + \frac{1 - \rho}{4})$$

$x \to y_0$, すなわち $\rho \to 1, \theta \to \theta_0$ とすることで, 右辺は 0 に近づく.
以上から, 境界の正則性を示すことができた. $\square$

以上が Strzelecki によって行われた Bethuel の定理の新証明となる.

次の章から実際に n 次元球面への調和写像, および任意の調和写像について考察していく. それぞれの場合で調和写像 u の満たす方程式は異なるが, 各 u について 1.13 で定義した M_p を定め, 定理 1 を満たすことを確かめる. これにより, Hölder 連続性および境界の正則性に関して 2 次元の場合同様の議論を行うことができ, その結果として正則性を得ることができる.
以上のことから, 6 章以降に関しては 4, 5 章で言及した Hölder 連続性および境界の正則性に関しては言及せず, 定理 1 を満たすかどうかについての考察とする.

6　ユークリッド空間から n 次元球面への調和写像

$u \in W^{1,2}(B,N)$ を B (n 次元球面) から N （滑らかで閉な n 次元リーマン多様体) への弱調和写像とし, N をユークリッド $\mathbb{R}^d$ に埋め込む. 球面への調和写像に関しては 1 章 1.1 節で触れたが, 弱解 u の満たす方程式は 2 次元での調和写像と同様線形系で表すことができるので, 1 章 1.13 節で定義する M_p が球面の調和写像においても同様に成り立つことを確認すればよい.

6.1　行き先が n 次元球面における弱調和写像の正則性

行き先が球面の場合の調和写像を計算可能な形で表す.
調和写像 u は $\mathrm{div}(u^j\nabla u^i - u^i\nabla u^j) = 0$ を満たすことから, ある B^{ij} が存在して, $\mathrm{rot}B^{ij} = u^j\nabla u^i - u^i\nabla u^j$ を満たす. よって, 以下のように書き換えることができる.

$$\Delta u^i = \sum_{j=1}^{n} \det(\nabla u^j, \nabla B^{ij})$$

定理 2

$$\Delta u^i = \sum_{j=1}^{n} \det(\nabla u^j, \nabla B^{ij})$$

を満たす u のうち最大の $M_p(a,r)$ がすべての $a \in B, r \le \frac{1}{4}\min(R_0, 1-|a|)$ で

$$M_p(a,r) \le \lambda_0 M_p(a,4r)$$

を満たす.

証明

切断関数, テスト関数のとり方は 2 次元上での状況と同じにする.
$a \in B$, 半径 $r \le \frac{1}{4}(1-|a|)$ を固定する. $\zeta \in C_0^\infty(B(a,2r))$ を切断関数 $\zeta \equiv 1(onB(a,r)), |\nabla\zeta| \le \frac{2}{r}$ とする. $\tilde{u} = \zeta(u - [u]_A)$ として, $[u]_A$ は *A:=B(a, 2r)*$\backslash$*B(a, r)* の u の平均値とする.
テスト関数 $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ とし, $\phi^k := \zeta v - k, k = 1,2,3$ で, *(2.1)* の H-曲面のテストベクトルとし. 補題 *1* を満たす.
$\mathrm{rot}B^{ij}$ は計算上影響を及ぼさないため

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = -2\int_B \phi \det(\nabla u, \nabla B) dx$$

を満たす場合で考えれば十分である. $\int_\Omega \nabla u\nabla\phi dx$ は上記証明と同じ手順で評価して

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi dx \ge \int_{B(a,r)} |\nabla u|^p dx - C_0\int_A |\nabla u|^p dx - \frac{1}{8}\int_{B(a,2r)} |\nabla u|^p dx$$

$-2\int_B \phi\,\mathrm{det}(\nabla u, \nabla B)$ は *3.4* における w を $w=\phi$ としてとると同様の議論ができるので

$$2\left|\int_\Omega \phi\,\mathrm{det}(\nabla u, \nabla B)\right| \le C_1(H,\varepsilon)r^\varepsilon \mu_p(a,4r)||\nabla u||_{L^2(B(a,2r))}$$

よって, 定理 1 の仮定を満たし, 球面における弱解 u においても正則性を示すことができた. □

7 主定理の証明

最後に, 任意の空間における弱調和写像の場合を考える. これはすなわち *Hélein* の定理となるのだが, 今までと同様の流れを汲むことで *Lorentz* 空間を用いない証明が可能となることが本論の主旨である.

これまでと同様の議論をするため N を n 次元トーラスとして考えても一般性を失わないことを利用し, 十分大きなユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に埋め込んで考える. 弱調和性を満たす u の設定のため, $a\in B, r<\frac{1}{4}\mathrm{dist}(a,\partial B)$ を固定し, *Hélein* が証明で用いたクーロン移動フレーム e を用いる.

7.1 クーロン移動フレーム e

$e=(e_1,e_2,...,e_n); B(a,4r)\to\mathbb{R}^{n\times d}$ で, 以下を満たす

(1) $(e_i(x))_{i=1,2}$ は $B(a,4r)$ 内ほとんどいたるところで $T_{u(x)}N$ の正規直交基底

(2) $\int_{B(a,4r)}|\nabla e|^2dx \le C\int_{B(a,4r)}|\nabla u|^2dx$

(3) $\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x_\alpha}, e_j\right\rangle = 0$

4 章において, ユークリッド空間から球面への調和写像に関しても同様に正則性がいえたように, 任意の弱調和写像においてはクーロン移動フレームを用いて n 次元トーラスへと落とし込む.
このことを利用し, 任意の弱調和写像 $u\in W^{1,2}(B,N)$ においても定理 1 と同様の式が成り立つことを示していく.

証明

切断関数のとり方などは上記証明と同じものとする.
$a\in B$, 半径 $r\le\frac{1}{4}(1-|a|)$ を固定する. $\zeta\in C_0^\infty(B(a,2r))$ を以下を満たす切断関数とする.

$$\zeta\equiv 1(\mathrm{on}\ B(a,r)), |\nabla\zeta|\le\frac{2}{r}$$

$\tilde{u}=\zeta(u-[u]_A)$ として, $[u]_A$ は *A:=B(a, 2r)-B(a, r)* の u の平均値. 以下, ε と p は $\varepsilon=2-p$ とする.

$$\omega_i := \sum_{\alpha=1}^2 |d\tilde{u}|^{-\varepsilon}\left\langle\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_\alpha}, e_i\right\rangle dx_\alpha \equiv |d\tilde{u}|^{-\varepsilon}\langle d\tilde{u}, e_i\rangle$$

で, *Hodge decomposition* を用いて

$$\omega_i = dv_i + d^*\beta_i \qquad (v_i \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^2), \beta_i \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^2, \Delta^2))$$

(p' は $p = 2 - \varepsilon$ の *Hölder* 共役指数とする) とかく.
7.1(1) から

$$\int_{B(a,r)} |du|^p dx \leq \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \langle d\tilde{u}, e_i \rangle (dv_i + d^*\beta_i)$$

この式を満たす u が定理 1 を満たすことを示せば十分となる.
右辺を評価していく.
$|\int_{\mathbb{R}^2} \langle d\tilde{u}, e_i \rangle d^*\beta_i|$ について, *Hardy* 空間の双対空間により

$$|\int_{\mathbb{R}^2} \langle d\tilde{u}, e_i \rangle d^*\beta_i| \leq C_0 ||du||_{L^2(B(a,2r))} ||du||^p_{L^p(B(a,2r))}$$

がいえる.
$T_i ;= \int_{\mathbb{R}^2} \langle d\tilde{u}, e_i \rangle dv_i$ を評価するため, $\varphi = \zeta(v_i - const)e_i$ とする. 部分積分を用いる.

$$T_i = -\sum_{\alpha,j} \int_{R^2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x_\alpha}, e_j \right\rangle e_j \right\rangle \zeta(v_i - const)dx + (A \text{ における} \zeta \text{の微分を含んだ積分})$$

上記論文 *3.3* 及び *3.4* を用いて同様の計算を行い

$$|T_i| \leq C_1 \int_A |du|^p dx + C_2(\varepsilon) r^\varepsilon M_p(a, 4r) ||\nabla u||_{L^2(B(a,4r))}$$

を得る.
ε_0 においても定理 1 と同様の議論ができる. 以上から, 任意の弱調和写像 $u \in W^{1,2}(B, N)$ における正則性を示すことができた. □

謝辞

本論文は, 首都大学東京理工学研究科数理情報科学, 高桑昇一郎教授ならびに, 澤野嘉宏准教授, 石谷謙介准教授のご指導の下製作しました. この場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

[1] Strzelecki, P
"A new proof of regularity of weak solutions of the H-surface equation"Springer-Verlag, 2002

[2] Lawrence, C. Evans
"Partial Differential Equations SECOND EDITION" Graduate Studies in Mathematics, 2010

[3] Coifman, R., Lions, P.L, Meyer, Y. Semmes, S
"Compensated compactness and Hardy spaces."J.Math.Pures, 1993, 247-286

[4] Hélein, F
"Harmonic maps, conservation laws and moving frame."Editions Frontieres, Diderot Publishers, 1997

[5] Gilbarg, D.Trudinger, N.S
"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order."Springer-Verlad, 1983, 200-212

[6] Iwaniec, T.Martin, G
"Quasiregular mappings in even dimensions."Acta Math, 1993, 29-81

[7] 西川　青季
"調和写像の存在と応用" 2003

[8] Bethuel, F
"Unrésulant de régularité pour des solutions de l'equation des surfaces ácourbure moyenne prescrite" C.R.Acad. Sci. Paris 314 , 1992, 1003-1007