修 士 学 位 論 文

題名:ペンダントグラフ上での
非線形シュレディンガー方程式に付随する
変分問題について

指導教授　　倉田　和浩　　教授

平成 29 年 1 月 10 日　　提出

首都大学東京　大学院
理工学研究科　数理情報科学専攻
学修番号 15878310

氏名　小森　洋平

目 次

1 問題設定と主定理 **3**

2 定義と予備知識 **5**

2.1 本論文で用いる定義 5

2.2 予備知識 7

3 主定理１の証明 **10**

4 主定理２の証明 **21**

5 謝辞 **26**

1　問題設定と主定理

本論文では, 非線形シュレディンガー方程式から導かれるエネルギー汎関数

$$E(u,\mathcal{G}) = \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(\mathcal{G})} - \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\mathcal{G})}, \quad p \in (2,6) \tag{1}$$

に関する変分問題を

$$\|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} = \mu, \quad \mu > 0 \tag{2}$$

という与えられた数で表現された mass 制限と, 与えられた $p \in (2,6)$ という固定された実数の設定下で, 長さが l の**ペンダントグラフ** (図 1) と呼ばれる特別な**非コンパクトな連結距離グラフ** $\mathcal{G}$ 上で研究を行った. この条件での変分問題とは,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(\mu) := \inf_{u \in H^1_\mu(\mathcal{G})} E(u,\mathcal{G}), \quad H^1_\mu(\mathcal{G}) := \{u \in H^1(\mathcal{G}) | \|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} = \mu\} \tag{3}$$

を満たすような元が存在するかどうか, を調べることを指す. またその元を**最小化子**と呼ぶ. ここでの $H^1(\mathcal{G})$ とは, 従来のソボレフ空間の性質を持ちつつ, 定義域であるグラフ上で連続性を持っている空間である. 従来の研究では, 任意の非コンパクトグラフに対して

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(\mu) < \min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R})} E(\varphi, \mathbb{R}) \tag{4}$$

を満たせば, 最小化子の存在保障されるという事実が [1] によって示されていた. 加えて長さが l のペンダントグラフに対する最小化子の形状の研究もなされていた ([1],Th2.7). しかし, ペンダントグラフが持つコンパクト部分である $[0,l]$ 区間を無限遠にしたときの挙動についての研究がなされていなかったので, 解析を行った. (主定理 1) その結果, 元々の最小化子をペンダント部分に制限した関数に対してある極限関数が存在し, 直線部分に制限した関数は 0 に収束することが分かった. その極限関数の性質として, それのエネルギー汎関数の値が, **半直線** $\mathbb{R}^+$(図 2) が定義域である場合の最小エネルギーに一致することも判明した.

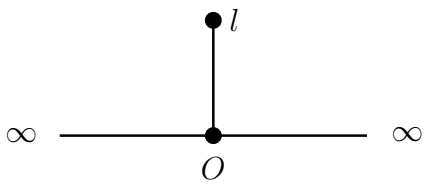


図 1: 長さ l のペンダントグラフ

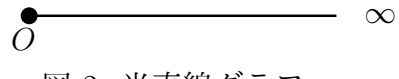


図 2: 半直線グラフ

主定理 1 . $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) = \inf\{E(v, \mathcal{G}_l) | v \in H^1_\mu(\mathcal{G}_l)\}$ とする. このとき

$$\lim_{l\to\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) = \min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi, \mathbb{R}^+) \tag{5}$$

が成立する. またペンダント部分で定義される ψ_l について $l \to \infty$ としたとき

$$\psi_l(x) \rightharpoonup \psi_*(x) \ \ in\ H^1_{loc}(\mathbb{R}) \tag{6}$$

を満たす自明でない $\psi_* \in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)$ が存在して, $E(\psi_*, \mathbb{R}^+) = \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ が成立する.
直線部分で定義される ϕ_l については

$$\phi_l \to 0 \ \ in\ H^1(\mathbb{R}) \tag{7}$$

が成立する.

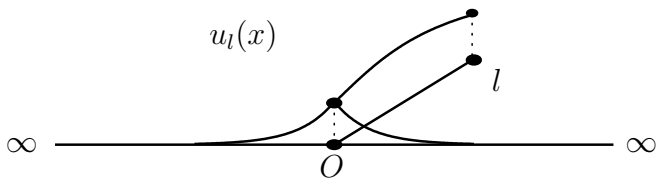


図 3: ペンダントグラフ上での最小化子の形状

一方で, エネルギー汎関数の非線形項をコンパクト部分 $\mathcal{K}$ に局所化したモデル

$$\tilde{E}(u, \mathcal{G}) = \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(\mathcal{G})} - \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\mathcal{K})}, \quad p \in (2, 6) \tag{8}$$

についての変分問題の研究が [6] によってなされていた. これによると, 最小化子の存在・非存在が, コンパクト部分 $\mathcal{K}$ の総距離対する閾値が存在することが分かっている. この閾値に関する評価について本論文では, ペンダントグラフという条件の下ではあるが, 閾値の条件を良くすることが出来た. 証明の手順は [2] で紹介されていた, 半直線 $\mathbb{R}$ をペンダント部分に移植するという手法 (図 4) を用いた. 固定された任意の実数を $0 < l' < l$, 半直線の本数 N としたときに各半直線で $[0, (l - l')/N]$ の区間を作成する. この区間をペンダント部分に移植する. 新しく定義した区間上での関数は [3] の手法を用いることで, 長さ l のペンダントグラフ $\mathcal{G}_l$ についての最小化子を不具合なく構成できた.

主定理２. $\mathcal{G}_l$ をペンダントグラフ, $p \in [4,6)$ とする. このとき, ある $l^* > 0$ が存在して

- $^\forall l > l^* \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu)$ を達成する元が存在する.
- $^\forall l < l^* \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu)$ を達成するものは存在しない.

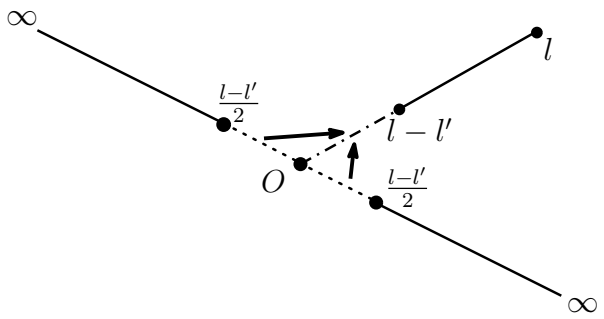


図 4: [2] で紹介されていた, 半直線グラフをペンダント部分に移植する方法の図説

2 定義と予備知識

2.1 本論文で用いる定義

定義 2.1. (距離グラフ) 以下の性質を持つとき $\mathcal{G} = (V, E)$ は**距離グラフ**であるという.
V をグラフを構成する頂点の集合, E をグラフを構成する辺の集合とする. グラフ上の任意の辺を e, それの始点と終点をそれぞれ O_e, T_e と置く.

1. 辺 e の長さを L_e とする. これは, $(0, \infty)$ の範囲で値をとる. また長さが無限大である辺の終点 T は, 無限遠にあるものとみなす. これを**半直線**と呼び, $\mathbb{R}^+$ と表記する.
2. 辺 e の始点と終点を入れ替えた辺 e' と, 元の辺 e は同一視する. また $L_e = L_{e'}$ が成立する.
3. 辺 e を有界閉区間 $I_e = [0, L_e]$ と見なす. この中に定義した変数 $x_e \in I_e$ は, 始点 O_e から終点 T_e に向かう中で単調増加する. $x_e = 0$ はそのグラフの始点 O_e を表現している.
4. $x_{e'}$ と $L_e - x_e$ は辺 e において, 同じ位置にある.

定義 2.2. (コンパクトグラフ) $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ が $\mathcal{G}$ の**コンパクト部分グラフ**であるとは, $\mathcal{K}$ が $\mathcal{G}$ から半直線部分を取り除いたグラフであることをいう.

グラフの辺は, すべて 1 次元であると考える. また以下で定義する関数はすべて 1 次元関数である.

定義 2.3. (距離グラフ上での関数) $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ は各辺 e を定義域に持ち, $u_e : I_e \to \mathbb{R}$ が成立する. つまり $u_e(x) = u|_{x \in I_e}(x)$ である.

定義 2.4. (距離グラフ上での r 乗可積分関数空間) 任意の実数 r に対して, 距離グラフ $\mathcal{G}$ 上で r 乗可積分な関数空間を $L^r(\mathcal{G})$ と表記する. L^r ノルムは以下のように定義する.

$$\|u\|^r_{L^r(\mathcal{G})} = \sum_e \|u_e\|^r_{L^r(I_e)} = \sum_e \int_{I_e} |u_e(x)|^r dx$$

定義 2.5. (距離グラフ上のソボレフ空間) 距離グラフ $\mathcal{G}$ 上のソボレフ空間 $H^1(\mathcal{G})$ を以下のように定義する.

$$u \in H^1(\mathcal{G}) \overset{\mathbf{def}}{\iff} u \text{ は } \mathcal{G} \text{ 上で連続関数であり, 任意の辺 } e \text{ で } u_e \in H^1(I_e)$$

また $H^1(\mathcal{G})$ ノルムを以下のように定義する.

$$\|u\|^2_{H^1(\mathcal{G})} = \sum_e \{\|u_e\|^2_{L^2(I_e)} + \|u'_e\|^2_{L^2(I_e)}\}$$

上記の $H^1(\mathcal{G})$ の定義で用いた連続という言葉を説明する. $\mathcal{G}$ の任意の辺 e, f が共通の頂点 v を始点としているとする. このとき $u_e(v) = u_f(v)$ が成立することを, 連続であるという. また半直線上に定義された u は

$$\lim_{x_e \to +\infty} u_e(x_e) = 0 \tag{9}$$

が成立する. ここで固定された e, f の終点が無限遠点にある場合, その 2 辺をまとめて実数直線 $\mathbb{R}$ と見なす. $\mathbb{R}$ に対する変分問題の最小化子のことを**ソリトン解**と呼ぶ. ソリトン解の性質として, 平行移動を除いて一意に定まることが挙げられる. また正値偶関数であることも重要である. これを ϕ_μ と表記する. これは R

$$E(\phi_\mu, \mathbb{R}) = \min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R})} E(\varphi, \mathbb{R}) < 0 \tag{10}$$

という式が成立することが知られている.
またソリトン解 ϕ_μ は, まず, $\phi_1(x) = C_p \mathrm{sech}(c_p x)^{\alpha/\beta},\ C_p, c_p > 0$ と書くことができ, さらに

$$\phi_\mu(x) = \mu^\alpha \phi_1(\mu^\beta x), \quad \alpha = \frac{2}{6-p}, \quad \beta = \frac{p-2}{6-p} \tag{11}$$

と書けることも知られている. p の条件により $\alpha, \beta > 0$ である.

2.2 予備知識

以下の事実は本論文において非常に重要である.

命題 2.1. ([6], $Prop$4.1) $\mathcal{G}$ を距離グラフ, $p \in [2, \infty]$ とする. このとき, ある正定数 $\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_\infty$ が存在して

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{G})} \leq \mathcal{C}_p \|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, \quad {}^\forall u \in H^1(\mathcal{G}) \tag{12}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\mathcal{G})} \leq \mathcal{C}_\infty \|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{1}{2}}, \quad {}^\forall u \in H^1(\mathcal{G}) \tag{13}$$

が成立する.

(13) は [6] によって $\mathcal{C}_\infty = \sqrt{2}$ となることが分かっている. この不等式を**ガリアード・ニーレンバーグ不等式**と呼ぶ.

命題 2.2. ヒルベルト空間 H の任意の有界列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は弱収束する部分列を持つ.

命題 2.3. $\mathcal{K}$ をコンパクト集合とする. このとき,

$$H^1(\mathcal{K}) \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{K})$$

はコンパクトな埋め込みである. つまり, 任意の $H^1(\mathcal{K})$ の有界列 $\{u_n\}$ に対して,$v \in L^\infty(\mathcal{K})$ が存在して, それに収束する部分列 $\{u_{n_k}\}$ が取れる.

上記を用いて, 以下の事実が示される.

命題 2.4. コンパクト集合 $\mathcal{K}$ に対して,

$$u_n \rightharpoonup u \ in \ H^1(\mathcal{K}) \Longrightarrow u_n \to u \ in \ L^\infty(\mathcal{K})$$

が成立する.

証明: 背理法で示す. 結論を否定すると,

$$^\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ s.t. \ \ ^\forall k \in \mathbb{N}, \ ^\exists n_k \geq k \ \ with \ \ \|u_{n_k} - u\|_{L^\infty(\mathcal{K})} \geq \varepsilon_0$$

となる. **命題 2.3** より $\{u_n\}$ に対して,$\{u_{n'_k}\} \subset \{u_{n_k}\}$ と $v \in L^\infty(\mathcal{K})$ が存在して,

$$u_{n'_k} \to v \ \ in \ \ L^\infty(\mathcal{K})$$

が成立する. これにより

$$u_{n'_k} \to v \ \ in \ \ L^2(\mathcal{K})$$

が導かれる. 強収束列は弱収束列なので

$$u_{n'_k} \rightharpoonup v \ \ in \ \ L^2(\mathcal{K})$$

まで導かれる. 任意の部分列 $\{u_{n'_k}\} \subset \{u_n\}$ に対して仮定を用いることで

$$u_{n'_k} \rightharpoonup u \ \ in \ \ L^2(\mathcal{K})$$

を得る. 弱収束極限の一意性より $u = v$ が成立する. 一方背理法の仮定を部分列 $\{u_{n'_k}\} \subset \{u_n\}$ に用いると

$$\|u_{n'_k} - u\|_{L^\infty(\mathcal{K})} \geq \varepsilon_0$$

となる. これは矛盾である. □

命題 2.5. $\mathcal{K}$ をコンパクト集合とする. $H^1(\mathcal{K})$ 上で有界な関数列 $\{u_n\}$ と定める. このとき $w \in H^1(\mathcal{K})$ が存在して, $\{u_n\}$ の任意の部分列 $\{u_{n_k}\}$ に対して, ある部分列 $\{u_{n'_k}\}$ が存在して,

$$u_{n'_k} \rightharpoonup w \ \ in \ H^1(\mathcal{K}) \Longrightarrow u_n \rightharpoonup w \ \ in \ H^1(\mathcal{K})$$

が成立する.

証明: 背理法で示す. 結論を否定すると,

$$^{\exists}\varepsilon_0 > 0, \ ^{\exists}\tilde{\phi} \in H^1(\mathcal{K}) \ \ s.t. \ \ ^{\forall}k \in \mathbb{N}, \ ^{\exists}n_k \geq k \ \ with \ \ |(u_{n_k} - w, \tilde{\phi})_{H^1(\mathcal{K})}| \geq \varepsilon_0$$

が成立する. この背理法の仮定を部分列の部分列 $\{u_{n'_k}\} \subset \{u_{n_k}\}$ に用いると,

$$|(u_{n'_k} - w, \tilde{\phi})_{H^1(\mathcal{K})}| \geq \varepsilon_0$$

を得る. 仮定より

$$^{\forall}\varepsilon > 0, \ ^{\exists}k' \in \mathbb{N} \ \ s.t. \ \ ^{\forall}n'_k \geq k', \ |(u_{n'_k} - w, \phi)_{H^1(\mathcal{K})}| < \varepsilon, \ \ ^{\forall}\phi \in H^1(\mathcal{K})$$

を得る. ここで $\phi = \tilde{\phi}$ ととれば, 矛盾を得る. □

次に, 本論文の**主定理２.** で用いる単調増加 Rearrengement を定義する. まず, 単調減少 Rearrengement を定義する. $u \in H^1(\mathcal{G})$ に対して

$$\rho(t) = \sum_{e \in E} meas\left(\{x_e \in I_e \mid u_e(x_e) > t\}\right), \ \ t \geq 0$$

と定める. また,

$$\omega = \sum_{e \in E} meas(I_e), \ \ I^* = [0, \omega]$$

を定める. これらを用いて u の単調減少 Rearrengement は以下のように定義される.

命題 2.6. ([*1*]) $u^* : I^* \to \mathbb{R}$ として

$$u^*(x) = \inf\{t \geq 0 \mid \rho(t) \leq x\}, \ \ x \in I^*.$$

これを用いて, $\omega < +\infty$ のとき, 以下のように単調増加 Rearrengement を定義する.

命題 2.7. $u_* : I^* \to \mathbb{R}$ として

$$u_*(x) = u^*(\omega - x).$$

[1] によって

$$\|u^*\|^r_{L^r(I^*)} = \|u\|^r_{L^r(\mathcal{G})}, {}^\forall r > 0$$

が示されていた. この事実から

$$\|u_*\|^r_{L^r(I^*)} = \|u\|^r_{L^r(\mathcal{G})}, {}^\forall r > 0$$

を得る. 加えて,

$$\|u'_*\|^2_{L^2(I^*)} \leq \|u'\|^2_{L^2(\mathcal{G})}$$

が成り立つことも知られている.

3　主定理 1 の証明

$u_l \in H^1_\mu(\mathcal{G}_l)$ を (1) の最小化子とする. これの半直線部分とペンダント部分の区別をするために

$$u_l(x) = \begin{cases} \phi_l(x),\ x \in \mathbb{R} \\ \psi_l(x),\ x \in [0,l] \end{cases} \tag{14}$$

と定義する. 今後ペンダント部分を $I_l = [0,l]$, 直線部分を $\mathbb{R}$ とする. また距離グラフの性質により, ペンダント部分に関して始点 O がペンダントの端点に, 端点 l は始点にあるものとしてみなすことが出来る.
(図 5) また, 以下の定理を紹介する.

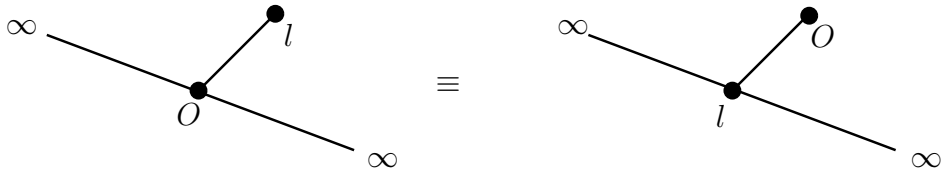


図 5: 距離グラフにおいては, 長さの情報が保存されていれば良い. 今回の証明では右側のペンダントグラフを用いている.

命題 3.1. ([*1*], $Prop$3.3) $\mathcal{G}$ を距離グラフ, $u \in H^1_\mu(\mathcal{G})$ を (1) の変分問題の最小化子とする. このとき,

1. ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$u_e'' + u_e|u_e|^{p-2} = \lambda u_e, \quad {}^\forall e \in E \tag{15}$$

が成立する.

2. 無限遠点ではない任意の $v \in V$ に対して

$$\sum_{e \succ v} \frac{du_e}{dx_e} = 0 \tag{16}$$

が成立する. $e \succ v$ とは頂点 v を連結点としている辺 e のことを指している.

3. $u(x) > 0,\ x \in \mathcal{G}$ である.

定理 3.1. ([*1*], Th2.2) $\mathcal{G}$ を少なくとも 1 つの半直線を持つ非コンパクトグラフとする. このとき,

$$\min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi, \mathbb{R}^+) \ \leq \ \mathcal{E}_\mathcal{G}(\mu) \leq \min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R})} E(\varphi, \mathbb{R}) \tag{17}$$

という評価が成立する. また

$$\min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+)=\frac{1}{2}E(\phi_{2\mu},\mathbb{R})$$

が成立する.

特に,

$$\begin{aligned}\|\phi_{2\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &= \int_0^{+\infty}|\phi_{2\mu}(x)|^2dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi_{2\mu}(x)|^2dx=\mu\end{aligned}$$

であることに注意する.

定理 3.2. ([*1*], $Th2.7$) ペンダントグラフ $\mathcal{G}_l$ に対して, 最小化子を $u_l\in H^1_\mu(\mathcal{G}_l)$ とおく. このとき, $u_l>0$ であり, ψ_l は単調減少関数である.

主定理 1 の証明 まず (5) を示す.

補題 3.1.

$$\lim_{l\to\infty}\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu)=\min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)}E(\varphi,\mathbb{R}^+).$$

証明 挟み撃ちの定理を用いて示す.[1] の研究により

$$\min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)}E(\varphi,\mathbb{R}^+)\le\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu)$$

が知られている. ここで以下の主張を示す.
Claim1:

$$^{\exists}v_l\in H^1_\mu(\mathcal{G}_l)\ s.t.\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu)\le E(v_l,\mathcal{G}_l)\ \text{かつ}\ E(v_l,\mathcal{G}_l)\to\min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)}E(\varphi,\mathbb{R}^+).$$

ここで,

$$v(x)=\begin{cases}\phi_{2\mu}(x) & (x\in[0,l-2])\\ \phi_{2\mu}(l-2)\{-x+(l-1)\} & (x\in[l-2,l-1])\\ 0 & (x\in[l-1,+\infty))\end{cases}$$

と定める. (図6)
これを用いて

$$V(x)=\begin{cases}v(x) & (x\in I_l)\\ 0 & (x\in\mathcal{G}_l/I_l)\end{cases}$$

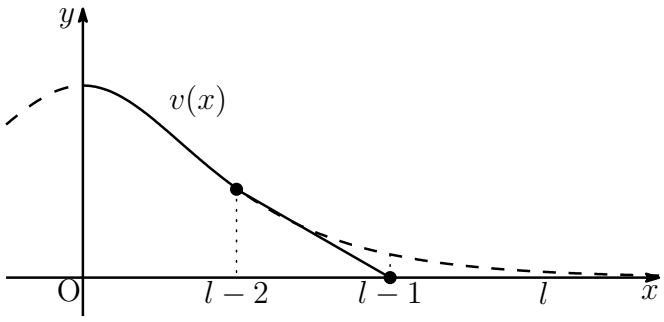


図 6: $v(x)$ のグラフ.

を定義する. これは $H^1(\mathcal{G}_l)$ の元である. 加えて

$$v_l(x) = \frac{\sqrt{\mu}}{\|V\|_{L^2(\mathcal{G}_l)}} V(x)$$

と定義すれば, $H^1_\mu(\mathcal{G}_l)$ の元となる. 関数 v の定義から

$$\|v\|^2_{L^2(I_l)} \le \mu, \quad \lim_{l\to\infty} \|v\|_{L^2(I_l)} = \sqrt{\mu}$$

であることが分かる. これより v_l の係数を σ とおくと, $l \to \infty$ としたとき $\sigma \to 1$. ここで v_l について以下の量を計算する.

$$\begin{aligned} \|v_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} &= \sigma^2 \|v'\|^2_{L^2(I_l)} \\ &= \sigma^2 \{\|\phi'_{2\mu}\|^2_{L^2([0,l-2])} + \phi^2_{2\mu}(l-2)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)} &= \sigma^p \{\|\phi_{2\mu}\|^p_{L^p([0,l-2])} + \int_{l-2}^{l-1} |-\phi_{2\mu}(l-2)x + \phi_{2\mu}(l-2)(l-1)|^p dx\} \\ &= \sigma^p \{\|\phi_{2\mu}\|^p_{L^p([0,l-2])} + \phi^p_{2\mu}(l-2) \int_{l-2}^{l-1} (x-(l-1))^p \, dx\} \\ &= \sigma^p \{\|\phi_{2\mu}\|^p_{L^p([0,l-2])} - \phi^p_{2\mu}(l-2) \ (-1)^{p+1}\}. \end{aligned}$$

これらの量の $l \to \infty$ を取ると,

$$\lim_{l\to\infty} \|v_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} = \|\phi'_{2\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \lim_{l\to\infty} \|v_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)} = \|\phi_{2\mu}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)}.$$

従って,

$$\begin{aligned} E(v_l, \mathcal{G}_l) &= \frac{1}{2}\sigma^2 \|v_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} - \frac{1}{p}\sigma^p \|v_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)} \\ &\to \frac{1}{2}\|\phi'_{2\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{p}\|\phi_{2\mu}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\|\phi'_{2\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\|\phi_{2\mu}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) \\ &= \frac{1}{2}E(\phi_{2\mu}, \mathbb{R}) = \min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi, \mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

また $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu)$ の定義より

$$\min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+) \le \mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) \le E(v_l,\mathcal{G}_l)$$

が成立する. 挟み撃ちの定理より $l\to\infty$ とすれば

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) \to \min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+).$$

□

次に以下の補題を示す.

補題 3.2. $a(l)=\psi_l(l)$, $m(l)=\|\phi_l\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ とする. このとき

$$\lim_{l\to\infty} a(l) = 0 \tag{18}$$
$$\lim_{l\to\infty} m(l) = 0 \tag{19}$$

が成立する.

証明 (18) を示す. $a(l)>0$ であることは**命題 3.1** より明らか. **定理 3.2** より, $\psi_l(x)$ について 2 乗された $L^2(I_l)$ ノルムを計算すると,

$$\begin{aligned}\mu &\ge \|\psi_l\|^2_{L^2([0,l])}\\ &\ge a^2(l)\int_0^l 1\,dx\\ &= a^2(l)\,l\end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\frac{\mu}{l} \ge a^2(l).$$

左辺を $l\to\infty$ とすれば 0 に収束することから, $a(l)\to 0$ が導かれる.
次に (19) を示す. mass が $m(l)$ であるソリトン解を $\varphi_{m(l)}$ とする. ([1] $Th4.2$) から $a(l)>\varphi_{m(l)}(0)>0$ を得る. $\varphi_{m(l)}$ の定義より

$$\varphi_{m(l)}(0) = m(l)^\alpha \varphi_1(0),\quad \alpha>0$$

を得る. $\varphi_1(0)$ が l に依存しない正の定数であることに注意すると, 挟み撃ちの定理より

$$\lim_{l\to\infty} m(l) = 0$$

が成立する. □

補題 3.3. $\mathcal{G}_l$ に依存しないある正の定数 M が存在し

$$\|u_l\|_{H^1(\mathcal{G}_l)} \leq M \tag{20}$$

が成立する.

証明 この証明は, $\mathcal{G}_l$ 上でのガリアード・ニーレンバーグ不等式の成立を考察することで完了する. これによって定数係数が, ペンダント部分の長さ l に依存していないことが確認できる.
以上の事実を用いて, $\|u_l\|_{H^1(\mathcal{G}_l)}$ の一様有界性を示す. 最小化子 $u_l \in H^1_\mu(\mathcal{G}_l)$ についてのエネルギー有界性が

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) \leq \min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R})} E(\varphi, \mathbb{R})$$

であることが示されていた. 便宜上, 上記の右辺を C_1 とおく. これより

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} \leq C_1 + \frac{1}{p}\|u_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{2}\|u_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} \leq C_1 + \frac{\mathcal{C}_p}{p}\|u_l\|^{\frac{p}{2}+1}_{L^2(\mathcal{G}_l)}\|u_l\|^{\frac{p}{2}-1}_{H^1(\mathcal{G}_l)} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{2}\|u_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} \leq C_1 + C_2\|u_l\|^{\frac{p}{2}-1}_{H^1(\mathcal{G}_l)} \end{aligned}$$

が得られる. この両辺に $\frac{1}{2}\|u_l\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)}$ を足すと

$$\frac{1}{2}\|u_l\|^2_{H^1(\mathcal{G}_l)} \leq \tilde{C_1} + \tilde{C_2}\|u_l\|^{\frac{p}{2}-1}_{H^1(\mathcal{G}_l)} \tag{21}$$

を得る. ここでヤングの不等式を用いる.

事実. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ は共役数とする. 以下の不等式が成立する.

$$ab \leq \frac{(\epsilon a)^{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}} + \frac{1}{\mathcal{Q}}(\frac{b}{\epsilon})^{\mathcal{Q}}, \quad {}^\forall\epsilon > 0.$$

始めにヤングの不等式を (21) の右辺の第 2 項に適用すると

$$\frac{1}{2}\|u_l\|^2_{H^1(\mathcal{G}_l)} \leq \tilde{C_1} + \frac{1}{\mathcal{P}}(\epsilon\|u_l\|^{\frac{p}{2}-1}_{H^1(\mathcal{G}_l)})^{\mathcal{P}} + \frac{1}{\mathcal{Q}}(\frac{\tilde{C_2}}{\epsilon})^{\mathcal{Q}}, \quad \frac{1}{\mathcal{P}} + \frac{1}{\mathcal{Q}} = 1$$

が成立する. $p \in (2, 6)$ より $(\frac{p}{2} - 1) < 2$ が成立する. $\mathcal{P}(\frac{p}{2} - 1) = 2$ となるように選ぶと,

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathcal{P}}\epsilon^{\mathcal{P}})\|u_l\|^2_{H^1(\mathcal{G}_l)} \leq \tilde{C_1}.$$

$\frac{1}{\mathcal{P}} = \frac{p-2}{4}$ は 1 未満であり, $\mathcal{P}$ ので ϵ を十分小さくとれば係数は 1 未満になる. したがって

$$0 \leq \|u_l\|_{H^1(\mathcal{G}_l)} \leq \frac{\tilde{C}_1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathcal{P}}\epsilon^{\mathcal{P}}} \tag{22}$$

となり, 上からの一様有界性が判明した. □

予備知識から, u_l が最小化子であるとき, オイラー・ラグランジュ方程式がグラフの各辺ごとで成立する. またある係数 λ_l をラグランジュ係数と呼ぶ. これについて以下の補題を示す.

補題 3.4. ラグランジュ係数 λ_l が上にも下にも一様有界である. つまり,

$$^{\exists}\delta_0, \delta_1 > 0 \ s.t. \ \delta_0 \leq \lambda_l \leq \delta_1$$

が成立する.

証明 下に一様有界であることから示す. オイラー・ラグランジュ方程式を $u_l \in H^1_\mu(\mathcal{G}_l)$ で適用したのち, u_l を両辺に掛け $\mathcal{G}_l$ 上で積分をすると

$$-\lambda_l \|u_l\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} = \|u_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} - \|u_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)}$$

を得る. また $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu)$ の定義から

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) = \frac{1}{2}\|u_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} - \frac{1}{p}\|u_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)}$$

である. これらから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_l \mu &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\|u_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)} - \mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) \\ &\geq -\min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R})} E(\varphi, \mathbb{R}) > 0 \end{aligned}$$

を得る. 最後の不等式は (10) より導かれる. 従って, $\delta_0 = -\frac{2}{\mu}\min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R})} E(\varphi, \mathbb{R})$ とすればよい. 次に上に一様有界であることを示す.(23) と $\mathcal{G}_l$ 上でのガリアード・ニーレンバーグ不等式から

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \frac{1}{\mu}\{\|u_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)} - \|u_l'\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)}\} \\ &\leq \frac{1}{\mu}\{\|u_l\|^p_{L^p(\mathcal{G}_l)}\} \\ &\leq \frac{\mathcal{C}_p}{\mu}\mu^{\frac{p}{4}+\frac{1}{2}}\|u_l'\|^{\frac{p}{2}-1} \\ &\leq \mathcal{C}_p \ \mu^{\frac{p}{4}-\frac{1}{2}}\|u_l\|^{\frac{p}{2}-1}_{H^1(\mathcal{G}_l)} \\ &\leq \mathcal{C}_p \ \mu^{\frac{p}{4}-\frac{1}{2}} M^{\frac{p}{2}-1} < \infty \end{aligned}$$

を得る. ここで M は l に依らない定数である. $\delta_1 = \mathcal{C}_p \ \mu^{\frac{p}{4}-\frac{1}{2}} M^{\frac{p}{2}-1}$ とすればよい. これより λ_l は上にも下にも一様有界であることが分かる. □

補題 3.5.

$$\lim_{l\to\infty} \|\phi_l\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \tag{23}$$
$$\lim_{l\to\infty} \|\phi_l'\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0. \tag{24}$$

証明 以下の計算により, (23) は明らかに成立する.

$$\begin{aligned}\|\phi_l\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\phi_l(x)|^{p-2}|\phi|^2 dx \\ &\leq (\max_{x\in\mathbb{R}} |\phi_l(x)|)^{p-2}\|\phi_l\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= (\phi_l(0))^{p-2} m(l) \to 0 \ \ (l\to\infty).\end{aligned}$$

次に (24) を示す. u_l が最小化子であるのでオイラー・ラグランジュ方程式より, あるラグランジュ係数 λ_l が存在し

$$-(\phi_l)'' - (\phi_l)^{p-1} + \lambda_l\phi_l = 0 \tag{25}$$

が成立する.(25) に ϕ_l' を掛けると

$$-\Big(\frac{\{\phi_l'\}^2}{2}\Big)' - \Big(\frac{\phi_l^p}{p}\Big)' + \lambda_l\Big(\frac{\phi_l^2}{2}\Big)' = 0 \tag{26}$$

を得る. これより上式の左辺について, 微分する前の式が任意の定数と恒等的に一致することが分かる. ここで以下の事実を示す.
Claim2:この任意定数が 0 である.
背理法で示す. この任意定数 M_l を $M_l \neq 0$ と仮定する. (26) を $\mathbb{R}$ 上で積分をすると

$$-\frac{1}{2}\|\phi_l'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{p}\|\phi_l\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \lambda_l\|\phi_l\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} M_l dx$$

を得る. 右辺が無限大となることに対して, 左辺は $\phi_l \in H^1(\mathbb{R})$ であったことと, ラグランジュ係数 λ_l は上下で一様有界であったことから有限の値になる. これは矛盾である. 以上で, $M_l \equiv 0$ であることが判明した. これを踏まえると

$$-\frac{1}{2}\|\phi_l'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{p}\|\phi_l\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \lambda_l\|\phi_l\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

が成立する. 上式全体を $l\to\infty$ とすると, λ_l の一様有界性と, (23), (19) から結論を得る. □
(19), (24) と $H^1(\mathbb{R})$ ノルムの定義から (7) が明らかに導かれる.
(22) から $\|\psi_l\|_{H^1(I_l)}$ も一様有界である. つまり

$$\int_0^l |\psi_l(x)|^2 dx + \int_0^l |\psi_l'(x)|^2 dx \leq M$$

が成り立つ.
ここで任意の $L>0$ を固定する. $l>L$ を満たす任意の l に対して

$$\|\psi_l\|_{H^1([0,L])} \leq M$$

であることに注意すると,$\{\psi_l\}$ の部分列 $\{\psi_{l_j}\}$ と $\psi_*^L \in H^1([0,L])$ が存在し,

$$\psi_{l_j} \rightharpoonup \psi_*^L \ \ in\ H^1([0,L]),\ \ {}^\forall L>0$$

が成立する. ここでカントールの対角線論法により $\{\psi_{l_j}\}$ の部分列と $\psi_* \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ が存在し,

$$\psi_{l_j} \rightharpoonup \psi_* \ \ in\ H^1([0,L]),\ \ {}^\forall L>0 \tag{27}$$

が導かれる. $[0,L]$ がコンパクト集合であることに注意すると,

$$\psi_{l_j} \to \psi_* \ \ in\ L^\infty([0,L]),\ \ {}^\forall L>0,\ \ (j\to\infty) \tag{28}$$

が分かる. 以上を踏まえると, $\psi_* \in H^1(\mathbb{R}^+)$ が分かる. 実際, ノルムの弱下半連続性によって

$$\|\psi_*\|^2_{H^1([0,L])} \leq \varliminf_{l\to\infty} \|\psi_l\|^2_{H^1([0,L])} \leq M$$

が判明する. $f(x)=\chi_{x\in[0,L]}(x)\psi_*(x)$ とすると,

$$\lim_{L\to\infty} f(x)=\psi_*(x),\ \ |f(x)|\leq|\psi_*|,\ \ {}^\forall x\in\mathbb{R}^+$$

であることよりルベーグの単調収束定理を用いれば

$$\|\psi_*\|^2_{H^1(\mathbb{R}^+)} \leq M$$

を得られるからである. ここで以下の事実を示す.
Claim3: $\mathbb{R}^+$ 上で $\psi_* \not\equiv 0$.
今までで,

$$-\frac{2}{\mu}\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\mu) \leq \lambda_l \leq \mathcal{C}_p\, \mu^{\frac{p}{4}-\frac{1}{2}} M^{\frac{p}{2}-1}$$

が判明していた. ここで $\psi_l(x)$ は $x\in[0,l]$ において $\psi_l'(x)<0$ である. またノイマン境界条件から, $\psi_l'(0)=0$ を得る. これらから

$$\{\psi_l'(x)\}'|_{x=0} = \lim_{h\to0}\frac{\psi_l'(h)-\psi_l'(0)}{h} \leq 0$$

を得る. ψ_l についてのオイラー・ラグランジュ方程式より

$$\psi_l''(0) = \psi_l(0)\{\lambda_l - \psi_l^{p-2}(0)\}$$

である. $\psi_l(0) > 0$ に注意すれば, $\lambda_l \leq \psi_l^{p-2}(0)$ を得る. これにより

$$\psi_l(0) \geq \{-\frac{2}{\mu}\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\mu)\}^{\frac{1}{p-2}}$$

となる. ここで $l \to \infty$ とすれば,

$$\psi_*(0) \geq \{-\frac{2}{\mu}\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\mu)\}^{\frac{1}{p-2}}$$

を得る. また $\psi_l'(x) < 0,\ x \in [0, L]$ であったことから,

$$x_1,\ x_2 \in [0, L]\ \ with\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow \psi_l(x_1) \geq \psi_l(x_2)$$

が成立する. (28) と予備知識により

$$x_1,\ x_2 \in [0, L]\ \ with\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow \psi_*(x_1) \geq \psi_*(x_2)$$

となることから, ψ_* は $[0, L]$ 上で単調減少性をもつ. 以上で $\psi_* \not\equiv 0$ が示された.
次に

$$\|\psi_*\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \mu \tag{29}$$

であることを示す. 以下の主張を証明する.
Claim4:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty |\psi_*'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^\infty |\psi_*(x)|^p dx \leq \min_{\varphi \in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi, \mathbb{R}^+).$$

ψ_* は $H^1(\mathbb{R}^+)$ の元であったので $\psi_*(x) \to 0,\ (x \to \infty)$ が成立する. つまり任意の $l > 0$ に対して,

$$^\forall\tau > 0, {}^\exists R_1 \in [0, l]\ s.t.\ \psi_*(R_1) < \tau$$

が言える. 加えて

$$\|\psi_*'\|^2_{L^2([R_2, +\infty))} < \tau \tag{30}$$

なる $R_2 \in [0, l]$ が取れる. $\tilde{R} = \max(R_1, R_2)$ と定義する. また (28) より

$$\|\psi_l - \psi_*\|_{L^\infty([0,\tilde{R}])} \to 0,\ \ (l \to \infty) \tag{31}$$

が成立する. これを用いれば, $|\psi_l(\tilde{R}) - \psi_*(\tilde{R})| < \tau$ が導かれる. 三角不等式より,

$$|\psi_l(\tilde{R})| \leq 2\tau$$

を得る. ψ_l は単調減少なので

$$\psi_l(x) \leq \psi_l(\tilde{R}) \leq 2\tau \quad (x \geq \tilde{R}) \tag{32}$$

が成立する. ここで ψ_l に対してノルムの弱下半連続性と (31) を用いると,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_*'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_*(x)|^p dx \leq \varliminf_{l\to\infty} \{\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_l'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_l(x)|^p dx\}$$

を得る. ここで右辺の中身について

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_l'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_l(x)|^p dx &= \frac{1}{2}\int_0^{l} |\psi_l'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^{l} |\psi_l(x)|^p dx \\
&- \{\frac{1}{2}\int_{\tilde{R}}^{l} |\psi_l'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\tilde{R}}^{l} |\psi_l(x)|^p dx\} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{l} |\psi_l'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^{l} |\psi_l(x)|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\tilde{R}}^{l} |\psi_l(x)|^p dx
\end{aligned}$$

を得る. また, (32) から

$$\begin{aligned}
\|\psi_l\|^p_{L^p([\tilde{R},l])} &= \int_{\tilde{R}}^{l} |\psi_l(x)|^p dx \\
&\leq \|\psi_l\|^{p-2}_{L^\infty([\tilde{R},l])} \|\psi_l\|^2_{L^2([\tilde{R},l])} \\
&\leq (2\tau)^{p-2}\mu
\end{aligned}$$

が成立する.
ここで**補題 3.2** と**補題 3.5** より

$$\lim_{l\to\infty} E(\phi_l, \mathbb{R}) = 0$$

であることが導かれる. 上記と**補題 3.1** から実は,

$$\lim_{l\to\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_l}(\mu) = \lim_{l\to\infty} E(\psi_l, [0,l]) = \min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi, \mathbb{R}^+)$$

であることが判明する. このことから,

$$\begin{aligned}
\varliminf_{l\to\infty} \{\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_l'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^{\tilde{R}} |\psi_l(x)|^p dx\} &\leq \varliminf_{l\to\infty} \{\frac{1}{2}\int_0^{l} |\psi_l'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_0^{l} |\psi_l(x)|^p dx\} \\
&+ \frac{1}{p}(2\tau)^{p-2}\mu \\
&\leq \min_{\varphi\in H^1_\mu(\mathbb{R}^+)} E(\varphi, \mathbb{R}^+) + \frac{1}{p}(2\tau)^{p-2}\mu
\end{aligned}$$

を得る. 加えて (30) から

$$\frac{1}{2}\int_{\tilde{R}}^{\infty} |\psi_*'(x)|^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\tilde{R}}^{\infty} |\psi_*(x)|^p dx \leq \tau$$

としてよい. これから,

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty |\psi_*'(x)|^2dx - \frac{1}{p}\int_0^\infty |\psi_*(x)|^p dx \leq \min_{\varphi\in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+) + \frac{1}{p}(2\tau)^{p-2}\mu + \tau$$

を得る. 今, $\tau > 0$ は任意であったので, $\tau \to 0$ とすれば

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty |\psi_*'(x)|^2dx - \frac{1}{p}\int_0^\infty |\psi_*(x)|^p dx \leq \min_{\varphi\in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+).$$

□

(29) の証明に戻る. 背理法を用いて証明する. $\|\psi_*\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} < \mu$ と仮定すると, $\|\sigma\psi_*\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \mu$ なる $\sigma > 1$ が存在する. このとき $\sigma\psi_* \in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)$ であるので,

$$\min_{u\in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)} E(u,\mathbb{R}^+) \leq E(\sigma\psi_*,\mathbb{R}^+)$$

が成立する. 右辺に関して $\sigma^p > \sigma^2$ であることと, **Claim4** を用いると

$$\begin{aligned} E(\sigma\psi_*,\mathbb{R}^+) = \frac{1}{2}\sigma^2\|\psi_*'\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{p}\sigma^p\|\psi_*\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} &\leq \sigma^2 E(\psi_*,\mathbb{R}^+) \\ &\leq \sigma^2 \min_{\varphi\in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+) \\ &< \min_{\varphi\in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

が成立する. 最後の不等式は $\mathbb{R}^+$ 上での最小エネルギーが真に負であることを用いた. これは矛盾である. これで (29) の証明が完了する.
一方, $\psi_* \in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)$ であるので

$$\min_{\varphi\in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+) \leq \frac{1}{2}\int_0^\infty |\psi_*'(x)|^2dx - \frac{1}{p}\int_0^\infty |\psi_*(x)|^p dx$$

が成り立つ. 以上で

$$\min_{\varphi\in H_\mu^1(\mathbb{R}^+)} E(\varphi,\mathbb{R}^+) = \frac{1}{2}\int_0^\infty |\psi_*'(x)|^2dx - \frac{1}{p}\int_0^\infty |\psi_*(x)|^p dx$$

となる.
以上より, ψ_* が $\mathbb{R}^+$ 上での最小化子となったことが判明した. 以上で主定理 1 の証明を終える. □

4　主定理２の証明

主結果の証明のため, 以下の定理を紹介する.

定理 4.1. ([6],Th3.1) 任意の非コンパクトグラフを $\mathcal{G}$, $\mu > 0$ とする. このとき

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}}(\mu) \leq 0 \tag{33}$$

が成立する. また

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}}(\mu) < 0 \tag{34}$$

が成立するとき, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}}(\mu)$ を達成する $H^1_\mu(\mathcal{G})$ の元が存在する.

定理 4.2. ([6],Th3.4) 任意の非コンパクトグラフを $\mathcal{G}$, $\mu > 0$, $p \in [4, 6)$ とする. このとき正の定数 L_1, L_2 で $L_2 < L_1$ を満たすものが存在して

$$meas(\mathcal{K}) > L_1 \quad \Rightarrow \quad \text{最小化子は存在する.}$$

$$meas(\mathcal{K}) < L_2 \quad \Rightarrow \quad \text{最小化子は存在しない.}$$

上記の定理によって, 以下の補題が示される.

補題 4.1. $l^* = \inf\{l > 0 \mid \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu) < 0\}$ とするとき, $0 < l^* < \infty$

加えて以下の定理を紹介する.

定理 4.3. ([6],Prop4.3) $m > 0,\ a > 0$ とする.$f(x) = ae^{-\frac{a^2|x|}{m}}$ とおくと,

$$\frac{1}{2}\|f'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \min_{v \in H^1_{m,a}(\mathbb{R})} \tilde{E}(v, \mathbb{R})$$

が成立する. $H^1_{m,a}(\mathbb{R})$ とは

$$H^1_{m,a}(\mathbb{R}) = \{v \in H^1_m(\mathbb{R}) | v(0) = a\}.$$

ここで $\|u_l\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = m$, $u_l(0) = a$ とおく. u_l が $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu)$ に対する最小化子であるとき $a > 0,\ m > 0$ であるので

$$u_l(x)|_{x \in \mathbb{R}} = f(x)$$

としてよいことが判明している. したがって

$$\begin{aligned} \tilde{E}(u_l, \mathcal{G}_l) &= \frac{1}{2}\|u_l'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\|u_l'\|^2_{L^2([0,l])} - \frac{1}{p}\|u_l\|^p_{L^p([0,l])} \\ &= \frac{1}{2}\|f'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\|u_l'\|^2_{L^2([0,l])} - \frac{1}{p}\|u_l\|^p_{L^p([0,l])} \end{aligned}$$

が成立する. またこの関数について以下の性質を持つ. $\delta \neq 0$ を正の実数とする.

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2([0,\delta])} &= a^2 \int_0^{\delta} e^{-\frac{2a^2}{m}x} dx \\
&= a^2 \, \frac{m}{2a^2} \int_{-\frac{2a^2\delta}{m}}^{0} e^z dz \quad \left(z = -\frac{2a^2}{m}x \text{ と変換}\right) \\
&= \frac{m}{2}(1 - e^{-\frac{2a^2}{m}\delta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f'\|^2_{L^2([-\delta,\delta])} &= 2a^2 \int_0^{\delta} \Big| -\frac{a^2}{m} e^{-\frac{a^2}{m}x} \Big|^2 dx \\
&= \frac{2a^6}{m^2} \int_0^{\delta} \left| e^{-\frac{a^2}{m}x} \right|^2 dx \\
&= \frac{2a^6}{m^2} \, \frac{m}{a^2} \int_{-\frac{a^2\delta}{m}}^{0} \left| e^z \right|^2 dz \quad \left(z = -\frac{a^2}{m}x \text{ と変換}\right) \\
&= \frac{a^4}{m}(1 - e^{-\frac{2a^2\delta}{m}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p([-\delta,\delta])} &= 2a^p \int_0^{\delta} \left| e^{-\frac{a^2}{m}x} \right|^p dx \\
&= 2a^p \, \frac{m}{pa^2} \int_{-\frac{pa^2\delta}{m}}^{0} e^z dz \quad \left(z = -\frac{pa^2}{m}x \text{ と変換}\right) \\
&= \frac{2m}{p} a^{p-2}(1 - e^{-\frac{pa^2}{m}\delta}).
\end{aligned}$$

次に u_l の $[0, l]$ 上での形状を考察する.

補題 4.2. $\mathcal{G}_l$ 上での最小化子 u_l を

$$u_l(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ \psi_l(x) & (x \in [0, l]) \end{cases} \tag{35}$$

と表記する. このとき

- ペンダント部分での最大値は $x = l$ で達成し, 最小値は $x = 0$ でのみ達成する.

証明 ペンダント部分での形状について形状

$$\psi_l(y) = \min_{x \in [0,l]} \psi_l(x) < a$$

なる $y \in (0, l)$ が存在していると仮定する.

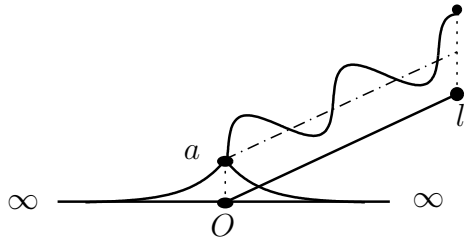


図 7: 仮定で考察している最小化子の形状.

この ψ_l に対して単調増加 Rearrengement を行う. その関数を ψ_{l_*} と表記する. この操作によって $H^1(\mathcal{G})$ 関数がもつ $x=0$ での連続性が満たされなくなるので, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を用いた

$$\tilde{f}(x) = \frac{\psi_l(y)}{a} f(x)$$

という関数に置き換える. この係数は 1 未満であることに注意する. 以上より

$$\tilde{u_l}(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ \psi_{l_*}(x) & (x \in [0,l]) \end{cases}$$

と定義すると, mass については

$$\|\tilde{u_l}\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} < \|u_l\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} = \mu$$

となり,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u_l}'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\tilde{f}'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= |\frac{\psi_l(y)}{a}|^2 \|f'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &< \|f'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_l'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

となる. これにより,

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\tilde{u_l}, \mathcal{G}_l) &= \frac{1}{2}\|\tilde{u_l}'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\|\tilde{u_l}'\|^2_{L^2([0,l])} - \frac{1}{p}\|\tilde{u_l}\|^p_{L^p(([0,l])} \\ &< \tilde{E}(u_l, \mathcal{G}_l) \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu) < 0 \end{aligned}$$

を得る. ここで定数 θ に対して, $U(x) = \theta \tilde{u_l}(x)$ と定める. これについて $\|U\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} = \mu$ なる $\theta > 1$ が存在する. 以上より

$$\begin{aligned} \tilde{E}(U, \mathcal{G}_l) &= \frac{\theta^2}{2}\|\tilde{u_l}'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{\theta^2}{2}\|\tilde{u_l}'\|^2_{L^2([0,l])} - \frac{\theta^p}{p}\|\tilde{u_l}\|^p_{L^p(([0,l])} \\ &< \theta^2 \tilde{E}(\tilde{u_l}, \mathcal{G}_l) \\ &< \tilde{E}(\tilde{u_l}, \mathcal{G}_l) < \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu) \end{aligned}$$

となり矛盾. これによりペンダント部分の形状についての主張を得る. □

補題 4.3. $0 < l' < l$ とする. このとき $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_{l'}}(\mu) < 0$ が成立するとき, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu) < 0$ となる. また, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_{l'}}(\mu) = 0$ であっても, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_{l'}}(\mu) = 0$ となるような最小化子が存在すれば, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu) < 0$ が成立する.

証明 [2] の手順を参考にする. $u_{l'}$ を $\mathcal{G}_{l'}$ の最小化子とし, $\phi_{l'}(x) = f(x)$, $a = u_{l'}(0)$ とする. $\mathcal{G}_{l'}$ が持つ 2 つの半直線上で区間 $[0, (l-l')/2]$ を切り取る. これらを貼り合わせることで $[0, l-l']$ という区間を構成する. これをペンダント部分に貼り合わせて, ペンダントの長さを l にし, $\mathcal{G}_l$ を構成する操作を行う. $[0, l-l']$ 上の関数として

$$v(x) = ae^{-\frac{a^2}{m}(\delta - \frac{x}{2})}, \quad \delta = \frac{l-l'}{2}, \quad x \in [0, 2\delta] \tag{36}$$

を構成すると, $v \in H^1([0, 2\delta])$ が成立する. 実際, $v(0) = f(\delta),\ v(2\delta) = f(0)$ であることより明らか. またこの関数は以下の性質を持つ.

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^2([0,2\delta])} &= a^2 \int_0^{2\delta} \left|e^{-\frac{a^2}{m}(\delta - \frac{x}{2})}\right|^2 dx \\
&= a^2\, \frac{m}{a^2} \int_{-\frac{2a^2\delta}{m}}^{0} e^z dz \quad \left(z = -\frac{2a^2}{m}(\delta - \frac{x}{2}) \text{ と変換}\right) \\
&= m(1 - e^{-\frac{2a^2}{m}\delta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v'\|^2_{L^2([0,2\delta])} &= a^2 \int_0^{2\delta} \left|(e^{-\frac{a^2}{m}(\delta - \frac{x}{2})})'\right|^2 dx \\
&= \frac{a^6}{4m^2} \int_0^{2\delta} \left|e^{-\frac{a^2}{m}(2\delta - x)}\right| dx \\
&= \frac{a^6}{4m^2}\, \frac{m}{a^2} \int_{-\frac{2a^2\delta}{m}}^{0} \left|e^z\right| dz \quad \left(z = -\frac{a^2}{m}(2\delta - x) \text{ と変換}\right) \\
&= \frac{a^4}{4m}(1 - e^{-\frac{2a^2}{m}\delta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{L^p([0,2\delta])} &= a^p \int_0^{2\delta} \left|e^{-\frac{a^2}{m}(\delta - \frac{x}{2})}\right|^p dx \\
&= a^{p-2}\, \frac{2m}{p} \int_{-\frac{pa^2\delta}{m}}^{0} e^z dz \quad \left(z = -\frac{pa^2}{m}(\delta - \frac{x}{2}) \text{ と変換}\right) \\
&= \frac{2m}{p} a^{p-2}(1 - e^{-\frac{pa^2}{m}\delta}).
\end{aligned}$$

したがって

$$\|v\|^2_{L^2([0,2\delta])} = 2\|f\|^2_{L^2([0,\delta])}, \quad \|v'\|^2_{L^2([0,2\delta])} < \|f'\|^2_{L^2([-\delta,\delta])}, \quad \|v\|^p_{L^p([0,2\delta])} = \|f\|^p_{L^p([-\delta,\delta])}$$

という関係式が成立する. ここで

$$U(x) = \begin{cases} f(x-\delta) & (x \in (-\infty, 0]) \\ f(x+\delta) & (x \in [0, +\infty)) \\ v(x) & (x \in [0, 2\delta]) \\ \psi_{l'}(x+l'-l) & (x \in [l-l', l]) \end{cases}$$

とおく. この関数は $H^1(\mathcal{G}_l)$ である. mass については

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{L^2(\mathcal{G}_l)} &= 2\|f\|^2_{L^2([\delta,+\infty))} + \|v\|^2_{L^2([0,l-l'])} + \|\psi_{l'}\|^2_{L^2([0,l'])} \\ &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_{l'}\|^2_{L^2([0,l'])} \\ &= \|u_{l'}\|^2_{L^2(\mathcal{G}_{l'})} = \mu \end{aligned}$$

が成立することより, $U \in H^1_\mu(\mathcal{G}_l)$ が言える. またこの関数についてエネルギーを考察すると,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu) &\leq \tilde{E}(U, \mathcal{G}_l) \\ &= \frac{1}{2}\big(\|f'\|^2_{L^2([\delta,+\infty))} + \|v'\|^2_{L^2([0,2\delta])} + \|\psi'_{l'}\|^2_{L^2([0,l'])}\big) - \frac{1}{p}\|U\|^p_{L^p([0,l])} \\ &< \tilde{E}(u_{l'}, \mathcal{G}_{l'}) \leq 0 \end{aligned}$$

となる. これで証明が終了する. □

主定理 2 の証明 **補題 4.1** で定義した l^* と **補題 4.3** を用いることで示される. l^* の定義より $l > l^*$ なる任意の $l > 0$ では最小化子が存在することになる.
$l' < l^*$ を満たすある $l' > 0$ で最小化子が存在すると仮定する.
まず, l^* から

$$^\forall l < l^*,\ \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_l}(\mu) = 0 \tag{37}$$

が導かれる. **補題 4.3** から, 今 $l' < l^*$ では最小化子を持ち, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_{l'}}(\mu) = 0$ であるので $l' < \tilde{l} < l^*$ なる任意の $\tilde{l}$ では $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_{\tilde{l}}}(\mu) < 0$ が成立することになる. これは (37) に矛盾する.
従って, 主定理 2 の 2 番目の主張を得た. □

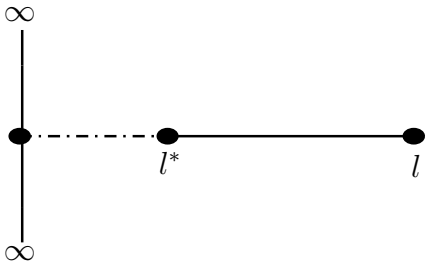


図 8: 破線部分は最小化子を持たず, l^* より先では最小化子を持つことになる.

5 謝辞

本論文の執筆にあたり, 担当教授である倉田 和浩先生には様々な助言・指導を頂くだけに留まらず, 数学を学ぶ楽しさと難しさを教えて頂きました. 私が大学院から専攻分野を変えたにも関わらず, 熱心な指導を絶え間なく施していただいたことにも心より感謝しています. 本当にありがとうございました.
また, 多忙極まる中でも, 本論文の副査教授を務めて頂きました高桑先生, 吉冨先生に感謝の意を表したいと思います. 重ねて本当にありがとうございました.

参考文献

[1] R.Adami, E.Serra, P.Tilli, NLS ground states on graphs. Calc. Var. Partial Differential Equations 54 (2015), no. 1, 743-761.

[2] R.Adami ,Ground states for NLS on graphs: a subtle interplay of metric and topology. Math. Model. Nat. Phenom. 11 (2016), no. 2, 20-35.

[3] R.Adami, E.Serra, P.Tilli, Threshold phenomena and existence results for NLS ground states on Metric Graphs. J. Funct. Anal. 271 (2016), no. 1, 201-223.

[4] G.Berkolaiko, P.Kuchment, Intoroduction to Quantumn Graphs, Mathemate-cal Surveys and Monographs, vol.186, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[5] H.Brezis, Functional Analysis, Sobolev Space amd Partial Differential Equations, Springer Verlag, 2011.

[6] T.Lorenzo ,NLS ground states on Metric Graphs with localized nonlinearities. J. Math. Anal. Appl. 433 (2016), no. 1, 291-304.

[7] 増田久弥, 数学シリーズ 関数解析, 裳華房,2004 第 11 版.